Математика

БРОЙ 6
2019 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Стартира абонаментната кампания на списание „Математика“ за 2020 година. И през следващата година списанието ще се стреми да запази своята актуалност, събирайки на страниците си всичко в областта на училищната математика, което представлява съществен интерес за ученици, преподаватели, родители и любители.

Списанието се фокусира върху:

- подготовката на учениците от 4.–12. клас за участие в математически състезания;
- подготовката на учениците от 4. клас за приемни изпити;
- подготовката на учениците от 7. и 10. клас за Национално външно оценяване;
- подготовката на учениците от 12. клас за матура и кандидат-студентски изпити.

Списанието публикува информация (задачи, решения, победители) за национални и международни математически състезания.

Цената на годишния абонамент е 30,00 лв. Възможни са следните отстъпки при групов абонамент:

- За 15 абонамента цената е $15 \times 24 = 360$ лв.
- За $15+N$ абонамента цената е $360+N\times 20$ лв., т.е. за всеки абонамент над 15-ия плащате по 20 лв.
- Извън горните бройки можете да абонирате членове на Съюза на математиците в България на цена 21 лв. за абонамент. При използване на тази опция молим да ни пращате списък с имената на съответните абонати и секцията на СМБ, в която членуват.

Събраната сума за абонамента можете да преведете на:
ТБ Алианц България АД, София,
IBAN BG36BUIN95611000003610
BICBUINBGSF – „Списание Математика“ ЕООД.
Молим на вносната бележка да е ясно записано колко бройки и на какъв адрес (добавете и телефон) да се изпраща списанието.

Срокът за груповите абонаменти е 16 януари 2020 г.

13. ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

Петър Бойваленков, Станислав Харизанов,
Институт по математика и информатика – БАН

На 9–11.11.2019 г. в София и Плевен се проведе тринадесетото издание на Есенния математически турнир (ЕМТ). Както досега, турнирът беше организиран със съдействието на Американска Фондация за България (АФБ), Фондация *Георги Чиликов* и секция БАН–СУ на СМБ. Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Европейската олимпиада за момичета и Всерусийската олимпиада.

Турнирът за учениците от 8. – 12. клас се проведе в София в сградата на Ректората на СУ „Св. Климент Охридски“. Домакин на състезанието за учениците от 5. – 7. клас бе МГ „Гео Милев“, Плевен.

Имената на наградените ще намерите в края на тази статия. Предлагаме Ви условията и решенията на задачите от 13. ЕМТ.

Условия на задачите

Задача 5.1. Числото A е сумата от последните четири цифри на стойността на израза

$$9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{2019},$$

а числото B е равно на сбора на числата в таблицата

1990	1991	1992	$\cdots$	2018	2019
1991	1992	1993	$\cdots$	2019	2020
1992	1993	1994	$\cdots$	2020	2021
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2018	2019	2020	$\cdots$	2046	2047
2019	2020	2021	$\cdots$	2047	2048

Ако C е сборът на цифрите на числото B, да се сравнят числата A и C.

Задача 5.2. Да се реши ребусът

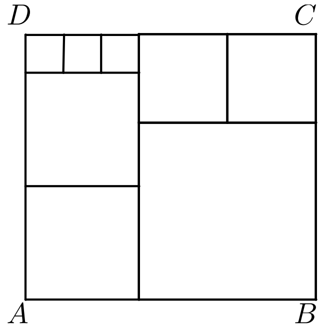
КОЛЕВ + КОЛЕВ + КОЛЕВ = ПЛЕВЕН.

На различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви отговарят еднакви цифри.

Задача 5.3. Правоъгълникът $ABCD$ на чертежа е съставен от осем квадрата. Страната на всеки квадрат се измерва с точен брой сантиметри. Лицето на правоъгълника $ABCD$ е равно на 7728 кв.см.

а) Да се намери обиколката на правоъгълника $ABCD$.

б) Един от осемте квадрата, от които е съставен правоъгълникът $ABCD$, е изрязан и останалата фигура има обиколка 424 см. Да се намери лицето на тази фигура.



Задача 5.4. Иван и Стоян се разбрали да продават шапки и тениски за ЕМТ. Когато сутринта Стоян пристигнал със закъснение, Иван му се похвалил, че вече направил една продажба на стойност 49 лв и втора на стойност 71 лв. Стоян се замислил и казал, че това е невъзможно. Двамата седнали да смятат и установили, че няма комбинация от тениски и шапки (не непременно от двата артикула) на стойност 49 лв, както и няма комбинация на стойност 71 лв. Оказало се обаче, че има комбинация от поне два артикула (не непременно различни) с цена 23 лв. Намерете цената на една шапка и цената на една тениска, ако знаете, че шапката е по-евтина от тениската. (Цените на артикулите са цели числа в левове).

Задача 6.1. Дадени са правоъгълници с размери $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$, по един от всеки вид, където k е естествено число. Възможно ли е от дадените правоъгълници (като се използват всичките), да се съставят два правоъгълника с равни лица, ако:

а) $k = 7$; б) $k = 8$; в) $k = 9$?

Задача 6.2. Даден е правоъгълен паралелепипед. Известо е, че ако едно от измеренията му се увеличи с 2 см, обемът му се увеличава с 8 см^3, ако друго се увеличи с 3 см, обемът му се увеличава с 36 см^3, и ако третото се увеличи с 4 см, обемът се увеличава с 12 см^3.

а) Да се намерят обемът и пълната повърхнина на паралелепипеда.

б) Ако измеренията на паралелепипеда са естествени числа и в него е налята вода с обем 3 см^3, с колко ще се покачи нивото на водата, ако на дъното на паралелепипеда се постави метално кубче с ръб 1 см?

Задача 6.3. Естествените числа $1, 2, \dots, 2019$ са оцветени в синьо или зелено по следното правило: ако съществуват естествени числа a и b, за които $a^3 - b! = x$, то x се оцветява в синьо. В противен случай x се оцветява в зелено. Кои числа са повече – сините или зелените?

Забележка. С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n; например $4! = 1.2.3.4 = 24$ и $5! = 1.2.3.4.5 = 120$.

Задача 6.4. От 10 ученици двама са без домашно по математика. За една минута учителят може да избере произволни четирима и да разбере дали между тях има ученик без домашно. Най-малко за колко минути със сигурност учителят може да разбере кои двама са без домашно?

Задача 7.1. а) Да се намери нормалният вид на изразите:

$$A = \frac{4^4.50}{2^2.20^3}x + (0,6x+1)^2 + (0,8x-1)^2 \text{ и } B = (3x+1)^2 + (2+3x)(2-3x).$$

б) Да се докаже, че за всяка стойност на x стойността на $A+B$ е по-голяма или равна на -2.

Задача 7.2. Даден е триъгълник ABC. Точка M от страната AC е такава, че $MC = 2.AM$, а точка N от страната BC е такава, че $NC = 3.NB$. Точката P е средата на MN.

а) Да се намери отношението на лицата на триъгълниците AMP и BNP.

б) Ако лицето на триъгълника ABP е равно на 1001, да се намери лицето на триъгълника ABC.

Задача 7.3. Да се намери броят на естествените числа n с точно 2019 различни естествени делители

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \cdots < d_{2018} < d_{2019} = n,$$

ако е известно, че $d_{2018}.d_4 = 5n$.

Задача 7.4. В група от 2019 човека всеки е приятел с поне 673 от останалите. Да се докаже, че е възможно да разпределим хората в няколко стаи така, че едновременно да имаме:

(1) във всяка стая има поне двама души,

(2) за всяка стая, в която има двама души, те са приятели,

(3) за всяка стая, в която има повече от двама души, най-много двама от хората в стаята не са приятели?

Остава ли вярно твърдението, ако 673 се замени с 672?

Забележка. Приятелството е взаимно, т.е. ако A е приятел с B, то и B е приятел с A.

Задача 8.1. Да се намерят всички цели стойности на x, за които стойността на израза

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

е просто число.

Задача 8.2. Даден е триъгълник ABC. В полуравнината с контур правата BC, несъдържаща точка A, е взета точка P, така че $CP \perp BC$ и $CP = BC$, а в полуравнината с контур правата AC, несъдържаща точка B, е взета точка Q, така че $CQ \perp AC$ и $CQ = AC$. Точка F от отсечката AP е такава, че $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$.

а) Да се докаже, че CF разполовява страната AB.

б) Нека AP пресича BC в точка N. Ако $CN : BN = 1 : 2$, да се намери отношението $AF : FN$.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа p и n, такива че p е просто и

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n).$$

Задача 8.4. На дъска е записано по един път всяко трицифрено число, имащо сбор на цифрите 12. При първия ход се изтриват всички числа, които съдържат една или повече от цифрите 0, 8 и 9. При всеки следващ ход се изтриват по три числа, такива че цифрите на една от позициите им съвпадат, а във всяка от останалите две позиции се различават с 1 или с 2. Ако накрая на дъската останало само едно число, то кое може да е то?

Задача 9.1. При кои стойности на параметъра m, уравнението

$$(x^2 - x - 6)(x^2 - 7x + 6) = m^2 - 15m$$

има два различни положителни и два различни отрицателни корена?

Задача 9.2. Даден е триъгълник ABC, в който медианите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка G. Ако вписаната в триъгълник ABC окръжност и вписаната в триъгълник AGB окръжност се допират до страната AB в една и съща точка, да се докаже, че триъгълник ABC е равнобедрен.

Задача 9.3. На дъска първоначално е записано числото r^n, където $r > 0$ е рационално число, а $n > 1$ е естествено число. Всяка минута Иван избира две (не непременно различни) числа a и b, записани на дъската, и дописва числата $\dfrac{a+b}{2}$ и $\dfrac{a}{b}$. Да се намерят всички стойности на n, за които съществува r, така че е възможно в даден момент върху дъската да се появи числото 17.

Задача 9.4. В равнината са дадени окръжност ω с център точката O с координати $(0,0)$ и радиус $R = 1$, и точката A с координати $(1,1)$. Да се намерят всички точки B, за които съществуват (не непременно две по две различни) точки $P_1, P_2, \ldots, P_{2018}$, такива че всяка от средите на 2019-те отсечки AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... , $P_{2017}P_{2018}$ и $P_{2018}B$ лежи върху ω.

Задача 10.1. Дадени са квадратните функции

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + bx + a$$

с реални параметри a и b. Известно е, че уравнението $f(x)g(x) = 0$ има четири различни реални корена и тяхното произведение е 10. Ако графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се пресичат в единствена точка A и тя е на разстояние $\sqrt{65}$ от началото на координатната система, да се намерят a и b.

Задача 10.2. Точките P, Q и R съответно от страните BC, CA и AB на триъгълник ABC са такива, че правите AP, BQ и CR се пресичат в точка S. Ако

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \text{ и } \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{|CA|^4}{|BC|^4},$$

да се докаже, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност.

Задача 10.3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \text{ за } n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p | x_{p-1}$.

Задача 10.4. В едно училище, в школата за десети клас по математика участват 22-ама десетокласници. Някои от тях са *приятели* в новата социална платформа Графнет, а други – не.

Известно е, че ръководителят на школата не може да даде за домашно 10 различни задачи, по една на всеки ученик, така че всеки двама *приятели* в Графнет да получат различна задача.

Да се намери възможно най-големият брой групи от десетокласници, никои двама от които не са приятели в Графнет, за които това може да се случи.

Задача 11.1. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\sphericalangle ACB = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$ и $BM = m$, където M е средата на AC.

а) Ако $\alpha = \sphericalangle BAC$, да се изрази m като функция на $\operatorname{cotg}\alpha$.

б) Да се намерят всички стойности на m, за които $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен.

Задача 11.2. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{ccccc} \sqrt{x} & + & y & = & 3 \\ \sqrt{y} & + & z & = & 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{z} & + & x & = & \sqrt{2} \end{array} \right. .$$

Задача 11.3. Виж задача 10.3.

Задача 11.4. Нека p е просто число. Разглеждаме множествата

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{и първата различна от 0 координата на } x \text{ е } 1\} \text{ и}$$

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{p, p+1, \dots, 2p-1\}, y \neq (p, p, p)$$

$$\text{и първата различна от } p \text{ координата на } y \text{ е } p+1\}.$$

Нека $G = (V, E)$ е граф с множество от върхове $V = X \cup Y$ и множество от ребра

$$E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 0 \pmod p\}.$$

Едно множество от върхове U ($U \subseteq V$) ще наричаме *представително* за V, ако всеки връх от V се съдържа в U или е съседен (свързан с ребро) с връх от U. Да се намери минималният брой върхове в едно представително множество за V.

Задача 12.1. Нека $a_1, a_2, \dots$ е такава редица от реални числа, че

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\pi a_n)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери границата ѝ.

Задача 12.2. Нека O е центърът на описаната окръжност около остроъгълен $\triangle ABC$, а M и N са средите на страните AB и BC. Правата CO разполовява отсечката MN. Да се намери най-малката възможна стойност на $\sphericalangle BAC$.

Задача 12.3. Дадено е естествено число $n \geq 2$. Да се намери най-малката възможна стойност на сума от вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(2 + a_{i-1})(a_i - a_{i-1}),$$

където $a_0 = 0$, $a_n = 1$ и $a_1, \dots, a_{n-1} \in [0, 1]$.

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

Решения на задачите

5.1. Последните четири цифри на израза $9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{2019}$ са последните четири цифри на сбора

$$9.2019 + 9.2018.10 + 9.2017.100 + 9.2916.1000 =$$

$$9.(2019 + 20180 + 201700 + 2016000) = 9.2239899,$$

т.е. последните четири цифри са 9091. Тогава $A = 9 + 0 + 9 + 1 = 19$.

Таблицата е с 30 реда и 30 стълба, т.е. в нея има $30.30 = 900$ числа. Най-малкото от тях е 1990, а най-голямото е 2048. Техният сбор е равен на $1990+2048 = 4038 = 2.2019$. Имаме два пъти 1991 и два пъти 2047. Техният сбор е $2.1991+2.2047 = 4.2019$. Имаме три числа 1992 и три числа 2046 със сбор $3.1992+3.2046 = 6.2019$. Продължавайки по същия начин, получаваме, че сборът на всички числа от таблицата е числото $B = 900.2019 = 181710$. Тогава $C = 1 + 8 + 1 + 7 + 1 = 18$, т.е. $C < A$.

5.2. От Е+Е+Е+ пренос = _Е следва, че имаме четири възможности: Е = 0 и преносът е 0, Е = 4 и преносът е 2, Е = 5 и преносът е 0 и Е = 9 и преносът е 2.

Случай 1. Е = 0, пренос 0. Пренос 0 е възможен само при В = 1, 2 или 3.

1.1) В = 1 ⇒ Н = 3 ⇒ Л = 7 ⇒ О = 6 ⇒ К = 5 и П = 1, т.е. В = П, противоречие.

1.2) В = 2 ⇒ Н = 6 ⇒ Л = 4 ⇒ О = 3 ⇒ 3*К + пренос 1 = 14 или 24, което е невъзможно.

1.3) В = 3 ⇒ Н = 9 ⇒ Л = 1 ⇒ О = 0, т.е. Е = О, противоречие.

Случай 2. Е = 4, пренос 2. Пренос 2 е възможен само при В = 7, 8 или 9.

2.1) В = 7 Н = 1 Л = 2 3*О +пренос 0 = _4, което е невъзможно.

2.2) В = 8 Н = 4 ⇒ Н = Е, противоречие.

2.3) В = 9 ⇒ Н = 7 ⇒ Л = 9, т.е. В = Л, противоречие.

Случай 3. Е = 5, пренос 0. Тъй като няма пренос, то В = 1, 2 или 3.

3.1) В = 1 ⇒ Н = 3 ⇒ Л = 0 ⇒ О = 5, т.е. О = Е, противоречие.

3.2) В = 2 ⇒ Н = 6 ⇒ Л = 7 ⇒ О = 1 ⇒ К = 9 и П = В = 2р противоречие.

3.3) В = 3 ⇒ Н = 9 ⇒ Л = 4 ⇒ О = 8, т.е. К = 4 = Л, противоречие.

Случай 4. Е = 9, пренос 2. Пренос 2 е възможен само при В = 7, 8.

4.1) В = 7 ⇒ Н = 1 ⇒ Л = 5 ⇒ О = 6 ⇒ К = 8 и П = 2, при което получаваме решение 86597 + 86597 + 86597 = 259791.

4.2) В = 8 ⇒ Н = 4 ⇒ Л = 2 ⇒ 3*О +пренос 2 = _9, което е невъзможно.

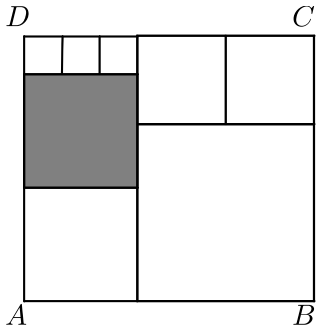
Окончателно, имаме само едно решение 86597+86597+86597 = 259791.

5.3. а) Нека страната на квадрата с връх D е равна на x см, а страната на квадрата с връх C е равна на y см. Тогава квадратът с връх A има страна $3x$, а квадратът с връх B има страна $2y$. Тъй като $AD = 7x$ и $BC = 3y$, то $7x = 3y$. Тъй като x и y са естествени числа, то $7|3y$ и, тъй като 7 и 3 са взаимнопрости, следва, че $7|y$.

Нека $y = 7k$, където k е естествено число. Тогава $7x = 3.7.k$, откъдето $x = 3k$. Страните на правоъгълника са

$$AD = 7x = 21k \text{ и } AB = 3x + 2y = 3.3k + 7.7k = 23k.$$

Лицето на правоъгълника е $21k.23k = 7728$, откъдето $k.k = 16$ и намираме $k = 4$. Оттук $AD = 21.4 = 84$ см, $AB = 23.4 = 92$ см и търсената обиколка е $2.(84 + 92) = 352$ см.

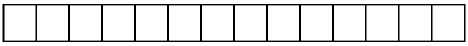
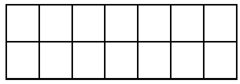


б) След изрязването се е получила фигура, чиято обиколка е с $424 - 352 = 72$ см по-голяма от обиколката на правоъгълника. Следователно изрязаният квадрат няма общ връх с правоъгълника (защото тогава обиколката не би се променила) и страната му е $72 : 2 = 36$ см. Лицето на този квадрат е $36.36 = 1296$ кв. см и значи лицето на останалата фигура е $7728 - 1296 = 6432$ кв.см. Изрязаният квадрат е оцветен на чертежа.

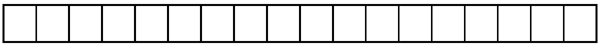
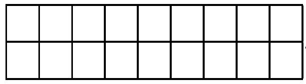
5.4. Тъй като няма комбинация с цена 49 лв., цената на една шапка или една тениска не може да бъде 1 лв. или 7 лв. Щом има комбинация, която прави 23 лв. и няма комбинация с цена 71 лв, няма как да има комбинация с цена 48 лв. Последното означава, че нито един от делителите на 48 не може да бъде цена на шапка или тениска, т.е. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 отпадат като цени. Аналогично заключаваме, че няма комбинация с цени $49 - 23 = 26$ лв., $48 - 23 = 25$ лв., откъдето отпадат и цените 5 и 13. Така възможните стойности за цените, които са по-малки от 23, останаха само 9, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Сега лесно заключаваме, че цената на шапката е 9 лв., а цената на тениската е 14 лв.

6.1. Отговор: а) и б) Да, в) Не!

а) Пример:

 и .

б) Пример:

 и .

в) Сумата от лицата на всички правоъгълници е $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ и не се дели на 2. Следователно исканото е невъзможно.

6.2. а) Да означим измеренията на дадения паралелепипед с a, b и c, а обема и пълната повърхнина съответно с V и S. От условието следва, че $V + 8 = ab(c + 2)$, откъдето намираме $8 = 2ab$, т.е. $ab = 4$. Аналогично се получават равенствата $bc = 3$ и $ac = 12$. Следователно

$$V^2 = (abc)^2 = (ab)(bc)(ca) = 3.4.12 = 144,$$

откъдето $V = 12$. От полученото лесно намираме и пълната повърхнина –

$$S = 2(ab + bc + ca) = 2(3 + 4 + 12) = 38.$$

б) От намереното по-горе следва, че измеренията на паралепипеда са 1 см, 3 см и 4 см. Първоначалното ниво на водата зависи от това, коя стена на паралелепипеда е дъно. Тогава и крайното ниво ще зависи от това и следователно имаме три възможности.

Ако дъното е 1×3, то първоначалното ниво на водата е 1 см, което означава, че кубчето потъва изцяло и общият обем (на водата и кубчето) се увеличава с 1 см^3. Тогава височината h, достигната от водата, удовлетворява равенството $4 = 1.3.h$, откъдето $h = \dfrac{4}{3}$ и търсеното повишение е $\dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}$ см.

Ако дъното е 1×4, първоначалното ниво на водата е $3/4$ см, което означава, че кубчето не потъва изцяло. Ако кубчето потъва до x см, то общият обем е

$$3 + 1.1.x = 4.1.x,$$

откъдето $x = 1$ и търсеното повишение е $x - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ см.

Ако дъното е 3×4, първоначалното ниво на водата е $1/4$ см и кубчето не потъва изцяло. Ако кубчето потъва до x см, то общият обем е

$$3 + 1.1.x = 4.3.x,$$

откъдето $x = \dfrac{3}{11}$ и търсеното повишение е $x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{44}$ см.

6.3. Ако в представянето $a^3 - b! = x$ имаме $b \geqq 7$, то $b!$ се дели на 7. Тогава, тъй като кубовете на естествените числа дават остатъци 0, 1 и 6 при деление на 7, и x ще дава само такива остатъци. Такива x са $288 + 289 + 288 = 865$.

Ако пък $b \leqq 6$, то $a^3 = x + b! \leqq 2019 + 720 = 2739$, което означава, че $a \leqq 13$. В този случай двойките (a, b) са $13.6 = 78$, което означава, че представяните чрез тях числа x са най-много 78.

Окончателно, сините числа са най-много $865 + 78 = 943$ и са с поне 133 по-малко от зелените.

6.4. Отговор: 6 минути.

Първо ще докажем, че 6 минути са достатъчни. Да означим учениците с $1, 2, \ldots, 10$ и нека първите две минути учителят да пита за $1, 2, 3, 4$ и $5, 6, 7, 8$. Да разгледаме възможните отговори:

1. Ако и двата отговора са **НЕ**, то учениците без домашно са 9 и 10.

2. Нека и двата отговора са **ДА**. Тогава единият ученик без домашно е между 1,2,3,4, а другият – между 5,6,7,8.

Ще покажем как с още два въпроса можем да намерим ученика без домашно от 1,2,3,4. Нека третия въпрос е за ученици 1,2,9,10.

Ако отговорът е **НЕ** (тогава търсеният ученик от 1,2,3,4 е 3 или 4), то можем да питаме четвърти път за 1,2,3,9 и да разберем кой е ученикът без домашно от 1,2,3,4.

Ако отговорът е **ДА** (тогава търсеният ученик от 1,2,3,4 е 1 или 2), можем да питаме четвърти път за 1,3,9,10 и да разберем кой е ученикът без домашно от 1,2,3,4.

По същия начин за два въпроса разбираме кой е ученикът без домашно от 5,6,7,8. В този случай общо въпросите са 6.

3. Нека отговорът на $1, 2, 3, 4$ е **НЕ**, а на $5, 6, 7, 8$ – **ДА**. Избираме за трети въпрос 1,2,9,10.

Ако отговорът е **НЕ** (тогава и двамата са между 5,6,7,8), питаме за 1,2,3,5; 1,2,3,6 и 1,2,3,7 и намираме двамата без домашно.

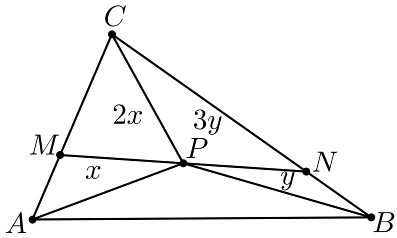
Ако отговорът е **ДА** (тогава има един между 5,6,7,8 и един между 9 и 10), с два въпроса 1,2,5,6 и 1,2,5,7 намираме търсения от 5,6,7,8, а с 1,2,3,9 намираме този от 9 и 10. Общо въпросите са отново 6.

Остана да докажем, че с по-малко от 6 въпроса не можем да намерим двамата без домашно. За целта е достатъчно да се убедим, че в този случай възможните валианти за двамата ученици без домашно са повече от възможните комбинации от въпроси. При 5 въпроса общо имаме $2^5 = 32$ възможни изхода, а възможностите за двамата без домашно са $\binom{10}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$. Тъй като $45 > 32$, то 5 въпроса не са достатъчни.

7.1. а) $A = x^2 + 2$ и $B = 6x + 5$. б) Тъй като $A + B = (x + 3)^2 - 2$, то $A + B \geqq -2$.

7.2. а) Тъй като

$$\frac{S_{MPC}}{S_{MPA}} = \frac{MC}{AM} = 2,$$



то $S_{MPC} = 2x$ и $S_{MPA} = x$. По същия начин,

$$\frac{S_{NPC}}{S_{NPB}} = \frac{NC}{BN} = 3,$$

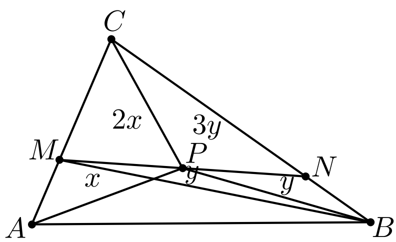
следователно $S_{NPC} = 3y$ и $S_{NPB} = y$.

В триъгълника MNC отсечката CP е медиана, следователно

$$S_{MPC} = S_{NPC} \iff 2x = 3y.$$

Оттук $S_{AMP} : S_{BNP} = x : y = 3 : 2$.

б) Построяваме отсечката BM. В триъгълника BMN отсечката BP е медиана, следователно $S_{BMP} = S_{BNP} = y$. Тогава $S_{BMC} = 5y + 2x = 8y$. Имаме



$$\frac{S_{MBC}}{S_{MBA}} = \frac{MC}{AM} = 2,$$

следователно $S_{MBA} = 4y$ и оттук $S_{ABC} = 12y$. Тъй като

$$S_{ABP} = 12y - (3x + 4y) = 8y - 4,5y = 3,5y,$$

то $S_{ABP} : S_{ABC} = 3,5y : 12y = 7 : 24$ и намираме $S_{ABC} = \dfrac{24}{7}.1001 = 3432$.

7.3. От $2019 = 3.673$, където 673 е просто число, следва, че $n = p^{2018}$ или $n = p^2 q^{672}$ за някакви прости числа p и q.

Тъй като $d_{2018}.d_2 = n$ имаме

$$d_{2018}.d_4 = 5n \iff d_{2018}.d_4 = 5d_{2018}.d_2 \iff d_4 = 5d_2.$$

От $d_4 = 5d_2$ следва, че $5/d_4/n$. Понеже d_2 е най-малкото просто число, което дели n и $5/n$, то $d_2 = 2, 3$ или 5.

1. Ако $d_2 = 2$, то $d_4 = 10$ и единствената възможност за d_3 е $d_3 = 5$. Тогава $n = 2^\alpha.5^\beta$, откъдето $\alpha = 2$ или $\alpha = 672$. И в двата случая $4/n$ и тогава $d_3 \neq 5$, противоречие.

2. Ако $d_2 = 3$, то $d_4 = 15$ и единствената възможност за d_3 е $d_3 = 5$. Тогава $15/n$, $n = 3^\alpha.5^\beta$, където $\alpha = 2$ или $\alpha = 672$. И в двата случая $9/n$ и тогава $d_4 \neq 15$, противоречие.

3. Ако $d_2 = 5$, то $d_4 = 25$ и тогава d_3 е просто число между 5 и 25. Нека $d_3 = p$, където $p = 7, 11, 13, 17, 19$ или 23. За всяка от шестте възможности за p имаме решенията $n = 5^2p^{672}$ или $n = 5^{672}p^2$.

Следователно има 12 числа n с даденото свойство.

7.4. Да отбележим първо, че можем да преразпределим хората така, че в стаите има само по двама или трима души (ако са повече, разпределяме тези в повече в нови стаи – ако са 4, в две стаи по двама, ако са 5 – в стая и двама и стая с трима и т.н.).

Нека в началото всичките 2019 човека да са отвън и да започнем да ги разпределяме по следното правило – ако даден човек има приятел отвън, разпределяме двамата в една стая. Ако по този начин разпределим всички хора, сме готови. Да допуснем, че в даден момент е невъзможно да продължим. Това означава, че имаме човек A отвън, чиито приятели вече са разпределени по стаи. Разглеждаме настанените по двойки – ако A има приятел от такава стая, настаняваме го там (тази стая става с трима души и в нея най-много двама не се познават). Ако пък A няма приятел в стая, в която са настанени само двама, то всичките му (поне 673) приятели вече са настанени в стаи с по трима души. Тъй като тройките, които вече са сформирани, са най-много 672, има такава от тях, в която има двама приятели на A. Тогава преразпределяме тази тройка и A в две стаи по двама (очевидно как). Следователно разпределянето по горните правила ще продължи, докато имаме хора за разпределяне, т.е. докато получим исканото.

Пример, в който има човек, който е приятел само с 672 души и исканото разпределение е невъзможно, е следният. Нека хората са в две групи, M от 673 души и N от 1346 души, такива, че: в M всеки двама са приятели, в N никои двама не са приятели, всички от N са приятели с всички от M с изключение на един фиксиран човек, да го наречем B.

8.1. Разлагаме $M = |x-4||x^2+2x-2|$. M ще е просто число, ако единият множител е равен на 1, а другият е просто число.
1 сл. $|x-4| = 1 \Rightarrow x \in \{3, 5\}$. При $x = 3$ получаваме $M = 13$, което е просто. При $x = 5$ получаваме $M = 33$, което не е просто.
2 сл. $|x^2+2x-2| = 1 \Rightarrow x^2+2x-2 = \pm 1$. От първото уравнение намираме $x = 1$ или $x = -3$ и, съответно, $M = 3$ или $M = 7$, които са прости числа. Второто уравнение е еквивалентно на $(x+1)^2 = 2$, което няма решение в цели числа.

Окончателно, решенията са $x = 1$ и $x = \pm 3$.

8.2. а) Нека $CF \cap PQ = E$ и $BQ \cap AP = O$. От $\triangle APC \cong \triangle QBC$ получаваме, че $\sphericalangle POQ = 90^\circ$, а от $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$ следва, че

$$\sphericalangle PEF = 180^\circ - \sphericalangle EFP - \sphericalangle EPF = 180^\circ - \sphericalangle PQO - \sphericalangle QPO = \sphericalangle POQ = 90^\circ.$$

Тогава $\sphericalangle FCB = 90^\circ - \sphericalangle PCE = \sphericalangle CPQ$.

Построяваме точка L, такава че $ALBC$ е успоредник. От еднаквостта $\triangle LBC \cong \triangle QCP$ следва, че $\sphericalangle LCB = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle FCB$, т.е., че $F \in CL$. Но от свойството на диагоналите в успоредника следва, че $CL \cap AB = M$ е среда на AB.

б) Нека K е средата на BN. От FN средна отсечка в триъгълник MKC следва, че $MK = 2FN$. От MK средна отсечка в триъгълник ABN следва, че $AN = 2MK = 4FN$. Тогава $AF : FN = 3 : 1$.

8.3. Условието е равносилно с $p(p^2 - pn - 2n) = (2n-1)(3n-1)$, така че p дели $2n-1$ или $3n-1$. Ако $2n-1 \geqq 2p$ или $3n-1 \geqq 3p$, то лявата страна е отрицателна, а дясната – положителна. Остава да проверим случаите:

- $p = 2n-1$, което не води до естествени решения;
- $p = 3n-1$, което не води до естествени решения;
- $2p = 3n-1$, което води до

$$p^2 - pn - 2n = 4n - 2 \Longrightarrow 9n^2 - 6n + 1 - 2n(3n-1) = 24n - 8,$$

$$3n^2 - 28n + 9 = 0 \iff (3n-1)(n-9) = 0,$$

чието естествено решение е само $n = 9$. Оттук $p = 13$ и условията са изпълнени.

8.4. Нека на ход след първия се изтриват три числа, такива че на една от позициите им е цифрата a, на другата са $b-1$, b и $b+1$, а на третата са $c-1$, c и $c+1$. Тогава сборът на всички първи цифри намалява с кратно на 3. След първия ход има 4 числа с първа цифра 1 (147, 156, 165, 174), 5 с първа цифра 2, 6 – с 3, 7 – с 4, 6 – с 5, 5 – с 6 и 4 – със 7, така че сборът на всички първи цифри е

$$4.1 + 5.2 + 6.3 + 7.4 + 6.5 + 5.6 + 4.7 = 148.$$

Това дава остатък 1 при деление на 3, следователно първата цифра на търсеното число може да е само 1, 4 и 7. По същия начин доказваме, че и останалите му цифри са 1, 4 или 7. И така, тъй като сумата от цифрите е 12, последното число може да е само 147, 174, 417, 444, 471, 714 или 741.

За да получим 444, може да изтрием
(174, 264, 354), (273, 363, 453), (372, 462, 552), (471, 561, 651),
(417, 426, 435), (327, 336, 345), (237, 246, 255), (147, 156, 165),
(741, 642, 543), (732, 633, 534), (723, 624, 525), (714, 615, 516).

За да получим 174, в горния списък може да заменим първото изтриване с (264, 354, 444).

За да получим някое от останалите, прилагаме списъка за 174 с подходящо разместени позиции в зависимост от позициите на 1, 7 и 4 в желаното число.

9.1. След разлагане уравнението добива вида

$$(x+2)(x-3)(x-1)(x-6) = m^2-15m \Leftrightarrow (x^2-4x-12)(x^2-4x+3) = m^2-15m.$$

След полагане $y := x^2 - 4x$, получаваме $y^2 - 9y - (m-3)(m-12) = 0$. Корените на това уравнение са $y_1 = m - 3$ и $y_2 = 12 - m$. От условието за четири различни корена следва, че $m - 3 \neq 12 - m$ и значи $m \neq 7,5$. След връщане в полагането получаваме:

$$(1)\ x^2 - 4x - m + 3 = 0 \quad (2)\ x^2 - 4x - 12 + m = 0.$$

От формулите на Виет и условието за два положителни и два отрицателни корена следва, че $3-m < 0$, съответно $m-12 < 0$. Окончателно, отговорът на задачата е $m \in (3; 7,5) \cup (7,5; 12)$.

9.2. Да означим с D общата допирателна точка върху AB за двете окръжности. Изразяваме отсечката AD по два начина. От това, че D е точката на допиране на AB до вписаната в $\triangle AGB$ окръжност, имаме $AD = \dfrac{AB + AG - BG}{2}$, а от това, че D е точката на допиране на AB до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, имаме $AD = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$. Приравнявайки двете изразявания, получаваме $AG - BG = AC - BC$, следователно $GA_1 - GB_1 = CB_1 - CA_1$ и значи и периметрите на $\triangle B_1GC$ и $\triangle A_1GC$ са равни. Отделно, $S_{B_1GC} = \dfrac{1}{6}S_ABC = S_{A_1GC}$. Тогава, или $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ или $\triangle B_1CG \cong \triangle A_1GC$ (равни лица и периметри плюс обща страна). Второто е невъзможно, защото от него $B_1G = CA_1$ и $A_1G = B_1C$ и за по-голямата от двете страни, например $CA_1 \geqq B_1C$, получаваме

$$BB_1 = 3B_1G = 3CA_1 = CB + CA_1 \geqq CB + CB_1,$$

противоречие с неравенството на триъгълника за $\triangle CBB_1$! Следователно, $\triangle B_1GC \cong A_1GC$ и $AC = 2B_1C = 2A_1C = BC$.

9.3. Отговор: $n = 2$. Първо, ще докажем следната лема:
Лема: Ако $x > y$ са естествени числа, такива че $(x, y) = 1$ и $x^n - y^n$ е точна степен на двойката за някое $n \geq 2$, то $n = 2$.
Доказателство: Тъй като x и y са взаимно прости, то и двете са нечетни. Ако n има нечетен делител k, то $n = km$ и

$$x^n - y^n = (x^m - y^m)\left(x^{m(k-1)} + x^{m(k-2)}y^m + \cdots + y^{m(k-1)}\right).$$

Вторият множител е сума на k нечетни събираеми, следователно е нечетно число, което е противоречие с условието.

Остана $n = 2^k$. Но тогава при $k \geqq 2$ имаме разлагането

$$x^{2^k} - y^{2^k} = \left(x^{2^{k-1}} - y^{2^{k-1}}\right)\left(x^{2^{k-1}} + y^{2^{k-1}}\right)$$

и вторият множител дава остатък 2 по модул 4. Отново противоречие. Следователно $n = 2$. Лемата е доказана.

Нека сега се върнем на оригиналната задача и представим r във вид на несъкратима дроб $r = \dfrac{x}{y}$, $(x, y) = 1$. Без ограничение на общността, нека $r > 1$ и значи $x > y$ (ако това не е така, то за два хода получаваме $1 = r^n/r^n$ и $r^{-n} = 1/r^n$). Да допуснем, че съществува $n > 2$, което да води до решение. Тогава, съгласно лемата, съществува нечетно просто p, $p|x^n - y^n$ и $(p, x) = (p, y) = 1$. Ще докажем, че във всеки момент $p|s-t$, където $\dfrac{s}{t}$ е произволно число от написаните на дъската. За целта е достатъчно да покажем, че операциите "средно аритметично" и "деление" запазват търсеното свойство.

Наистина, нека $a = \dfrac{x_1}{y_1}$ и $b = \dfrac{x_2}{y_2}$, където $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = 1$, $p|x_1 - y_1$, $p|x_2 - y_2$ и p не дели нито едно от четирите числа. Тогава

$$\frac{a+b}{2} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2y_1y_2} \ \Rightarrow$$

$$x_1y_2 + x_2y_1 - 2y_1y_2 = y_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1y_2}{x_2y_1} \ \Rightarrow$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1y_2 - y_1y_2) - (x_2y_1 - y_1y_2) = y_2(x_1 - y_1) - y_1(x_2 - y_2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Освен това, знаменателите и на двете дроби ($2y_1y_2$ и x_2y_1) са взаимно прости с p, така че свойството се запазва и след привеждането на $\dfrac{a+b}{2}$ и $\dfrac{a}{b}$ в несъкратими дроби. Следователно, за да запишем на дъската числото 17, трябва $17 - 1 = 16 \equiv 0 \pmod{p}$, което е невъзможно. Така $n \geqq 3$ не води до решение. Остава да проверим $n = 2$. Един възможен вариант е $r = 3$ и

$$9 \to \frac{9}{9} = 1 \to \frac{9+1}{2} = 5 \to \frac{9+5}{2} = 7 \to \frac{5+1}{2} = 3 \to \frac{3}{\frac{1}{7}} = 21$$

$$21 \to \frac{21+1}{2} = 11 \to \frac{3}{\frac{1}{11}} = 33 \to \frac{33+1}{2} = 17.$$

9.4. Отговор: Кръгът с център точката $A'(-1, -1)$, симетрична на A спрямо O и радиус $R = 2 \cdot 2019 = 4038$.

Първо, нека за всяко четно k дефинираме точката Q_k – симетрична на P_k спрямо центъра на окръжността O. Тогава, в $\triangle P_{k-1}P_kQ_k$ средната отсечка спрямо страната $P_{k-1}Q_k$ се явява радиус в ω и, следователно $|P_{k-1}Q_k| = 2r = 2$. Аналогично, $|Q_kP_{k+1}| = 2r = 2$. Така, на всеки път $AP_1P_2 \dots P_{2018}B$ с търсените в задачата свойства съпоставяме начупения път $A'P_1Q_2P_3 \dots P_{2017}Q_{2018}B$, състоящ се от 2019 последователни отсечки с дължина 2, свързващ A' с точката B. Лесно се съобраззяба, че и обратното е вярно, т.е., че на всеки начупен път $A'P_1Q_2P_3 \dots P_{2017}Q_{2018}B$, състоящ се от 2019 последователни отсечки с дължина 2 можем да съпоставим път $AP_1P_2 \dots P_{2018}B$ с търсените в задачата свойства.

Така, преформулирахме задачата до: да се намерят всички точки B, които могат да се свържат с A' посредством 2019-начупен път от последователни отсечки с дължина 2. Ще докажем по индукция, че търсеното множество от точки за n-начупен път, $n \geq 2$ е кръгът с център A' и радиус $2n$. При $n = 2$, ако $|A'B| > 4$, то от неравенството на триъгълника няма как да съществува 2-начупен път $A'P_1B$, $|A'P_1| = |P_1B| = 2$. Обратно, при $|A'B| \leq 4$ съществува (може и изроден) равнобедрен триъгълник $A'P_1B$ с основа $A'B$ и бедра с дължина 2. Очевидно, точката A' също е достижима. С това доказахме базата на индукцията. Сега, нека твърдението е вярно за n и да разгледаме $(n+1)$-начупени пътища с начало A'. Отново, ако $|A'B| > 2(n+1)$, точката B няма как да бъде достижима, тъй като дължината на начупения път е не по-малка от разстоянието между краищата му. Ако $|A'B| \leq 2n$, то от индукционното предположение, съществува n-начупен път $A'P_1Q_2 \dots B$. Взимаме един от двата равностранни триъгълника $A'CP_1$ с основа $A'P_1$ и създаваме $(n+1)$-начупения път $A'CP_1Q_2 \dots B$. Ако $2n < |A'B| \leqq 2(n+1)$, избираме точката B_1 от отсечката $A'B$, така че $|A'B_1| = 2(n-1)$ и свързваме A' с B_1 посредством прав $(n-1)$-начупен път. Съгласно случая $n = 2$, от B_1 до B съществува 2-начупен път и, обединявайки двата пътя, построихме $(n+1)$-начупен път между A' и B. С това индукцията е завършена.

Окончателно, търсеното множество от точки B е кръг с център точката $A'(-1,-1)$, симетрична на A спрямо O, и радиус $R = 2 \cdot 2019 = 4038$.

10.1. Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$, а x_3 и x_4 – на $g(x) = 0$. От формулите на Виет получаваме, че $x_1x_2 = b$ и $x_3x_4 = a$ и следователно $x_1x_2x_3x_4 = ab$. От друга страна x_1, x_2, x_3, x_4 са точно корените на $f(x)g(x) = 0$. Следователно $ab = 10$.

При $a = b$ графиките на f и g съвпадат, така че може да предполагаме, че $a \neq b$. Сега ако $A = (x_0, y_0)$, то $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ и тъй като $a \neq b$, лесно намираме, че $x_0 = 1$, а $y_0 = a+b+1$. Нека $B = (1,0)$, а $O = (0,0)$ е началото на координатната система. Тогава $\triangle OAB$ е правоъгълен с катети $OB = 1$ и $AB = |a+b+1|$. Тогава по Теоремата на Питагор $|OA|^2 = 1 + (a+b+1)^2$.

От друга страна $|OA|^2 = 65$, откъдето получаваме, че $(a+b+1)^2 = 64$, тоест $a+b=7$ или $a+b=-9$.

В случая $a+b=7$ от $ab=10$ намираме, че a и b са корените на уравнението $t^2-7t+10=0$, тоест $\{a,b\}=\{2,5\}$. Тъй като обаче $2^2-4.5<0$, то едно от двете уравнения $f(x)=0$ или $g(x)=0$ няма реални корени. Следователно $\{a,b\}=\{2,5\}$ не е решение.

В случая $a+b=-9$ от $ab=10$ намираме, че a и b са корените на уравнението $t^2+9t+10=0$, тоест $\{a,b\}=\left\{\frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2}\right\}$. Ясно е, че $a<0$ и $b<0$ и следователно в този случай $a^2-4b>0$ и $b^2-4a>0$, тоест $f(x)=0$ и $g(x)=0$ имат по два различни реални корена, а тъй като A е единствената обща точка за двете графики и тя има y-координата $|a+b+1|=8$, то $f(x)=0$ и $g(x)=0$ нямат общи корени. Окончателно

$$(a,b)=\left(\frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2}\right) \text{ и } (a,b)=\left(\frac{-9-\sqrt{41}}{2}, \frac{-9+\sqrt{41}}{2}\right).$$

10.2. Използваме стандартните означения: $a=|BC|$, $b=|AC|$ и h_a, h_b за съответните им височини. От $S_{ABS}=S_{QSPC}$ получаваме $S_{ABP}=S_{QBC}$, откъдето следва, че

$$BP.h_a = CQ.h_b \iff BP = \frac{h_b}{h_a}.CQ \iff BP = \frac{a}{b}.CQ.$$

Аналогично, от $S_{ABS}=S_{QSPC}$ получаваме $S_{ABQ}=S_{APC}$ и $AQ=\frac{b}{a}.CP$. Тъй като

$$\frac{BP.CQ.AR}{CP.QA.RB} = \frac{\frac{a}{b}.CQ.CQ}{CP.\frac{b}{a}.CP}.\frac{AR}{BR} = \frac{a^2CQ^2}{b^2CP^2}.\frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{a.CQ}{b.CP}\right)^2$$

от теоремата на Чева за $\triangle ABC$ получаваме $\frac{CQ}{CP}=\frac{b}{a}$. Следователно

$$CP.a = CQ.b,$$

което означава, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност.

10.3. Характеристичното уравнение за $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е $t^2-3t-1=0$ с корени $t_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $t_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Тогава от условията $x_0=0$ и $x_1=1$ лесно намираме, че общият член на редицата $\{x_n\}$ е:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{13}}(t_1^n - t_2^n) \quad = \quad \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{13}} \sum_{k:2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}\sqrt{13}^{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k:2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}13^k.$$

Следователно ако $13|x_n$, то $13|n$.

Нека сега $n = p-1$ и $p > 3$. Тогава $x_n \equiv 0 \pmod p$ точно когато $2^{n-1}x_n \equiv 0 \pmod p$. Освен това лесно намираме, че

$$\binom{p-1}{2k+1} \equiv (-1)^{p-1-2k-1} \pmod p.$$

Оттук следва, че $x_{p-1} \equiv 0 \pmod p$ точно когато

$$\sum_{k:2k+1\le p-1} (-1)^{p-2k-2}13^k 3^{p-2k-2} \equiv 0 \pmod p.$$

Оттук намираме, тъй като $p > 3$, че $13^{\frac{p-1}{2}} - 3^{p-1} \equiv 0 \pmod p$. Следователно $13^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$, тоест 13 е квадратичен остатък по модул p. От квадратичния закон за реципрочност знаем, че $\left(\frac{13}{p}\right)\left(\frac{p}{13}\right)(-1)^{\frac{(13-1)(p-1)}{2}} = 1$, тоест $\left(\frac{13}{p}\right)\left(\frac{p}{13}\right) = 1$. Следователно 13 е квадратичен остатък по модул p точно когато p е квадратичен остатък по модул 13. Тъй като квадратичните остатъци по модул 13 са $1, 3, 4, -1, -3, -4$, то получаваме, че $p \equiv 1, 3, 4, -1, -3, -4 \pmod{13}$. В интервала $[2000; 2100]$ има десет числа, които завършват на 9. От таблица 1 се вижда, че от тях само 2019, 2029, 2079 и 2089 дават допустими остатъци по модул 13. Освен това очевидно 2019 и 2079 се делят на 3, тоест не са прости. Накрая лесно се проверява, че 2029 и 2089 са прости, вж. таблица 2, която показва какви остатъци дават двете числа при деление на простите числа по-малки от 46 ($46^2 = 2136$) и различни от $2, 3, 5$ и 13, които очевидно не делят 2029 и 2089. Окончателно $p = 2029$ и $p = 2089$.

число	2009	2019	2029	2039	2049	2059	2069	2079	2089	2099
(mod 13)	-6	4	1	-2	-5	5	2	-1	-4	6

Таблица 1

	7	11	17	19	23	29	31	37	41	43
2029	6	5	6	15	5	21	14	31	20	8
60	−3	−6	−9	−3	−9	−27	−2	−14	−22	−26
2089	3	−1	−3	12	−4	−6	12	17	−2	−18

Таблица 2

10.4. Да разгледаме граф $G = (V, E)$ с $n = 22$ върха – учениците в 10 клас, които посещават школата и ребра – приятелствата в платформата

Графнет. Ще казваме, че едно множество от върхове $S \subseteq V$ е независимо, ако никои два върха в S не са съседни – това съответства на ситуацията, в която никои двама ученици от S не са приятели в Графнет.

Лема. *Нека $G = (V, E)$ с n върха, за който при всяко оцветяване на върховете в k цвята има поне два едноцветни върха, свързани с ребро. Тогава броят на независимите множества в G е най-много $(k+2)2^{n-k-1}$.*

Да допуснем, че лемата е доказана. Тогава, за нашия граф, да допуснем, че учениците могат да бъдат "оцветени" в $k = 10$ цвята така, че никои двама приятели в Графнет да не получат един и същ цвят. Тогава ръководителят може да даде 10 задачи по една на всяка група от ученици, които имат един и същ цвят. Това е противоречие с условието на задачата. Това показва, че условията на лемата са изпълнени с $k = 10$, $n = 22$ и следователно броят на независимите множества е най-много $(10 + 2)2^{22-10-1} = 12.2^{11} = 24576$.

От друга страна, ако номерираме учениците от $1, 2, \ldots, 22$ и i и j са приятели в Графнет точно когато $i \neq j$ и $i \leqq 11$, и $j \leqq 11$, то:

1. ръководителят на школата трябва да даде поне 11 задачи, защото иначе някои двама от $1, 2, \ldots, 11$ ще получат една и съща.
2. за всяко подмножество $S \subseteq \{12, \ldots, 22\}$, имаме, че $S, S \cup \{1\}, \ldots, S \cup \{11\}$ са множества от ученици, никои двама от които не са приятели в Графнет. Така всички множества с исканите свойства са (поне) $2^{11}.(1 + 11) = 12.2^{11}$.

Доказателство на лемата. Ще докажем твърдението с индукция по n. При $n = 2$ е необходимо $k = 1$, тоест имаме два върха $\{v_1, v_2\}$, които са свързани с ребро и лесно се вижда, че независимите множества са $\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}$, общо $3 = (1 + 2)2^{2-1-1}$.

За индуктивната стъпка, да разгледаме граф G с множество от върхове V, като $|V| = N$, за който всяко оцветяване на върховете в K цвята води до съществуването на два едноцветни върха, свързани с ребро. Нека A е максималното независимо множество от върхове на дадения граф и $|A| = s$. В графа с върхове $V \setminus A$ всяко оцветяване на върховете в $K - 1$ цвята води до съществуването на два едноцветни върха, свързани с ребро (в противен случай ще оцветим всички върхове на A в един цвят, а върховете на $V \setminus A$ в останалите $K - 1$ цвята).

Според индукционното допускане броят на независимите множества в $V \setminus A$ е равен на $(K + 1)2^{N-s-K}$. Тъй като всеки връх от $V \setminus A$ е свързан с поне един връх от A (поради максималността на A), то всяко независимо множество в $V \setminus A$, различно от празното, може да бъде разширено (включително с празното множество) по 2^{s-1} начина. Празното множество може да бъде разширено по 2^s начина. Следователно броят на независимите множества е най-много

$$\begin{aligned}((K+1)2^{N-s-K}-1)2^{s-1}+2^s &= (K+1)2^{N-K-1}-2^{s-1}+2^s = \\ &= (K+1)2^{N-K-1}+2^{s-1}.\end{aligned}$$

Остава да забележим, че $s \leqq N-K$, защото в противен случай можем да оцветим всеки от върховете на $V \setminus A$ (те са най-много $K-1$) в различен цвят, а всички върхове на A в един цвят. Следователно

$$(K+1)2^{N-K-1}+2^{s-1} \leqq (K+2)2^{N-K-1}.$$

С това лемата е доказана.

11.1. Нека $\sphericalangle BAC=\alpha$. Търсим онези стойности на m, за които ъгъл $\alpha \in (0;135^\circ)$ е еднозначно определен.

а) По синусова теорема намираме $|BC|=2\sin\alpha$, а $|AC|=2\sin(45^\circ+\alpha)$. Сега от формулата за дължина на медиана имаме, че:

$$m^2=|BM|^2=\frac{2|AB|^2+2|BC|^2-|AC|^2}{4}=1+2\sin^2\alpha-\sin^2(45^\circ+\alpha).$$

Ако положим $\operatorname{cotg}\alpha=t$, то $t\in(-1,+\infty)$ и от равенствата

$$\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{t^2+1} \text{ и } \sin^2(45^\circ+\alpha)=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}=\frac{(t+1)^2}{2(t^2+1)}$$

след кратки преобразувания достигаме до $m=\sqrt{\dfrac{t^2-2t+5}{2(t^2+1)}}$.

б) От подточка а) получаваме

$$(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2=0.$$

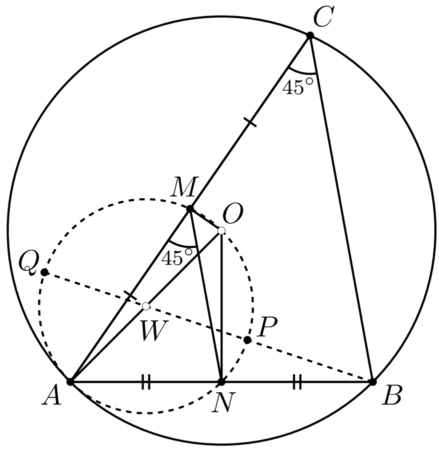
Нека $f(t)=(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2$. Броят различни ъгли $\sphericalangle BAC$ отговаря на броя решения на уравнението $f(t)=0$ в интервала $t\in(-1,+\infty)$. Така задачата се свежда до намиране стойностите на параметъра m, за които $f(t)=0$ има единствен корен $t\in(-1,+\infty)$.

Ако функцията $f(t)$ е линейна, то $1-2m^2=0$, $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и единственият корен е $t=2>-1$.

Ако $D=1-(5-2m^2)((1-2m^2)=0$, то $m^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2}$, като и в двата случая двойният корен е в желания интервал.

Ако пък $D>0$, то е необходимо и достатъчно $f(-1).(1-2m^2)\leqq 0$, т.е. $(8-2m^2)(1-2m^2)\leqq 0 \Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},2\right]$. Така окончателно получаваме, че $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен тогава и само тогава, когато $m\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]\cup\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Забележка. Подточка б) може да бъде решена и синтетично, като се построи центърът O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и средата N на AB. Тогава M и N лежат на окръжността ω с диаметър AO. Нещо повече, от условието имаме, че $\sphericalangle AON = \sphericalangle ACB = 45^\circ$ и следователно $\triangle AON$ е равнобедрен правоъгълен, т.е. $AO = \sqrt{2}AN = 1$. В същото време, M лежи и на окръжността ω_b с център B и радиус m. Следователно е достатъчно да намерим стойностите на m, за които ω_b пресича дъгата $\overset{\frown}{AON}$ в единствена точка M.



Нека W е центърът на ω и BW пресича ω в точките P и Q както е изобразено на чертежа. От една страна, $BP.BQ = BN.BA = 1$, а от друга, $BP.BQ = BP(BP+1)$ и следователно $BP = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $BQ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Така окончателно получаваме, че $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен тогава и само тогава, когато $m \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

11.2. Не е трудно да се забележи, че $x = 1$, $y = 2$, $z = 3-2\sqrt{2}$ е решение на системата.

От условието следва,че $x, y, z \in [0, +\infty)$. Да забележим, че в интервала $[0, +\infty)$ функциите $f(t) = \sqrt{t}$ и $g(t) = t$ са растящи. Да допуснем, че системата има две различни решения (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1). Нека без ограничение на общността $x_0 < x_1$. От това, че $\sqrt{x}$ и y са едновременно растящи следва, че $y_0 > y_1$. Повтаряйки този аргумент, получаваме $z_0 < z_1$ и $x_0 > x_1$, противоречие. Следователно системата има единствено решение $x = 1$, $y = 2$, $z = 3 - 2\sqrt{2}$.

11.4. Лесно пресмятаме, че $|X| = |Y| = p^2 + p + 1$, откъдето следва, че G е двуделен граф с $2(p^2 + p + 1)$ върха. Нещо повече, всеки връх от X е съседен на точно $p+1$ върха от X и обратно. Освен това, кои да е два върха X (съответно от Y) имат точно един общ съседен връх (защо?).

Непосредствено се проверява, че множеството $U = A \cup B$, където

$$\begin{aligned} A &= \{(1, \alpha, 0) \mid \alpha = 0, 1, \ldots, p-1\} \subset X, \\ B &= \{(1, 0, \beta) \mid \beta = p, p+1, \ldots, 2p-1\} \subset Y \end{aligned}$$

е представително. Следователно търсеният минимален брой върхове не надхвърля $2p$.

Нека допуснем, че съществува представително множество U за V с брой елементи $|U| \leqq 2p-1$, което изпълнява условието на задачата. Без ограничение на общността, нека $|A \cap U| \leqq p-1$. Тогава съседните на елементите на U, лежащи в A са не повече от $(p+1)+(p-2)p = p^2-p+1$ (всеки връх има $p+1$ съседни, а всеки връх от U след първия добавя не повече от p нови съседни). Сега

$$|B \cap U| \geqq (p^2+p+1)-(p^2-p+1) = 2p,$$

откъдето $|U| = |A \cap U| + |B \cap U| \geqq 2p$, което е противоречие и следователно търсеният минимален брой върхове е точно $2p$.

12.1. Имаме, че

$$(*)\ a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{\cos(\pi a_n) - \cos(\pi/3)}{6} = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi(a_n - 1/3)}{2} \sin \frac{\pi(a_n + 1/3)}{2}.$$

За $q = \pi/6 \in (0,1)$ следва, че $|a_{n+1} - 1/3| \leqq q|a_n - 1/3|$, откъдето $|a_{n+1} - 1/3| \leqq q^n |a_1 - 1/3|$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/3$.

12.2. Ако $K = CO \cap MN$, то

$$\frac{MK}{\sin \sphericalangle MOK} = \frac{MO}{\sin \sphericalangle MKO}, \quad \frac{NK}{\sin \sphericalangle NOK} = \frac{NO}{\sin \sphericalangle NKO} \Longrightarrow$$

$$1 = \frac{MK}{NK} = \frac{MO}{NO} . \frac{\sin \sphericalangle MOK}{\sin \sphericalangle NOK} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} . \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Понеже $\alpha > \beta$ и $\gamma < 90^\circ$, то $\alpha > 45^\circ$. Ако $\alpha < 75^\circ$, следва, че $\sin 2\beta = 2\sin 2\alpha > 1$ – противоречие.

И така, $\alpha \geqq 75^\circ$. При $\alpha = 75^\circ$ намираме, че $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$, като по обратния път следва, че триъгълник с тези ъгли изпълнява условието.

12.3. Нека S е дадената сума. Понеже

$$(1)\ 2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2,\ (2)\ 3ab(a-b) = a^3 - b^3 - (a-b)^3,\ \text{то}$$

$$(3)\ S = 4/3 + \sum_{i=1}^{n} [(a_i - a_{i-1})^2 - (a_i - a_{i-1})^3/3].$$

Директно се проверява, че (4) функцията $f(x) = x^2 - x^3/3$ е изпъкнала при $x \leq 1$ (това следва и от $f''(x) = 2-2x$). От неравенството на Йенсен

$$(5)\ S \geqq \frac{4}{3} + n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{3n^2},$$

като равенство се достига при $a_i = i/n$, $0 \leqq i \leqq n$.

ПОБЕДИТЕЛИ В 13. ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

5. клас

Първа награда: **Мария Касия Петрова** (ПЧМГ), **Андрей Стефанов** (ПЧМГ)

Втора награда: **Ангел Динев** (СМГ), **Мартин Димитров** (Варна), **Борис Ангелов** (СМГ), **Теа Тодорова** (СМГ), **Алекс Киричев** (Варна)

Трета награда: **Аделина Доровска** (ПЧМГ), **Александър Бангачев** (СМГ), **Васил Драмбозов** (СМГ), **Велина Велева** (ПЧМГ), **Константин Белоперкин** (Варна), **Яна Максимова** (Бургас), **Венцислав Динков** (Бургас), **Виктория Данчева** (СМГ)

6. клас

Първа награда: **Катерина Кънчева** (СМГ)

Втора награда: **Виктор Аврамски** (СМГ), **Ивайло Василев** (СМГ), **Пресиян Георгиев** (Габрово), **Сара Илиева** (ПЧМГ), **Ясен Ангелов** (Варна)

Трета награда: **Анелия Коприщенова** (СМГ), **Димана Праматарова** (Пловдив), **Камелия Кърпачева** (Пловдив), **Теодора Желязкова** (Варна), **Богдан Георгиев** (СМГ), **Габриела Докова** (СМГ), **Константина Генкова** (Варна), **Лъчезар Ралчев** (СМГ)

7. клас

Първа награда: **Давид Йорданов** (СМГ)

Втора награда: **Веселин Маркович** (Варна), **Александра Цветанова** (СМГ), **Никола Гюлев** (Пловдив)

Трета награда: **Александър Коджабашийски** (СМГ), **Ванеса Калинкова** (Бургас), **Демира Недева** (Пловдив), **Емилия Иванова** (Бургас), **Йоана Младенова** (Бургас), **Калоян Цанев** (ПЧМГ), **Калоян Кирилов** (СМГ), **Лазар Тодоров** (СМГ), **Марио Фотев** (Бургас), **Мария Тодорова** (Варна), **Николай Николаев** (Видин), **Петър Узунов** (Пловдив), **Сияна Майсторова** (Бургас), **Стефан Спасов** (СМГ)

8. клас

Първа награда: **Деян Хаджи-Манич** (Варна), **Марин Христов** (СМГ)

Втора награда: **Николай Георгиев** (Силистра), **Антон Бресковски** (СМГ), **Енислав Николов** (СМГ)

Трета награда: **Мария Дренчева** (СМГ), **Светослав Развигоров** (СМГ), **Ясен Пенчев** (Габрово), **Борис Гачевски** (СМГ), **Елена Димитрова** (СМГ), **Мартин Денев** (Бургас), **Георги Илиев** (София, 138. СУЗИЕ)

9. клас

Първа награда: **Божидар Димитров** (Силистра), **Иван Тагарев** (СМГ)
Втора награда: **Никола Цачев** (ПЧМГ), **Жара Еленска** (СМГ), **Божидар Паньов** (СМГ)
Трета награда: **Георги Начев** (СМГ), **Ивайла Радкова** (София, 125. СУ), **Илияс Башир Номан** (СМГ)

10. клас

Първа награда: **Борислав Кирилов** (ПЧМГ), **Мартин Копчев** (Габрово)
Втора награда: **Валери Ванков** (Американски колеж), **Георги Златинов** (СМГ), **Милко Бакалов** (СМГ)
Трета награда: **Георги Петков** (ПЧМГ), **Ангел Райчев** (София, 125. СУ), **Десислава Николова** (СМГ), **Мартин Димитров** (София, 125. СУ), **Стефанка Манахова** (СМГ), **Любослав Стефанов** (ПЧМГ), **Филип Тодоров** (СМГ), **Румяна Иванова** (СМГ)

11. клас

Първа награда: **Светлин Лалов** (СМГ), **Кьонг Виет До** (СМГ)
Втора награда: **Михаела Гледачева** (ПЧМГ), **Йордан Илиев** (СМГ), **Виктор Колев** (СМГ), **Любен Балтаджиев** (Хасково), **Стефан Хаджистойков** (СМГ)
Трета награда: **Владимир Петков** (СМГ), **Мартин Василев** (СМГ), **Анна Михалкова** (СМГ), **Никола Коларов** (Бургас), **Борис Горанов** (СМГ), **Калоян Фачиков** (СМГ), **Марина Бояджиева** (Бургас), **Никола Стайков** (СМГ), **Маргарита Стефанова** (СМГ)

12. клас

Първа награда: **Евгени Кайряков** (СМГ), **Кристиан Минчев** (Бургас)
Втора награда: **Петър Лангов** (СМГ), **Димитър Чакъров** (Пловдив), **Димитър Опърлаков** (Варна)
Трета награда: **Владимир Железарски** (СМГ), **Добрин Бараков** (Плевен), **Мартин Димитров** (СМГ), **Алек Димитров** (ПЧМГ)

Задачите са предложени от: 5.1 – Стоян Ненков, 5.2 и 5.4 – Иван Ангелов, 5.3 и 7.2 – Невена Събева, 6.1 и 6.3 – Петър Бойваленков, 6.2 – Диана Данова, 6.4, 7.1. и 7.3. – Емил Колев, 7.4 – Александър Иванов, 8.1, 8.2 – Таня Стоева; 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Александър Иванов и Станислав Харизанов; 9.4 – Кирил Бангачев и Станислав Харизанов; 10.1, 10.3, 10.4 – Стефан Герджиков; 10.2 – Емил Колев; 11.1 – Стоян Боев; 11.2, 11.4 – Иван Ланджев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов.

МАГИЯТА НА ЗАДАЧИТЕ С МНОГО РЕШЕНИЯ

(*Проумяване на „появата“ на задача*)

Хари Алексиев

Ако искате да се потопите в атмосферата на обещанието от горното заглавие и неговото подзаглавие предлагам първо да се опитате самостоятелно да решите следната

Задача. За триъгълника ABC височинитеAA', BB' се пресичат в точката H. Ако е известно, че $\dfrac{CH}{HC'} = 5$ и $AA' = 2\sqrt{2}$, $BB' = 3$, да се намери $\sphericalangle BCA$, страните на тригълника ABC и лицето му.

Вероятно има засечка в търсенето и получаването на решението ѝ. Ако не е така, то опитайте да получите друго, различно решение.

В случай, че имате затруднение, запознайте с изложеното тук първо решение.

Решение 1. (Фокусиране на „разпилените данни“)

Нека H е ортоцентърът за този триъгълник. Точката H разбива триъгълника $\triangle ABC$ на три триъгълника със сбор на лицата $[ABC]$, т.е.

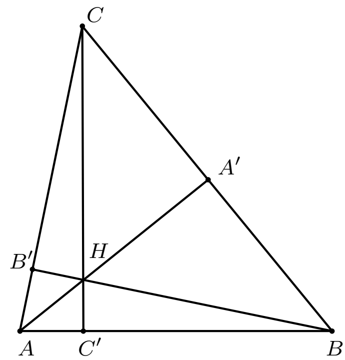
$$[ABH] + [BCH] + [CAH] = [ABC]\,,$$

$$\frac{[ABH]}{[ABC]} + \frac{[BCH]}{[ABC]} + \frac{[CAH]}{[ABC]} = 1,$$

$$\frac{HC'}{CC'} + \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} = 1,$$

$$\frac{1}{6} + \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} = 1,$$

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} = \frac{5}{6}.$$



За удобство въвеждаме означенията $HA' = x$ и $HB' = y$. Тогава, тъй като $AA' = 2\sqrt{2}$ и $BB' = 3$, последното равенство приема вида

$$\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}.$$

От това, че точките A, B, A', B' лежат на окръжност с диаметър AB имаме, че

$$AH.HA' = BH.HB' \quad \text{или} \quad x\left(2\sqrt{2} - x\right) = y\,(3 - y)\,.$$

Сега да решим системата: $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{6}$; $x\left(2\sqrt{2} - x\right) = y\,(3 - y)$. Като изразим y от първото уравнение и заместим във второто, получаваме квадратното уравнение

$$x^2 + 4x\sqrt{2} - 5 = 0,$$

чиито решения са $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -5\sqrt{2} < 0$. Следователно $x = \sqrt{2}$ и $y = 1$.

Разглеждаме правоъгълния триъгълник $BA'H$. В него $HA' = \sqrt{2}BH = BB' - HB' = 3 - 1 = 2$, и затова $BA' = \sqrt{2}$, т.е. $\sphericalangle A'BH = 45^\circ$. Следователно, $\sphericalangle BCB' = A'BH = 45^\circ$, т.е. $\sphericalangle BCA = 45^\circ$.

От правоъгълния триъгълник $BB'C$ с $\sphericalangle BCB' = 45^\circ$ и $BB' = 3$ получаваме, че $BC = 3\sqrt{2}$. Тогава $[ABC] = \dfrac{1}{2}BC.AA' = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{2}.2\sqrt{2} = 6$.

Ако въпреки всичко нямате идея за собствено решение, преминете към изложеното тук.

Евристика за новото решение е, как да свържем дадените височини $h_a = 2\sqrt{2}$ и $h_b = 3$ съответно към страните a и b. Една възможност е:

$$2S = ab\sin C = \frac{2S}{h_a}\cdot\frac{2S}{h_b}\cdot\sin C,$$

$$1 = \frac{2S}{h_a h_b}\cdot\sin C = \frac{2S}{6\sqrt{2}}\cdot\sin C \Longrightarrow S = \frac{3\sqrt{2}}{\sin C}.$$

Значи е достатъчно да знаем ъгъл C на триъгълника ABC. Това ще постигнем в следващите решения.

Решение 2. (Косинусова теорема)

Не е трудно да се докаже, че $CH = 2R\cos C$, $HC_1 = 2R\cos A\cos B$. От това, че $CH : HC_1 = 5 : 1$ следва, че

$$\cos C = 5\cos A\cos B. \tag{1}$$

Понеже $\cos C = -\cos(A + B) = -\cos A\cos B + \sin A\sin B$, то

$$\sin A\sin B = 6\cos A\cos B = \frac{6}{5}\cos C. \tag{2}$$

Според косинусовата теорема $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ и това, че $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, имаме:

$$2\cos C = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} \Longrightarrow 2\cos C = \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B} \Longrightarrow$$

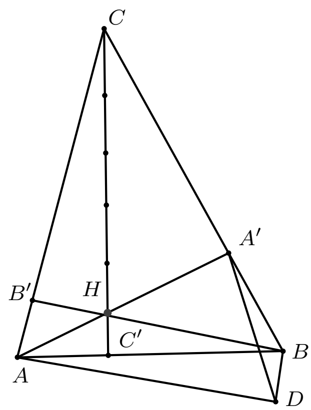
$$2\cos C = \frac{17}{6\sqrt{2}} - \frac{1 - \cos^2 C}{\frac{6}{5}\cos C} \Longrightarrow 7\sqrt{2}\cos^2 C - 17\cos C + 5\sqrt{2} = 0.$$

От полученото квадратно уравнение намираме $\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. (Другият корен на уравнението е $\dfrac{20}{14\sqrt{2}} = \dfrac{10}{7\sqrt{2}} > 1$ и не води до решение.)

Решение 3. (Допълнително построение)

Построяваме правоъгълника $AB'BD$. Тогава $AA'BD$ е вписан в окръжност с диаметър AB и затова имаме

$$AD = 3, \quad AA' = 2\sqrt{2},$$
$$\sphericalangle DAA' = \sphericalangle C \quad \sphericalangle ADA' = \sphericalangle B.$$



Тогава според синусовата теорема за триъгълника ADA' имаме:

$$\frac{A'D}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{3}{\sin A}.$$

От свойството на пропорциите имаме:

$$\frac{A'D^2}{\sin^2 C} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin A \sin B} \Longrightarrow$$

$$A'D^2 = \frac{6\sqrt{2}\left(1-\cos^2 C\right)}{\sin A \sin B} = \frac{6\sqrt{2}\left(1-\cos^2 C\right)}{\dfrac{6}{5}\cos C} = \frac{5\sqrt{2}\left(1-\cos^2 C\right)}{\cos C}. \tag{3}$$

От друга страна, според косинусовата теорема за този триъгълник

$$A'D^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2.2\sqrt{2}.3.\cos C = 17 - 12\sqrt{2}\cos C \tag{4}$$

От (3) и (4) следва, че $17 - 12\sqrt{2}\cos C = \dfrac{5\sqrt{2}\left(1-\cos^2 C\right)}{\cos C}$ или $\cos C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Оттук насетне нещата са ясни.

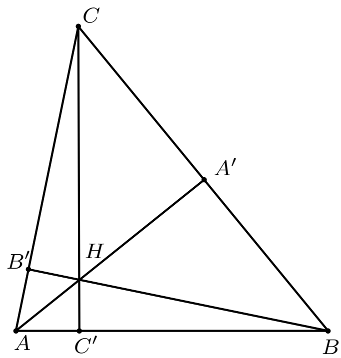
Решение 4. (Формално решение)

Според теоремата на Менелай за триъгълника $BC'C$ и правата AA' имаме

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CH}{HC'} \cdot \frac{C'A}{AB} = 1 \Longrightarrow \frac{c.\cos B}{b\cos C} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{b\cos A}{c} = 1.$$

Тогава $\cos C = 5\cos A \cos B$.

За радиуса R на описаната около ABC окръжност знаем, че



$$AH = 2R\cos A \text{ и т.н.}$$

$$HA' = 2R\cos B\cos C \text{ и т.н.}$$

Тогава

$$2\sqrt{2} = AH + HA' = 2R\left(\cos A + \cos B\cos C\right)$$

$$3 = BH + HB' = 2R\left(\cos B + \cos C\cos A\right).$$

Ето защо

$$2R\left(\cos A + \cos B\cos C\right) = 2\sqrt{2}$$

$$2R\left(\cos B + \cos C\cos A\right) = 3.$$

Решаваме системата от горните две уравнения и намираме

$$\cos A = \frac{2\sqrt{2} - 3\cos C}{2R\sin^2 C}, \quad \cos B = \frac{3 - 2\sqrt{2}\cos C}{2R\sin^2 C}.$$

Но $\cos C = 5\cos A\cos B$ и затова

$$\frac{\cos C}{5} = \cos A\cos B = \frac{2\sqrt{2} - 3\cos C}{2R\sin^2 C}.\frac{3 - 2\sqrt{2}\cos C}{2R\sin^2 C},$$

$$4R^2\sin^2 C\sin^2 C\frac{\cos C}{5} = \left(2\sqrt{2} - 3\cos C\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\cos C\right),$$

$$c^2\sin^2 C\frac{\cos C}{5} = 6\sqrt{2}\cos^2 C - 17\cos C + 6\sqrt{2}.$$

От друга страна, около четириъгълника $ABA'B'$ може да се опише окръжност и затова по теоремата на Птолемей имаме:

$$AA'.BB' = AB'.BA' + AB.A'B'.$$

Оттук получаваме

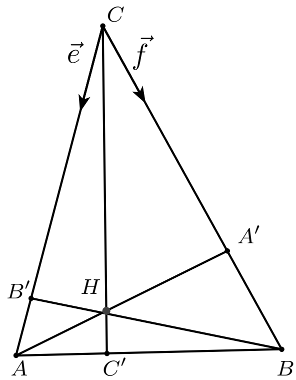
$$6\sqrt{2} = c\cos A.c\cos B + c.c\cos C = \frac{6}{5}c^2\cos C \Longrightarrow c^2\cos C = 5\sqrt{2}.$$

Тогава равенството $c^2\sin^2 C\dfrac{\cos C}{5} = 6\sqrt{2}\cos^2 C - 17\cos C + 6\sqrt{2}$ приема вида

$$\sqrt{2}\left(1 - \cos^2 C\right) = 6\sqrt{2}\cos^2 C - 17\cos C + 6\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{2}\cos^2 C - 17\cos C + 5\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow \cos C = \frac{17 \pm 3}{14\sqrt{2}}.$$

Оттук $\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Другият корен е по-голям от 1 и не води до решение. Вече не е трудно да се намерят страните на триъгълника.



Решение 5. (Векторен подход)

Избираме върху вектора $\overrightarrow{CA}$ единичен вектор $\overrightarrow{e}$ с начало върха C и единичен вектор $\overrightarrow{f}$ от вектора $\overrightarrow{CB}$ със същото начало. Тогава

$$\overrightarrow{CA} = b.\overrightarrow{e}, \quad \overrightarrow{CB} = a.\overrightarrow{f},$$

където $a = \left|\overrightarrow{CB}\right|$, $b = \left|\overrightarrow{CA}\right|$.

Поради това, че

$$\overrightarrow{AC'} = \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = b\cos A.\frac{\overrightarrow{AB}}{c} = \frac{b\cos A}{c}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)$$

имаме

$$\overrightarrow{AC'} = -\frac{b^2}{c}\cos A.\overrightarrow{e} + \frac{ab}{c}\cos A.\overrightarrow{f}.$$

От условието на задачата имаме $\dfrac{CH}{HC'} = 5$ и затова от триъгълника CAC' имаме векторното равенство

$$\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC'} = -\frac{b}{6}\left(\frac{5b}{c}\cos A + 1\right)\overrightarrow{e} + \frac{b}{6}.\frac{5a}{c}\cos A.\overrightarrow{f}.$$

От това, че $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{f}$, след скаларно умножение на тези вектори получаваме, че

$$\frac{b}{6}\left(\frac{5a}{c}\cos A - \frac{5b}{c}\cos A\cos C - \cos C\right) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{5a}{c}\cos A - \frac{5b}{c}\cos A\cos C - \cos C = 0.$$

От последното имаме, че

$$5\cos A = \frac{c\cos C}{a - b\cos C}. \tag{5}$$

Аналогично от триъгълника CBC' имаме векторното равенство

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BC'} = -\frac{a}{6}\overrightarrow{f} + \frac{5a}{6}\cos B\left(\frac{\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}}{c}\right) =$$

$$= -\frac{a}{6}\overrightarrow{f} + \frac{5a}{6}\cos B\left(\frac{b.\overrightarrow{e} - a.\overrightarrow{f}}{c}\right)$$

или

$$\overrightarrow{BH} = \frac{5ab}{6c}\cos B.\overrightarrow{e} - \frac{a}{6}\left(1 + \frac{5a}{c}\cos B\right)\overrightarrow{f}.$$

От това, че $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{e}$, след скаларно умножение на тези вектори получаваме, че

$$\frac{6}{a}\left(-\cos C - \frac{5a}{c}\cos B\cos C + \frac{5b}{c}\cos B\right) = 0$$

или

$$-\cos C - \frac{5a}{c}\cos B\cos C + \frac{5b}{c}\cos B = 0.$$

Тогава

$$\cos B = \frac{5\,(b - a\cos C)\cos C}{c\cos C}. \tag{6}$$

Умножавайки (5) и (6) получаваме, че

$$\frac{5(b - a\cos C)}{a - b\cos C} = 5\cos A\cos B = \cos C$$

$$\frac{5\left(\dfrac{b}{a} - \cos C\right)}{1 - \dfrac{b}{a}\cos C} = \cos C.$$

Но $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и затова

$$\frac{1}{5}\cos C = \frac{2\sqrt{2} - \cos C}{3 - 2\sqrt{2}\cos C}.$$

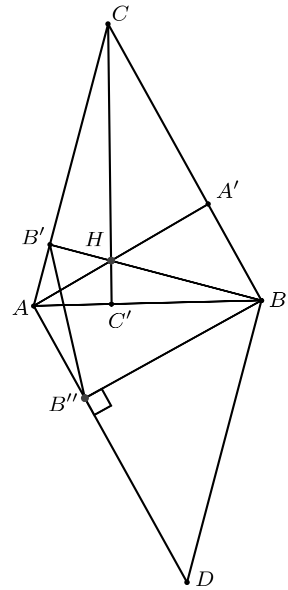
Последното уравнение е равносилно на

$$2\sqrt{2}\cos^2 C + 18\cos C - 10\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow \cos C = \frac{-9 \pm 11}{2\sqrt{2}}.$$

Не е трудно да се съобрази, че $\cos C = \dfrac{-9 + 11}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. А това е достатъчно да твърдим, че задачата е решена.

Решение 6. (Допълване)

Построяваме успоредника $BCAD$. Около $BB'AB''$ може да се опише окръжност, където $BB' \perp CA$ и $BB'' \perp AD$.



За триъгълника $BB'B''$ имаме

$$BB' = 3,\ BB'' = AA' = 2\sqrt{2},$$

$\sphericalangle B'BB'' = \sphericalangle C$. Тогава по косинусовата теорема

$$B'B''^2 = BB'^2 + BB''^2 - 2BB'.BB'' \cos C$$

или

$$\left(B'B''\right)^2 = 3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2.3.2\sqrt{2}.\cos C =$$

$$= 17 - 12\sqrt{2}\cos C.$$

Следователно $B'B'' = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}\cos C}$. Освен това $BB'' = 2\sqrt{2}$, $BB' = 3$, $AB = c, AB'' = c\cos B$. По теоремата на Птоломей имаме $AB.B'B'' = AB''.BB' + AB'.BB''$, т.е.

$$c\sqrt{17 - 12\sqrt{2}\cos C} = (c\cos B).3 + (c.\cos A)\, 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}\cos C} = 3\cos B + 2\sqrt{2}\cos A$$

$$17 - 12\sqrt{2}\cos C = 8\cos^2 A + 12\sqrt{2}\cos A\cos B + 9\cos^2 B$$

$$17 - 12\sqrt{2}\cos C = 8\cos^2 A + \frac{12}{5}\sqrt{2}\cos C + 9\cos^2 B$$

$$\frac{85 - 72\sqrt{2}}{5}\cos C = 8\cos^2 A + 9\cos^2 B.$$

От друга страна, около четириъгълника $ABA'B'$ може да се опише окръжност и затова по теоремата на Птоломей имаме:

$$AA'.BB' = AB'.BA' + AB.A'B'.$$

Но $AA' = 2\sqrt{2}$, $BB' = 3$, $AB' = c\cos A$, $BA' = c\cos B$,$AB = c$, $A'B' = c\cos C$ и затова

$$6\sqrt{2} = c\cos A.c\cos B + c.c\cos C$$

$$6\sqrt{2} = c\cos A.c\cos B + c.c\cos C = \frac{6}{5}c^2\cos C$$

$$\frac{6}{5}c^2\cos C = 6\sqrt{2} \quad \text{или} \quad c^2\cos C = 5\sqrt{2}.$$

От $3 = BB' = BH + HB' = 2R\cos B + 2R\cos C\cos A$ имаме, че

$$9 = 4R^2\cos^2 B + 8R^2\cos A\cos B\cos C + 4R^2\cos^2 C\cos^2 A.$$

Анлогично от $2\sqrt{2} = AA' = AH + HA' = 2R\cos A + 2R\cos B\cos C$ получаваме

$$8 = 4R^2\cos A + 8R^2\cos A\cos B\cos C + 4R^2\cos^2 B\cos^2 C.$$

Тогава

$$1 = 9 - 8 = 4R^2\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right) + 4R^2\cos^2 C\left(\cos^2 A - \cos^2 B\right),$$

$$1 = 4R^2\left(1 - \cos^2 C\right)\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right),$$

$$4R^2\sin^2 C\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right) = 1,$$

$$c^2\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right) = 1.$$

Но $c^2\cos C = 5\sqrt{2}$ или $c^2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\cos C} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos A\cos B}$. Ето защо горното равенство има вида

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos A\cos B}\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right) = 1,$$

$$\frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos A\cos B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \frac{\cos B}{\cos A} - \frac{1}{\dfrac{\cos B}{\cos A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Нека $\dfrac{\cos B}{\cos A} = t$. Тогава $t - \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$или $2t^2 - 2 = t\sqrt{2}$. Нещо повече,

$$\left(\sqrt{2}t\right)^2 - \left(t\sqrt{2}\right) - 2 = 0.$$

Следователно $t\sqrt{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$.

Ако $t\sqrt{2} = 2$, то $\dfrac{\cos B}{\cos A} = \sqrt{2}$ или $\cos^2 B = 2\cos^2 A$. Тогава

$$\frac{85 - 72\sqrt{2}}{5}\cos C = 8\cos^2 A + 9\cos^2 B = 26\cos^2 A,$$

$$\cos C = 5\cos A\cos B = 5\sqrt{2}\cos^2 A.$$

Ако $t\sqrt{2} = -1$, то $\dfrac{\cos B}{\cos A} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Това е невъзможно, защото триъгълникът е остроъгълен.

Така получихме следната

Задача. За триъгълника ABC височините AA', BB' се пресичат в точката H. Ако е известно, че $\dfrac{CH}{HC'} = 5$ и $AA' = 2\sqrt{2}$, $BB' = 3$, да се намери:

А) $\dfrac{\cos A}{\cos B}$;

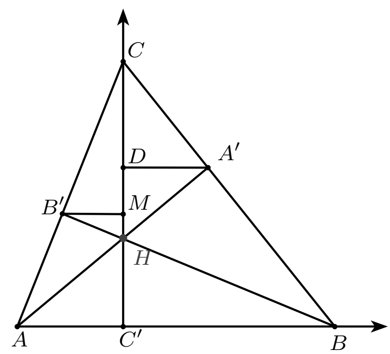
Б) $\cos A + \cos B + \cos C$.

Решение 7. (Конструктивно решение)

Идеята на това решение е *да построим такъв триъгълник.* За целта постъпваме така. Избираме си една права p и точка C' от нея и издигаме перпендикуляр q към p така, че за точка C от нея да имаме $CC' = 12x$, където x е избрана единична отсечка (единична мярка). Между точките C и C', от втората към първата, избираме последователно точките H, M и D така, че $C'H = 2x$, $C'M = 3x$, $C'D = 4x$.

В полуравнината на правата CC', съдържаща върха B, построяваме $DA' \perp CC'$ така, че $DA' = 4x$, а в другата полуравнина на CC', съдържаща върха A, построяваме $MB' \perp CC'$ и $MB' = 3x$.

Нека $A = p \cap HA'$,$B = p \cap HB'$. От еднаквостта на триъгълниците HDA' и $HC'A$ следва, че $AC' = 4x$. От подобието на триъгълниците HMB' и $HC'B$ следва, че $BC' = 6x$.



Разглеждаме правоъгълната координатна система $BC'C$ с абсцисна ос $\overrightarrow{C'B}$ и ординатна ос $\overrightarrow{C'C}$. Спрямо тази координатна система имаме:

$$A'\,(4x; 4x),\ B'\,(-3x; 3x),\ C\,(0; 12x),\ H\,(0; 2x),\ M\,(0; 3x), A\,(-4x; 0),\ B\,(6x; 0).$$

Известно е, че $A\,(-4x; 0)$. Ще покажем, че $A\,(-4x; 0) \in CB'$. Наистина правата CB' е определена от точките $C\,(0; 12x)$ и $B'\,(-3x; 3x)$ и затова има уравнение

$$CB' : y = 3t + 12x.$$

Очевидно е, че точката $A\,(-4x; 0)$ лежи на правата $CB' : y = 3t + 12x$. Ще покажем, че $A\,(-4x; 0)$ лежи и на правата определена от точките $H\,(0; 2x)$ и $A'\,(4x; 4x)$. Наистина,

$$HA' : y = \frac{1}{2}t + 2x$$

и точката $A\left(-4x;0\right)$ е от нея.

Аналогично, $B\left(6x;0\right)$. Ще покажем, че $B\left(6x;0\right)\in CA'$. Наистина, правата CA' е определена от точките $C\left(0;12x\right)$ и $A'\left(4x;4x\right)$и затова има уравнение

$$CA':y=-2t+12x.$$

Очевидно е, че точката $B\left(6x;0\right)$ е от тази права.

Да съобразим, че триъгълникът ABC е искания триъгълник при определено x. Наистина, имаме

$$\overrightarrow{AB}\left(10x;0\right),\ \overrightarrow{AC}\left(4x;12x\right),\ \overrightarrow{BC}\left(-6x;12x\right),\ \overrightarrow{AA'}\left(8x;4x\right),\ \overrightarrow{BB'}\left(-9x;3x\right)$$

и следователно $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=-48x+48x=0$, т.е. $AA'\perp BC$. По същия начин, $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AC}.=-36x+36x=0$, т.е. $BB'\perp AC$. Освен това

$$CH:HC'=10x:2x=5:1.$$

Значи този триъгълник е подобен на дадения. Подобието е еднаквост при:

$$2\sqrt{2}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{64x^2+16x^2}=4x\sqrt{5}\text{ и}$$

$$3=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\sqrt{81x^2+9x^2}=3x\sqrt{10}.$$

Това съгласуване е налице при $x\sqrt{10}=1$. Тогава $AC=4$, $BC=3\sqrt{2}$, $AB=\dfrac{10}{\sqrt{10}}x\sqrt{10}=\sqrt{10}$.

Но $\overrightarrow{CA'}\left(4x;-8x\right)$ и затова

$$CA'=4x\sqrt{5}=\frac{4}{\sqrt{2}}x\sqrt{10}=2\sqrt{2}=AA',$$

или триъгълникът $AA'C$ е равнобедрен и правоъгълен, т.е. $ACB=45^\circ$.

Ще отбележа, че за мен последното решение е първият случай, при който решавам изчислителна задача с построение на дадения триъгълник.

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ЕСЕННИЯ ТУРНИР

Зорница Христова

12. клас, ППМГ „Акад. Иван Ценов“, Враца

Задачите от последния Есенен математически турнир ме провокираха да потърся решения, различни от тези, които са предложени от авторите (*и които може да намерите в статията за турнира в този брой на списанието – бел. ред.*). Предлагам моето решение на геометричната задача за девети клас.

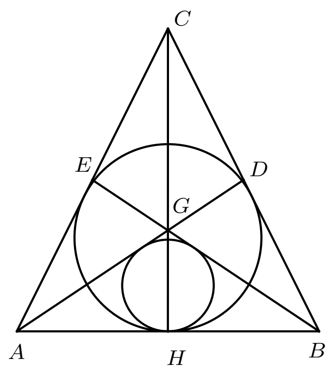
Задача 9.2. Даден е триъгълник ABC, в който медианите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка G. Ако вписаната в триъгълник ABC окръжност и вписаната в триъгълник AGB окръжност се допират до страната AB в една и съща точка, да се докаже, че триъгълник ABC е равнобедрен.

Решение. Нека дадените окръжности допират AB в точка H. При традиционните означения в триъгълник, имаме $AG = \frac{2}{3}m_a$, $BG = \frac{2}{3}m_b$ и следователно

$$AH = \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{2}{3}m_a - \frac{2}{3}m_b\right),$$

откъдето

$$m_a - m_b = \frac{3}{2}(b-a).$$



Ще използваме формулите за медианите и ще ги извадим:

$$\left|\begin{array}{l} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \end{array}\right. \Longrightarrow 4(m_a^2 - m_b^2) = 3(b^2 - a^2).$$

Да запишем последното равенство във вида

$$4(m_a - m_b)(m_a + m_b) = 3(b-a)(b+a)$$

и да заместим с $m_a - m_b = \dfrac{3}{2}(b-a)$. Получаваме

$$4 \cdot \frac{3}{2}(b-a)(m_a+m_b) = 3(b-a)(b+a).$$

Ако допуснем, че $b \neq a$, може да разделим двете страни на полученото равенство на $(b-a)$ и стигаме до

$$m_a + m_b = \frac{1}{2}(a+b).$$

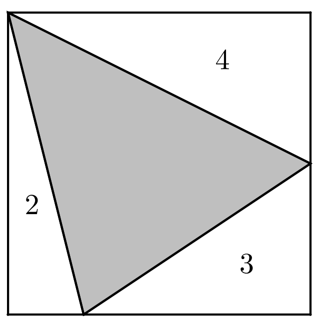
Последното обаче е невъзможно, тъй като от неравенството на триъгълника за $\triangle ADC$ и $\triangle BEC$ имаме

$$\left| \begin{array}{l} m_a + \dfrac{1}{2}a > b \\ m_b + \dfrac{1}{2}b > a \end{array} \right. \Longrightarrow m_a + m_b > \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Полученото противоречие се дължи на допускането, че $b \neq a$. Следователно $b = a$, т.е. даденият триъгълник е равнобедрен.

За любителите на геометрията предлагаме една красива задача, която ни изпрати *Димитър Георгиев.*

Квадрат е разделен на четири триъгълника, както е показано на чертежа. В три от тези триъгълници са записани лицата им, съответно 2, 3 и 4. Колко е лицето на оцветения триъгълник?



Ще се радваме да споделите с нас Вашите решения!

ДВАНАДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 11. И 12. КЛАС

Димитър Цветков, Любомир Христов,
Николай Горчев, Виктория Бенчева

На 10 март 2019 г. се проведе поредният дванадесети Математически турнир на Великотърновския университет "Св. св. Кирил и Методий" за ученици от 11. и 12. клас, организиран съвместно с Регионалния инспекторат по образованието и секция „Великотърновски университет" към Съюза на математиците в България (виж например [1], [2], [3], [4], [5]).

В турнира участие взеха 83 ученици от градовете Велико Търново, Горна Оряховица, Павликени, Габрово, Севлиево, Русе, Попово, Червен бряг, Дупница и Елхово. Бяха наградени 5 участници, които получиха един златен, един сребърен и три бронзови медала. Победител в турнира с резултат от 97 точки стана Моника Светозарова Ламбева от 12. клас на ПМГ „Акад. Иван Гюзелев" – Габрово, която спечели златния медал.

Сребърен медал беше присъден на: Цветомир Мирославов Гълъбов (94 точки), ученик в 12. клас на ПМГ „Васил Друмев", Велико Търново.

Бронзов медал получиха: Христо Христов Тодоров (82 точки) от 12. клас на ПМГ „Васил Друмев" – Велико Търново; Кристиана Атанасова Атанасова (80 точки) от 12 клас на ПМГ „Васил Друмев" – Велико Търново и Димитър Пламенов Иванов (76 точки) от 11. клас на ПМГ „Васил Друмев" – Велико Търново.

Награда на журито за оригинално решение на допълнителната задача не беше присъдена, тъй като нямаше участник, който да е решил задача 21.

Общият максимален брой точки е 120, като резултатът на всички участници се преобразува в оценка по шестобалната система. За учениците от 11. клас тази оценка е валидна за кандидатстване през 2020 година, а за учениците от 12. клас оценката е валидна за кандидатстване през 2019 и 2020 година за специалностите ***Информатика, Компютърни науки, Софтуерно инженерство, Педагогика на обучението по математика и информатика, Приложна математика*** и ***Информационно брокерство и дигитални медии*** на факултет „Математика и информатика" на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий".

Темата се състоеше от 21 задачи — 20 по формата за кандидатстудентски изпит по математика (тест) и една допълнителна задача. Решилите допълнителната задача се състезаваха за наградата на журито.

Задачите от 1 до 20 са от три типа:

• **дванадесет** тестови задачи от затворен тип, с номера от 1 до 12, с четири възможни отговора, от които само един е верен.

• **пет** тестови задачи със свободен отговор, с номера от 13 до 17, на които кандидат-студентът записва само отговора.

• **три** задачи, с номера 18, 19 и 20, решенията на които с необходимите обосновки се представят в писмен вид.

Задача 21 - задачата на журито е с повишена трудност, както е прието да се дава на математически състезания за ученици от 11. и 12. клас.

Различните начини на решение (при наличие на такива) се оценяват равностойно. При наличие на повече от един начин на решение на дадена задача в писмената работа на участника се зачита само един от тях.

Беше изтеглена тема със следните задачи:

ПЪРВА ЧАСТ

1. Стойността на израза $A = \sqrt{\left(4 - 6\sqrt{2}\right)^2} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^3$ е равна на:

А) $-11 + 9\sqrt{2}$ **Б)** $3 + \sqrt{2}$ **В)** $3 + 7\sqrt{2}$ **Г)** $3 - \sqrt{2}$

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ е:

А) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ **Б)** $x \in (2; +\infty)$

В) $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$ **Г)** $x \in [0; +\infty)$

3. Числата -5 и 1 са корекни на уравнението:

А) $x^2 + 4x - 5 = 0$ **Б)** $x^2 - 6x + 5 = 0$

В) $x^2 - 2x - 5 = 0$ **Г)** $x^2 - 4x - 5 = 0$

4. На колко е равно най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$x + 3x^2 \leq 3(x^2 - 2) + 5x?$$

А) 1 **Б)** -1 **В)** 2 **Г)** друг отговор

5. Разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 16$ в интервала $[1; 3]$ е:

А) 9 **Б)** 8 **В)** 1 **Г)** -8

6. За геометрична прогресия е известно, че $a_5 = -48$ и $a_8 = 384$. Първият член на прогресията е:

А) -2 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** -3

7. Стойността на израза $\dfrac{3\cos 140^\circ}{\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ}$ е:

А) 3 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** $\dfrac{3}{2}$

8. От кашон, в който има 6 бели и 10 черни рамки за снимки се изваждат по случаен начин три рамки, без връщане. Каква е вероятността една от тях да е бяла и две от тях да са черни?

А) $\dfrac{12}{56}$ **Б)** $\dfrac{15}{56}$ **В)** $\dfrac{27}{56}$ **Г)** $\dfrac{54}{56}$

9. В триъгълник ABC са дадени ъгъл $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и височините към страните AB и AC с дължини съответно 4 и $3\sqrt{3}$. Страните на триъгълника са:

А) $2\sqrt{7}; 6; 8$ **Б)** $2; 6\sqrt{3}; 8$ **В)** $2\sqrt{7}; 6\sqrt{3}; 8$ **Г)** $2; 6; 8$

10. За правоъгълния триъгълник ABC е дадено, че CM е медианата към хипотенузата с дължина 8 и ъгъл $\sphericalangle ABC = 75^\circ$. Височината CD към хипотенузата е равна на:

А) 2 **Б)** 16 **В)** 6 **Г)** 4

11. Основата на права призма е равнобедрен триъгълник с основа 18 и височина към нея, равна на височината на призмата. Да се намери височината на призмата, ако обемът ѝ е 1296.

А) 9 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 6

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 24 и околен ръб 15. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е равно на:

А) 324 **Б)** 216 **В)** 144 **Г)** 432

ВТОРА ЧАСТ

13. Даден е $\triangle ABC$, $\sphericalangle C = 90^\circ$. Ъглополовящата на $\sphericalangle C$ пресича AB в точка L, като $AL : BL = 3 : 4$. Продължението на CL пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка M и $BM = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. Ако радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е равен на 1, намерете страните на $\triangle ABC$ и лицето на $\triangle BMC$.

14. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е ромбът $ABCD$ с остър ъгъл $\sphericalangle A$ с големина α и лице, равно на S. Равнината, минаваща през точките B, D и C_1 сключва с равнината на основата ъгъл с големина β. Намерете обема на призмата.

15. Точка M е среда на страната AC на $\triangle ABC, MN$ е симетралата на AC, $\sphericalangle MNC = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCN = 2\sphericalangle BAC$. Ако $BN = 4$, намерете лицето на $\triangle ABC$.

16. Намерете първия член и разликата на аритметична прогресия, за която:

$$\left| \begin{array}{l} S_n - a_1 = 75 \\ S_n - a_n = 57 \\ S_n - a_1 - a_2 - a_{n-1} - a_n = 33 \end{array} \right. .$$

17. Да се реши уравнението $\dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} + \dfrac{1}{2x-x^2} = 0$

ТРЕТА ЧАСТ

18. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AL ($L \in BC$) на $\sphericalangle A$, височината CH ($H \in AB$) и ъглополовящата CK ($K \in AB$) на $\sphericalangle HCB$. Правите AL и CK се пресичат в точка P, а точка M е среда на AC. Ако $BC = 3, CH = \dfrac{12}{5}, PM = HM$, намерете страните и лицето на $\triangle ABC$.

19. В урна има бели и черни топки. По случаен начин се вадят 2 топки без връщане. Ако вероятността за изваждане на две топки с различен цвят е равна на $\dfrac{8}{15}$, а белите топки са с 1 повече от черните, намерете вероятността да извадим две бели топки.

20. Намерете стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{ax+7}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}}$ има минимум при $x = 6$.

21. Допълнителна задача (задача на журито) Даден е правоъгълникът $ABCD, \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$. Точката M лежи на страната BC, а точката N лежи на страната CD, при което $BM : MC = 1 : 2$ и $CN = ND$. Нека BN и AM се пресичат в точка P, а BN и DM се пресичат в точка Q. Да се намери лицето на правоъгълника $ABCD$, ако е известно, че лицето на триъгълника $\triangle PQM$ е равно на 6.

Отговори на задачи от 1 до 12:

1. Б; **2.** В; **3.** А; **4.** А; **5.** Б; **6.** Г; **7.** А; **8.** В; **9.** В; **10.** Г; **11.** Б; **12.** Г.

Отговори на задачи от 13 до 17:

13. Страните са 3,4,5, $S_{\triangle BMC} = 7$;

14. $V = \dfrac{S}{2}\text{tg}\beta.\sqrt{2S.\text{cotg}\dfrac{\alpha}{2}}, \left(\text{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$;

15. $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}$; **16.** $a_1 = 2, d = 3$; **17.** $x = 3$.

Отговори на задачи от 18 до 20:

18. $AB = 5, BC = 3, AC = 4, S_{\triangle ABC} = 6$; **19.** $p = \dfrac{4}{15}$; **20.** $a = 12$.

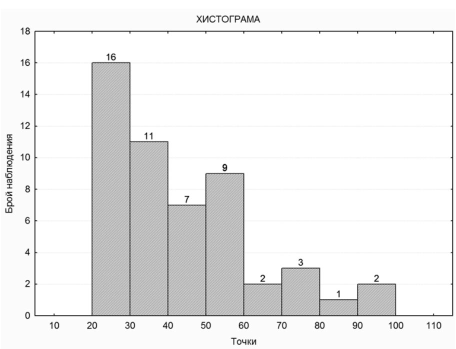
Отговор на допълнителната задача 21:

$S_{ABCD} = 336$.

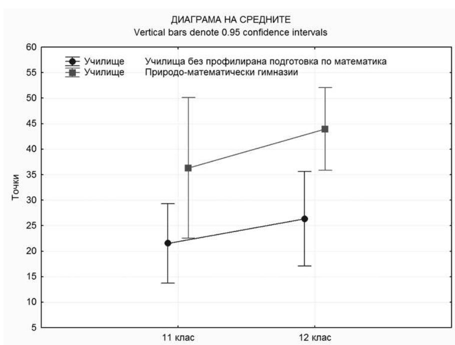
Слаба оценка получиха 32 ученика, показали резултат от 21 или по-малко точки за своите решения. Отличните оценки са сравнително малко. Общо на 5 ученика, получили 76 или повече точки, беше дадена отлична оценка, а първите двама в класирането имат оценка 6,00.

В общия брой от 51 ученика, получили положителни оценки (приравнени към 3.00 или повече), имаше 26 от природо-математически гимназии и 25 от гимназии без профилирана подготовка по математика. 22 от тях бяха от 11. клас, а останалите 29 от 12. клас, при зависимо взаимно разпределение $[chi - square(1) = 4.581; p - value = 0.032]$. Общото разпределение на положителните оцени е дадено на фигура 1.

Дисперсионният анализ върху всичките 83 участника показа статистически значим ефект на принадлежността към тип гимназия $[F(1, 79) = 10.337; p - value = 0.002]$. Ефектът на фактора клас се оказа статистически незначим $[F(1, 79) = 1.524; p - value = 0.221]$. Незначимо се оказа и взаимодействието между двата фактора $[F(1, 79) = 0.078; p - value = 0.781]$. Както можеше да се очаква, учениците от природо-математически гимназии показаха средно по-високи постижения в сравнение с учениците от други гимназии. Постиженията на учениците от 12. клас са средно по-високи в сравнение с тези от 11. клас, но ефектът не достига статистическа значимост. Резултатите са илюстрирани на фигура 2. Характерът на описаните ефекти е аналогичен с този от турнира през 2018 г.



Фиг. 1. Хистограма на разпределение на положителните оценки



Фиг. 2. Резултати от дисперсионния анализ

Събитието за поредна година се спонсорира от „Вали компютърс“ ООД и „Захарни изделия Варна“ ЕООД.

В работата по организацията се включиха активно преподаватели и студенти от факултет „Математика и информатика“ при ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Организацията на турнира беше подпомогната от софтуерните фирми от Велико Търново и страната, с който факултетът поддържа постоянни връзки и които редовно вземат участие в организацията на различни други турнири на ФМИ по програмиране и информационни технологии за ученици и студенти. Представители на тези фирми се включват също така в обучението на студентите най-вече с осигуряване на стажантски места и водене на различни приложни дисциплини.

Факултетът предлага програми в областта на математиката – „Приложна математика“, бакалавърска степен, и „Математически структури в информационната сигурност“, магистърска степен, които допълват трите бакалавърски програми в професионално направление „Информатика и компютърни науки“ и специалността „Математика и информатика“, подготвяща бъдещите учители.

Литература

[1] Буюклиева, С., П. Пиперков. Математически турнир на Великотърновския университет. Математика, 2014, №3, 42–45.

[2] Буюклиева, С., П. Пиперков. Математически турнир на Великотърновския университет. Математика, 2015, №3, 31–35.

[3] Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова. Девети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. Математика, 2016, №3, 25–30.

[4] Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова. Десети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. Математика, 2017, №4, 37–41.

[5] Цветков, Д., Л. Христов, Н. Горчев, В. Бенчева. Единадесети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. Математика, 2018, №6, 17–21.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

ЗА НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ В 10. КЛАС

1. Стойността на израза $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{8}$ е:

А) 3 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** $3+2\sqrt{2}$ **Г)** $7-2\sqrt{2}$

2. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2-4x-1=0$, то стойността на израза $x_1^2+x_2^2$ е:

А) 18 **Б)** 17 **В)** 16 **Г)** 14

3. Десетият член на аритметична прогресия, за която $a_1=-1$ и $a_2=3$, е равен на:

А) 26 **Б)** 29 **В)** 35 **Г)** 41

4. Ако $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$ и α е остър ъгъл, то $\cos\alpha$ е равно на:

А) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **В)** $\dfrac{-\sqrt{7}}{4}$ **Г)** $\dfrac{1}{4}$

5. Решенията на неравенството $(x^2-1)(x^2+2x-3)<0$ са числата от интервала:

А) $(-3;-1)$ **Б)** $(-3;1)$ **В)** $(-1;3)$ **Г)** $(1;3)$

6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{x}{x+1}$, стойността на израза $|x_1-x_2|$ е:

А) 2 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 9

7. Броят на корените на уравнението $(x-3)x\sqrt{2-x}=0$ е:

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 0

8. Колко решения има системата $\left|\begin{array}{l} x^2+3xy+2y=11 \\ x+y=3 \end{array}\right.$?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

9. Трапец е вписан в окръжност и е описан около окръжност с радиус 4. Едно от бедрата на трапеца е равно на 9. Лицето на трапеца е равно на:

А) 36 **Б)** 54 **В)** 72 **Г)** 108

10. Обемът на конус с радиус $r=5$ и образуваща $l=13$ е равен на:

А) 90π **Б)** 100π **В)** 130π **Г)** 300π

11. Даден е равнобедрен триъгълник с основа 12. Центърът на вписаната в триъгълника окръжност разделя височината към основата в отношение 3 : 2. Лицето на триъгълника е равно на:

А) $12\sqrt{3}$ **Б)** $18\sqrt{5}$ **В)** $12\sqrt{5}$ **Г)** $18\sqrt{3}$

12. Даден е $\triangle ABC$ със страни $a = 5$, $b = 6$ и $c = 7$. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е равен на:

А) $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$ **Б)** $\dfrac{7\sqrt{6}}{12}$ **В)** $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ **Г)** $\dfrac{15\sqrt{6}}{4}$

13. Даден е равнобедрен трапец с височина m и перпендикулярни диагонали. Лицето на трапеца е равно на:

А) $\dfrac{m^2}{2}$ **Б)** $2m^2$ **В)** $\dfrac{3m^2}{2}$ **Г)** m^2

14. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник, единият катет на който е равен на 10, а радиусът на описаната около този триъгълник окръжност е 13. Ако околният ръб на призмата е равен на диаметъра на вписаната в основата окръжност, то обемът на призмата е:

А) 960 **Б)** 520 **В)** 480 **Г)** 360

15. От числата 1, 2, 3, 4, 5 по случаен начин се избират три. Вероятността избраните числа да са дължини на страни на триъгълник е равна на:

А) $\dfrac{3}{10}$ **Б)** $\dfrac{2}{5}$ **В)** $\dfrac{1}{5}$ **Г)** $\dfrac{1}{10}$

16. За квадратната функция $f(x) = x^2 - ax + 8$ е дадено, че $f(2) = -6$.

а) Намерете пресечните точки на графиката на функцията с абсцисната ос.

б) Намерете най-малката стойност на функцията $f(x)$.

17. В $\triangle ABC$ с $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $AB = 9$ cm радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $7\sqrt{3}$ cm. Намерете дължината на страната AC.

Отговори. **1.** А; **2.** А; **3.** В; **4.** А; **5.** А; **6.** В; **7.** Б; **8.** В; **9.** В; **10.** Б; **11.** Б; **12.** А; **13.** Г; **14.** А; **15.** А.

16. От $f(2) = 12 - 2a = -6$ намираме $a = 9$.

а) Корените на уравнението $x^2 - 9x + 8 = 0$ са $x_1 = 1$ и $x_2 = 8$; графиката на функцията пресича абсцисната ос в точките $(1; 0)$, $(8; 0)$.

б) Имаме $f_{\min} = f\left(\dfrac{9}{2}\right) = -12\dfrac{1}{4}$.

17. В $\triangle ABC$ от синусовата теорема имаме $BC = 2R\sin 60^\circ = 14\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 21$. От косинусовата теорема следва, че $21^2 = 9^2 + b^2 - 2.9b.\dfrac{1}{2} \iff b^2 - 9b - 360 = 0$, откъдето намираме $b = 24$.

ДА ДОПЪЛНИМ РЕШЕНИЕТО

Йордан Табов

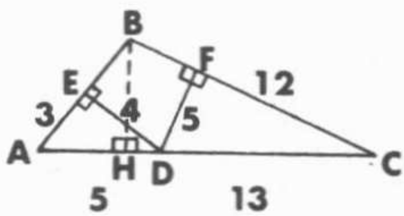
От 1977 г. насам в Ню Йорк се провеждат математическите състезания “Math League Contest”. Задачите, давани на тях до април 1984 г., са публикувани в книгата “The first High School Math League Problem Book” с автори С. Конрад и Д. Флеглер. Там са представени и решения на задачите. Едно от тях е обект на тази кратка статия. Причината е, че то е непълно.

Ето условието на задачата (давана на 15.10.1977 г.):

1-6. In triangle ABC, AC = 18, and D is the point on $\overline{AC}$ for which AD = 5. Perpendiculars drawn from D to $\overline{AB}$ and $\overline{CB}$ have lengths of 4 and 5 respectively. Find the area of triangle ABC.

и решението в книгата:

1-6. Using the Pythagorean Theorem, AE = 3 and CF = 12. Also, $\Delta AED \sim \Delta AHB$, so 3:4 = AH:BH; and $\Delta CFD \sim \Delta CHB$,



so $\dfrac{CF}{DF} = \dfrac{12}{5} = \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{18 - AH}{BH}$. Since AH = (3/4)BH, $\dfrac{12}{5} = \dfrac{18 - (3/4)BH}{BH}$ and BH = $\dfrac{40}{7}$. The area of ΔABC is $\frac{1}{2}(18)\left(\frac{40}{7}\right) = \boxed{\dfrac{360}{7}}$.

Възможно ли е например ъгълът на триъгълника ABC при върха A да е тъп? Как би изглеждал тогава чертежът?

Покана към читателите: предлагаме ви да изпратите ваши решения; най-добрите ще бъдат публикувани в списанието.

ПЪРВО МАТЕМАТИЧЕСКО ПЪТЕШЕСТВИЕ

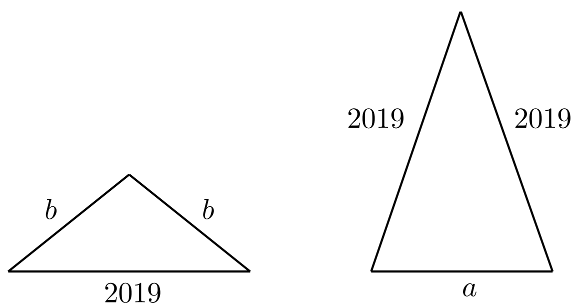
Невена Събева, ИМИ – БАН

Винаги е интересно да разгледаме задачите от математическите състезания по света – срещаме нови идеи или пък откриваме познати идеи в нова формулировка. Задачите в тази статия са от национални състезания през 2018/2019 г. и са подходящи за ученици от 4. до 7. клас.

Първо ще се отправим към **Италия**. Ето колко лесни задачи решават там.

Задача 1. Колко са различните равнобедрени триъгълници, чиито страни са естествени числа и най-голямата е 2019?

Решение. Ако най-голямата страна е основата $a = 2019$ и бедрото е $b \leqq 2019$, от неравенството на триъгълника получаваме, че $2b > 2019$. Оттук, тъй като b е естествено число, следва, че b е най-малко 1010. За всяко b от 1010 до 2019 получаваме триъгълник от търсения вид; общо $2019 - 1009 = 1010$ триъгълника.



Ако най-голямата страна е бедрото $b = 2019$ и основата е $1 \leqq a \leqq 2108$, получаваме 2018 триъгълника.

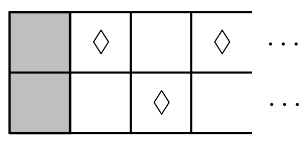
Общо търсените триъгълници са $1010 + 2018 = 3028$.

Втората италианска задача също е за **броене**, но малко по-трудно.

Задача 2. Михаела нарисувала таблица 2×100. Тя иска да сложи 99 монети, по една в поле от таблицата така, че да няма монети в полета с обща страна. По колко начина Михаела може да направи това?

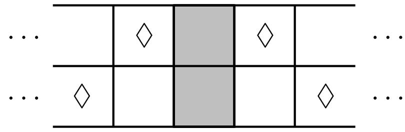
Решение. Забелязваме, че Михаела може да сложи не повече от една монета в стълб и тъй като монетите са 99, а стълбовете са 100, един стълб ще остане празен.

Ако някой от крайните стълбове е празен, пулът в съседния стълб може да се постави в кое да е от двете полета, а по-нататък пуловете се нареждат зигзагообразно.



Следователно ако изберем някой от двата крайни стълба да е празен, ще имаме по 2 варианта за подреждане. Общо получаваме $2.2 = 4$ подредби с празен краен стълб.

Ако празният стълб е вътрешен, пуловете във всеки от двата му съседни стълба могат да се поставят по два начина. След това нареждането е определено еднозначно. Така се получават $2.2 = 4$ подредби.



Тъй като има 98 вътрешни стълба, общо получаваме $98.4 = 392$ подредби с празен вътрешен стълб.

Михаела може да постави пуловете по $4 + 392 = 396$ различни начина.

Задача 3. Рицарите винаги казват истината, освен когато неволно бъркат, а лъжците винаги лъжат. Около кръгла маса насядали 40 рицари и лъжци и всеки казал *Аз седя между рицар и лъжец.* Точно трима рицари неволно сбъркали. Колко рицари е имало на масата?

Решение. Първо да отбележим, че един лъжец е или между двама лъжци, или между двама рицари.

Ако някой лъжец е между двама лъжци, неговите съседи-лъжци също трябва да са между двама лъжци и т.н. Получаваме, че всички на масата са лъжци, което противоречи на условието.

Следователно всички лъжци седят между двама рицари.

Рицарите, освен тримата сбъркали, седят между лъжец и рицар. Получаваме следното подреждане

...Р Л Р Р Л Р Р Л Р ...

Сбъркалите рицари ще означаваме с Ь. Те могат да се разположат по следните начини:

(1) ...Р Л Р Ь Р Л Р ...или (2) ...Р Л Ь Л Р Р Л Р ...

При първата подредба сбъркалите рицари Ь се вмъкват между тройки от вида (Р Л Р). Тъй като сбъркалите рицари са трима, а $40 - 3 = 37$ не се дели на 3, ще се среща и втората подредба.

При втората подредба сбъркалите рицари Ь се появяват в петицата (Р Л Ь Л Р), която се вмъква между тройки от вида (Р Л Р).

Тъй като $40 - 3.5 = 25$ и $40 - (2.5 + 1) = 29$ не се делят на 3, а $40 - (2 + 5) = 33$ е кратно на 3, двама от сбъркалите рицари са в подредба (1), един е в подредба (2). Имаме

...(Р Л Р) Ь Ь (Р Л Р) (Р Л Ь Л Р) (Р Л Р) ...

Тройките от вида (Р Л Р) са $33 : 3 = 11$ и всяка включва двама рицари.

Общо получаваме $11.2+2+3 = 27$ рицари (заедно с тримата сбъркали).

Задача 4. Едно естествено число се нарича *честно*, ако четейки го цифра по цифра, получаваме вярно описание на числото. Това означава, че всяка цифра на нечетна позиция (като броим отляво) показва колко пъти в записа на числото се среща цифрата след нея.

Например, 1210 е честно число, защото се чете *една 2 и една 0*; 2121 също е честно, защото се чете *две 1, две 1*.

а) Докажете, че има поне 2019 честни числа.

б) Докажете, че честните числа са краен брой.

в) Намерете най-голямото честно число.

Решение. От условието се подразбира, че в записа на честните числа има четен брой цифри.

а) Числото 1213141516171819 е честно. Честни са и всички числа, които се получават, като се запишат 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 19 в някакъв ред. Начините за подредба на тези 8 числа са $8! = 8.7.6.5.4.3.2$, което е повече от 2019.

б) В честното число всяка цифра на четна позиция (като броим отляво) се среща най-много 9 пъти (тъй като цифрата пред нея е най-много 9). Следователно в записа на едно честно число има най-много $9.9 = 81$ цифри на четна позиция, т.е. то е най-много 162-цифрено.

Това означава, че честните числа са краен брой.

в) Не е трудно да съобразим, че най-голямото честно число е

$$\underbrace{9898\ldots98}_{\text{9 пъти 98}}\underbrace{9797\ldots97}_{\text{9 пъти 97}}\ldots\underbrace{9191\ldots91}_{\text{9 пъти 91}}\underbrace{9090\ldots90}_{\text{9 пъти 90}}.$$

А сега да се разходим до **Русия**. Първо ще започнем с една задача от състезанието *Математическа регата* в Москва.

Задача 5. Известно е, че всяко от три двуцифрени числа се получава, като се съберат другите две и се разместят цифрите в получения сбор. Колко е сборът на тези три числа?

Решение. Нека тези числа са $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ и $\overline{ef}$. Според условието, в сила са равенствата

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{fe}, \qquad \overline{ab} + \overline{ef} = \overline{dc}, \qquad \overline{cd} + \overline{ef} = \overline{ba}.$$

Като съберем полченно трите равенства, получаваме

$$20(a+c+e)+2(b+d+f) = 10(b+d+f)+(a+c+e) \iff 19(a+c+e) = 8(b+d+f).$$

От последното равенство следва, че сборът $b + d + f$ се дели на 19 и тъй като той не надхвърля $3.9 = 27$, то $b + d + f = 19$. Тогава $a + c + e = 8$ и сборът на трите числа е

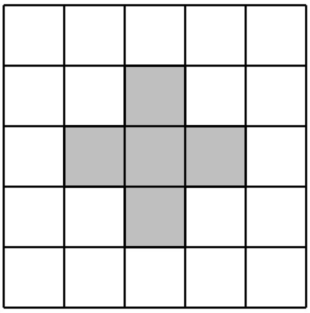
$$\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 10(a + c + e) + (b + d + f) = 10.8 + 19 = 99.$$

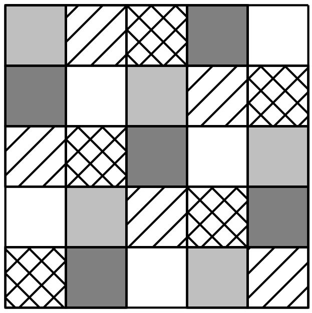
Следващите две задачи са от **Санкт Петербургската олимпиада** тази година.

Задача 6. Дадена е таблица 5×5. В най-малко колко цвята може да се оцветят полетата на дъската така, че сред всеки три поредни полета в един стълб или диагонал да няма едноцветни?

Решение. Първо да обърнем внимание, че три поредни диагонално разположени полета трябва да са разноцветни.

Да разгледаме петте оцветени полета на дъската вляво. Никои две от тях не може да са оцветени в един и същ цвят. Следователно за оцветяването на дъската са необходими поне 5 цвята.





Не е трудно да се убедим, че 5 цвята са и достатъчни, за да се изпълни условието на задачата. Един пример е показан на дъската вдясно.

Задача 7. Около кръгла маса седят рицари и лъжци, общо 300 човека. Антон попитал всеки от тях *Колко от двамата ти съседи са лъжци?* и събрал получените числа. Саша направил същото, но получил сбор, който е с 400 по-голям от сбора на Антон. Всеки отговор е 0, 1 или 2. Колко са лъжците около масата?

Решение. Ясно е, че рицарите отговарят еднакво на Антон и на Саша. Разликата се получава от отговорите на лъжците. Най-голямата разлика в отговорите на един лъжец е 2. Следователно са нужни поне 200 лъжци, за да се получи разлика 400.

Разлика 2 може да се получи при лъжец, който седи между лъжец и рицар: веднъж той лъже, че седи до нула лъжци, а следващия път лъже, че седи до двама лъжци.

Лесно се намира пример с точно 200 лъжци, като се подредят 100 тройки Л Л Р:

$$\text{Л Л Р Л Л Р} \ldots (\text{Л Л Р}) \ldots$$

Ще докажем, че лъжците не може да са повече от 200. Нека лъжците са $200 + x$; тогава рицарите са $100 - x$. Най-много $2(100 - x)$ лъжци може да седят между лъжец и рицар и да променят отговора си с 2. Останалите

$200 + x - 2(100 - x) = 3x$ лъжци може да променят отговора си най-много с 1. Тогава общият сбор на отговорите може да се промени най-много с

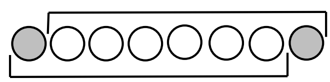
$$2.2(100 - x) + 1.3x = 400 - x < 400.$$

Следователно лъжците са точно 200.

Да разгледаме и една задача от *Математически празник* в Москва.

Задача 8. В редица са подредени 100 монети, някои нагоре с ези, други нагоре с тура. За един ход може да се изберат 7 монети на равни разстояния една от друга, които да се преобърнат. Докажете, че с помощта на тези операции всички монети могат да се обърнат нагоре с тура.

Решение. Ще докажем, че с дадените ходове може да се смени положението на само две избрани монети, между които има 6 монети. Това става лесно, както е показано на схемата.



Избраните монети са оцветени; последователно обръщаме първите седем в показаната редица, а след това последните седем. Така шестте монети между избраните се преобръщат два пъти и се връщат в началното си положение, а оцветените монети сменят положението си.

Сега ще покажем, че с помощта на няколко хода може да се смени положението на само една монета.

Да номерираме монетите отляво надясно с числата от 1 до 100.

Ако избраната монета е номер n и $n \leqq 50$, преобръщаме монетите

$$(n,\ n + 7,\ n + 14,\ n + 21,\ n + 28,\ n + 35,\ n + 42).$$

След това по показания начин връщаме в първоначалното им положение монетите от всяка двойка $(n + 7,\ n + 14)$, $(n + 21,\ n + 28)$, $(n + 35,\ n + 42)$ (между тях има по 6 монети).

Ако избраната монета е в дясната половина на редицата, т.е. $n > 50$, по същия начин вземаме редица от 7 монети, през 6 една от друга, наляво от избраната.

Така показахме, че със седем хода можем да сменим положението на точно една избрана от нас монета. Ясно е, че по този начин всички монети могат да се обърнат нагоре с тура.

А сега да се отправим към **Гърция**.

Задача 9. На дъска са записани числата $1, 2, 3, \ldots, 2018$. Джон и Мери могат да изберат две числа a и b от дъската и да ги заменят с $5a-2b$ и $3a-4b$. Джон твърди, че по този начин може да получи редицата $3, 6, 9, \ldots, 6054$. Мери смята, че това е невъзможно. Кой е прав?

Решение. След един ход вместо числа със сбор $a+b$ записваме числа със сбор $(5a-2b)+(3a-4b) = 8a-6b$. Това означава, че сборът на числата на дъската се променя със $8a-6b-(a+b) = 7a-7b$, т.е. с число, което се дели на 7.

Първоначално сборът на числата на дъската е $2018.2019 : 2 = 1009.2019$. В редицата на Джон сборът е $3.1009.2019$. Разликата между двата сбора е $2.1009.2019$ и не се дели на 7. Следователно Мери е права да смята, че редицата на Джон не може да се получи по дадените правила.

Да видим и какво се случва в **Ирландия**.

Задача 10. В Страната на чудесата живеят 6 орли, 17 змии и 55 мишки. Орлите ядат мишки и змии, змиите ядат мишки, а мишките нищо не ядат. Ако орел изяде мишка, се превръща в змия; ако изяде змия, се превръща в мишка. Ако змията изяде мишка, се превръща в орел. След известно време на острова останали животни само от един вид. Най-много колко може да са те?

Решение. Да разгледаме как се променя броят на животните от всеки вид след едно изяждане и последващото превръщане. Ще разгледаме и общия брой на всеки два вида животни.

изяждане	орли	змии	мишки	ор. + зм.	зм. + м.	ор. + м.
орел $\to$ мишка	-1	$+1$	-1	0	0	-2
орел $\to$ змия	-1	-1	$+1$	-2	0	0
змия $\to$ мишка	$+1$	-1	-1	0	-2	0

Забелязваме, че общият брой на всеки два вида животни се променя с 2 или не се променя. Това означава, че запазва четността си.

Щом животните от два вида изчезват, общият им брой накрая ще е 0. Следователно в началото общият им брой е бил също четно число.

Измежду дадените числа 6, 17 и 55 четен сбор имат 17 и 55. Следователно мишките и змиите изчезват и накрая има само орли.

За да останат само орли, всичките 55 мишки трябва да бъдат изядени. Следователно може да останат най-много $6 + 17 = 23$ животни.

Ето и пример как да останат 23 орли: 6 орли и 17 змии изяждат общо 23 мишки; след това имаме 17 орли, 6 змии и $55 - 23 = 32$ мишки. Сега 13 орли и 6 змии изяждат общо 19 мишки и стигаме до $17 - 13 + 6 = 10$ орли, 13 змии и $32 - 19 = 13$ мишки. Когато тези 13 змии изядат 13-те мишки и се превърнат в орли, ще имаме $10 + 13 = 23$ орли.

Задача 11. Нека $n = 2^{33}.3^{17}$. Колко делители на n^2 са по-малки от n, но не са делители на n?

Решение. Числото $n^2 = 2^{66}.3^{34}$ има 67.35 делители, сред които е n, а останалите се разделят на двойки с произведение n^2. Всяка такава двойка включва число, по-голямо от n, и число, по-малко от n. Следователно $\dfrac{67.35-1}{2} = 1172$ от делителите на n^2 са по-малки от n.

Сред делителите на n^2 са всичките делители на n.

Делителите на $n = 2^{33}.3^{17}$ са $34.18 = 612$ и сред тях е самото число n.

Следователно $1172 - 611 = 561$ са делителите на n^2, които са по-малки от n и не са делители на n.

И сега да отскочим до **Австрия**.

Задача 12. Дадени са четири прости числа p, q, r, s, за които

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Да се докаже, че сборът на тези числа се дели на 60.

Решение. Простите числа q, r, s са измежду нечетните числа $p+2$, $p+4$, $p+6$, $p+8$ между p и $p+10$. Следователно измежду петте поредни нечетни числа p, $p+2$, $p+4$, $p+6$, $p+8$ има четири прости.

От всеки три поредни нечетни числа едно се дели на 3, а сред пет поредни нечетни числа едно се дели на 5. Тъй като $p > 5$, четири от разглежданите числа може да са прости, само ако $p+4$ се дели на 3 и 5.

Сборът на простите числа става $p + (p+2) + (p+6) + (p+8) = 4(p+4)$ и се дели на $4.3.5 = 60$.

Да отбележим, че такива числа съществуват, например 11, 13, 17 и 19.

За удоволствие ви предлагам да решите три задачи от олимпиадата в **Естония**.

Задача 13. Майката на Иван и Ана очаква близнаци. Те пресметнали, че ако се родят две момчета, Иван ще има k пъти повече братя, отколкото сестри, а ако се родят две момичета, Ана ще има l пъти по-малко сестри, отколкото братя.

В действителност се родили момче и момиче. Колко пъти повече братя, отколкото сестри има новороденото момче и колко пъти по-малко сестри, отколкото братя има новороденото момиче?

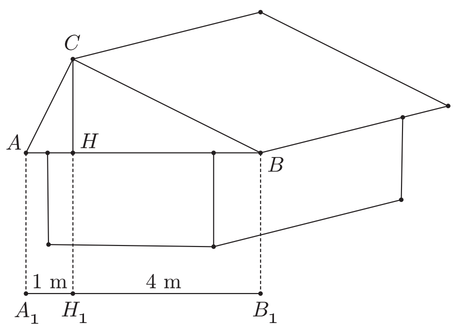
Задача 14. Две цифри на числото $\overline{*2018*2019}$ са заменени със звездички. Известно е, че то се дели на 99. Кое може да е това число?

Задача 15. Една редица започва с 1 и 2. След числата a и b в редицата записваме $a.b - 1$. Кое е 2019-тото число в редицата?

КОЛЕДНА УКРАСА

Димитър Георгиев

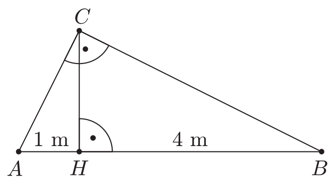
Дядото на Батман решил да украси вилата си за Коледа. Искал да боядиса и украси с гирлянди челната страна на покрива, която е правоъгълен триъгълник ABC. Нямал стълба, пък и внукът му Батман бил зает с велики дела и дядото се чудел как да направи необходимите измервания. Досетил се, че може да измери страната AB, като използва следите A_1, H_1, B_1 от капките от покрива на земята. Измерил $A_1H_1 = 1$ м, $H_1B_1 = 4$ м.



а) Колко кутии боя трябва да купи, ако разходът е 250 мл на квадратен метър и една кутия съдържа 1 л?

б) Колко гирлянда трябва да се купят, за да се обиколи триъгълника ABC с гирлянди, ако те се продават на метър?

За да решим задачата, трябва да разгледаме $\triangle ABC$ на следващия чертеж.



Тъй като AHH_1A_1 и BHH_1B_1 са правоъгълници, имаме

$$AH = AH_1 = 1 \text{ m}, \ BH = BH_1 = 4 \text{ m}.$$

В 6. клас се изучава теоремата на Питагор, която прилагаме за правоъгълните триъгълници ACH и BCH:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2,$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2.$$

Събираме почленно горните равенства и получаваме:

$$AC^2 + BC^2 = AH^2 + BH^2 + 2.CH^2.$$

Прибавяме и изваждаме в дясната страна $2.AH.BH$:

$$AC^2 + BC^2 = AH^2 + 2.AH.BH + BH^2 - 2.AH.BH + 2.CH^2.$$

Групираме трите събираеми до точен квадрат

$$AC^2 + BC^2 = (AH + BH)^2 - 2.AH.BH + 2.CH^2, \tag{1}$$

но $AH + BH = AB$, а от правоъгълния $\triangle ABC$ по теоремата на Питагор имаме, че $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Заместваме в (1) и получаваме

$$AB^2 = AB^2 - 2.AH.BH + 2.CH^2, \text{ т.е. } 2.AH.BH = 2.CH^2.$$

Следователно

$$AH.BH = CH^2$$

и намираме $CH^2 = 1.4 = 4$, т.е. $CH = 2$.

Освен това $AB = AH + BH = 1 + 4 = 5$ m.

Оттук лицето на $\triangle ABC$ е равно на $0{,}5.AB.CH = 0{,}5.5.2 = 5$ m^2.

При разход 250 мл на 1 m^2 получаваме, че е нужна $5.250 = 1250$ мл боя. Кутията е 1000 мл. Това означава, че трябва да се купят две кутии.

За гирляндите е малко по-сложен въпросът, защото трябва да се купят цяло число на брой гирлянди. Затова при намирането на дължините на страните на $\triangle ABC$ техните мерки трябва да се закръглят към най-близкото по-голямо от тях цяло число.

И така, от $\triangle ACH$ по теоремата на Питагор имаме $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 1 + 2^2 = 5$.

За да пресметнем колко метра гирлянди са нужни за страната AC, може да използваме, че $2{,}2^2 < 5 < 2{,}3^2$. Следователно 2,3 м са достатъчни за страната AC.

Аналогично от правоъгълния триъгълник BCH имаме $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Тъй като $4{,}4^2 < 20 < 4{,}5^2$, то 4,5 м гирлянди са достатъчни за страната BC.

Тогава получаваме, че е достатъчно да се купят $5 + 4{,}5 + 2{,}3 = 11{,}8$ метри гирлянди, т.е. като закръглим към най-близкото по-голямо цяло число, необходимите гирлянди ще са 12 m.

РАЦИОНАЛНО ПРЕСМЯТАНЕ С ФОРМУЛИ ЗА СЪКРАТЕНО УМНОЖЕНИЕ

Димитър Георгиев

Да разгледаме една задача от турнира *Черноризец Храбър*.

Задача 1. Стойността на израза

$$A = \frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} \text{ е:}$$

А) 2^{2048} **Б)** 2^{4096} **В)** 3^{2048}
Г) 3^{4096} **Д)** $2^{2048}+3^{2048}$

Решение. Ще използваме формулата $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Като умножим първата скоба в числителя с $3-2=1$, нейната стойност не се променя и може да приложим формулата за произведение на сбор и разлика на две числа. Получаваме

$$(3-2)(2+3) = 3^2 - 2^2.$$

Полученото произведение умножаваме с втората скоба:

$$(3^2-2^2)(2^2+3^2) = 3^4 - 2^4,$$

резултата умножаваме със следващата скоба

$$(3^4-2^4)(2^4+3^4) = 3^8 - 2^8$$

и т.н. Продължавайки по този начин, ще стигнем до произведението

$$(3^{2048}-2^{2048})(2^{2048}+3^{2048}) = 3^{4096} - 2^{4096}.$$

Така дадената дроб става равна на

$$A = \frac{(3^{4096}-2^{4096})+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{3^{4096}}{3^{2048}} = 3^{2048}, \text{ отговор В).}$$

Задача 2. Да се пресметне стойността на произведението

$$B=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99^2}\right).$$

Решение. Всеки множител в даденото произведение е разлика на два квадрата и може да го разложим:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{4} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
1-\frac{1}{9} &= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\\
\cdots & \quad \cdots\\
1-\frac{1}{99^2} &= \left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{99}\right).
\end{aligned}$$

Стойността на израза B ще намерим, като първо умножим всички разлики:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{98}{99}=\frac{1}{99},$$

след това умножим всички сборове:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{100}{99}=50,$$

а накрая умножим получените произведения:

$$B=\frac{1}{99}\cdot 50=\frac{50}{99}.$$

В следващите три задачи ще използваме тъждеството

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1). \tag{$\star$}$$

Задача 3. Пресметнете $\dfrac{11^{16}+11^8+1}{(11^8-11^4+1)(11^4-11^2+1)(11^2-11+1)}$.

Решение. Като използваме $(\star)$, получаваме

$$\begin{aligned}
11^{16}+11^8+1 &= (11^8-11^4+1)(11^8+11^4+1)\\
&= (11^8-11^4+1)(11^4-11^2+1)(11^4+11^2+1)\\
&= (11^8-11^4+1)(11^4-11^2+1)(11^2-11+1)(11^2+11+1).
\end{aligned}$$

Стойността на дадения израз е $11^2+11+1=133$.

Следващата задача е от темата за Общински кръг на Националната олимпиада по математика през 2018 г. в гр. Бургас.

Задача 4. Пресметнете стойността на израза

$$M = \frac{(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)(13^4+13^2+1)}{(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)(12^4+12^2+1)}$$

и посочете между кои цели последователни числа се намира тази стойност.

Решение. Да разгледаме израза на части и да използваме ($\star$). Имаме

$$\frac{5^4+5^2+1}{4^4+4^2+1} = \frac{(5^2+5+1)(5^2-5+1)}{(4^2+4+1)(4^2-4+1)} = \frac{31.21}{21.13} = \frac{31}{13},$$

$$\frac{7^4+7^2+1}{6^4+6^2+1} = \frac{(7^2+7+1)(7^2-7+1)}{(6^2+6+1)(6^2-6+1)} = \frac{57.43}{43.31} = \frac{57}{31}$$

и т.н. Забелязваме, че съкращаването се дължи на равенството

$$x^2+x+1 = (x+1)^2-(x+1)+1.$$

След съкращаване, за дадения израз получаваме

$$M = \frac{13^2+13+1}{4^2-4+1} = \frac{183}{13} = 14\frac{1}{13}$$

и $14 < M < 15$.

И накрая да завършим с една задача за сбор на дроби.

Задача 5. Числото

$$N = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \cdots + \frac{9}{1+9^2+9^4}$$

е представено като несъкратима дроб $\dfrac{m}{n}$. Колко е m?

Решение. Понеже

$$\frac{2n}{1+n^2+n^4} = \frac{(1+n+n^2)-(1-n+n^2)}{(1-n+n^2)(1+n+n^2)} = \frac{1}{1-n+n^2} - \frac{1}{1+n+n^2}$$

$$= \frac{1}{1+(n-1)+(n-1)^2} - \frac{1}{1+n+n^2},$$

то $N = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{1+1+1^2} + \cdots + \dfrac{1}{1+8+8^2} - \dfrac{1}{1+9+9^2}\right) = \dfrac{45}{91}$ и $m = 45$.

В СВЕТА НА ЕЛФИТЕ И ДЖУДЖЕТАТА

Невена Събева

В света на вълшебните същества е доста сложно. Някои от тях лъжат и за да разберем истината, е нужно да сме внимателни и остроумни. Също е полезно да се въоръжим с … таблици. Те ще ни помогнат да преодолеем с лекота следващите три предизвикателства.

Задача 1. В едно кафене се срещнали 55 вълшебни същества: елфи и джуджета. Всеки си поръчал или чай, или кафе. Всички елфи казват истината, когато пият чай, и лъжат, когато пият кафе, а при джуджетата е обратното. На въпроса *Чай ли пиете?* се получили 44 отговора *Да*, а на въпроса *Вие джудже ли сте?* се получили 33 отговора *Да*. Колко от вълшебните същества пили чай и колко са били джуджетата?

Решение. Да представим с таблица възможните комбинации на вълшебни същества с тяхната напитка. Ще означим с $\times$ лъжците и с ✓ тези, които казват истината.

	елф	джудже
кафе	×	✓
чай	✓	×

Да попълним в таблицата отговорите на въпроса *Чай ли пиете?*.

Отговор *Да* са дали само всички елфи, значи всички елфи са 44, а останалите 11 същества са джуджета.

Чай ли пиете?

	елф	джудже
кафе	× да	✓ не
чай	✓ да	× не

Да попълним в таблицата отговорите на въпроса *Вие джудже ли сте?* .

Отговор *Да* са дали точно тези, които пият кафе. Значи кафе пият 33 същества, а чай – останалите 22 същества.

Вие джудже ли сте?

	елф	джудже
кафе	× да	✓ да
чай	✓ не	× не

Задача 2. На един празник се събрали 600 гости, елфи и джуджета. Четвъртината от елфите и половината от джуджетата лъжат. На въпроса *Вие джудже ли сте?* се получили 260 отговора *Да*. Колко джуджета е имало на празника?

Решение. Да означим четвъртината от броя на елфите с x, а половината от броя на джуджетата с y. Да попълним в таблицата броя на съществата и техните оговори на въпроса *Вие джудже ли сте?* .

	елфи	джуджета
лъжат	x, да	y, не
не лъжат	$3.x$, не	y, да
общо	$4.x$	$2.y$

Отговор *Да* са дали елфите, които лъжат, и джуджетата, които не лъжат. Значи

$$x + y = 260.$$

Освен това общият брой гости е 600, т.е. $4.x + 2.y = 600$. Това равенство може да разделим на 2 и ще получим

$$2.x + y = 300.$$

От двете центрирани равенства намираме, че $x = 300 - 260 = 40$. Следователно $y = 260 - 40 = 220$. На празника е имало $2.220 = 440$ джуджета.

Задача 3. В компания на 100 същества, елфи и джуджета, се оказало, че лъжците са 3 пъти по-малко от тези, които казват истината. Елфите са 44, а джуджетата, които лъжат, са с 10 по-малко от джуджетата, които не лъжат.

Ако попитаме всеки в компанията *Вие елф ли сте?* , колко същества ще отговорят *Да*?

Решение. В компанията има $100 : 4 = 25$ лъжци, а $3.25 = 75$ същества не лъжат. Джуджетата са $100 - 44 = 56$. Ако броят на джуджетата–лъжци е x, то джуджетата, които казват истината, са $x + 10$ на брой.

Да подредим информацията в следната таблица.

	елфи	джуджета	общо
лъжат		x	25
не лъжат		$x + 10$	75
общо	44	56	100

Имаме $2.x + 10 = 56$, откъдето намираме $x = (56 - 10) : 2 = 23$. Елфите, които лъжат, са $25 - 23 = 2$, а елфите, които не лъжат, са $44 - 2 = 42$.

На въпроса *Вие елф ли сте?* отговор *Да* са дали елфите, които не лъжат и джуджетата, които лъжат; общо $42 + 23 = 65$ същества.

Така кратката ни разходка в света на елфите и джуджетата завърши. Очаквайте следващото ни математическо пътешествие!

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

В конкурса на сп. „Математика“ участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме решенията ви на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Дадени са различни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Квадратна таблица $n \times n$ е попълнена, като в полето в i-тия ред и j-тия стълб е записано числото $a_i + b_j$. Ако произведенията на числата във всеки ред са равни, да се докаже, че произведенията на числата във всеки стълб също са равни.

Задача 2. В някои полета на таблица с m реда и n стълба, където $m < n$, има $\star$. Във всеки стълб има поне една $\star$. Да се докаже, че има такава звездичка, в чийто ред има повече звездички, отколкото в нейния стълб.

Задача 3. Във всяко поле на квадратна таблица $n \times n$ е записано число. Сборът на всички записани числа е положителен. Да се докаже, че стълбовете на таблицата може да се разместят така, че сборът на числата по главния диагонал да стане положителен.

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2020 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 4/2019 г.

Задача 1. Даден е правилен 100-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{100}$. За всяка двойка (i, j), $1 \leqq i < j \leqq 100$, отсечката A_iA_j е червена, ако $j - i$ е нечетно число, и синя в обратен случай. (Например, страните на многоъгълника са червени.) Във всеки връх на многоъгълника е записано число така, че сборът на квадратите на записаните числа е 1. На всяка отсечка е записано произведението на числата в нейните краища. Сборът на числата на сините отсечки е изваден от сбора на числата на червените отсечки. Най-много колко е получената разлика?

Решение. (**Радомир Пеев**, СМГ) Имаме $J = a_1^2 + \cdots + a_{100}^2 = 1$, където числото a_i е записано във връх A_i. Нека

$$C_1 = \sum_{i=0}^{49} a_{2i+1},\ C_2 = \sum_{i=1}^{50} a_{2i},\ B_1 = \sum_{i \neq k} a_{2i+1}a_{2k+1},\ B_2 = \sum_{i \neq k} a_{2i}a_{2k}.$$

Сборът на числата на червените отсечки е C_1C_2, а сборът на числата на сините отсечки е $B_1 + B_2$. Имаме

$$J = C_1^2 + C_2^2 - 2(B_1 + B_2) = 1 \Longrightarrow C_1^2 + C_2^2 = 2(B_1 + B_2) + 1.$$

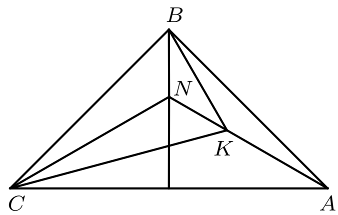
Като използваме това равенство, намираме търсения максимум

$$C_1C_2 - (B_1 + B_2) \leqq \frac{1}{2}(C_1^2 + C_2^2) - (B_1 + B_2) = \frac{1}{2}.$$

Максимумът се достига, когато $a_i = 0,1$ за $i = 1, \ldots, 100$.

Задача 2. Точката K е във вътрешността на равнобедрения триъгълник ABC и $CK = AB = BC$, $\sphericalangle KAC = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AKB$.

Решение. (**Виктор Костадинов**, ПЧМГ) Нека $s_{AC} \cap AK = N$. Лесно получаваме, че $\sphericalangle KNC = \sphericalangle KNB = \sphericalangle BNC = 120^\circ$. Тогава $\triangle KNC \cong \triangle BNC$ по четвърти признак, откъдето $KN = BN$. Следователно $\triangle BNK$ е равнобедрен и намираме $\sphericalangle NKB = 30^\circ$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle AKB = 150^\circ$.



Задача 3. Произведението на всеки пет различни променливи измежду $x_1, \ldots, x_{10}$ е записано на един лист. Асен и Петър играят следната игра. На всеки ход играчът избира лист, като първи е Петър. Когато всички листи са взети, Асен избира стойности на променливите така, че $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{10}$. Може ли Асен да ги избере така, че стойността на сбора от произведенията на неговите листи да е по-голяма от стойността на сбора на произведенията на листите на Петър?

Решение. (**Радомир Пеев**, СМГ) Забелязваме, че има точно 21 карти, които не съдържат x_1, x_2 или x_3, както и 21 карти, които съдържат x_8, x_9 и x_{10}. Ще отбелязваме първата група карти с A, а втората с B. Картите от $A \cap B$ са 6.

Асен играе така, че в края на играта Петър да има по-малко карти от него от A или от B. Ако в даден момент Петър вземе карта от $A \cap B$, Асен също взема такава. Това е възможно, тъй като техният брой е четен. В даден момент Петър ще вземе карта, която е само от A или само от B.

Ако Петър вземе първо карта само от A, тогава Асен взема карти от B, докато свършат. Така той ще има повече карти от тази група от Петър (поради четността им) и е достатъчно да избере $x_{10} = x_9 = x_8 = k \geqq 10^{10}$, $x_7 = \cdots = x_1 = 1$, за да спечели.

Ако Петър вземе първо карта само от B, тогава Асен взема карти от A, докато свършат. Така той ще има повече карти от тази група от Петър и е достатъчно да избере $x_{10} = \cdots = x_4 = g > 0$, $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, за да спечели.

Конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2019 г. и бр. 1, 2 от 2020 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (онлайн) кръг през юни 2020 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Лили написала всички числа от 1 до 1000, а Мила изтрила някои от тях. Измежду останалите числа има:

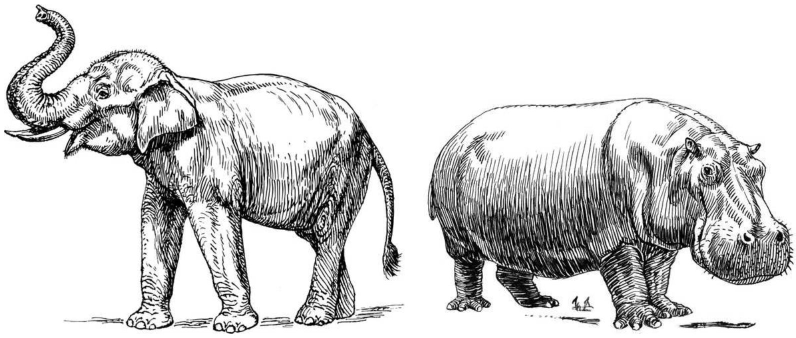
⊛ точно 272 числа, в чийто запис се среща цифра 1;

⊛ точно 271 числа, в чийто запис се среща цифра 2;

⊛ точно 270 числа, в чийто запис не се среща нито 1, нито 2.

Колко числа е изтрила Мила?

Задача 2. За закуска стадо от 5 слона и 6 хипопотама изяло 17 кръгли и 22 кубични дини, а стадо от 4 слона и 7 хипопотама изяло 29 кръгли и 11 кубични дини. Всички слонове изяли един и същ брой дини. Всички хипопотами също изяли един и същ брой дини. Но животните от единия вид ядат и от двата вида дини, а животните от другия вид са с претенции и ядат дини само с определена форма. Кои са претенциозните животни – слоновете или хипопотамите, и какъв вид дини те предпочитат?



Задача 3. В Хогуортс има три клуба: по куидич, трансфигурация и херболгия. Дъмбълдор забелязал, че:

⊛ от участниците в клуба по куидич точно $\frac{1}{6}$ посещават клуба по трансфигурация, а $\frac{1}{8}$ посещават клуба по херболгия;

⊛ от участниците в клуба по трансфигурация точно $\frac{1}{3}$ посещават клуба по куидич, а $\frac{1}{5}$ посещават клуба по херболгия;

⊛ от участниците в клуба по херболгия точно $\frac{1}{7}$ посещават клуба по куидич.

Каква част от участниците в клуба по херболгия посещават клуба по трансфигурация?

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2020 г.

за по-малките  задачи

4. клас

76. Сборът на умаляемото, умалителя и разликата е равен на 2018. Намерете умаляемото.

77. На пазара в Приказния град 1 лимон и 1 банан може да се разменят за 2 портокала и 23 вишни, а 3 лимона – за 2 банана, 2 портокала и 14 вишни. Кое е по-скъпо: лимонът или бананът?

78. Колко са трицифрените числа с произведение на цифрите, което е по-малко от 3?

79. По средата на пътя от дома на Емо към училище има светофар. В понеделник Емо пристигнал точно когато светофарът светел зелено и не чакал. Във вторник той вървял със същата скорост, но чакал на светофара 5 минути и след това увеличил скоростта си два пъти. И в двата дни той стигнал до училище за едно и също време. За колко минути е стигнал той?

5. клас

80. Кое е по-голямо: 1 или $\dfrac{21}{64}+\dfrac{51}{154}+\dfrac{71}{214}$?

81. Седем естествени числа са записани по кръг. Сборът на всеки две съседни не се дели на 3 и сборът на всеки три поред записани числа не се дели на 3. Колко от числата се делят на 3?

82. Сборът на две страни на един правоъгълник е 34 см, а сборът на три страни на този правоъгълник е равен на 43 см. На колко квадратни сантиметра може да е равно лицето на правоъгълника?

83. На конференция присъствали 201 лекари от 5 държави. Сред всеки 6 от тях ще се намерят двама на една и съща възраст. Докажете, че от някоя държава на конференцията са дошли поне 5 лекари на една и съща възраст и от един и същ пол.

6. клас

84. Когато една бъчва е на 30% празна, тя съдържа с 30 литра мед повече, отколкото когато е пълна на 30%. Колко литра мед побира бъчвата?

85. Децата в един клас искат да разпределят помежду си 200 бонбони. Оказало се, че както и да ги разпределят, ще се намерят двама с един и същ брой бонбони (който може и да е 0). Най-малко колко ученици има в този клас?

86. В една кутия има 20 топки: сини, червени и жълти. Сините са 6 пъти по-малко от жълтите, а червените са по-малко от жълтите. Най-малко колко топки трябва да извадя от кутията, без да гледам, за да е сигурно, че съм извадил поне една червена?

87. От град А и град В едновременно потеглили един срещу друг пешеходец и велосипедист. След час пешеходецът се оказал на средата на пътя между А и велосипедиста. След още 15 минути те се срещнали и продължили пъя си. За колко време пешеходецът е стигнал от А в В?

7. клас

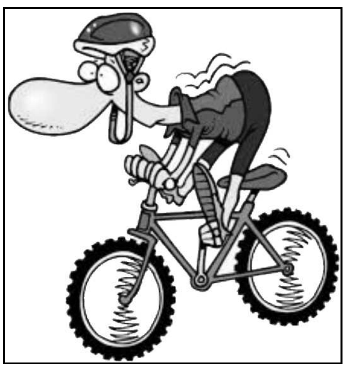
88. Да се намери най-малкото естествено число k, за което

$$2017.2018.2019.2020 + k$$

е квадрат на естествено число.

89. Какъв ъгъл образуват часовата и минутната стрелка в 4 часа и 12 минути?

90. Велосипедист пътувал от град А до град В, където останал 30 минути, и се върнал в А. По пътя към В той изпреварил пешеходец, който се движел 4 пъти по-бавно от него, а след 2 часа по срещнал по пътя си обратно. Пешеходецът стигнал в В точно когато велосипедистът се върнал в А. За колко време пешеходецът е стигнал от А до В?



за по-малките решения

на задачите от бр. 5/2019

61. В градината на Олег растат ябълки, круши и дюли, общо 36 дървета. Ябълковите дървета са 2 пъти повече от броя на останалите дървета, а крушите са с 2 повече от дюлите. Колко са дюлите?

Решение. Ако крушите и дюлите общо са x, ябълките са $2.x$. Всички дървета са общо $3.x = 36$, откъдето намираме $x = 12$.

Крушите и дюлите са общо 12 и крушите са с 2 повече от дюлите. Като махнем тези две круши, остават $12 - 2 = 10$ дървета, сред които има равен брой дюли и круши. Дюлите са $10 : 2 = 5$.

62. Николай записал числото 5. Скучаейки, той започнал да извършва следната операция: умножавал числото по 3, от резултата вадел 1 и в получения резултат изтривал всички цифри, освен последната. По този начин от числото 5 получил 4; след това приложил операцията към 4 и т.н. Кое число ще получи Николай след 2019 операции?

Решение. Забелязваме, че получените цифри се редуват: от $5.3 - 1 = 14$ получаваме 4; от $3.4 - 1 = 11$ получаваме 1; от $1.3 - 1 = 2$ получаваме 2; от $2.3 - 1 = 5$ получаваме отново 5 и т.н. Редува се групата от четири цифри 5, 4, 1, 2. Тъй като след 2019 операции ще са записани 2020 цифри (заедно с първата) и $2020 : 4 = 505$, то ще са записани 505 групи и последната цифра ще е 2.

63. Мария поканила приятелките си да хапнат бонбони и малко преди те да дойдат, си помислила: Ако аз сега изям 7 бонбона, за всяка от нас ще останат по 4 бонбона. А ако освен другите момичета, повикам и Елена, тя ще донесе 3 бонбона и за всяка от нас ще има по 5 бонбона. Колко бонбона има Мария?

Решение. Преди идването на Елена всяко момиче има по 4 бонбона и 7 бонбона са останали. Елена носи 3 бонбона, така има $7 + 3 = 10$ нераздадени бонбона. Те стигат, за да получи тя 5 бонбона и всяко от останалите момичета да получи по още един (и така ще има 5). Значи останалите момичета са $10 - 5 = 5$. Мария има $7 + 5.4 = 27$ бонбона.

64. Пешо написал подред всички нечетни числа от 1 до 19. След това изтрил някои цифри така, че останало петцифрено число. Кое е най-голямото число, което може да получи Пешо?

Решение. Първата цифра е 9; изтриваме цифрите пред нея и остава 91113151719. Тъй като числото е петцифрено, трябва да останат още 4 цифри. Най-голямата следваща цифра, след която остават поне 3 цифри, е 5. Получаваме 951719 и лесно виждаме, че търсеното число е 95719.

65. Колко са трицифрените числа, които се делят на 5 и сборът на цифрите им е 15?

Решение. Търсените числа имат цифра на единиците 5 или 0. Тези, които завършват на 5, са 9 на брой (цифрата на стотиците е от 1 до 9, а цифрата на десетиците я допълва до 10). Числата, които завършват на 0, са 4 на брой: 960, 870, 780, 690. Общо търсените числа са 13.

66. Елена разделила един правоъгълник на 9 правоъгълника с помощта на четири отсечки, както е показано на чертежа. Във всеки от деветте правоъгълници записала обиколката му, но точно едно от числата е грешно. Намерете сгрешеното число и поправете грешката.

14	16	12
18	14	10
16	18	14

Решение. Ако изберем три правоъгълника така, че да има по един във всеки ред и във всеки стълб, сборът на обиколките им ще е равен на обиколката на правоъгълника.

Сборът на обиколките на трите правоъгълника по всеки от диагоналите е $14+14+14 = 12+14+16 = 42$. Останалите сборове са $14+18+10 = 16+16+10 = 42$ и $16+18+14 = 12+18+18 = 48$. Следователно сгрешеното число е общото събираемо 18 в двата по-големи сбора. Вместо 18, на втория ред трябва да се запише числото 12.

67. В клас с повече от 30, но по-малко от 40 ученици, всеки ден дежурят едно момче и едно момиче. След като 120 дни дежурили различни двойки от момче и момиче, се оказало, че на 121-ия ден задължително някоя двойка ще се повтори. Колко са учениците в класа?

Решение. Нека в класа има x момчета и y момичета. Тогава броят на различните двойки момче и момиче е $x.y$.

От условието следва, че има точно 120 различни двойки момче и момиче, т.е.

$$x.y = 120.$$

Възможните представяния на 120 като произведение на две естествени числа са показани в таблицата.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
y	120	60	40	30	24	20	15	12
$x+y$	121	62	43	34	29	26	23	22

От таблицата лесно се вижда, че сборът е между 30 и 40 само в един от случаите, когато момчетата и момичетата са 30 и 4 (или обратно). Следователно учениците в класа са 34.

68. На един остров живеят стройни рицари и дебели лъжци. Лъжецът винаги лъже и тежи 125 кг. Рицарят винаги казва истината и тежи 75 кг.

Веднъж четирима жители на този остров и провели следния разговор:

А: *Сред нас има точно трима рицари.*

Б: *Не, ние всички сме лъжци.*

В: *Не, ние всички сме рицари.*

Четвъртият замълчал. Общо колко тежат тези четирима жители?

Решение. Очевидно Б е лъжец (един рицар не може да каже, че е лъжец). Тогава и В е лъжец. Следователно А също лъже.

Тъй като твърдението на Б е лъжа, то четвъртият жител е рицар.

Общото тегло на четиримата е $3.125 + 75 = 450$ кг.

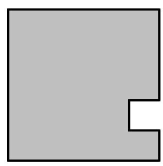
69. Купих две еднакви торти. Нарязах първата торта на повече от 20 равни парчета. Втората торта също нарязах на равни парчета. Седем парчета от първата торта тежат колкото 11 парчета от втората. Най-малко колко са всички парчета торта?

Решение. Нека първата торта е нарязана на x парчета, $x > 20$, а втората торта е нарязана на y парчета. Едно парче от първата торта тежи $\frac{1}{x}$ от теглото и, а едно парче от втората тежи $\frac{1}{y}$ от същото тегло. Имаме

$$\frac{7}{x} = \frac{11}{y} \iff 7y = 11x,$$

откъдето следва, че x се дели на 7. Най-малкото число x, кратно на 7 и по-голямо от 20, е 21. Тогава $y = 11.21 : 7 = 33$. Всички парчета торта са 54.

70. От лист с форма на квадрат изрязали квадратче, както е показано на чертежа, в резултат на което обиколката на листа се увеличила с 10%. С колко процента се е намалило лицето на листа?



Решение. Нека страната на квадрата е a. Сред изрязването обиколката се увеличава с две страни на изрязаното квадратче, следователно страната на изрязаното квадратче е $5\%.4a = 20\%a$. Лицето на листа се е намалило с $(20\%)^2 = 4\%$.

71. Намислих обикновена дроб. Увеличих числителя и знаменателя с 10 и получих дроб, която е 2 пъти по-голяма от намислената. Коя дроб съм намислил?

Решение. Нека тази дроб е $\frac{a}{b}$, където a и b са естествени числа. Имаме

$$\frac{a+10}{b+10} = 2 \cdot \frac{a}{b} \iff b(a+10) = 2a(b+10),$$

откъдето $ab + 10b = 2ab + 20a$ и получаваме $10b - ab = 20a$. Последното равенство записваме във вида

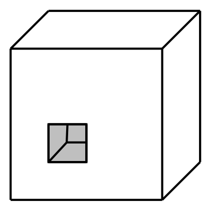
$$(10 - a)b = 20a.$$

Числото a е най-много 9 и $10 - a$ е делител на $20a$. С проверка намираме решенията $a = 9$, $b = 180$; $a = 8$, $b = 80$; $a = 6$, $b = 30$; $a = 5$, $b = 20$; $a = 2$, $b = 5$; $a = 1$, $b = 20$. Търсената дроб може да е $\frac{9}{180}$, $\frac{8}{80}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{5}{20}$ или $\frac{2}{5}$.

72. Велосипедист и мотоциклетист едновременно тръгнали от A за B. Скоростта на мотоциклетиста е 5 пъти по-голяма от скоростта на велосипедиста. На средата на пътя мотоциклетът се повредил и мотоциклетистът продължил пеша със скорост, два пъти по-малка от скоростта на велосипедиста. Когато велисипедистът пристигнал в B, мотоциклетистът бил на 2 km от B. Да се намери разстоянието между A и B.

Решение. Да означим разстоянието между A и B с S. Когато мотоциклетистът е бил на средата на пътя, т.е. е изминал $\frac{1}{2}S$, велосипедистът е изминал 5 пъти по-малко разстояние, т.е. $\frac{1}{2}S : 5 = \frac{1}{10}S$. След това за времето, за което велосипедистът е изминал $\frac{9}{10}S$, мотоциклетистът, вървейки пеша, е изминал 2 пъти по-малко разстояние, т.е. $\frac{9}{10}S : 2 = \frac{9}{20}S$. Мотоциклетистът е изминал общо $\frac{1}{2}S + \frac{9}{20}S = \frac{19}{20}S$, значи оставащата $\frac{1}{20}S$ е 2 km. Това означава, че $S = 40$ km.

73. От парче дърво с форма на куб изрязали отвор с форма на куб, както е показано на чертежа, в резултат на което лицето на повърхнината на тялото се увеличило с 24%. С колко процента се е намалил обемът на тялото?



Решение. Нека ръбът на куба е a. Сред изрязването повърхнината се увеличава с лицето на 4 стени на изрязаното кубче, следователно една стена на изрязаното кубче има лице е $6\%.6a^2 = 36\%a^2$. Следователно ръбът на кубчето е $60\%a$. Обемът на куба се е намалил с $(60\%)^3 = 21{,}6\%$.

74. Дойде есента и оцвети някои зелени листа на любимото ми дърво в жълто, а други зелени листа – в червено. Жълтите и червените листа след време падат.

Вчера $\frac{1}{9}$ от всички листа на дървото бяха зелени, $\frac{1}{9}$ бяха червени, а останалите – жълти. Днес $\frac{1}{9}$ от всички листа на дървото са зелени, $\frac{1}{9}$ са жълти, а останалите – червени.

Най-малко колко процента от листата, които вчера висяха на дървото, са окапали през нощта?

Решение. Да представим условието с таблица.

листа	зелени	червени	жълти
вчера	x	x	$7x$
днес	y	$7y$	y

Вчера най-много са били жълтите листа, а днес – червените. За да паднат възможно най-малко листа, трябва да падат само жълти листа, а част от зелените да се оцветят в червено. Тогава от вчера до днес зелени и червени листа не са падали, а това означава, че общият брой на червените и зелените се запазва. Записваме

$$x + x = y + 7y,$$

$$2x = 8y,$$

$$x = 4y.$$

Това означава, че вчера е имало $7x = 7.4y = 28y$ червени листа. Днес има y жълти листа, значи $27y$ листа са паднали през нощта.

Вчера листата са били $x + x + 7x = 4y + 4y + 28y = 36y$.

Тъй като 27 е $\frac{3}{4}$ от 36, най-малко $\frac{3}{4}$ от листата са паднали.

75. Кралят на джуджетата, който е на 110 години, попитал стария дракон на колко е години. Драконът отговорил: *Сега съм 10 пъти по-стар от теб по времето, когато аз бях на твоите сегашни години.* На колко години е драконът?

Решение. Нека сега драконът е на x години. Той е бил на 110 години преди $x - 110$ години. Тогава, преди $x - 110$ години, кралят на джуджетата е бил на $110 - (x - 110) = 220 - x$ години. По условие имаме

$$x = 10(220 - x)$$

и намираме $11x = 2200$, т.е. $x = 200$.

ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ
НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ — 2019 г.

НАУЧНОПОПУЛЯРНИ СТАТИИ

ИЗВЪНКЛАСНА РАБОТА И ИНФОРМАЦИЯ

УЧЕНИЧЕСКО ТВОРЧЕСТВО

КОНКУРСИ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

ЗА ПО-МАЛКИТЕ

В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ

В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ

ЗА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

ЗА КАНДИДАТ-СТУДЕНТА

И Н Ф О Р М А Т И К А   В   НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: `spisaniematematika2019@gmail.com`

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 02.12.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.

Ръкописи не се връщат.