МАТЕМАТИКА

БРОЙ 2
2019 г.
ГОДИНА LVIII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Известно е, че $\lg 2 \approx 0.301$. Колко цифри има числото 2^{100}?

А) 25 **Б)** 30 **В)** 31 **Г)** 100

Задача 2. (1 т.) Точката A с положителна абсциса x_0 е от графиката на функцията $y = x^3$, в която допирателната към графиката ѝ сключва с абсцисата ъгъл 60°. Числото x_0 е:

А) $\dfrac{1}{2}$ **Б)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Задача 3. (1 т.) Лицето на равнобедрен триъгълник ABC е 1, ъгълът при основата му е α. В триъгълника е вписан полукръг с диаметър върху AB. Лицето на полукръга е:

А) $\dfrac{\pi}{2}\sin^2\alpha$ **Б)** $\dfrac{\pi}{4}\sin 2\alpha$ **В)** $\pi\cos\alpha$ **Г)** $\sin\alpha\cos\alpha$

Задача 4. (1 т.) Дадени са две концентрични окръжности. Хорда на голямата окръжност, която се допира до малката е с дължина 10. Лицето на венеца е:

А) 16π **Б)** 25π **В)** 36 **Г)** 100π

Задача 5. (1 т.) Правоъгълен триъгълник с катети 3 и 4 е основа на пирамида, околните стени на която сключват с основата двустенни ъгли по 60°. Обемът на пирамидата е:

А) $\sqrt{3}$ **Б)** $2\sqrt{3}$ **В)** 3 **Г)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$\sin x + \cos 2x = a,$$

където a е параметър.

а) (1 т.) За коя стойност на a числото $x = 2019\pi$ е решение?

б) (2 т.) Да се реши уравнението за $a = 0$.

в) (2 т.) За кои стойности на параметъра a уравнението има точно едно решение в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$?

Задача 7. (5 т.) Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с бедро равно на c, малка основа CD равна на $2c$ и остър ъгъл α.

а) (2 т.) Да се докаже, че лицето на трапеца е

$$S = c^2(2 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

б) (2 т.) Да се намери максималната стойност на S в зависимост от α.

в) (1 т.) Да се докаже, че когато лицето S е най-голямо, AB е диаметър на описаната около трапеца окръжност.

Задача 8. (5 т.) Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с основен ръб a и околен ръб b. През основен ръб и средата на отсечката, съединяваща центровете на основите на призмата, е прекарана равнина ρ.

а) (1.5 т.) Да се докаже, че косинусът на ъгъла между равнината ρ и основите на призмата е равен на $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 3b^2}}$.

б) (1.5 т.) Да се пресметне лицето на сечението на призмата с равнината ρ.

в) (2 т.) Да се намери косинусът на ъгъла φ между непресичащите се диагонали на две околни стени на призмата и да се докаже, че $\varphi > \dfrac{\pi}{3}$.

ЗИМЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АТАНАС РАДЕВ“

Петър Бойваленков
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

На 18–20 януари 2019 г. в Сливен се проведе поредното издание на Зимния математически турнир. Резултатите на всички участници могат да бъдат намерени на сайта на ППМГ „Добри Чинтулов “, Сливен, http://pmg-sliven.com/. Победители станаха:

8. клас

I място. Божидар Димитров (ПМГ, Силистра)
II място. Цветелина Илиева (ППМГ, Бургас)
III място. Иван Тагарев (СМГ, София)
I награда. Виктор Михайлов (СМГ, София), **Илияс Номан** (СМГ, София)
II награда. Ивайла Радкова (125. СУ, София)
III награда. Антонио Задгорски (СМГ, София), **Илия Петров** (СМГ, София), **Маргулан Исмолдаев** (МГ, Варна), **Мария Дренчева** (СМГ, София), **Никола Цачев** (ПЧМГ, София), **Ясен Пенчев** (ПМГ, Габрово)

9. клас

I място. Мартин Копчев (ПМГ, Габрово)
II място. Ангел Райчев (125. СУ, София), **Борислав Кирилов** (ПЧМГ, София)
I награда. Валери Ванков (Американски колеж, София), **Милко Бакалов** (СМГ, София)
II награда. Персиан Турсунов (СМГ, София), **Филип Тодоров** (СМГ, София)
III награда. Андон Тодоров (СМГ, София), **Десислава Николова** (СМГ, София), **Мартин Димитров** (125. СУ, София), **Цветослав Мавродиев** (МГ, Варна)

10. клас

I място. Къонг Виет До (СМГ, София)
II място. Михаела Гледачева (ПЧМГ, София)
III място. Диян Димитров (СМГ, София)
I награда. Светлин Лалов (СМГ, София), **Стефан Хаджистойков** (СМГ, София)
II награда. Иван Георгиев (СМГ, София), **Никола Стайков** (СМГ, София)

III награда. Стилиян Нановски (МГ, Плевен)

11. клас

I място. Евгени Кайряков (СМГ, София)
II място. Кристиан Минчев (ППМГ, Бургас), **Матей Петков** (НПМГ, София)
I награда. Димитър Чакъров (МГ, Пловдив), **Димитър Опърлаков** (МГ, Варна), **Добрин Бараков** (МГ, Плевен), **Иво Петров** (СМГ, София)
II награда. Петър Лангов (СМГ, София)

12. клас

I място. Никола Секулов (СМГ, София), **Орлин Кучумбов** (ППМГ, Бургас)
III място. Борис Барбов (СМГ, София), **Борислав Антов** (СМГ, София), **Кирил Трифонов** (СМГ, София), **Кристиян Василев** (ПЧМГ, София), **Пламен Иванов** (СМГ, София)
I награда. Георги Александров (СМГ, София)
II награда. Иван-Александър Мавров (СМГ, София)
III награда. Георги Ангелов (СМГ, София), **Чавдар Лалов** (МГ, Плевен)

Предлагаме Ви условията на задачите и кратки решения.

Задача 8.1. а) Да се докаже, че произведение на четири последователни естествени числа не може да е точен квадрат на естествено число.

б) Да се намерят всички естествени числа n, за които n^2+9n+8 може да се представи като произведение на четири последователни естествени числа.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3) &= (x^2+3x)(x^2+3x+2) = \\ &= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) = \\ &= (x^2+3x+1)^2-1, \end{aligned}$$

което показва, че произведението на четири последователни естествени числа не е точен квадрат на естествено число.

б) От а) следва, че числото n^2+9n+9 е точен квадрат. От друга страна,

$$(n+3)^2 < n^2+9n+9 < (n+5)^2,$$

следователно

$$n^2+9n+9=(n+4)^2 \quad \Longrightarrow \quad n=7.$$

Действително, $7^2+9\cdot 7+8=120=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

Задача 8.2. Точките M, N и K са съответно върху страните AC, BC и AB на $\triangle ABC$, като K е среда на AB, а $MN \perp CK$. Ако $\sphericalangle NMC = \sphericalangle BKN$ и $\sphericalangle MNC = \sphericalangle AKM$, да се докаже, че отсечките AN, BM и CK се пресичат в една точка.

Решение. От условието следва, че $\sphericalangle MKN = \sphericalangle ACB = \gamma$, като допълващи едни и същи ъгли до 180°. Нека означим пресечната точка на MN и CK с L. Построяваме $DL = CL$, така че D да е от лъча LK. Ако допуснем, че D е между L и K, то от еднаквостта на триъгълниците $\triangle MLC \cong \triangle MLD$, $\triangle LNC \cong \triangle LND$ следва, че $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MCN = \gamma$. От друга страна, $\sphericalangle MDL > \sphericalangle MKL$, $\sphericalangle NDL > \sphericalangle NKL$, като външни съответно за $\triangle MKD$ и $\triangle NKD$. Следователно,

$$\gamma = \sphericalangle MDN = \sphericalangle MDL + \sphericalangle NDL > \sphericalangle MKL + \sphericalangle NKL = \sphericalangle MKN = \gamma,$$

което е невъзможно и значи D не е между L и K. Аналогично (с неравенства в обратната посока) се доказва, че K не може да е между L и D. Следователно $D \equiv K$ и $CL = LK$.

Да построим през L отсечка $M_1N_1 \parallel AB$ ($M_1 \in AC, N_1 \in BC$). Ясно е, че M_1 и N_1 са средите на AC и BC. Ако допуснем, че $MN \nparallel AB$, то, без ограничение на общността, нека $M_1 \in AM$, $N \in CN_1$. Тогава,

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle N_1M_1C > \sphericalangle NMC = \sphericalangle BKN > \sphericalangle BKN_1 = \sphericalangle BAC,$$

което е противоречие. Следователно, $MN \parallel AB$, $M \equiv M_1$ и $N \equiv N_1$, т.е. отсечките AN, BM и CK се явяват медиани в $\triangle ABC$ и като такива се пресичат в медицентъра на триъгълника.

Задача 8.3. Да се докаже, че съществуват безброй много естествени числа a, такива че всяко от числата $n^3 + 2018n + a$, $n^3 + 2019n + a$ и $n^3 + 2020n + a$ е съставно.

Решение. Ясно е, че всяко естествено a, което е кратно на n, върши работа освен евентуално за $n = 1$. За да отстраним този проблем, избираме a кратно на $2019.2020.2021n$.

Задача 8.4. В долното ляво поле на дъска 7×9 е поставен пул. На всеки ход пулът се премества или две полета надясно, или две полета нагоре, или три полета наляво, или три полета надолу, или едно поле по диагонал нагоре-надясно, като не е разрешено да се поставя в полета, в които е бил по-рано. Колко най-много полета може да посети пулът?

Решение. Да номерираме полетата, както е показано на таблицата.

4	2	5	3	1	4	2	5	3
1	4	2	5	3	1	4	2	5
3	1	4	2	5	3	1	4	2
5	3	1	4	2	5	3	1	4
2	5	3	1	4	2	5	3	1
4	2	5	3	1	4	2	5	3
1	4	2	5	3	1	4	2	5

Тогава пулът задължително посещава полетата в реда $1, 2, 3, 4, 5, 1$ и т.н. Има 12 полета с номер 1 и началното е с номер 1, така че пулът може да посети най-много $5 \cdot 12 = 60$ полета. Това може да стане например като на таблицата долу.

59	47	60	58	46	44		45	43
6	49	7	55	18	31	19	42	30
3	51	9	57	15	33	21	39	27
5	48	11	54	17	35	23	41	29
2	50	8	56	14	32	20	38	26
4	52	10	53	16	34	22	40	28
1		12		13	36	24	37	25

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$|x|(x+1) = ax + a^2$$

има точно два различни реални корена.

Решение. При $a = 0$ уравнението има корени 0 и -1, т.е. $a = 0$ е решение. Нека $a \neq 0$. При $x \geq 0$ получаваме уравнението

$$x^2 + (1-a)x - a^2 = 0,$$

което има два реални корена с различни знаци и значи точно един от тях е корен на изходното уравнение. За да имаме точно два реални корена, трябва уравнението $x^2 + (a+1)x + a^2 = 0$, което се получава при $x < 0$ да има точно един отрицателен корен. Тъй като корените на това уравнение са с еднакъв знак, единствената възможност е да имаме двоен отрицателен корен. Тогава $(a+1)^2 - 4a^2 = 0$, откъдето $a = 1$ или $a = -1/3$, като и в двата случая двойният корен е отрицателен.

Задача 9.2. Вписаната в остроъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точките P и Q. Медианата

CM пресича отсечката PQ в точка F. Да се докаже, че $AB = 2BC$ тогава и само тогава, когато BF е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.

Решение. Нека $AB = 2BC$ и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е с център I и се допира до страната BC в точка K. Тогава триъгълниците CMB и KPB са равнобедрени и основите им CM и KP са успоредни.

Точките C, Q и K лежат на окръжността с диаметър CI и, тъй като

$$\begin{aligned}\sphericalangle QFC &= \sphericalangle QPK = 180^\circ - (\sphericalangle APQ + \sphericalangle BPK)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC) - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB,\end{aligned}$$

и $\sphericalangle QKC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle ACB$ следва, че точка F лежи на същата окръжност. Тогава $IF \perp CM$ и от $BI \perp CM$ следва, че B, I и F лежат на една права, т.е. BF е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.

Нека BF е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ (т.е. точките B, I и F лежат на една права). Имаме

$$\sphericalangle KQP = \sphericalangle KPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle BIK,$$

което означава, че четириъгълникът $FIKQ$ е вписан в окръжността с диаметър CI. Тогава $\sphericalangle IFC = 90^\circ$ и BF е перпендикулярна едновременно на KP и CM, т.е. $KP \| CM$. Следователно $CM = CB$ и $AB = 2BC$.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото естествено число k, за което уравнението

$$x^3 + y^3 = k2019^{2018-k}$$

има решение в цели числа.

Отговор: 2.

Решение. При $k = 1$ уравнението $x^3 + y^3 = 2019^{2017}$ няма решение. Действително, възможните остатъци на кубовете по модул 7 са 0, 1 и 6, което означава, че лявата страна е сравнима с 0, 1, 2, 5 или 6 по модул 7. От друга страна,

$$2019^{2017} \equiv 3^{2017} = 3^{6.336+1} \equiv 3 \pmod 7.$$

При $k = 2$ уравнението придобива вида $x^3 + y^3 = 2 \cdot 2019^{2016}$ и има решение $x = y = 2019^{672}$.

Задача 9.4. Том играе компютърна игра, в която трябва да опази парче сирене от група от m мишки ($m \geq 3$ е естествено число). Сиренето е с формата на кръг с радиус 1 и център O, а мишките са точки в равнината на кръга. Първоначално мишките се намират в точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$, които се намират в ъгъл $\sphericalangle A_1OA_m = 90^\circ$. Всяко от разстоянията OA_i е точна степен на 2 като никое от лицата на триъгълниците OA_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, не надминава $\frac{1}{2}$.

На всеки ход мишките се разделят на две групи, като е възможно едната група да е празна. Том избира една от групите и я отстранява от играта, а всяка от мишките от другата група изминава половината от разстоянието от текущото си положение до точка O. Да се докаже, че мишките могат да се договарят да се разделят така, че поне една от тях да достигне до сиренето преди да бъде отстранена, независимо от действията на Том.

Решение. Твърдението е очевидно, ако $|OA_i| = 1$ за някое i. Оттук нататък предполагаме, че $|OA_i| > 1$ и следователно $|OA_i| \geq 2$ за всяка точка $i \leq m$.

Да разгледаме мишка, която първоначално се намира в точка A_i на разстояние $2^{p_i} = |OA_i|$ от центъра на сиренето. Тогава, ако не е отстранена след t хода, тя ще се намира на разстояние $2^{p_i - t}$ до O. Това показва, че във всеки момент от време всяка (неотстранена) мишка се намира на разстояние 2^n от O за някое цяло n. Без ограничение на общността можем да считаме, че $n > 0$, защото иначе някоя от неотстранените мишки е достигнала сиренето.

Нека след t хода да имаме k неотстранени мишки, съответно на разстояния $2^{p_1(t)}, 2^{p_2(t)}, \ldots, 2^{p_k(t)}$ до O. Да разгледаме сумата

$$S(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{p_i(t)}}.$$

Първо ще докажем, че $S(0) \geq 1$. Наистина, нека B_i за $i = 1, 2, \ldots, m$ е пресечната точка на отсечката OA_i със окръжността с център O и радиус 1 . Тогава лицето на триъгълника OB_iB_{i+1} е:

$$S_{OB_iB_{i+1}} = \frac{1}{|OA_i||OA_{i+1}|} S_{OA_iA_{i+1}} \leq \frac{1}{2|OA_i||OA_{i+1}|} \leq \frac{1}{4}\frac{1}{|OA_i|},$$

където първо използвахме, че $\dfrac{|OB_i|}{|OA_i|} = \dfrac{1}{|OA_i|}$, защото OB_i е радиус, след това, че $S_{OA_iA_{i+1}} \leq \dfrac{1}{2}$ и накрая, че $|OA_{i+1}| \geq 2$. Остана да забележим, че триъгълниците OB_iB_{i+1} покриват триъгълника OB_1B_m, който има лице $\dfrac{1}{2}$. Следователно лявата страна е поне $\dfrac{1}{2}$ и това показва, че $S(0) \geq 2$.

Сега ще покажем, че ако $S(t) \geq 1$, то мишките могат да се разделят на две групи A и B, че:

$$\sum_{i\in A}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\geq\frac{1}{2}\text{ и }\sum_{i\in B}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\geq\frac{1}{2}.$$

Тогава, която и група да бъде отстранена от Том, другата ще скъси разстоянието си до O на половина и ще гарантира, че $S(t+1)\geq 1$.

Без ограничение на общността нека $p_1(t)\geq p_2(t)\cdots\geq p_k(t)\geq 1$. Нека l е най-малкото естествено число, за което:

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\geq\frac{1}{2}\left(>\sum_{i=1}^{l-1}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\right).$$

Тогава от $S(t)\geq 1$ следва, че:

$$\sum_{i=l+1}^{k}\frac{1}{2^{p_i(t)}}+\frac{1}{2^{p_l(t)}}>\frac{1}{2},$$

от което като приведем под общ знаменател получаваме, че:

$$\sum_{i=l+1}^{k}2^{p_l(t)-p_i(t)}+1>2^{p_l(t)-1}$$

Тъй като $p_l(t)\geq p_i(t)$ за всяко $i\geq l+1$ и $p_l(t)\geq 1$, то от двете страни на неравенството имаме цели числа и следователно:

$$\sum_{i=l+1}^{k}2^{p_l(t)-p_i(t)}\geq 2^{p_l(t)-1}.$$

Сега полагаме $A=\{i\,|\,i\leq l\}$ и $B=\{i\,|\,i\geq l+1\}$. От горните разсъждения заключаваме, че:

$$\sum_{i\in A}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\geq\frac{1}{2}\text{ и }\sum_{i\in B}\frac{1}{2^{p_i(t)}}\geq\frac{1}{2}.$$

Така че, която и група (A или B) да отстрани Том, в момента $t+1$ ще имаме отново, че $S(t+1)\geq 1$. Тъй като $p_i(t)$ намаляват с 1 на всеки ход, в някой момент от време ще има мишка, на която ще съответства $p_i(t)=0$. Но тогава тази мишка се намира върху сиренето.

Забележка. Всъщност достатъчно е лицата на OA_iA_{i+1} да не надминават 1, защото от решението следва, че тогава $S(0)\geq 1$. Нещо повече, ако d е минималното разстояние $|OA_i|$ в началото, то $S(0)\geq d$. Използвайки горните разсъждения може да покажем, че поне d от мишките могат да достигнат сиренето преди да бъдат отстранени.

Забележка. Условието $S(0) \geq 1$ е необходимо и достатъчно за това мишките да си гарантират, че поне една от тях ще достигне сиренето. Наистина, ако $S(t) < 1$, то поне една от групите A или B ще дефинира сума по-малка от $\frac{1}{2}$. Том може да отстрани другата група и да си гарантира, че $S(t+1) < 1$. Тогава никоя мишка никога няма да достигне до сиренето, защото иначе $S(t) \geq 1$ в момента, в който това се случи.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0 \\ y^2 + y - x = 0 \end{array} \right.$$

има точно две решения.

Решение. Дискриминантата на $y^2 + y - x = 0$ като квадратно уравнение относно y е $D = 1 + 4x$. Лесно се вижда, че условието е равносилно на това да намерим всички a, за които $x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0$ има точно един корен в интервала $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ и той е различен от $-\frac{1}{4}$.

Нека $f(x) = x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0$.

Първи случай. $f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0 \iff 16a^2 + 8a - 33 > 0$, т.е.

$$a \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{34}}{4}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{34}}{4}, \infty\right).$$

Втори случай. $D = 0 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$. Ако $a = 1$, уравнението е $x^2 + 2x + 1 = 0$ и има двоен корен $x_1 = x_2 = -1$, т.е. $a = 1$ не е решение.

Ако $a = -1$, уравнението е $x^2 - 2x + 1 = 0$ и има двоен корен $x_1 = x_2 = 1$, т.е. $a = -1$ е решение.

Окончателно $a \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{34}}{4}\right) \cup \{-1\} \cup \left(\frac{-1+\sqrt{34}}{4}, \infty\right)$.

Задача 10.2. В остроъгълния триъгълник ABC медианата CM разделя $\sphericalangle ACB$ в отношение $2:1$ ($\sphericalangle ACM = 2\sphericalangle MCB$). Описаната около триъгълник ABC окръжност с център O пресича за втори път описаната около триъгълник MOC окръжност в точка D. Да се докаже, че CD е ъглополовяща за $\sphericalangle ACM$.

Решение. Нека BA пресича за втори път описаната около $\triangle MOC$ окръжност k_2 в точка P. Точките A и M са между точките P и B, защото $\sphericalangle ACM > \sphericalangle MCB$ и следователно O е вътрешна за $\triangle MBC$. Тъй като OM е симетрала за AB, то $\sphericalangle PMO = 90^\circ$ и значи PO е диаметър за k_2. Тъй като O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност k_1, $\{C, D\} \in k_1$

и $\sphericalangle OCP = \sphericalangle ODP = 90^\circ$, следва че PC и PD са допирателните към k_1 през точката P. Тогава $\sphericalangle AMD = \sphericalangle PCD$ (от k_2), а $\sphericalangle PCD = \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DCB$ (от k_1). Следователно $\triangle DMA \sim \triangle DBC$ и значи

$$\frac{DA}{DC} = \frac{MA}{BC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{MB} = \frac{DC}{BC}$$

и следователно $\triangle DAC \sim \triangle MBC$ ($\sphericalangle ADC = \sphericalangle MBC$). Оттук

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle MCB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACM$$

и тъй като D лежи на дъгата AB от k_1, несъдържаща C, то CD е ъглополовяща за $\sphericalangle ACM$.

Задача 10.3. Една редица a ще наричаме *самопресичаща се*, ако сумата на някои от нейните членове е равна на сумата на някои от другите ѝ членове, т.е. съществуват два по два различни индекси $i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_r$, $s, r \geq 1$, такива че $a_{i_1} + \cdots + a_{i_s} = a_{j_1} + \cdots + a_{j_r}$. Например, редицата $1, 3, 5, 7, 9, ...$ е самопресичаща се, докато редицата $1, 3, 9, 27, 81, ...$ не е. Да се намерят всички двойки естествени числа (α, β), за които редицата: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$, $n \geq 2$, е самопресичаща се.

Отговор: $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

Решение. Тъй като $\alpha, \beta \geq 1$ и $a_{n+1} - a_n = (\alpha - 1)a_n + \beta a_{n-1} \geq a_{n-1}$, то по индукция следва, че за всеки избор на естествените (α, β), генерираната редица е строго монотонно растяща и положителна. Да разгледаме произволна самопресичаща се редица от търсения вид. Без ограничение на общността, нека $i_1 < i_2 \cdots < i_s$, $j_1 < j_2 \cdots < j_r$ и $i_s < j_r$. Поради монотонността, не може $r = s = 1$.

Ако $\alpha \geq 2$, то $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} > 2a_n$ и

$$a_{j_1} + \cdots + a_{j_r} \geq a_{j_r} > 2a_{j_r-1} > a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2} > a_{j_r-1} + \cdots + a_1 > a_{i_1} + \cdots + a_{i_s}.$$

Противоречие. Следователно $\alpha = 1$.

Ако $\beta \geq 2$, то $a_{n+1} = a_n + \beta a_{n-1} \geq a_n + 2a_{n-1}$ и

$$a_{j_r} \geq a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2} \geq a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + a_{j_r-3} + 2a_{j_r-4} \geq \cdots \geq a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + \cdots + a_1.$$

Следователно $\beta = 2$, $r = 1$, $i_s = j_r - 1$ и е в сила равенството

$$a_{j_r} = a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + \cdots + a_1.$$

Но тогава $a_{j_r} = a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2}$ и значи

$$a_{j_r-2} = a_{j_r-3} + \cdots + a_1 \Rightarrow a_{j_r-4} = a_{j_r-5} + \cdots + a_1 \Rightarrow \cdots \; a_2 = a_1 \text{ или } a_1 = 0.$$

Противоречие. Следователно остава единствената възможност $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, водеща до редицата на Фибоначи, която е самопресичаща се, защото $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Задача 10.4. Виж Задача 9.4.

Задача 11.1. За кои стойности на реалния параметър a уравнението:

$$8^{x^2-x+a^2} - 2^{2x^2-x+2a^2-a+1} - 2^{x^2-2x+a^2+a+2} + 8 = 0$$

има точно три различни реални решения относно x?

Отговор: $a \in \left\{\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Решение. Да забележим, че лявата страна на уравнението се разлага на

$$(2^{2x^2-x+2a^2-a} - 4)(2^{x^2-2x+a^2+a} - 2).$$

Тогава решенията на даденото уравнение са точно решенията на всяко от уравненията

$$2x^2 - x + 2a^2 - a = 2 \quad \text{и} \quad x^2 - 2x + a^2 + a = 1.$$

Тоест даденото уравнение има точно три различни решения, когато:

(i) някое от уравненията има двоен корен, а другото има два релни корена, различни от двойния, или

(ii) двете уравнения имат общ реален корен, който не е двоен за никое от тях.

Първото уравнение има двоен корен при $D_1(a) = 1 - 8(2a^2 - a - 2) = 0$, т.е. при $a = a_1 = \dfrac{1+3\sqrt{2}}{4}$ или при $a = a_2 = \dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}$.

Второто уравнение има двоен корен при $D_2(a) = 4 - 4(a^2 + a - 1) = 0$ и $a_3 = 1$, $a_4 = -2$.

Умножавайки второто уравнение по 2 и вадейки от него първото, получаваме че уравненията имат общ корен $x = a$ за $a_5 = 1$ и $a_6 = -\dfrac{1}{2}$.

Остава да проверим, кои от шестте потенциални стойности на a наистина вършат работа. Тъй като $a_3 = a_5$, то в този случай имаме само две различни решения, защото двойният корен на второто уравнение се явява корен и на първото. Директно се вижда, че $D_2(a_1) < 0$, $D_2(a_2) > 0$, $D_1(a_4) < 0$, $D_1(a_6) > 0$ и $D_2(a_6) > 0$. Следователно единствено a_2 и a_6 вършат работа. Така окончателно даденото уравнение има точно три реални решения при $a \in \left\{\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Задача 11.2. В окръжност k с радиус 1 е вписан триъгълник ABC. Точките I и I_a са съответно център на вписаната окръжност и център на външновписаната окръжност към страната BC на триъгълник ABC. Правата BI пресича AC в точка B_1, а правата AI пресича BC в точка A_1. Правата B_1A_1 пресича k в точки P и Q.

а) Да се докаже, че точките I, I_a, P и Q лежат на една окръжност.

б) Да се намери радиусът на описаната окръжност около триъгълник IPQ.

Решение. а) Тъй като $\sphericalangle IBI_a = \sphericalangle ICI_a = 90^\circ$, то четириъгълникът IBI_aC е вписан в окръжност. Следователно:

$$A_1I.A_1I_a = A_1B.A_1C. \tag{1}$$

Точките P, B, Q и C са върху k. Следователно:

$$A_1B.A_1C = A_1P.A_1Q. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва равенството $A_1I.A_1I_a = A_1P.A_1Q$, което означава, че точките I, I_a, P и Q лежат на една окръжност.

б) От а) следва, че точките I, P, Q и I_a лежат на една окръжност. Аналогично доказваме, че точките I, P, Q и I_b лежат на една окръжност (I_b е център на външновписаната окръжност към страната AC). Следователно търсим радиуса на описаната окръжност около триъгълник II_aI_b.

Ще използваме, че ако S е средата на дъгата BC, то $SI = SI_a = SB$. За радиуса r на описаната окръжност на триъгълник IPQ имаме:

$$2r = \frac{II_a}{\sin \sphericalangle II_bI_a} = \frac{II_a}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2SB}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} = 4R_{ABC} = 4.$$

Следователно търсеният радиус е $r = 2$.

Задача 11.3. За естествено число n с $\tau(n)$ означаваме броя на естествените делители на n. Да се намерят всички естествени числа n, за които, ако $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ са всички делители на n, то:

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \tau(n^3).$$

Решение. Ако $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ лесно се съобразява по индукция, че

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)}{2}.$$

Тъй като $\tau(n^3) = \prod_{i=1}^{t}(3\alpha_i + 1)$, то равенството от условието става:

$$\prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)}{2(3\alpha_i + 1)} = 1.$$

За функцията $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{2(3x+1)}$ имаме $f(1) = \dfrac{3}{4}$, $f(2) = \dfrac{6}{7}$, $f(3) = 1$ и $f(x) > 1$ за $x \geq 4$. Ако съществува i, за което $\alpha_i < 3$, то числителят на $\prod_{i=1}^{t} \dfrac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)}{2(3\alpha_i + 1)}$ ще се дели на 3, докато знаменателят никога не се дели на 3, противоречие. Следователно $\alpha_i \geq 3$ за всяко i и от $f(x) > 1$ за $x \geq 4$ получаваме че $\alpha_i = 3$ за всяко i. Търсените n са от вида $n = m^3$ където m е произволно естествено число, свободно от квадрати.

Задача 11.4. В математическо състезание с 13 участници били дадени три задачи, като всяка задача се оценявала с 0 до 7 точки. След състезанието се оказало, че няма двама участници с равни резултати и по трите задачи. Да се докаже, че има трима ученици A, B и C, за които:

- A е получил не по-малко точки от B по първа задача;
- B е получил не по-малко точки от C по някоя от другите две задачи;
- C е получил не по-малко точки от A по останалата задача.

Решение. Да наречем тройка от трима ученици „добра", ако тримата изпълняват условието на задачата. Ако X има не по-малко точки от Y по задача t, записваме $X \xrightarrow{t} Y$. Да допуснем, че в състезание с 13 ученици няма добра тройка.

Ще докажем, че ако трима ученици имат равни резултати по една от задачите, те образуват добра тройка $(*)$.

Нека резултатите на трима ученици A, B и C по трите задачи са съответно (a, x, p), (a, y, q) и (a, z, r), като без ограничение $x \geq y \geq z$. Ако $r \geq q$, то $B \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{2} C$ и $C \xrightarrow{3} A$. Ако $r < q$, то $C \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{2} B$ и $B \xrightarrow{3} C$.

Ще докажем, че ако A и B имат равни точки по една от задачите, а B и C имат равни точки по друга от задачите, то A, B и C образуват добра тройка $(**)$.

Нека резултатите на трима ученици A, B и C по трите задачи са съответно (a, x, y), (a, b, z) и (m, b, n).

Ако $y \geq n$, то $B \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{3} C$ и $C \xrightarrow{2} B$.

Ако $y < n$, то $A \xrightarrow{1} B$, $B \xrightarrow{2} C$ и $C \xrightarrow{3} A$.

Ако X и Y имат равни резултати по някоя от задачите, то те имат различни резултати по някоя от другите две задачи. Без ограничение нека резултатите са a, b, c и a, x, y, като $b \neq x$. Според $(**)$ няма други участници с резултат b или x по втора задача.

Да разгледаме резултатите на всички 13 участници по първа задача. Според $(*)$ няма три равни резултата и следователно има поне 5 двойки равни резултати (защото възможните резултати са 8 и $4.2+4 < 13$). Тогава има поне 5 двойки резултати, които се срещат само по един път.

Поне три двойки са по една от останалите две задачи. Това означава, че по една от задачите има три такива двойки. Следователно поне 6 резултата се срещат по един път в тази задача. Тогава участниците са най-много $6 + 2.2 = 10 < 13$, противоречие.

Забележка. Представената таблица с резултати показва, че може да има състезание с 12 участници без добра тройка.

Задача/участник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	7	6	6	5	5	4	3	2	1	0	0
2	7	7	6	5	4	4	3	3	2	2	1	0
3	7	6	5	5	4	3	2	2	1	1	0	0

Задача 12.1. Нека $f_1(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ и $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Да се пресметне

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3}.$$

Решение. По индукция следва, че $(*)$ $f_n(x) = \dfrac{(n+2)x-n}{nx-(n-2)}$ и тогава

$$\sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3} = \sum_{n=4}^{k} \frac{2}{(n-1)(n-2)} = 1 - \frac{2}{k-1} \to 1.$$

Задача 12.2. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с I и J са означени центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. Правата BI пресича страната AD и описаната окръжност около $\triangle ABD$ съответно в точки M и P, а правата BJ пресича страната CD и описаната окръжност около $\triangle CBD$ съответно в точки N и Q. Да се докаже, че $MN||PQ \Leftrightarrow IJ||PQ$.

Решение. Имаме, че

$$BM^2 = AB.DB - AM.DM, \quad BM.PM = AM.DM,$$

откъдето
$$\frac{BM}{PM}=\frac{AB.DB}{AM.DM}-1=\left(\frac{DB}{DM}\right)^2-1.$$
Аналогично $\dfrac{BN}{QN}=\left(\dfrac{DB}{DN}\right)^2-1$ и следователно
$$MN||PQ\Leftrightarrow\frac{BM}{PM}=\frac{BN}{QN}\Leftrightarrow DM=DN.$$

По-нататък, да отбележим, че $IP=DP$ и $JQ=DQ$. Освен това, $\triangle DPM\sim\triangle BPD$ и $\triangle DQN\sim\triangle BQD$. Тогава
$$IJ||PQ\Leftrightarrow\frac{IP}{BP}=\frac{JQ}{BQ}\Leftrightarrow\frac{DP}{BP}=\frac{DQ}{BQ}\Leftrightarrow\frac{DM}{BD}=\frac{DN}{BD}\Leftrightarrow DM=DN.$$

Забележка. $MN||PQ\Leftrightarrow PQ||IJ\Leftrightarrow IJ||MN\Leftrightarrow DM=DN$. От друга страна, правите MN, PQ и IJ никога не се пресичат в една точка.

Задача 12.3. Виж Задача 11.3.

Задача 12.4. Нека $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ е такава функцикя, че $f(tz)=|t|f(z)$ и $f(z+w)\le f(z)+f(w)$ за произволни $t\in\mathbb{R}$ и $z,w\in\mathbb{C}$. Да се докаже, че съществува $c\in\mathbb{C}$ така, че $c\neq 0$ и $f(pc)+f(iqc)\le 3f(pc+iqc)$ за всеки $p,q\in\mathbb{R}$.

Решение. Дадените две условия означават, че множеството $I=\{z\in\mathbb{C}:f(z)\le 1\}$ е изпъкнало и централно симетрично спрямо началото O. Ако то съдържа права, например реалната ос, можем да изберем изберем $c=1$. В противен случай I е ограничено множество. След ротация и хомотетия, можем да считаме, че 1 е точка от границата на I, която е най-близка до O. Да изберем $c=1$. Достатъчно е да докажем, че ако $R=p+iq$ е такова, че $f(p+iq)=1$, то $p\in I$ и $Q=iq\in 2I$. Първото следва от наблюдението, че $I\subset\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}z|\le 1\}$. По-нататък, ако $|q|\le 1$, то $Q\in I$. Нека сега $|q|>1$. Можем да изберем точка T върху единичната окръжност така, че отсечката RT е перпендикулярна на OT и пресича ординатната ос в точка S. От $\triangle RSQ\sim\triangle OST$ следва, че $QS/OS<RS/OS=RQ/OT=|p|\le 1$ и значи $OQ<2OS$. Понеже $R,T\in I$, то $S\in I$ и тогава $Q\in 2I$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Иван Тонов; 8.2 – Емил Стоянов; 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Петър Бойваленков; 9.4=10.4, 11.1 – Стефан Герджиков; 10.2 – Диана Данова / Станислав Харизанов; 10.3 – Станислав Харизанов; 10.1, 11.3=12.3 – Александър Иванов; 11.2, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов

НЯКОЛКО ФУНКЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИ

Петър Бойваленков
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките
Navid Safaei
The Research Institute for Science, Technology and Industry Policy, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Задача 1. Нека P, Q, R са полиноми, за които $\deg(P) \neq \deg(Q) > 0$. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществува най-много един моничен полином f от степен k, за който равенството

$$f(P(x))f(Q(x)) = f(R(x))$$

е изпълнено за всяко реално число x.

Твърдението е в сила и при $\deg(P) = \deg(Q) > 0$ ако старшите коефициенти на P и Q са положителни. (По задача M1465 на Квант)

Решение. Да допуснем противното. Нека $\deg(P) = a$, $\deg(Q) = b$ и първо да предположим, че $a \neq b$, като без ограничение на общността $a > b$. От даденото равенство следва, че $\deg(R) = a + b$.

Нека f и g са два монични полинома от степен k с исканото свойство. Тогава полиномът $f - g$ е от степен $m < k$ и

$$\begin{aligned} f(R) - g(R) &= f(P)f(Q) - g(P)g(Q) = \\ &= f(P)(f(Q) - g(Q)) - g(Q)(f(P) - g(P)). \end{aligned}$$

В това равенство степента отляво е равна на $m(a + b)$, а отдясно е $\max\{ka + mb, kb + ma\}$. Лесно се вижда, че и двете възможности водят до $k = m$, противоречие.

Нека сега $a = b$. В горното разсъждение разлика възниква само когато полиномите $f(P)(f(Q) - g(Q))$ и $g(Q)(f(P) - g(P))$ имат равни по абсолютна стойност, но противоположни по знак старши коефициенти. Но, ако старшите коефициенти на $f - g$, P и Q са съответно u, v и w, то старшите коефициенти на $f(P)(f(Q)-g(Q))$ и $g(Q)(f(P)-g(P))$ са съответно $uv^k w^m$ и $uv^m w^k$, т.е. са с еднакви знаци.

Задача 2. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2 - 1) = P(x + 1)P(x - 1).$$

Решение. Сравняването на старшите коефициенти от двете страни дава, че полиномът P е моничен[*]. Тогава от Задача 1 следва, че той е единствен (ако съществува) за всяка фиксирана степен. Тъй като $P(x) = x^n$ удовлетворява даденото равенство, това са всички решения.

Задача 3. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^3 + 1) = P(x + 1)P(x^2 - x + 1).$$

Решение. Отново лесно се вижда, че P е моничен. Тогава от Задача 1 следва, че той е единствен (ако съществува) за всяка фиксирана степен. Тъй като $P(x) = x^n$ удовлетворява даденото равенство, това са всички решения.

Задача 4. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x)P(x + 1) = P(x^2 + 2).$$

Решение. Сравняването на старшите коефициенти от двете страни дава, че полиномът P е моничен. Тогава от Задача 1 следва, че той е единствен (ако съществува) за всяка фиксирана степен. Тъй като $P(x) = (x^2 - x + 2)^n$ удовлетворява даденото равенство, това са решенията за четните степени.

Нека степента на P е нечетна и α е реален корен на P с възможно най-голяма стойност на $|\alpha|$. Но $\alpha^2 + 2$ също е реален корен на P и е с по-голяма абсолютна стойност, противоречие. Следователно няма решения от нечетна степен.

Задача 5. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2) + P(x)P(x + 1) = 0.$$

Решение. Да положим $-P = f$. Получаваме уравнението

$$f(x)f(x + 1) = f(x^2).$$

Тъй като очевидно f е моничен, от Задача 1 следва, че той е единствен (ако съществува) за всяка фиксирана степен. Лесно се вижда, че $f(x) = (x^2 - x)^n$ е решение за четните степени.

Нека степента на f е нечетна и α е реален корен на f. Тогава $\alpha^2, \alpha^4, \ldots$ и $(\alpha - 1)^2, (\alpha - 1)^4, \ldots$ също са корени. Тогава и двете редици се стабилизират, което е възможно само при $\alpha = 0$ и 1. Следователно

$$f(x) = x^k(x - 1)^m g(x),$$

[*] За да избегнем тривиалности, тук и надолу ще търсим само ненулеви полиноми

където $k, m \in \mathbb{N}$ и g няма реални корени, в частност е от четна степен. От уравнението обаче следва, че $k = m$ и значи степента на f е четна, противоречие.

Задача 6. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2 + x + 1) = P(x)P(x + 1).$$

Решение. Както по-горе е очевидно, че P е моничен и $P(x) = (x^2+1)^n$ са решенията от четна степен.

За да видим, че няма решения от нечетна степен, е достатъчно да разгледаме реален корен с възможно най-голям модул.

Задача 7. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2) = P(x)P(x - 1).$$

Решение. Отново е очевидно, че P е моничен и $P(x) = (x^2 + x + 1)^n$ са решенията от четна степен.

За да видим, че няма решения от нечетна степен, е достатъчно да разгледаме реален корен α с възможно най-голям модул и да положим $x = \alpha + 1$.

Задача 8. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Решение. Очевидно P е моничен и тогава $P(x) = (x^2 + 1)^n$ дава решенията за четните степени.

Ако $P(x)$ е от нечетна степен и има ненулев реален корен α, получаваме безкрайна редица от корени $\alpha, 2\alpha^2 + \alpha, \ldots$, противоречие.

Ако пък α е единственият реален корен на P, то сравняването на кратностите на α от двете страни на уравнението води до противоречие.

Задача 9. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2) = P(x + 1/2)P(x - 1/2).$$

Решение. Както по-горе виждаме, че $P(x) = (x^2 + 1/4)^n$ дава решенията в четните случаи.

Ако P е решение с нечетна степен, то $P(x)^2$ също е решение и вече има четна степен. Следователно $P(x)^2 = (x^2 + 1/4)^m$ за някое естествено m. От последното следва, че m е четно, което означава, че и P е от четна степен, противоречие.

Задача 10. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2 + ax + b) = P(x)P(x + 1),$$

където a и b са реални числа.

Решение. Както по-горе виждаме, че $P(x) = (x^2 + (a-1)x + b)^n$ дава решенията в четните случаи.

Ако P е от нечетна степен, то както в предходната задача следва,

$$P^2(x) = (x^2 + (a-1)x + b)^m$$

за някое естествено m. Сега m може да е произволно, ако уравнението $x^2 + (a-1)x + b = 0$ има двукратен корен (т.е. $(a-1)^2 = 4b$) и трябва да е четно в противен случай. В първия случай получаваме решения, вторият води до противоречие.

Задача 11. (Сърбия 2005) Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2 + 1) = P^2(x) + 1.$$

Решение. Нека $Q(x) = x^2 + 1$. Тогава $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Ще докажем, че всички неконстантни полиноми P с това свойство са x, $Q(x)$, $Q(Q(x))$ и т.н.

От условието следва, че $P(x) = \pm P(-x)$ за всяко x. Тъй като едното от тези две равенства е изпълнено за безбройно много x, то е изпълнено за всяко x. Да разгледаме първо случая $P(x) = P(-x)$ за всяко x. Тогава $P(x)$ е четна функция и значи $P(x) = R(x^2)$ за някакъв полином $R(x)$. Ще проведем индукция по степента на P.

Нека $S(x) = R(x-1)$. Тогава $P(x) = S(x^2+1) = S(Q(x))$ и имаме последователно

$$Q(S(Q(x))) = Q(P(x)) = P(Q(x)) = S(Q(Q(x))).$$

Оттук следва, че $Q(S(y)) = S(Q(y))$ за всяко реално y. Тъй като степента на S е (два пъти) по-малка от степента на P, от индукционното предположение следва, че $S(x) = Q^{(m)}(x)$ за някое естествено m. Тогава

$$P(x) = S(Q(x)) = Q^{(m+1)}(x)$$

и твърдението е доказано.

Нека сега $P(x) = -P(-x)$ за всяко x, т.е. P е нечетна функция. Тогава всички членове на редицата (x_n), дефинирана чрез равенствата $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ са такива, че $P(x_n) = x_n$. Това означава, че $P(x) = x$.

Задача 12. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^2-1)=P^2(x)-1.$$

Решение. Както по-горе нека $Q(x)=x^2-1$ и да отбележим, че

$$P(Q(x))=Q(P(x)).$$

Ще докажем, че всички неконстантни полиноми P с исканото свойство са x, $Q(x)$, $Q(Q(x))$ и т.н.

От условието следва, че $P(x)=\pm P(-x)$ за всяко x.

Случаят $P(x)=P(-x)$ за всяко x е аналогичен на този от предходната задача.

Ако $P(x)=-P(-x)$ за всяко x, т.е. P е нечетна функция, редицата (x_n), дефинирана чрез равенствата

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}$$

върши работа както по-горе с помощта на допълнителното наблюдение, че $P(x)\geqq -1$ при $x\geqq -1$.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 13. (Kömal) Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(x^3-2)=P^3(x)-2.$$

Задача 14. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P((x+1)^3)=(P(x)+1)^3.$$

Задача 15. (TST Румъния) Да се намерят всички полиноми с комплексни коефициенти f, за които

$$1+f(x^n+1)=f^n(x),$$

където n е естествено число.

Задача 16. Нека $a\neq 0$, b и c са реални числа. Да се намерят всички полиноми P, за които

$$P(ax^2+bx+c)=aP^2(x)+bP(x)+c.$$

ПО ПЪТЯ КЪМ ФУКУОКА

Любомир Любенов

В средата на юли 2019 г. в град Фукуока в Южна Япония, на остров Кюшу, на брега на протока Цушима, ще се съберат млади математици за поредното издание на **World Mathematics Invitational.**

Българското участие през 2018 г.

Състезанието World Mathematics Invitational се провежда за ученици от подготвителен клас до 12 клас върху две теми за всеки клас: раздел A, който е съставен от 15 задачи, и раздел B, който е съставен от 10 задачи. Времето за работа и по двата раздела е 40 минути. През 2017 г. World Mathematics Invitational се проведе в Хошимин (Виетнам), а през 2018 г. в столицата на Корея Сеул.

Българските представители преминаха през квалификация, проведена на 28 април 2018 г. в Стара Загора. В Сеул миналата година България завоюва *една шампионска купа, 3 златни, 4 сребърни и 4 бронзови медала* в конкуренция с 1800 състезатели от 21 държави – Китай, САЩ, Виетнам, Корея, Тайван и други.

Златни медали заслужиха **Огнян Огнянов** (4 клас, ЧУ „Света София“, София), **Ясен Пенчев** (6 клас, ПМГ, Габрово), който получи и шампионската купа за представянето си, и **Марк Киричев** (9 клас, ПМГ, Варна).

Сребърните медали спечелиха **Демира Недева** (5 клас, ПМГ, Пловдив), **Мирослав Минчев** (7 клас,ПМГ, Стара Загора), **Иван Николов** (7 клас, ПМГ, Пловдив), **Нури Хасан** (11 клас, ПМГ, Хасково).

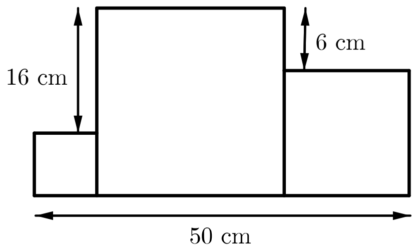
Бронзовите отличия спечелиха **Максим Танков** (3 клас, „Димитър Благоев“, Стара Загора), **Александър Данчев** (5 клас, ПМГ, Стара Загора), **Камелия Димитрова** (7 клас, ПМГ, Пловдив), **Теодор Танков** (8 клас, Американски колеж, София).

В допълнение се проведе и конкурсът Mini Math Creative. В него **Ясен Пенчев и Демира Недева** заслужиха златен медал и парична премия от 300 щатски долара, а **Тодор Танков** взе бронзов медал и премия от 100 щатски долара.

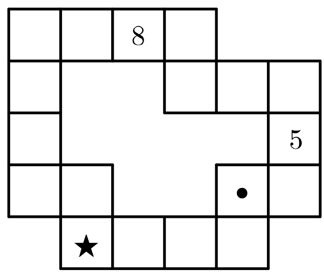
Ето няколко красиви задачи от WMI.

Задачи за 4.клас

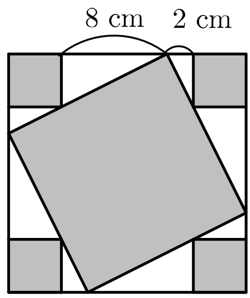
Задача 1. Фигурата на чертежа е съставена от три квадрата. Колко сантиметра е страната на втория по големина квадрат?



Задача 2. Във всеки три поредни квадратчета има числа със сбор 19. Колко е $\bullet + \star$?



Задача 3. Петте оцветени фигури на чертежа са квадрати. Да се намери сборът от лицата им.



Задача 4. Пресметнете

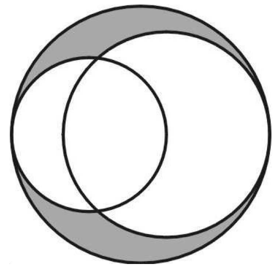
$$999999999 - 88888888 + 7777777 - 666666 + 55555 - 4444 + 333 - 22 + 1.$$

Колко е сборът на цифрите на полученото число?

Задачи за 5.клас

Задача 1. Ако A е броят на простите числа, по-малки от 10, пресметнете

$$\overline{A017A018} \times \overline{A018A017} - \overline{A017A017} \times \overline{A018A018}.$$



Задача 2. На чертежа има три кръга с радиуси 5 см, 4 см и 3 см. Колко квадратни сантиметра е абсолютната стойност на разликата на сбора от лицата на двата по-малки кръга и оцветената област. ($\pi \approx 3{,}14$)

Задача 3. В класната стая има няколко ученици. След като 10 момичета напуснат класната стая, броят на момчетата става два пъти по-голям от броя на момичетата. По-късно 9 момчета напускат класната стая и броят на момчетата става $\frac{1}{5}$ от броя на момичета. Колко момичетата е имало в началото в класната стая?

Задача 4. Пет футболни отбора участват в турнир, в който всеки отбор играе с всички останали отбори. За победа се дават 3 точки, за загуба 0, за равен и двата отбора получават по 1 точка. В края на турнира нито един отбор не събрал повече от 9 точки, а два от отборите имали равен сбор. Ако техните точки се подредят в низходящ ред, се получава петцифрено число, което се дели на 15. Колко са равните мачове в този турнир?

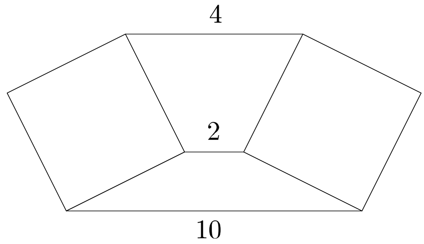
Задачи за 6. клас

Задача 1. Пресметнете $6{,}25 - \dfrac{27}{8} : \dfrac{10}{11} + \dfrac{39}{100}.3\dfrac{3}{4}$.

Задача 2. Дадена е несъкратима дроб. Тя може да бъде намалена до $\frac{1}{2}$, ако към знаменателя намалим с 4, а ако към знаменателя прибавим 3, ще получим $\frac{1}{3}$. Колко е сборът на числителя и знаменателя на първоначалната дроб?

Задача 3. Има някои трицифрени числа, които дават различни остатъци при деление на 2, 3, 4, 5 и 6. Например, едно такова число е 155. Пресметнете сбора на двете най-малки такива числа.

Задача 4. Шестоъгълникът на фигурата е разделен на два различни равнобедрени трапеца и два еднакви квадрата.Намерете лицето му, като използвате данните от чертежа.



Задачи за 7. клас

Задача 1. Решението x на уравнението

$$\frac{a}{x-8}+\frac{6}{8-x}=2$$

не е отрицателно число. Ако минималната стойност на a е P, а a не може да е равно на Q, да се намери $P+Q$.

Задача 2. Ако точките $P(x;5)$ и $Q(-6;-y)$ са симетрични спрямо оста Ox, пресметнете $(x+y)^{2017}$.

Задача 3. Ако $(2a+3b-1)^2+|a+5b+6|=0$, а x е цяло едноцифрено число, намерете броя на решенията на $ax-b>\dfrac{x}{3}+6$.

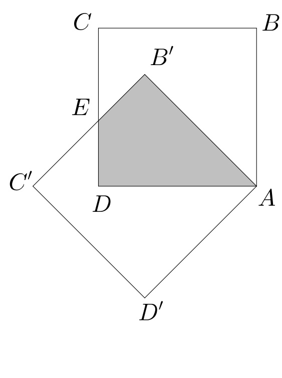
Задача 4. Кое е най-малкото естествено число, което е съставено с осемте цифри 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9, всяка от които се използва поне веднъж, и полученото число се дели на 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9?

Задачи за 8. клас

Задача 1. Страната на квадрата $ABCD$ е 1.

Завъртаме го около точка на ъгъл 45° обратно на часовниковата стрелка. Получаваме квадрата $AB'C'D'$.

Намерете лицето на общата част на двата квадрата.



Задача 2. Пресметнете най-голямата стойност на a^2+b^2, ако

$$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-\ |b+3|+|b-2|\,.$$

Задача 3. Уравнението

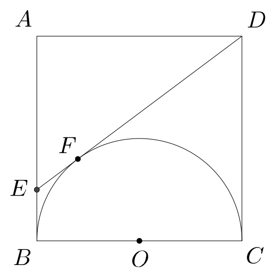
$$x^2+\ (k+\ 6)\,x\ -\ k\ -\ 3\ =\ 0$$

има два различни нечетни корена и k е цяло число. Ако най-голямата стойност за k е M, а най-малката стойност за k е m, пресметнете $M\ -\ m$.

Задача 4. За колко естествени числа n, числото n^4-3n^2+9 е просто?

Задачи за 9. клас

Задача 1. Даден е квадрат $ABCD$, а BC е диаметър на полукръг с център точката O, DE допира полукръга в точката F и пресича AB в точката E. Ако периметърът на DAE е 30, да се пресметне периметъра на трапеца $BCDE$.



Задача 2. Да се пресметне k, ако

$$\frac{\sqrt{3}+k\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{3}+1.$$

Задача 3. Нека a, b и c са реални числа, такива че $a+b+c=0$ и $abc=2$. Коя е най-малката стойност на израза $|a|+|b|+|c|$?

Задача 4. Дадено е трицифрено число $\overline{ABC}$, където всичките три цифри са различни. Числата A, B, C, $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ са прости. Да се пресметне сборът на всички трицифрени числа $\overline{ABC}$, които отговарят на тези условия.

Задачи за 10. клас

Задача 1. Нека x, y и z са естествени числа, като x и y, y и z, x и z са взаимнопрости. Ако $x\log_{500}^{2}+y\log_{500}^{5}=z$, пресметнете $x+\ y+\ z$.

Задача 2. Ако $x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}$, пресметнете

$$3x^7-2x^6-10x^5+13x^4-7x^2+28x-7.$$

Задача 3. Ако $a^{100} = 1$ и $a \neq 1$, пресметнете

$$\frac{a^2}{a-1} + \frac{a^4}{a^2-1} + \frac{a^6}{a^3-1} + \cdots + \frac{a^{200}}{a^{100}-1}.$$

Задача 4. Пресметнете лицето на фигурата в координатна система, определена от

$$\begin{cases} y \geqq -|x| - 1 \\ y \leqq -2|x| + 3. \end{cases}$$

Задачи за 11. клас

Задача 1. Нека x и y са съответно цялата и дробната част на числото $\sqrt{11 - \sqrt{72}}$. Пресметнете $\dfrac{1}{x-y} + y$.

Задача 2. Ако $i = \sqrt{-1}$, пресметнете $i^{99} + i^{100} + \cdots + i^{2017}$.

Задача 3. Точките A, B и C не лежат на една и съща права. Ако $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, $OA = \sqrt{6}$, $OB = 2$ и $OC = \sqrt{14}$, намерете лицето на ABC.

Задача 4. Нека a, b и c са дължините на страните BC, CA и AB на остроъгълния триъгълник ABC. Ако $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = 6\cos C$, пресметнете

$$\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}.$$

ОТГОВОРИ

Клас/задача	1	2	3	4
4	18	11	244	45
5	10000	0	15	3
6	4	25	237	52
7	-4	-1	6	1123449768
8	$\sqrt{2}-1$	45	4	4
9	35	2	4	774
10	6	3	49	16
11	3	1	$3\sqrt{5}$	4

ЧАСТИЧНИ СУМИ И РАВЕНСТВОТО НА НИЛС АБЕЛ

Емил Карлов

„В тази късa аритметика не написах правила, ами тъкмо примери.“
д-р Петър Берон, „Рибен буквар“

Дворът на училището, където е даскалувал Петър Берон, е опасан с висока ограда от планински камък и вдясно от входа може да се забележи каменна плоча с надпис „Помогни ми, да те възвися“. Няма по-точни думи за задачите, които стоят пред училището. Ако си поставим въпроса „Как, по кой начин?“, отговорът е в Рибния буквар: „Тъкмо с примери“.

Двеста години по-късно, сме по-речовити и питаме за децата: „Учи ли?“ и отговорът е „Ще“. Така получаваме думата „Учи–ли–Ще“, но лишена от възвишението.

Ето ги примерите.

Задача 1. Имаме везни и 101 теглилки всяка с тежест цяло число грама и сбор от всички тежести точно 200 грама. Да се докаже, че всички тежести могат да се подредят на двете блюда на везните така, че везните да се изравнят.

Решение. Нека теглилките са с тежест $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{101}$. Пресмятаме всички суми от вида:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1+a_2,\ S_3 = a_1+a_2+a_3,\ \dots,\ S_{101} = a_1+a_2+a_3+\dots+a_{101} = 200.$$

Тези суми се наричат *парциални суми* или *частични суми на редицата* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{101}$.

Тук имаме 101 суми, а за последните две цифри има 100 възможности. От принципа на Дирихле следва, че има две суми, които са числа с еднакви последни две цифри. Нека например това са сумите S_{45} и S_{92}.

Ясно е, че $S_{45} < S_{92}$. Изваждаме от S_{92} числото S_{45} и получената разлика $S_{92} - S_{45}$ завършва с две нули, т.е. се дели на 100. Тъй като числата S_i са цели и са между 1 и 200, то разликата $S_{92} - S_{45}$ е равна на 100.

Следователно $a_{46} + a_{47} + a_{48} + \dots + a_{92} = 100$. Останалите теглилки също са със сума 100 г.

Твърдението в тази задача винаги ми е звучало невероятно, но ето едно по-силно твърдение.

Задача 2. Имаме везни и набор теглилки $1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ всяка с тежест цяло число грама и всяка следваща теглилка a_{i+1} с не по-голяма тежест от сумата на тежестите преди нея, т.е.

$$a_{i+1} \leqq a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Да се докаже, че всяка тежест от цяло число грама от интервала $[1; a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$ може да бъде претеглена на везни с този набор теглилки.

Решение. Нека парциалните суми са:

$$S_1 = a_1, \ S_2 = a_1 + a_2, \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \ldots, \ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ще докажем, че всяка целочислена тежест от интервала $[1; S_n]$ може да се претегли с дадените теглилки.

За тежест от 1 грам използваме теглилката a_0.

Допускаме, че всяка тежест от интервала $[1; S_k]$ може да се претегли с дадените тежести.

За индуктивната стъпка от k към $k+1$ нека N е цяло число, което изпълнява неравенствата $1 + S_k \leqq N \leqq S_{k+1}$ (ако $N \in [1; S_k]$ желаното представяне съществува, съгласно индуктивното предположение).

Тъй като $a_{k+1} \leqq 1 + S_k$ и $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$, то

$$0 \leqq N - a_{k+1} \leqq S_k.$$

Имаме два случая.

Ако $N = a_{k+1}$, тогава на едната везна поставяме тежестта N, а на другата теглилката a_{k+1}.

Ако $N - a_{k+1} > 0$, то е цяло число в интервала $[1; S_k]$ и може да се изтегли на везните, съгласно индуктивното предположение. Остава да добавим теглилката a_{k+1}, за да претеглим тежестта N.

Към този списък от задачи добавяме още едно забележително твърдение.

Задача 3. Върху всяка от 9 картички е написано число от 1 до 9, като е изпълнено следното условие: колкото и картички да вземем, сумата от числата, написани върху тях, не се дели на 10. Да се докаже, че върху деветте картички е написано едно и също число.

Решение. Нека написаните числа на деветте картички са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$. Допускаме, че не всички са равни и нека например $a_1 \neq a_2$. Да разгледаме парциалните суми:

$$S_1 = a_1, \ S_2 = a_1 + a_2, \ \ldots, \ S_9 = a_1 + a_2 + \cdots + a_9.$$

Ако последната цифра на някои от тези суми е нула, получаваме противоречие с условието на задачата.

Ако две различни суми завършват на една и съща цифра, то разликата им (от по-голямата вадим по-малката) се дели на 10 и отново получаваме противоречие.

Остава случаят, когато последните цифри на деветте суми са различни и са от 1 до 9. Следователно някоя от сумите S_k завършва на цифрата a_2 и това не е сумата $S_1 = a_1$, защото $a_1 \neq a_2$. Тогава разликата $S_k - a_2$ се дели на 10 и в този случай имаме противоречие с даденото.

Следователно допускането, че не на всички картички пише едно и също число, е невярно и значи върху всички картички е написано едно и също число.

В следващия пример смятането с парциалните суми ще покаже пълната си сила.

Задача 4. В редицата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сумата на всеки седем последователни числа е отрицателно число, а сумата на всеки единадесет последователни члена на редицата е положително число. Да се докаже, че няма редица от 17 числа с това свойство. Намерете пример за редица от 16 числа с това свойство.

Решение. Допускаме, че има редица със седемнадесет елемента, която изпълнява условието на задачата. Нека парциалните суми на тази редица са

$$S_0 = 0,\ S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_{17} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{17}.$$

Очевидно $S_{10} < S_3$ (премахнали сме сумата на седем последователни члена на редицата, която сума е отрицателно число) и $S_3 < S_{14}$ (добавили сме сумата на 11 последователни члена, която е положително число). Т.е. имаме

$$S_{10} < S_3 < S_{14} < S_7 < S_0 < S_{11} < S_4 < S_{15} < S_8 < S_1 < S_{12} < S_5 < S_{16} <$$

$$< S_9 < S_2 < S_{13} < S_6 < S_{17} < S_{10}.$$

Получихме противоречие, което се дължи на допускането, че съществува редица със 17 елемента, изпълняваща условието на задачата.

За да намерим пример за редица с 16 числа, ще използваме горното неравенство. Тъй като $S_0 = 0$, нека

$$S_{10} = -4,\ S_3 = -3,\ S_{14} = -2,\ S_7 = -1,\ S_{11} = 1,\ S_4 = 2,\ S_{15} = 3,\ S_8 = 4,$$

$$S_1 = 5,\ S_{12} = 6,\ S_5 = 7,\ S_{16} = 8,\ S_9 = 9,\ S_2 = 10,\ S_{13} = 11,\ S_6 = 12.$$

Тогава $S_1 = a_1 = 5$, а от $S_2 = a_1 + a_2 = 5 + a_2 = 10$ намираме $a_2 = 5$. Аналогично от $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 5 + 5 + a_3 = -3$ намираме $a_3 = -13$. Продължавайки по същия начин, определяме редица с 16 числа

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5,$$

която изпълнява условието на задачата.

Ето още една задача, която можете да решите с парциални суми.

Задача 5. Иван през 50-те дни лятна ваканция е решил 79 задачи по математика. Иван е решавал всеки ден поне по една задача. Да се докаже, че има няколко последователни дни, в които Иван е решил точно 20 задачи.

Най-прочутото приложение на парциалните суми виждаме в равенството на Нилс Абел.

Задача 6. (*Тъждество на Абел*) Да се докаже тъждеството

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n =$$

$$= (a_1 - a_2)S_1 + (a_2 - a_3)S_2 + (a_3 - a_4)S_3 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_nS_n,$$

където $S_i = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_i$ са парциалните суми на редицата $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Упътване. Заместваме парциалните суми с техните равни и разкриваме скобите.

Задача 7. Намерете сумата: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

Упътване. Използвайте тъждеството на Абел.

Следващата задача е формулирана от Пол Ердьош през 1932 година и е публикувана без решение в American Mathematical Monthly (*AMM, Vol. 38, 1932, page 175, problem 3536*). Решението на задачата, което Ви предлагам по-долу, научих от **Светослав Савчев**, който дълги години беше заместник главен редактор на списание „Математика“.

Задача 8. Дадена е редицата от естествени числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, определена от равенствата

$$u_1 = 2, \quad u_n = u_1u_2u_3 \cdots u_{n-1} + 1 \quad \text{за} \quad n = 2, 3, 4, \dots.$$

Да се докаже, че разликата

$$1 - \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right) > 0$$

е възможно най-доброто приближение (отдолу) на единицата със сума от n дроби с числител единица (наричаме ги *египетски дроби*).

Решение. Първо ще докажем, че

$$1-\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)=\frac{1}{u_1u_2u_3\cdots\ u_n}. \tag{1}$$

За $n=1$ равенството е вярно; имаме $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Допускаме, че равенството е вярно за всяко $n=k$. Ще го докажем при $n=k+1$.

От допускането имаме

$$1-\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_k}+\ \frac{1}{u_{k+1}}\right)=\frac{1}{u_1u_2u_3\cdots\ u_k}-\ \frac{1}{u_{k+1}}=$$

$$=\ \frac{u_{k+1}-\ u_1u_2u_3\cdots\ u_k}{u_1u_2u_3\ldots\ u_ku_{k+1}}=\ \frac{1}{u_1u_2u_3\cdots\ u_ku_{k+1}}.$$

Така (1) е доказано.

Нека сега $x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq\cdots\leqq x_n$ е редица от положителни цели числа, такива, че

$$\frac{1}{x_1}+\ \frac{1}{x_2}+\ \frac{1}{x_3}+\cdots+\ \frac{1}{x_n}<1.$$

Въвеждаме парциалните суми за редицата

$$\frac{1}{x_1},\ \ \frac{1}{x_2},\ \ \frac{1}{x_3},\ldots,\frac{1}{x_n}:$$

$$X_i\ =\ \frac{1}{x_1}+\ \frac{1}{x_2}+\ \frac{1}{x_3}+\cdots+\ \frac{1}{x_i}\ \ (\text{за}\ \ i=1,2,3,\ldots,n)$$

и парциални суми за редицата

$$\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2},\frac{1}{u_3},\ldots,\frac{1}{u_n}:$$

$$U_j=\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_j}\ (\text{за}\ \ j=1,2,3,\ldots,n).$$

Очевидно числата

$$(x_1X_1),\quad (x_1x_2X_2),\ \ (x_1x_2x_3X_3),\ \ldots,\ (x_1x_2\cdots x_nX_n)$$

са цели и всяко от тях изпълнява неравенството

$$x_1x_2\cdots x_i\ X_i\ \leqq\ \ x_1x_2\cdots x_i-1$$

и оттук

$$X_i\leqq 1-\ \frac{1}{x_1x_2\cdots x_i}. \tag{2}$$

Допускаме, че $X_n > U_n$, като $X_1 < U_1,\ X_2 < U_2,\ \ \ldots,\ \ \ X_{n-1} < U_{n-1}$.

От (1) и (2) следва, че

$$x_1x_2\cdots x_n > u_1u_2u_3\cdots\ u_n. \tag{3}$$

От друга страна, от тъждеството на Абел намираме равенството

$$\frac{x_1}{u_1}+\ \frac{x_2}{u_2}+\ldots\ \frac{x_n}{u_n}=$$

$$=(x_1-\ x_2)\,U_1+(x_2-\ x_3)\,U_2+\cdots+(x_{n-1}-\ x_n)\,U_{n-1}+\ x_nU_n.$$

Всеки един от множителите $(x_i-\ x_{i+1})$ пред всяка парциална сума U_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ в горното тъждество на Абел е отрицателно число или нула. Затова

$$\frac{x_1}{u_1}+\ \frac{x_2}{u_2}+\ldots\ \frac{x_n}{u_n}=$$

$$=(x_1-\ x_2)\,U_1+(x_2-\ x_3)\,U_2+\ldots+(x_{n-1}-\ x_n)\,U_{n-1}+\ x_nU_n<$$

$$<(x_1-\ x_2)\,X_1+(x_2-\ x_3)\,X_2+\ldots+\ x_nX_n=$$

$$=\ \frac{x_1}{x_1}+\ \frac{x_2}{x_2}+\ldots+\ \frac{x_n}{x_n}=n.$$

Тук използваме допускането и още веднъж тъждеството на Абел.

В току-що полученото неравенство ще приложим неравенството между средно аритметично и средно геометрично:

$$n>\frac{x_1}{u_1}+\ \frac{x_2}{u_2}+\cdots\ \frac{x_n}{u_n}\ \geqq n\sqrt[n]{\frac{x_1x_2\cdots\ x_n}{u_1u_2\cdots u_n}},$$

и получаваме, че

$$u_1u_2\cdots u_n\geqq x_1x_2\cdots\ x_n,$$

което противоречи на (3).

Предлагам на вашето внимание един чудесен пример, в който сумата на числата е от значение в решението на задачата.

Задача 9. Тринадесет положителни цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ имат свойството, че което и число от тях да премахнем, останалите дванадесет могат да се разделят на две групи от шест числа с равни суми. Да се докаже, че тринадесетте числа са равни.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ СЪСТЕЗАНИЯТА В МАТЕМАТИЧЕСКИЯ СЕМИНАР „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“

Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

В Есенния математически семинар, проведен от 1 до 4 ноември 2018 в хотел „Езерец“ в Благоевград, взеха участие 46 ученици от 4 до 7 клас, постигнали високи резултати в математически състезания от календара на МОН и СМБ. Освен че прекараха щастливи и незабравими дни в много удобен и гостоприемен хотел или в топлия и приветлив град, в рамките на семинара учениците взеха участие в поредица от лекции, а също така и в отборните състезания „От 1 до 100“, „Математически Конквистадор“ и „Математическа Рулетка“, съставени от Мария Томова (СМГ) и автора на тази статия. Ето част от задачите – опитайте да ги решите: с някои от тях ще се справите лесно, а за други, особено тези в края, намирането на верния отговор си е сериозно предизвикателство. В скобки горе е посочен най-малкият клас, за който е достъпна задачата. Когато приключите, може да си сравните отговорите с дадените в края на тази статия.

$1^{(4)}$. Шматко започна да решава един тест в 13:57 часа. Той приключи с решаването на теста същия ден, в час, записан със същите четири цифри, но в друг ред. Колко минути най-много може да е работил Шматко по теста?

$2^{(5)}$. Колко четирицифрени числа, кратни на 7, завършват на 17?

$3^{(4)}$. Намерете сбора на две естествени числа с произведение 1000 и разлика 30.

$4^{(4)}$. Моби разполага с определен брой МВ (мегабайти) мобилен интернет за месец декември. През първата седмица той изразходи първо 400 МВ мобилен интернет, а после и половината от останалите мегабайти. През втората седмица на декември Моби изразходи първо 300 МВ, а после половината от останалите мегабайти. През третата седмица на декември Моби изразходи първо 200 МВ, а после и половината от останалите мегабайти. Така до края на месец декември му останаха само 150 MB. Колко MB мобилен интернет е изразходил Моби през първата седмица на месец декември?

5$^{(4)}$**.** Кое е 222-рото число в редицата 29, 38, 47, 56, …? (Тук всяко следващо число е с 9 по-голямо от това пред него.)

6$^{(4)}$**.** По колко различни начина можем да изплатим сума от 18 ст., ако разполагаме с много монети по 1 ст., 2 ст., 5 ст. и 10 ст.?

7$^{(6)}$**.** Яна вложила 1000 лева в банка за една година при лихва 6%. Ева вложила 1000 лева в банка при лихва 3% на всеки 6 месеца. Колко стотинки е разликата между сметките им след една година?

8$^{(5)}$**.** В едно училище учат по-малко от 300 деца, от които и момчетата, и момичетата са поне 100. Ако групираме момичетата в групи по 3, по 4 или по 5, винаги ще остава едно момиче извън групите. Ако групираме момчетата в групи по 7 или по 8, и в двата случая ще има една група с 3 момчета по-малко. Какъв е най-големият възможен брой ученици в училището?

9$^{(5)}$**.** Колко са трицифрените числа, даващи един и същ остатък при деление на 5, 7 и 9?

10$^{(5)}$**.** Естествените числа a, b, c и d са по-малки от 5, само две от тях са равни и

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=900.$$

Намерете $a+b+c+d$.

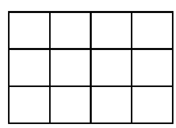
11$^{(4)}$**.** Автобусите преминават през спирката ми през равни интервали от време. Седмият автобус минава 84 минути след първия. За колко най-малко минути през спирката ще минат пет автобуса?

12$^{(6)}$**.** Числата x и y са цели и $2|x|+3|y| = 23$. Колко са възможните стойности за x?

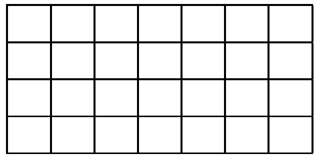
13$^{(7)}$**.** Хвърляме два правилни зара. Вероятността сборът от падналите се точки да не надвишава 6 е равна на несъкратимата дроб $\dfrac{p}{q}$. Намерете $p+q$.

14$^{(5)}$**.** Четири жени и четирима мъже трябва да се подредят в редица, като не може да има двама мъже един до друг. Колко са възможните подреждания?

15$^{(4)}$**.** Големият правоъгълник на чертежа е съставен от еднакви квадратчета. Колко от правоъгълниците на този чертеж не са квадрати?



16$^{(4)}$ **.** На три картички са записани три различни цифри (по една на картичка). Сборът на всички трицифрени числа, които могат да се запишат с тези картички, е 3376. Кое е най-малкото от тези трицифрени числа? (Не може да се ползва цифрата 6 като 9 или обратно.)



17$^{(5)}$**.** По колко начина можем да оцветим в черно три полѐта на фигурата на чертежа, така че никои две оцветени да не са на един ред, нито в една колона?

18$^{(4)}$**.** В редица имало 9 мака. Всеки ден между всеки два съседни мака пораствали по 4 нови мака. Колко ще са маковете в редицата след пет дни?

19$^{(5)}$**.** Какъв остатък при деление на 9 дава числото

$$12345678\ldots 201620172018,$$

получено от записването едно след друго на първите 2018 естествени числа?

20$^{(5)}$**.** По колко различни начина можем да подредим буквите

Е, З, Е, Р, Е, Ц

така, че да се срещат букви „З“ и „Е“ една до друга?

Решения

1. Отговор 236. Най-късният час, който може да се запише с тези цифри, е 17:53; дотогава има 4 ча̀са без 4 минути. Това са $4\,.\,60 - 4 = 236$ минути.

2. Отговор 12. Трябва да преброим трицифрените кратни на 7, завършващи на 1; това са 161, 231, 301, ..., 931. Броят им е $(93 - 16) : 7 + 1 = 12$.

3. Отговор 70. Това може да са само 50 и 20 (ако увеличим голямото, малкото ще намалее и разликата ще се увеличи, и обратно).

4. Отговор 3000. Извършваме обратните действия отзад напред:

$$150\,.\,2 = 300,\ 300 + 200 = 500,\ 500\,.\,2 = 1000,\ 1000 + 300 = 1300,$$
$$1300\,.\,2 = 2600,\ 2600 + 400 = 3000.$$

5. Отговор 2018. Към първото число трябва да добавим $221\,.\,9 = 1989$. Получаваме $29 + 1989 = 2018$.

6. Отговор 31. Достатъчно е да определим броя на монетите по 10 ст., 5 ст. и 2 ст. (всички останали ще са по 1 ст.):

брой по 10 ст.	брой по 5 ст.	брой по 2 ст.	брой варианти
1	1	0, 1	2
1	0	0, 1, 2, 3, 4	5
0	3	0, 1	2
0	2	0, 1, 2, 3, 4	5
0	1	0, 1, 2, …, 6	7
0	0	0, 1, 2, …, 9	10

Получаваме $2+5+2+5+7+10=31$ начина.

7. Отговор 90. Разликата е лихвата върху лихвата $3\%.1000=30$ лева, която е $3\%.30=0{,}90$ лева.

8. Отговор 290. Момичетата са 121 или 181, а момчетата са 109 или 165. От тези числа най-голям сбор, по-малък от 300, дават $181+109=290$.

9. Отговор 15. Остатъкът може да е 0, 1, 2, 3 или 4 (5 варианта). Ако го махнем, остава кратно на НОК$(5;7;9)=315$, което може да е 315, 630 или 945 (3 варианта). Следователно търсеният брой е $5\,.\,3=15$.

10. Отговор 11. Имаме $900=2\,.\,2\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5$, така че (предвид големината на a, b, c, d) множителите трябва да са сред числата 2, 3, 4, 5, 6. Сборът на първия и третия е равен на сбора на втория и четвъртия, така че няма как сред тях да има точно един четен и представянето може да е само $900=5\,.\,5\,.\,6\,.\,6$ (в този ред с точност до циклична замяна на променливите). Ако $a+b=b+c=5$ и $c+d=d+a=6$, то $a=c$, така че $c\neq d$ и трябва $a=c=4$, $d=2$, $b=1$. Получаваме $4+1+4+2=11$.

11. Отговор 56. Между 7 автобуса има 6 интервала, така че всеки е по $84:6=14$ минути. Между 5 автобуса има 4 интервала и $4\,.\,14=56$.

12. Отговор 8. Явно $|y|$ е нечетно и не по-голямо от 7. Давайки на $|y|$ стойностите 1, 3, 5, 7, получаваме по две стойности за x.

13. Отговор 17. Има $6\,.\,6=36$ варианта за двойката показания, от които 1 е със сбор 2, 2 със сбор 3, 3 със сбор 4, 4 със сбор 5 и 5 със сбор 6, така че вероятността е $\dfrac{1+2+3+4+5}{36}=\dfrac{5}{12}$ и $p+q=5+12=17$.

14. Отговор 2880. Подредбите са

мжмжмжмжмж, *мжмжмжмжжм*, *мжмжжмжмжм*,
мжжмжмжмжм, *жммжмжмжмжм*,

за всяка от които има по $4!\,.\,4!$ варианта. Получаваме $5\,.\,4!\,.\,4!=2880$.

15. Отговор 40. Има $4+3+2+1=10$ избора за хоризонталната сянка на правоъгълника и $3+2+1=6$ за вертикалната, общо $6\,.\,10=60$ правоъгълника. Сред тях има 12 квадрата 1×1, 6 квадрата 2×2 и 2 квадрата 3×3, общо 20 квадрата. Получаваме $60-20=40$.

16. Отговор 709. Ако цифрите на картичките са $A > B > C > 0$, то има шест числа:

$$100A + 10B + C, \quad 100A + 10C + B, \quad 100B + 10A + C,$$
$$100B + 10C + A, \quad 100C + 10A + B, \quad 100C + 10B + A$$

и сборът им е $222A + 222B + 222C = 3376$, което е невъзможно, понеже 3376 не се дели на 222.

Ако цифрите на картичките са $A > B > C = 0$, то има четири числа:

$$100A + 10B, \quad 100A + B, 100B + 10A, \quad 100B + A$$

и сборът им е $211A + 211B = 3376$, откъдето $A + B = 16$, което е възможно само при $A = 9$, $B = 7$.

17. Отговор 840. Ако полетата бяха синьо, зелено и жълто, щеше да има $7 \,.\, 4$ избора за синьото, $6 \,.\, 3$ избора за зеленото и $5 \,.\, 2$ избора за жълтото. Но има 3 избора кое черно да е било синьо, 2 избора кое да е било зелено и 1 избор кое да е било жълто, така че всяка таблица е броена $3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$ пъти. Получаваме $7 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 = 840$.

18. Отговор 25001. Интервалите между маковете са 8 и се умножават по 5 всеки ден. Така след 5 дни интервалите ще са $8 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 25000$, а маковете ще са 25001.

19. Отговор 3. Сборът от цифрите на всяко число има същия остатък при деление на 9 като самото число. Следователно сборът от цифрите на всеки 9 поредни числа се дели на 9. Тъй като 2018 дава остатък 2 при деление на 9, търсеният остатък е $1 + 2 = 3$.

20. Отговор 96. Ако залепим „З“ и „Е“ (2 избора за реда), имаме 5 букви, две от които са еднакви, така че вариантите са $2 \,.\, 5! : 2 = 120$. Но думите с „ЕЗЕ“ са броени двойно; броят им е $4! = 24$. Следователно отговорът е $120 - 24 = 96$.

Втори начин. Имаме $6! : 3! = 120$ подредби на буквите. От тях трябва да изключим тези с „РЗЦ“ и „ЦЗР“ (те са $2 \,.\, 4 = 8$), както и започващите със „ЗР“ или „ЗЦ“ (още $2 \,.\, 4 = 8$) и завършващите на „РЗ“ или „ЦЗ“ (още $2 \,.\, 4 = 8$).

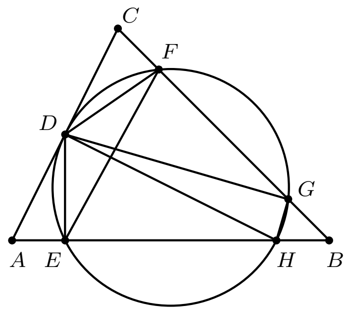
конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

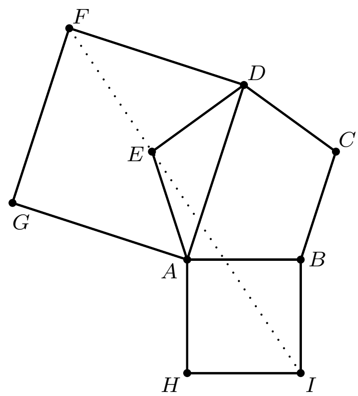
Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

*   *   *

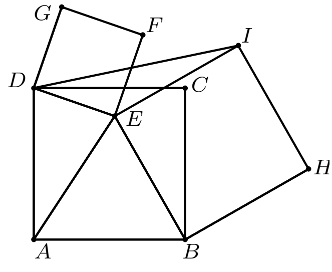
Задача 1. Даден е триъгълник ABC с център O на описаната окръжност. Окръжност с център O се допира до страната AC в точка D и пресича страната AB в точките E и H, а страната BC в точките F и G, както е показано на чертежа. Да се докаже, че триъгълниците DEF и DHG имат равни лица.



Задача 2. Даден е правилен петоъгълник $ABCDE$. Квадратите $ADFG$ и $ABIH$ са разположени, както е показано на чертежа. Да се докаже, че точките F, E и I лежат на една права.



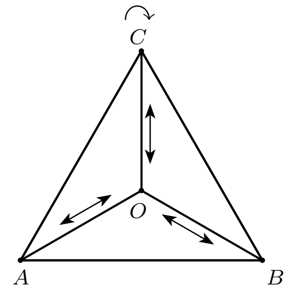
Задача 3. На чертежа $ABCD$, $BHIE$ и $DEFG$ са квадрати. Да се намери отношението $AE : DI$.



Срокът за представяне на решенията е 30.04.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 6/2018 г.

Задача 1. Робот се движи по схемата, като за един ход изминава една отсечка. По отсечките OA, OB OC е позволено двупосочно движение, а по страните на триъгълника ABC роботът се движи само по посока на часовниковата стрелка. Роботът тръгва от точка O и след 10 хода трябва да се върне в O. По колко различни маршрута може да се движи роботът?



Решение. Нека s_n е броят на пътищата с n хода от O до O. Тези от тях, които завършват с $O \to X \to O$, където X е някой от върховете на $\triangle ABC$, се получават, като пътищата с $n-2$ хода от O до O се продължат по 3 различни начина; по този начин получаваме $3s_{n-2}$ пътя.

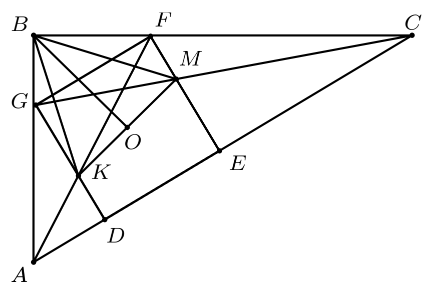
Тези пътища с n хода от O до O, които завършват с $X \to Y \to O$, където X и Y са върхове на $\triangle ABC$, се получават, като пътищата с $n-1$ хода от вида $O \to \cdots \to X \to O$ се допълнят до $O \to \cdots \to X \to Y \to O$; по този начин получаваме s_{n-1} пътя. Следователно

$$s_n = s_{n-1} + 3s_{n-2}.$$

Тъй като $s_1 = 0$ и $s_2 = 3$, оттук лесно намираме $s_{10} = 1524$.

Задачата е решена от **Ясен Пенчев** (7. клас, ПМГ, Габрово), **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ), **Калин Върбанов** (12. клас, СМГ) и **Радомир Пеев** (12. клас, СМГ).

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 90^\circ$ е вписан квадрат $DEFG$ ($D, E \in AC$, $F \in BC$, $G \in AB$). Ако $AF \cap GD = K$ и $CG \cap EF = M$, да се докаже, че $BK = BM$.



Решение. Нека $BG = a$ и $BF = b$. От подобията $\triangle AGD \sim \triangle FCE \sim \triangle BGF$, $\triangle AKD \sim \triangle FKG$, $\triangle CEM \sim \triangle GFM$ имаме

$$\frac{KD}{KG} = \frac{AD}{FG} = \frac{AD}{DG} = \frac{a}{b} = \frac{FE}{CE} = \frac{FG}{CE} = \frac{MF}{ME}.$$

Значи $KD = FM$, $ME = GK$ и центърът на квадрата O е среда на отсечката KM.

От вписания четириъгълник $BGOF$ лесно следва, че BO е ъглополоваща на $\sphericalangle GBF$. Тогава ако $BO \cap GF = L$, то $\dfrac{GL}{LF} = \dfrac{a}{b}$, следователно $GL = FM$ и $FL = GK$. От еднаквостта на триъгълниците GKL и FML следва, че $KL = ML$, т.е. BO е симетрала на KM и оттук $BK = BM$.

Забележка. Задачата е предложена от румънския геометър Stan Fulger, на когото беше посветена статията *Геометричните миниатюри на Stan Fulger* от брой 6/2018 на списание *Математика.* Друго решение на задачата е публикувано в сайта Cut The Knot
(http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/StanFulger2.shtml).

Задачата е решена от **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ), **Калин Върбанов** (12. клас, СМГ) и **Радомир Пеев** (12. клас, СМГ).

Задача 3. Да се намерят всички реални числа x, за които е изпълнено равенството

$$\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1.$$

Решение. Лесно се вижда, че $\dfrac{x+18}{20} > 0$ и задачата се разпада на два случая.

Първи случай. $\left\lfloor \dfrac{20}{x+18} \right\rfloor = 1$ и $\left\lfloor \dfrac{x+18}{20} \right\rfloor = 0$, т.е.

$$1 \leqq \frac{20}{x+18} < 2 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{x+18}{20} < 1.$$

Оттук намираме $x \in (-8;\ 2)$.

Втори случай. $\left\lfloor \dfrac{20}{x+18} \right\rfloor = 0$ и $\left\lfloor \dfrac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$, т.е.

$$0 < \frac{20}{x+18} < 1 \quad \text{и} \quad 1 \leqq < \frac{x+18}{20} < 1.$$

Оттук намираме $x \in (2;\ 22)$.

Окончателно, $x \in (-8;\ 22) \setminus \{2\}$.

Задачата е решена от **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ), **Калин Върбанов** (12. клас, СМГ) и **Радомир Пеев** (12. клас, СМГ).

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2018 г. и бр. 1, 2 от 2019 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (присъствен) кръг през юни 2019 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. В началото на една игра на дъската е записано числото 0. За един ход към числото на дъската може да се прибави 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, стига да не се получава число, което се дели на 10. Кое е най-голямото число, което може да се получи на дъската след 100 хода?

Задача 2. Около кръгла маса са седнали рицари и лъжци. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. Всеки от тях се обърнал към един от съседите си и му казал: *ти си лъжец* или *ти си рицар*. След това на всеки на масата задали два въпроса: *бяхте ли наречен лъжец от левия си съсед* и *бяхте ли наречен лъжец от десния си съсед*. Точно 100 от получените отговори били *да*. Най-малко колко лъжци е имало на масата?

Задача 3. Сборът на двата най-големи същински делители на естественото число n е равен на 515. Да се намери n.

(*Същински делители* на естественото число n са делителите на n, различни от 1 и n.)

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2019 г.

СПЕЦИАЛНА НАГРАДА НА БРОЯ

С цел да насърчи желанието за творческа изява на децата с математически заложби, ЧОУ „Света София“ осигури награден фонд на конкурса на списание *Математика* за 5. - 7. клас през 2018/19 учебна година.

След всеки от четирите задочни кръга на конкурса, трима от най-добре представилите се участници ще получат награда от 50 лв.

Като оцени получените в срок решения на задачите от брой 6/2018 г., Редколегията на списанието награди:

Лазар Иванов Тодоров (6. клас, София)
Демира Георгиева Недева (6. клас, Пловдив)
Ясен Пламенов Пенчев (7. клас, Габрово)

Очакваме Вашите решения!

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 6/2018 г.

Задача 1. Хари и Хърмаяни попаднали в капан. Те били заключени в стая, в която имало 6 бутилки, подредени в редица. Бутилките били номерирани отляво надясно с числата от 1 до 6. Хари намерил лист със следните упътвания:

† *В три от бутилките има отрова, две бутилки са с приспивателна отвара, а в останалата бутилка има отвара за бягство.*
† *Непосредствено вляво от приспивателната отвара има отрова.*
† *В най-малката бутилка има отрова.*
† *Втората бутилка отляво и втората отдясно са с едно и също съдържание.*

Хърмаяни разгледала редицата и казала, че разполага с достатъчно информация, за да открие бутилката с отвара за бягство. Кой номер е най-малката бутилка и бутилката с отвара за бягство?

Решение. Ще покажем, че Хърмаяни може да определи еднозначно отварата за бягство, само когато най-малката бутилка е номер 6. В този случай отварата за бягство е в бутилка номер 3.

Да разгледаме случая, в който малката бутилка е номер 6. Вдясно от всяка от другите две бутилки с отрова има приспивателна отвара, следователно еднаквите бутилки 2 и 5 са приспивателни отвари, а бутилки 1 и 4 са отрови. Тогава бутилка 3 е отварата за бягство. При този случай тя е еднозначно определена.

За да отхвърлим останалите позиции на малката бутилка, е достатъчно да покажем поне две разположения, при които са изпълнени условията и отварата за бягство е на различни позиции. Това е направено в таблицата по-долу.

Номер на малката бутилка	Две възможни подредби
1	О П Б О П О или О П О О П Б
2	О О П Б О П или Б О П О О П
3	Б О О П О П или О П О О П Б
4	О П Б О П О или О П О О П Б
5	О О П Б О П или Б О П О О П

Задачата е решена от **Демира Недева** (6. клас, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Александър Мургин** (6. клас, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Георгиев** (7. клас, Силистра), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, Габрово)

Задача 2. Изпъкнал многостен има 26 върха, 60 ръба и 36 стени, от които 24 са триъгълници и 12 са четириъгълници. *Диагонал на многостена* е всяка отсечка, която свързва два върха и не лежи на стена на многостена. Да се намери броят на всички диагонали на многостена.

Решение. Броят на отсечките, които свързват два от 26-те върха на многостена, е

$$\frac{26.25}{2} = 325.$$

От тях 60 са ръбове на многостена, а $2.12 = 24$ са диагонали на четириъгълните стени. Останалите отсечки са търсените диагонали и са

$$325 - 60 - 24 = 241.$$

Задачата е решена от **Демира Недева** (6. клас, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Георгиев** (7. клас, Силистра), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, Габрово).

Задача 3. *Печеливша комбинация* наричаме всеки избор на четири числа в дадената таблица, при който две от избраните числа имат сбор 16 и две имат сбор 24.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Например, печеливши комбинации са $(3, 5, 13, 19)$ и $(6, 10, 20, 18)$.

Да се намери броят на всички печеливши комбинации.

Решение. Нека множеството A включва всички двойки числа в таблицата със сбор 16. Тези двойки са 7 на брой:

$$(1,15),(2,14),(3,13),(4,12),(5,11),(6,10),(7,9).$$

Нека B е множеството двойки числа в таблицата със сбор 24. Тези двойки са 8 на брой:

$$(4,20),(5,19),(6,18),(7,17),(8,16),(9,15),(10,14),(11,13).$$

Да разгледаме как може да се получи печеливша комбинация.

Първи случай. Да изберем двойка от A и двойка от B, които нямат общ елемент. Всяка от двойките $(1,15),(2,14),(3,13),(4,12)$ от A може да се комбинира със 7 двойки от B, а всяка от останалите 3 двойки от A може да се комбинира с 6 двойки от B (проверете!). Така получаваме

$$4.7+3.6=46 \text{ печеливши комбинации.}$$

Втори случай. Да изберем двойка от A и двойка от B, които имат общ елемент; т.е. тройка числа, която включва двойка от A и двойка от B. Лесно се вижда, че възможните тройки са десет:

$$\{1,9,15\},\{2,10,14\},\{3,11,13\},\{4,12,20\},\{5,11,13\},$$

$$\{5,11,19\},\{6,10,14\},\{6,10,18\},\{7,9,17\},\{7,9,15\}$$

Четвъртият елемент за всяко от десетте множества може да се избере по 17 начина и получаваме $10.17=170$ множества. Измежду тях обаче шестте множества $\{1,7,9,15\}$, $\{2,6,10,14\}$, $\{3,5,11,13\}$, $\{5,11,13,19\}$, $\{7,9,15,17\}$, $\{6,10,14,18\}$ са броени по два пъти, следователно броят на печелившите комбинации е

$$46+170-6=210.$$

Задачата е решена от **Демира Недева** (6. клас, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, Габрово), а с малък пропуск и от **Николай Георгиев** (7. клас, Силистра).

ПРОБЕН ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

17.03.2018 г., Плевен

Павлин Цонев, Ани Цонева

Първа част

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Центърът на вписаната окръжност е пресечна точка на:

А) медианите **Б)** височините

В) симетралите **Г)** ъглополовящите

2. Броят на реалните корени на биквадратното уравнение

$$x^4 + 8x^2 + 16 = 0 \text{ е:}$$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

3. Стойността на израза $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right) - 3\sqrt{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$ е:

А) -16 **Б)** -14 **В)** $1-15\sqrt{3}$ **Г)** $7+15\sqrt{3}$

4. Недопустимите стойности на променливата в израза $\dfrac{x}{x^2-1} : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ са числата:

А) -1 и 1 **Б)** всяко x **В)** няма такива **Г)** $-\,1$, 0 и 1

5. Сборът на най-голямото и най-малкото решение на неравенството

$$\frac{(x^2-8x+16)(x^2-x-2)}{x^2-5x+6} \leqq 0 \text{ е:}$$

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

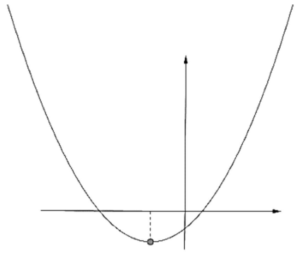
6. Сборът от реципрочните стойности на корените на уравнението

$$2x^2 - 6x + 3 = 0 \text{ е:}$$

А) $\dfrac{2}{3}$ **Б)** $\dfrac{2}{3}$ **В)** 2 **Г)** 6

7. Ако квадратната функция

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



има графиката на чертежа, то е вярно, че:

А) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$ **Б)** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$

В) $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$ **Г)** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

8. Уравнението $\sqrt{2-x} = -x$ е еквивалентно на:

А) $(x-1)^2 = 0$ **Б)** $(2x+4)^2 = 0$

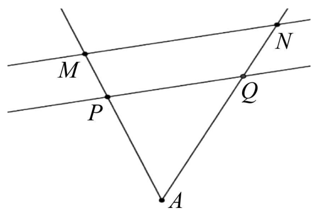
В) $(x-1)(x+2)^{=}0$ **Г)** $x^2 + 2 = 0$

9. Кои от посочените тройки числа са дължини на страни на правоъгълен триъгълник:

А) $4,\ 5,\ 6$ **Б)** $\sqrt{3},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}$

В) $5,\ 2\sqrt{3},\ \sqrt{13}$ **Г)** $\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$

10. На чертежа $MN \parallel PQ$, $QN = 12$ и $AP = 9$. Ако $MP = QA$, то те имат дължини:



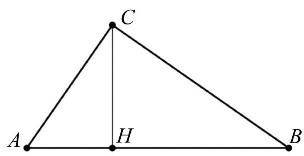
А) $3\sqrt{6}$ **Б)** $6\sqrt{3}$

В) $\frac{21}{2}$ **Г)** $\frac{4}{3}$

11. Стойността на израза $\cos(-420^\circ) - \operatorname{tg}(135^\circ)$ е:

А) $-0{,}5$ **Б)** $-1{,}5$ **В)** $0{,}5$ **Г)** $1{,}5$

12. На чертежа $AC \perp BC$ и $CH \perp AB$. Ако $HB = 4$ и $BC = 5$, то $\operatorname{tg} \sphericalangle CAB$ е равен на:



А) $\frac{4}{5}$ **Б)** $\frac{4}{3}$ **В)** $\frac{3}{5}$ **Г)** $\frac{3}{4}$

13. Ако $\sin\alpha = a$, то a НЕ може да е:

А) $\log_3 4$ **Б)** $\operatorname{tg}(2018^\circ)$ **В)** 2^{-2} **Г)** $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

14. Една аритметична прогресия има 15 члена, като сборът на шестия и десетия е равен на 10. Намерете сбора на всички членове на прогресията.

А) 150 **Б)** 100 **В)** 75 **Г)** 50

15. Колко четни трицифрени числа с различни цифри могат да се получат от цифрите 0, 1, 2, 3 и 5?

А) 24 **Б)** 21 **В)** 54 **Г)** 30

16. Ако за ненулевите числа a и b е изпълнено $\sqrt{a^2b^3} = -ab\sqrt{b}$, то е вярно, че:

А) $a < 0$ и $b < 0$ **Б)** $a > 0$ и $b > 0$

В) $a > 0$ и $b < 0$ **Г)** $a < 0$ и $b > 0$

17. Ако $a = \log_3 \sqrt{27}$ и $b = 4^{\log_2 3}$, то стойността на $b : a$ е равна на:

А) 6 **Б)** 4 **В)** 2 **Г)** 0,5

18. Логаритмичната функция с основа 0,9 е:

А) четна **Б)** нечетна

В) намаляваща **Г)** периодична

19. Изразът $\operatorname{cotg}\ \alpha - \operatorname{tg}\ \alpha$ е тъждествено равен на:

А) $\operatorname{tg}\ 2\alpha$ **Б)** $2\operatorname{tg}\ 2\alpha$ **В)** $\operatorname{cotg}\ 2\alpha$ **Г)** $2\operatorname{cotg}\ 2\alpha$

20. За равнобедрен триъгълник е известно, че ъгълът при основата е α и R е радиусът на описаната му окръжност. Основата му е равна на:

А) $2R\sin 2\alpha$ **Б)** $R\sin\alpha$ **В)** $2R\sin\alpha$ **Г)** $\dfrac{R}{\sin\alpha}$

Втора част

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Произведението на две последователни четни числа е със 180 по-голямо от по-голямото от тях. Намерете сбора им.

22. Ако $\operatorname{tg}\ \alpha = 3$, пресметнете стойността на израза

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)}.$$

23. Вписаната окръжност в равнобедрен триъгълник разделя височината му към основата на две отсечки, които се отнасят както 3 : 4, считано от върха. Намерете бедрото, ако периметърът му е 42.

24. За трапец $ABCD$ $(AB||CD)$ е дадено, че $AB = 25$, $AC = 10$, $DC = 4$ и периметърът му е 57. Намерете BC.

25. В таблицата са дадени резултатите от тест.

точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
брой ученици	2	1	2	2	0	1	2	2	3	5	2	3

Определете медианата на статистическия ред, получен от резултатите на теста.

Трета част

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Средният успех по математика за края на годината в един клас е 4,50, като има 4 отлични, 5 много добри и 11 добри оценки и всички са завършили успешно годината. По случаен начин се избират двама ученици от класа, които да го представят в училищна викторина. Каква е вероятността това да са ученици, получили отлична или много добра оценка?

27. Три числа, чиито сбор е 9, образуват аритметична прогресия. Ако към първото добавим 1, а от третото извадим 17, се получава геометрична прогресия. Намерете числата.

28. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AC = 8$, $BC = 9$ и медиана $CD = \dfrac{\sqrt{217}}{2}$. Намерете страната AB и радиуса на вписаната окръжност в $\triangle ANC$, ако точката N дели отсечката BC в отношение $CN : NB = 1 : 2$.

Решения и отговори

1. Г; **2.** А; **3.** Б; **4.** Г; **5.** В; **6.** В; **7.** А; **8.** Б; **9.** В; **10.** Б;

11. Г; **12.** Б; **13.** А; **14.** В; **15.** Б; **16.** Г; **17.** А; **18.** В; **19.** Г; **20.** А;

21. 26; **22.** $-1{,}5$; **23.** 15; **24.** 20; **25.** 9;

26. Означаваме с x броя на учениците. От уравнението

$$6.4 + 5.5 + 11.4 + (x - 20).3 = 4,5x$$

намираме $x = 22$. Намираме $n = C_{22}^2 = 11.21$, $m = C_4^2 + C_5^2 + 4.5 = C_9^2 = 36$, $P = 36/231 = 12/77$.

27. Означаваме аритметичната прогресия с $x - d,\ x,\ x + d$ и намираме $x = 3$. От $(4 - d)\,(d - 14) = 9$ получаваме $d_{1,2} = 5$ и 13. Двете прогресии са $-2,\ 3,\ 8$ и $-10,\ 3,\ 16$.

28. Като използваме формулата за медианата $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, получаваме $217 = 2.81 + 2.64 - c^2$ и намираме $c = \sqrt{73}$. От косинусовата теорема за триъгълника ABC намираме $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{81 + 64 - 73}{2.9.8} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

В триъгълника ANC имаме $CN = \dfrac{1}{3}CB = 3$ и от косинусовата теорема намираме $AN = \sqrt{64 + 9 - 8.3} = 7$. Тогава $P_{ANC} = 18$. Лицето на триъгълника е $S_{ANC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. От формулата $S = pr$ намираме $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Петя Тодорова

I. Ирационални изрази

Задача 1. Намерете стойността на израза:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$;

в) $\sqrt{4+\sqrt[8]{(-15)^4}}-\sqrt{4-\sqrt[8]{(-15)^4}}$;

г) $9\left[\left(2\sqrt{54}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(3\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-4}$.

Задача 2. Опростете израза $A=\sqrt{\left(2+\sqrt{a}\right)^2-8\sqrt{a}}$ и намерете стойността му при:

а) $a=3$; б) $a=5$.

Задача 3. Определете допустимите стойности на променливите, за които е дефиниран израза и докажете, че за тези стойности на променливите стойността на израза не зависи от тях.

а) $M=\dfrac{10^{-0,5}\,(a+b)^{-1}}{\sqrt{2,5}}\left[\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}+b^{0,75}\right)}{a^{0,5}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right]$;

б) $P=0,25\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{a}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2\sqrt[4]{a}-2}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1\right)$.

II. Ирационални уравнения

Решете уравненията:

1. $\sqrt{3-2x^2}=1$

2. $\sqrt{|x-3|+2}=3$

3. $\sqrt{8-x}=2-x$

4. $\left(x^2+6x+5\right)\sqrt{3+x}=0$

5. $(2-x)\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$

6. $x-\sqrt{3x+1}=-1$

7. $\sqrt{x+5+\sqrt{4-x}}=3$

8. $\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+13}$

9. $\sqrt{x}-\dfrac{6}{\sqrt{x}}=1$

10. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=3$

11. $x^2+4=5\sqrt{x^2-2}$

12. $\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2-4x-6}=2$

13. $3\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-2,5=3\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

14. $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}$

15. $\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{3x-x^2}=\sqrt{x-3}$

16. $\sqrt{10+x+6\sqrt{x+1}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$

III. Ирационални неравенства

Решете неравенствата:

1. $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leqq 3$

2. $2\sqrt{5x-3} \geqq 3$

3. $\sqrt{x-1} < 3 - x$

4. $\sqrt{x+4} > x + 2$

5. $(2x+3)\sqrt{6+x-x^2} \geqq 0$

6. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} \leqq 2x - 6$

7. $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} \geqq 1$

8. $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} < 3$

9. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} \leqq 3$

10. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

11. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqq \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$

12. $5\sqrt{x^2+5x+28} > x^2 + 5x + 4$

13. $\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{2\sqrt{x+1}-5} \geqq 0$

14. $\dfrac{5}{\sqrt{x+2}+4} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-4}$

15. $\dfrac{x}{2-x} - \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} \leqq 0,25$

16. $\dfrac{(9-x)\sqrt{9-x} + (4+x)\sqrt{4+x}}{(9-x)\sqrt{4+x} + (4+x)\sqrt{9-x}} < \dfrac{7}{6}$

ОТГОВОРИ

I. Ирационални изрази

1. а) 4; **б)** 1; **в)** $\sqrt{6}$; **г)** 4.

2. при $a \in [0;4)$ $A = 2 - \sqrt{a}$, при $a \in [4;\infty)$ $A = \sqrt{a} - 2$. **а)** $A = 2 - \sqrt{3}$; **б)**$A = \sqrt{5} - 2$.

3. а) при $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a \neq \pm b$ $M = 0{,}2$; **б)** $a \geqq 0$, $P = 1$.

II. Ирационални уравнения

1. ± 1;

2. -4; 10;

3. -1;

4. -3; -1;

5. -7; 8;

6. 0; 1;

7. 3; 4;

8. -1;

9. 9;

10. 1;

11. $\pm\sqrt{11}$; $\pm\sqrt{6}$;

12. -1; $\frac{7}{3}$;

13. $1{,}8$;

14. 0;

15. 3;

16. 0; 3.

III. Ирационални неравенства

1. $x \in [0;3]$;

2. $x \geq \frac{21}{20}$;

3. $x \in [1;2)$;

4. $x \in [-4;0)$;

5. $x \in [-1{,}5;3]$;

6. $x \in (-\infty;0] \cup [4;5]$;

7. $x \in [0{,}5;1]$;

8. $x \in [5;6) \cup (9;10]$;

9. $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right]$;

10. $x > 5$;

11. $x \in [-2;-1] \cup \{3\}$;

12. $x \in (-4;9)$;

13. $x \in [-1;5{,}25) \cup [8;\infty)$;

14. $x \in (-2;14) \cup (34;\infty)$;

15. $x \in [0;1]$;

16. $x \in (0;5)$.

ТЕСТ **за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас**

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $\dfrac{(-3)^7}{(-9)^4}$ е:

А) $-\dfrac{1}{3}$ **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** -1 **Г)** 3

2. Кое число трябва да се намали с 25%, за да се получи 12?

А) 18 **Б)** 16 **В)** 15 **Г)** 12,25

3. Нормалният вид на многочлена $(x-2y)^2+(x+3y)(3y-x)$ е:

А) $13y^2-4xy$ **Б)** $2x^2-4xy-5y^2$

В) $13y^2-2xy$ **Г)** $2x^2-2xy+y^2$

4. Коренът на уравнението $(x-2)(x+1)=(x-3)^2$ е:

А) 2,2 **Б)** 1,4 **В)** 5,5 **Г)** 1

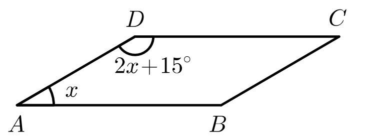
5. Решенията на неравенството $1-\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{x-5}{4}$ са:

А) $x>5$ **Б)** $x>\dfrac{24}{7}$ **В)** $x<\dfrac{19}{7}$ **Г)** $x<2$

6. Ъглите в $\triangle ABC$ се отнасят както $\sphericalangle A:\sphericalangle B:\sphericalangle C=1:1:3$. Острият ъгъл между ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle C$ е равен на:

А) 36° **Б)** 54° **В)** 60° **Г)** 72°

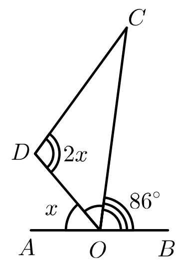
7. На чертежа $ABCD$ е успоредник. Градусната мярка на $\sphericalangle ABC$ е равна на:



А) 105° **Б)** 125°

В) 115° **Г)** 105°

8. На чертежа $O\in AB$ и OD е ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$. По данните от чертежа градусната мярка на $\sphericalangle DCO$ е:



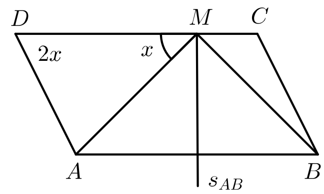
А) 35° **Б)** 37°

В) 39° **Г)** 41°

9. Симетралата на страната AB на успоредника $ABCD$ пресича страната CD в точка M. Ако $\sphericalangle AMD = x$, $\sphericalangle ADC = 2x$ и $DM = MB$, то $\sphericalangle BAD$ е равен на:

А) 72° **Б)** 96°

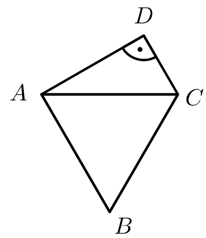
В) 108° **Г)** 144°



10. На чертежа $\sphericalangle D = 90^\circ$, $AB \| CD$ и триъгълникът ABC е равностранен. Ако $CD = a$ cm, то периметърът на ABC е равен на:

А) $3a$ cm **Б)** $4{,}5a$ cm

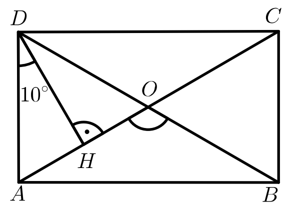
В) $6a$ cm **Г)** $9a$ cm



11. На чертежа $ABCD$ е правоъгълник и $DH \perp AC$. Ако $\sphericalangle ADH = 10^\circ$, то $\sphericalangle AOB$ е равен на:

А) 140° **Б)** 150°

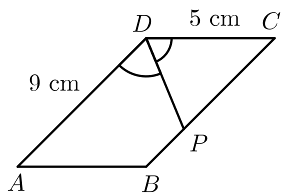
В) 160° **Г)** 170°



12. В успоредника $ABCD$ на чертежа е построена ъглополовяща DP на $\sphericalangle ADC$. Ако лицето на триъгълника DPC е 10 cm^2, то лицето на $ABCD$ е равно на:

А) 36 cm^2 **Б)** 27 cm^2

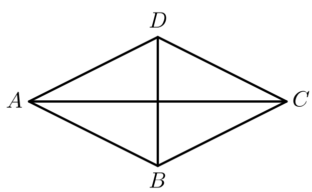
В) 24 cm^2 **Г)** 18 cm^2



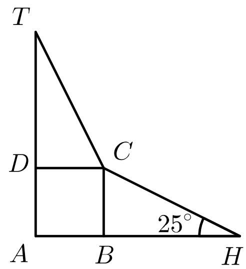
13. Ромб $ABCD$ има периметър 20 cm и диагонал $AC = 8$ cm. Лицето на ромба е равно на:

А) 18 cm^2 **Б)** 24 cm^2

В) 36 cm^2 **Г)** 48 cm^2



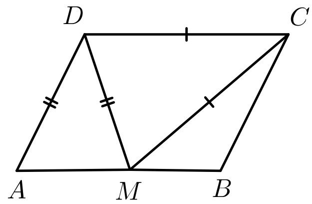
14. На чертежа $ABCD$ е квадрат, а на правите AB и AD са нанесени равни отсечки BH и DT. Ако $\sphericalangle AHC = 25^\circ$, то $\sphericalangle HCT$ е равен на:



А) 135° **Б)** 140°

В) 145° **Г)** 150°

15. На страната AB на успоредника $ABCD$ е избрана точка M така, че $AD = DM$ и $DC = CM$. Ако $\sphericalangle BMC = 48^\circ$, градусната мярка на $\sphericalangle MCB$ е:



А) 8° **Б)** 12°

В) 16° **Г)** 18°

16. Двата корена на уравнението $|5x-6| = 7$ са решения на неравенството:

А) $x + 0{,}1 > 0$ **Б)** $3 + x < 5$

В) $7 - x < 4$ **Г)** $2 - x > -1$

17. От естествените числа от 1 до 30 (включително) по случаен начин е избрано едно число. Каква е вероятността избраното число да се дели на 2 или на 5?

А) $\frac{1}{2}$ **Б)** $\frac{3}{5}$ **В)** $\frac{2}{3}$ **Г)** $\frac{7}{10}$

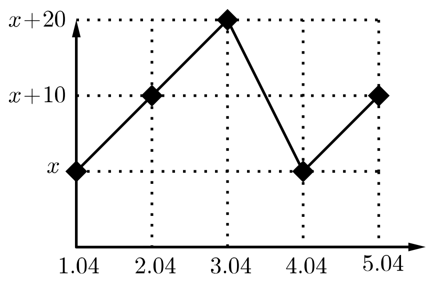
ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

18. Графиката представя броя на посещенията на басейн за пет поредни дни. Определете числото, означено с x на графиката, ако:

А) средният брой посещения на басейна за петте дни е равен на 50;

Б) на 3.04 са регистрирани 40% от посещенията за петдневния период;

В) на 4.04 са регистрирани с 10% по-малко посещения, отколкото на 3.04.

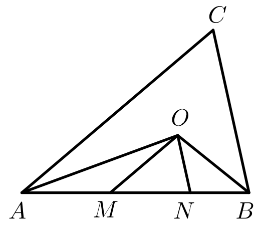


19. На чертежа AO и BO са ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ в триъгълника ABC, а $OM \parallel AC$ и $ON \parallel BC$.

А) Ако $\sphericalangle MON = 70^\circ$, намерете $\sphericalangle AOB$.

Б) Ако периметърът на триъгълника OMN е равен на 10 cm, намерете страната AB;

В) Ако $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ и $\sphericalangle AON : \sphericalangle BOM = 5 : 7$, намерете ъглите на триъгълника ABC.



20. А) Намерете корените на уравнението

$$(3x-1)^2 - (2x-1)(4x+1) = 7.$$

Б) Намерете решенията на неравенството $(3+x)(x-3) \leqq (-x+2)^2$.

21. От град A към град B потеглил автомобил със скорост 90 km/h. Половин час по-късно от B към A потеглил камион със скорост 75 km/h. Да се намери разстоянието между A и B, ако:

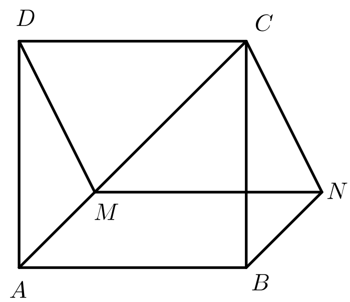
А) камионът изминал това разстояние за 2 часа повече, отколкото автомобила;

Б) до срещата си с камиона, автомобилът изминал 2 пъти по-голямо разстояние, отколкото камиона.

22. На чертежа точка M е на диагонала AC на квадрата $ABCD$, а $ABNM$ е успоредник.

А) Ако $\sphericalangle MDC : \sphericalangle CMD = 3 : 2$, намерете $\sphericalangle BCN$.

Б) Ако лицето на четириъгълника $MBNC$ е 18 cm^2, намерете периметъра на $ABCD$.



ВТОРИ МОДУЛ

23. Иво планира да реши определен брой задачи, като за известно време решава по 7 задачи на ден.

А) За да реши задачите за 6 дни по-малко от предвидения срок, Иво трябва да решава по 10 задачи на ден. Колко задачи планира да реши Иво?

Б) Вместо да следва плана си, Иво решавал пет дни по 5 задачи на ден, а след това по 8 задачи на ден и така решил задачите един ден след предвидения срок. Колко дни е решавал задачи Иво?

24. Даден е триъгълник ABC. Ъглополовящата CL пресича симетралата на страната AB в точка Q. От Q са спуснати перпендикуляри QH и QT съответно към AC и CB.

А) Да се докаже, че $\sphericalangle AQH = \sphericalangle BQT$;

Б) Ако $\sphericalangle ACB = 88^\circ$, да се намери $\sphericalangle QAB$.

25. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \| CD$, $AD \perp AB$) със страни $AB = 3x + 2$, $AD = x + 2$, $CD = x$.

А) Ако $AB : CD = 10 : 3$, намерете периметъра на триъгълника ACD.

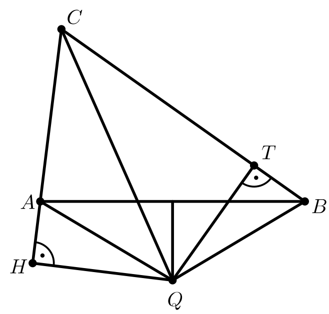
Б) Ако лицето на трапеца $ABCD$ е равно на 9 cm^2, намерете периметъра на $ABCD$.

Отговори и решения **1.** А; **2.** Б; **3.** А; **4.** А; **5.** А; **6.** Г; **7.** Б; **8.** В; **9.** В; **10.** В; **11.** В; **12.** А; **13.**) Б; **14.** Б; **15.** Г; **16.** Г; **17.** Б; **18.** А) 42; Б) 4; В) 180; **19.** А) 125; Б) 10; В) 30°, 90°, 60°; **20.** А) 5, -1; Б) $x \leqq 3{,}25$; **21.** А) 900 km; Б) 168,75 km; **22.** А) 9°; Б) 24 cm.

23. А) Ако планираното време е x дни, то задачите в сборника са $7x = 10(x - 6)$. Оттук $x = 20$. Решените задачи са $7x = 7.20 = 140$.

Б) Ако планираното време е x дни, то Иво е решавал $x + 1$ дни, от които 5 дни по 5 задачи и останалите $(x + 1) - 5 = x - 4$ дни по 8 задачи. Задачите в сборника са $7x = 5.5 + 8(x - 4)$. Оттук $x = 7$. Иво е решавал задачи 8 дни.

24. А) Точка Q лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, следователно $QH = QT$; $Q \in s_{AB}$, следователно $QA = QB$. Правоъгълните триъгълници AQH и BQT са еднакви и оттук $\sphericalangle AQH = \sphericalangle BQT$.



Б) От сбора на ъглите в $HQTC$ намираме $\sphericalangle HQT = 102^\circ$. Тогава $\sphericalangle AQB = \sphericalangle HQT - \sphericalangle AQH + \sphericalangle BQT = \sphericalangle HQT = 102^\circ$. В равнобедрения $\triangle AQB$ намираме $\sphericalangle QAB = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 102^\circ) = 44^\circ$.

25. А) От $(3x + 2) : x = 10 : 3$ намираме $x = 6$. По Питагоровата теорема $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, т.е. $AC = 10$ и $P_{ACD} = 6 + 8 + 10 = 24$.

Б) Намираме $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(3x+2+x)(x+2) = 2x^2+5x+2$. От равенството $2x^2 + 5x + 2 = 9$ получаваме $2x^2 + 7x - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow (2x + 7)(x - 1) = 0$, т.е. $x = -3{,}5$ или $x = 1$. Тъй като $x > 0$, то $x = 1$.

Като построим височината CT, от Питагоровата теорема за триъгълника TBC намираме $BC^2 = (3x + 2 - x)^2 + (x + 2)^2 = 5x^2 + 12x + 8$. При $x = 1$ намираме $BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$ и $P_{ABCD} = 1 + 3 + 5 + 5 = 14$.

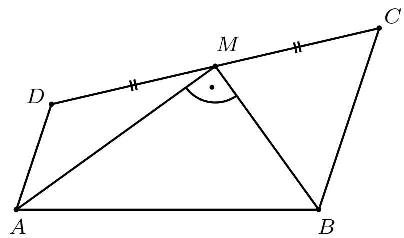
СБОР НА ОТСЕЧКИ

Невена Събева

Как да докажем, че една отсечка е равна на сбора на няколко други отсечки? Ще разгледаме примери, които илюстрират някои основни методи за решаване на задачи от този вид.

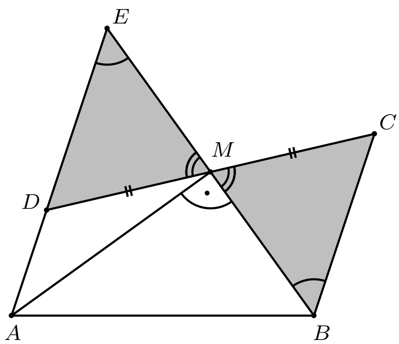
Задача 1. В трапеца $ABCD$ ($AD||BC$) точката M е среда на CD и $\sphericalangle AMB = 90^\circ$. Да се докаже, че

$$AB = AD + BC.$$



Решение. Да продължим BM до пресичането ѝ с правата AD в точка E. От $AD||BC$ получаваме равенствата на кръстните ъгли $\sphericalangle DEM = \sphericalangle MBC$, $\sphericalangle MDE = \sphericalangle MCB$ и като използваме условието $DM = MC$, получаваме, че

$$\triangle DME \cong \triangle BMC.$$



Следователно $DE = BC$ и $EM = MB$.

Тогава в триъгълника ABE отсечката AM е медиана и височина. Това означава, че триъгълникът ABE е равнобедрен, т.е.

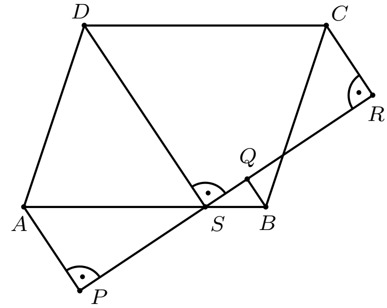
$$AB = AE = AD + DE = AD + BC.$$

Забележка. Отсечката AM е и ъглополовяща в равнобедрения триъгълник ABE. Аналогично и BM е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$, т.е. ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ в трапеца се пресичат върху страната CD. Затова горната задача може да се формулира и по следния начин:

Задача 2. В трапеца $ABCD$ ($AD||BC$) ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ в трапеца се пресичат в точка M на страната CD. Да се докаже, че $AB = AD + BC$.

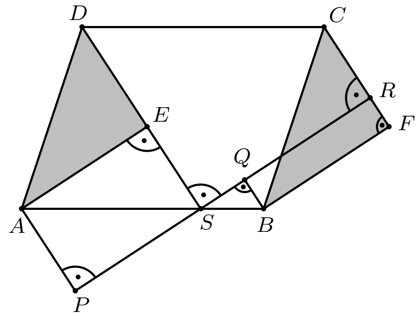
Тази задача може да се реши подобно на задача 1 (проверете!).

Задача 3. Успоредникът $ABCD$ е пресечен от правата m. От всеки от върховете A, B, C, D са построени перпендикуляри към m, които я пресичат съответно в точките P, Q, R, S, като S лежи на страната AB. Да се докаже, че



$$DS = AP + BQ + CR.$$

Решение. Да построим перпендикуляри $AE \perp DS$ и $BF \perp CR$, както е показано на чертежа. Тогава $APSE$ и $BFRQ$ са правоъгълници и $AP = ES$ и $BQ = RF$. Следователно



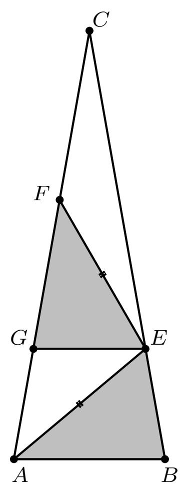
$$DS - AP = DS - ES = DE,$$

$$BQ + CR = RF + CR = CF.$$

Остава да забележим, че $\triangle ADE \cong \triangle BCF$ по втори признак, откъдето следва, че $DE = CF$. Получаваме равенството $DS - AP = BQ + CR$, което е еквивалентно на даденото.

Задача 4. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$, $\sphericalangle C = 20^\circ$) е построена ъглополовящата AE. Да се докаже, че $CE = AB + AE$.

Решение. Да изберем точка $F \in AC$ така, че $AE = EF$. В равнобедрения триъгълник AEF имаме $\sphericalangle AFE = \sphericalangle EAF = 40^\circ$. Оттук



$$\sphericalangle FEC = \sphericalangle AFE - \sphericalangle C = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

следователно $\triangle EFC$ е равнобедрен и

(1) $$FC = FE = AE.$$

Да изберем $G \in AC$ така, че $GE || AB$. Триъгълникът $\triangle GEC$ е равнобедрен (защо?) и

(2) $$CE = CG.$$

Освен това $\triangle GEF \cong \triangle BEA$ (имаме $AE = FE$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EGF = 80^\circ$,

$\sphericalangle GFE = \sphericalangle BAE = 40^\circ$), следователно

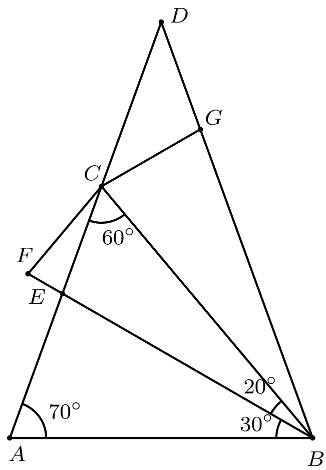
$$GF = AB. \tag{3}$$

От (1), (2) и (3) получаваме $AE + AB = FC + GF = GC = CE$.

Задача 5. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle A = 70^\circ$ и $\sphericalangle C = 60^\circ$. На страната AC е избрана точка E така, че $\sphericalangle ABE = 30^\circ$. Да се докаже, че

$$BE + AE = BC + CE.$$

Решение. Намираме $\sphericalangle AEB = 80^\circ$ и $\sphericalangle EBC = 20^\circ$. Да нанесем на правата AE отсечка $ED = BE$, както е показано на чертежа. Тогава $\triangle BED$ е равнобедрен и



$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle EBD = \frac{1}{2}\sphericalangle AEB = 40^\circ, \text{ значи}$$

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE + \sphericalangle EBD = 70^\circ = \sphericalangle BAD,$$

т.е. $\triangle ABD$ е равнобедрен и $AD = BD$. Тъй като

$$BE + AE = ED + AE = AD = BD,$$

достатъчно е да докажем, че $BD = BC + CE$.

Нека точките $G \in BD$ и $F \in BE$ са такива, че $BC = BG = BF$ (виж чертежа). Тъй като $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD - \sphericalangle ABC = 20^\circ = \sphericalangle FBC$, то равнобедрените триъгълници FBC и CBG са еднакви, следователно

$$FC = CG.$$

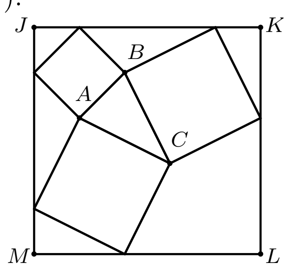
Като изразим ъглите в триъгълниците FEC и CGD, получаваме, че тези триъгълници са равнобедрени (проверете!). От равенствата

$$CE = CF = CG = GD \ \text{ следва, че } \ BD = BG + GD = BC + CE,$$

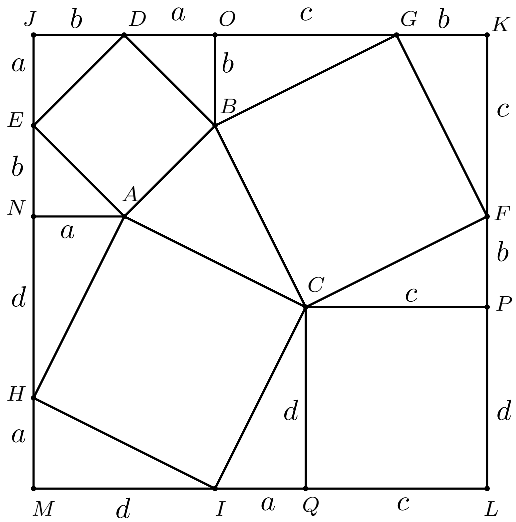
което искаме да докажем.

За читателите, които дръзнат да навлязат в по-дълбоки геометрични води, предлагам една древна японска задача (сангаку).

Задача 6. На страните на триъгълника ABC са построени квадрати. Получената конфигурация се вписва в правоъгълник $MLKJ$, както е показано на чертежа. Ако $KL = 1$, да се намери при коя стойност на KJ лицето на триъгълника ABC е максимално.



Решение. Ще използваме означенията на чертежа.



Ако $AN \perp MJ$, $BO \perp KJ$, $CP \perp KL$ и $CQ \perp ML$, имаме

$$\triangle ANE \cong \triangle EJD \cong \triangle DOB \Rightarrow \begin{cases} AN = EJ = DO = a \\ EN = JD = OB = b, \end{cases}$$

$$\triangle BOG \cong \triangle GKF \cong \triangle FPC \Rightarrow \begin{cases} OB = GK = FP = b \\ OG = KF = CP = c, \end{cases}$$

$$\triangle ANH \cong \triangle HMI \cong \triangle IQC \Rightarrow \begin{cases} AN = HM = IQ = a \\ NH = MI = CQ = d. \end{cases}$$

Освен това, $QLPC$ е правоъгълник и $QL = c$ и $PL = d$.

От равенството на страните в правоъгълника $MLKJ$ получаваме

$$MJ = KL \iff 2a + b + d = c + b + d \iff c = 2a,$$

$$ML = JK \iff d + a + c = 2b + a + c \iff d = 2b.$$

Следователно страните на правоъгълника са $KL = 3b + 2a$ и $KJ = 3a + 2b$.

Лицето S на $\triangle ABC$ е равно на лицето на $\triangle BDG$ (виж статията *Квадрати с общ връх и равнолицеви триъгълници* от предишния брой), т.е. $S = \dfrac{3ab}{2}$. По условие $3b + 2a = 1$, т.е. $3b = 1 - 2a$ и лицето

$$S = \frac{a(1-2a)}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - 2a\right)^2\right)$$

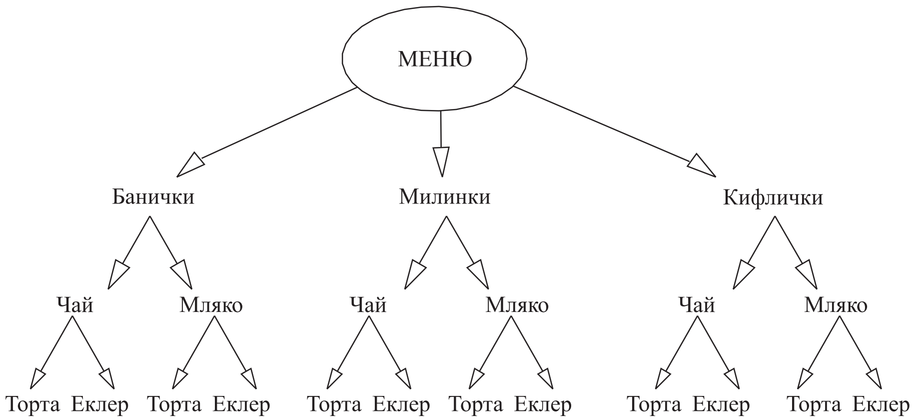
е максимално при $2a = \dfrac{1}{2}$, т.е. $a = \dfrac{1}{4}$. Тогава получаваме $b = \dfrac{1}{6}$ и $KJ = \dfrac{13}{12}$.

ПИПИ ПРЕБРОЯВА ВЪЗМОЖНОСТИ

Диана Данова

Във Вила Вилекула кипеше трескава подготовка за рождения ден на Пипи. Аника и Пипи замесваха кифлички, милинки и банички, а предстоеше и приготвянето на тортички и шоколадови еклери. Чаят и млякото бяха най-лесни.

— Всичко ли мислиш да сервираш наведнъж? — попита Томи. — Все пак можеш да се спреш на един от следните 12 варианта (и Томи нарисува схемата):



Аника, която предпочиташе да действа по-рационално каза:

— Не е необходимо да правим такова преброяване, за да пресметнем възможностите за празнично меню. Имаме три варианта за закуски. На тях съответстват два варианта за напитки. На всеки такъв избор имаме две възможности за десерт.

И Аника написа:

$$\underset{\text{Закуски}}{\underline{\ 3\ }} \cdot \underset{\text{Напитки}}{\underline{\ 2\ }} \cdot \underset{\text{Десерт}}{\underline{\ 2\ }} = 12$$

Това умножение-уморение много се хареса на Пипи.

— Хей, така ще мога да празнувам рождения си ден 12 поредни дни с храната, която сме приготвили, вместо да я сервирам на куп днес. Чудесно! Запретвайте ръкави да подреждаме масата.

Настъпи моментът, в който Пипи трябваше да обуе празничните си чорапи.

– Аника, като знаеш, че имам 4 различни празнични чорапа – червен, син, жълт и розов, по колко начина мога да ги комбинирам?

Аника веднага пресметна:

$$\underset{\text{ляв}}{\boxed{4}} \cdot \underset{\text{десен}}{\boxed{3}} = 12$$

— За единия чорап има 4 възможности, след което за втория остават три. Обаче всяка комбинация от два цвята е броена по два пъти. Така например в дванайсете комбинации участва вариант червен-жълт, но и вариант жълт-червен. Различните само по цветове двойки са $12 : 2 = 6$.

— Това е прекрасно! — възкликна Пипи. — Така шест от дните на рожденната ми дванадесетодневка ще посрещам в различни цветови комбинации, а в останалите шест просто ще ги разменя върху краката си.

Няма да ви разказвам как минаха 12 празнични дни от рожденния ден, но ще ви подшушна за някои математически „тревоги“ на Пипи.

1. Пипи пита: Аз и моите гости сме 3 момичета и 3 момчета. По колко различни начина можем да се наредим в 2 редички за снимка така, че момичетата да са отпред, а момчетата отзад?

Аника отговаря: Момичетата могат да се наредят в редичка по $3.2.1 = 6$ начина. Толкова са и вариантите за наредба на момчетата. Така, че за първата редичка имаме 6 възможности, на всяка от които съответстват 6 възможности за втората редичка. Получаваме

$$\underset{\text{1 редичка}}{\boxed{6}} \cdot \underset{\text{2 редичка}}{\boxed{6}} = 36$$

2. Пипи пита: По колко различни начина мога да разпределя подаръците, които съм приготвила за гостите си?

Томи отговаря: Тъй като имаш 5 гости, то първия подарък може да го подариш на едно от пет деца, т.е. по 5 начина. Втория подарък може да подариш по 4 начина – на едно от останалите 4 деца и т.н. Всички възможности са:

$$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 120$$

3. Пипи пита: Колко различни билетчета с трицифрени номера мога да образувам за празничната томбола с цифрите 0, 1, 2 и 3 **без да има**

повтарящи се цифри? В колко от тях ще участва любимата ми цифра 1?

Аника отговаря: За цифрата на стотиците не може да поставяме 0. Имаме 3 възможности. След избора на стотиците, вече можем да използваме нулата и имаме 3 възможности за десетиците. При избрани стотици и десетици остават 2 варианта за единиците. Остава да пресметнем

$$\underset{\text{стотици}}{\boxed{3}} \cdot \underset{\text{десетици}}{\boxed{3}} \cdot \underset{\text{единици}}{\boxed{2}} = 18 \text{ билета}$$

А за да преброим билетчетата, в които участва цифрата 1, ще извадим от общия брой билетчета броя на тези, които могат да се напишат само с цифрите 0, 2 и 3. Вече разбра – тук имаме: две възможности за стотиците, защото нулата не може да се използва; две възможности за десетиците и една възможност за единиците. Получаваме $2.2.1 = 4$ билетчета без цифрата 1. Тогава $18 - 4 = 14$ билетчета ще имат любимата ти цифра.

Томи се намесва: Ако позволиш в номерата на билетчетата да участват **повтарящи се цифри**, то техният брой ще бъде

$$\underset{\text{стотици}}{\boxed{3}} \cdot \underset{\text{десетици}}{\boxed{4}} \cdot \underset{\text{единици}}{\boxed{4}} = 48 \text{ билета}$$

Билетчетата без цифрата 1 ще са $2.3.3 = 18$. Тогава $48 - 18 = 30$ билетчета, в които могат да се повтарят цифри, ще имат любимата ти цифра 1.

Предлагаме и на вас задачи за преброяване:

Задача 1. Да се намерят всички трицифрени числа, които могат да се запишат с цифрите 1, 6 и 7, ако:

а) няма повтарящи се цифри;

б) цифрите могат да се повтарят.

Отговор: а) 6; б) 27

Задача 2. Колко са петцифрените четни числа, които могат да се съставят от цифрите 0, 2, 5, 7 и 9, ако всяка цифра се среща точно по веднъж?

Упътване. Пребройте числата, които завършват на 0; пребройте тези, които завършват на 2 и съберете броя на едните и другите.

Отговор. 42

Задача 3. Намерете броя на всички четирицифрени числа, които съдържат в записа си поне една цифра 5.

Упътване. От броя на всички четирицифрени числа извадете броя на четирицифрените числа, които не съдържат в записа си цифра 5.

Отговор. 3168

Задача 4. Сравнете броя на трицифрените числа, които имат в записа си точно един път цифрата 9, с тези, които имат в записа си точно два пъти цифрата 9.

Упътване. Пребройте числата от видовете

$$\boxed{9}\boxed{}\boxed{}\,,\ \boxed{}\boxed{9}\boxed{}\,,\ \boxed{}\boxed{}\boxed{9}\quad \text{и} \quad \boxed{9}\boxed{9}\boxed{}\,,\ \boxed{9}\boxed{}\boxed{9}\,,\ \boxed{}\boxed{9}\boxed{9}$$

I вид: $81 + 72 + 72 = 225$, II вид: $9 + 9 + 8 = 26$.

Задача 5. Колко на брой са петцифрените числа „палиндроми“ т.е., които се четат еднакво отляво надясно и отдясно наляво (например 12021, 33333)? Колко от тях са нечетни?

Упътване. Обърнете внимание, че изборът на единиците определя и цифрата на десетохилядите, а този на десетиците определя и цифрата на хилядите.

Отговор: 900; 500.

Новият сборник на школата

Математика за напреднали

включва теми по комбинаторика и теория на числата от курса *Математика за напреднали* за ученици от 5. до 8. клас, проведен през 2017 и 2018 г.

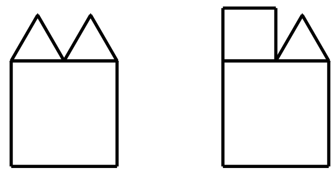
В сборника се представят някои класически методи и идеи за решаване на състезателни задачи по комбинаторика – инварианти, полуинварианти, краен елемент, рекурсия, принцип на Дирихле. Те са илюстрирани със задачи от математически състезания от последните години.

за по-малките задачи

4. клас

16. Да се намерят неизвестните числа x, y и z от равенствата
$$56.7 + x = 717, \quad 642 : 6 - y = 42 \quad \text{и} \quad z - (x - y) = 123.$$

17. Фигурите на чертежа са сглобени от два еднакви квадрата, три еднакви равностранни триъгълника и един по-малък квадрат. Ако фигурата вляво има обиколка 120 см, да се намери обиколката на фигурата вдясно.

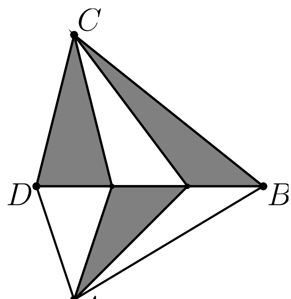


18. В кутия са поставени 40 фигури, триъгълници или квадрати, които имат общо 133 върха. Колко са квадратите? Най-малко колко фигури трябва да извадя от кутията (без да гледам), за да е сигурно, че сред извадените фигури има квадрат?

19. Разстоянието между две хижи А и В е 60 км. По пътя между тях има езеро, което се намира 2 пъти по-близо до А, отколкото до В. Освен това по пътя има заслон, разстоянието от който до А е с 38 км по-дълго, отколкото до В. Да се намери разстоянието между езерото и заслона.

5. клас

20. Отсечката BD на чертежа е разделена на три равни части. Ако общото лице на сивите триъгълници е 20 cm^2, а общото лице на белите триъгълници е 19 cm^2, да се намери лицето на триъгълника ABD.



21. Да се намерят числата a и b, за които

$$\text{НОД}(a + b;\ 30) = 5 \text{ и } \text{НОК}(a;\ b) = 360.$$

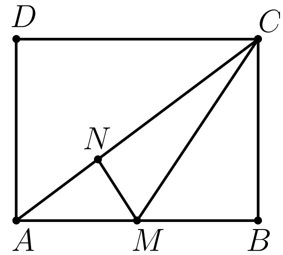
22. Ели направила три теста. Тя отговорила вярно на 60% от 25-те въпроса на първия тест, на 70% от 30-те въпроса на втория и на 80% от 45-те въпроса на третия. На колко процента от всички въпроси в трите теста Ели е отговорила вярно?

23. Колко са четирицифрените числа, които се записват с цифрите 3, 4, 6 и 7 (всяка цифра по веднъж) и се делят на 44?

6. клас

24. Ако $(x-1).(-2-3)-4=-5$ и $5:(-4y+3)+2=1$, да се пресметне стойността на израза $\dfrac{-x-y}{y-x}$.

25. Правоъгълникът $ABCD$ има обиколка 84 cm и страната AB е с 6 cm по-голяма от BC. Да се намери дължината на диагонала. Ако точката N от диагнала AC е такава, че $CN=2AN$ и M е средата на AB, да се намери лицето на триъгълника NMC.



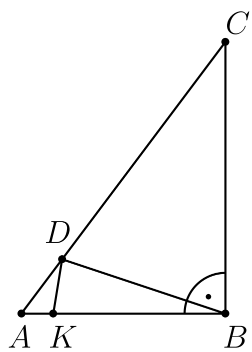
26. Да се намери стойността на израза $\dfrac{(a^5.\ b^6)^7}{(a^4.\ b^5)^8}$ при $a=-2$ и $b=2^{-1}$.

27. Голямо зъбно колело с 9 зъбци е свързано с малко зъбно колело с 6 зъбци. За известно време голямото колело направило 12 пълни завъртания по-малко, отколкото малкото колело. Колко пълни завъртания е направило малкото колело за това време?

7. клас

28. При кои стойности на x и y стойността на многочлена $M=4x^2-4xy+5y^2-12y+1$ е най-малка?

29. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle B=90^\circ$. Точката $D\in AC$ е такава, че $DC=CB$, а точката $K\in AB$ е такава, че $BK=BD$.
а) Ако $\sphericalangle ACB=36^\circ$, да се намери $\sphericalangle ADK$.
б) Ако $\sphericalangle ADK=36^\circ$, да се намери $\sphericalangle ACB$.
в) Ако $\sphericalangle A=2\sphericalangle ADK$, да се намери $\sphericalangle ACB$.



30. Всеки ден Марио отива на училище с велосипед. Той избира между два маршрута. Маршрут В е с 1,5 km по-дълъг от маршрут А, но по него има по-малко светофари, затова средната скорост на Марио по маршрут В е с 2 km/h по-голяма от средната му скорост по маршрут А. Затова времето за пътуване по двата маршрута е едно и също. На колко километра от училище живее Марио?

за по-малките решения

на задачите от бр. 1/2019

1. Пресметнете $2019 - 2018 + 2017 - 2016 + \cdots + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$.

Решение. Имаме $(2019-2018)+(2017-2016)+\cdots+(3-2)+1 = 1010$.

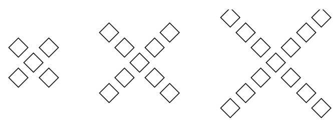
2. Колко стълба са нужни за ограждане на триъгълен участък със страни 20 м, 20 м и 30 м, ако стълбовете се поставят през 5 м?

Решение. Три стълба във върховете на триъгълника и $3+3+5 = 11$ стълба по страните; общо 14 стълба.

3. Намислих три числа. Ако събера две от тях, ще получа или 39, или 48, или 51. Кое е най-голямото от намислените числа?

Решение. Сборът на трите числа е $(39{+}48{+}51) : 2 = 69$. Най-голямото от тях е $69 - 39 = 30$.

4. Иво рисува схеми с ромбчета. Първите три схеми са следните:



Колко ромбчета са нужни за стотната схема?

Решение. На всяка следваща схема има с 4 ромбчета повече, отколкото на предишната. На стотната схема ще има $5 + 4.99 = 401$ ромбчета.

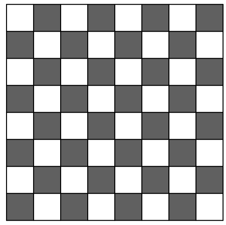
5. Ани намислила едно число X, умножила го по 2 и разделила резултата на 3. Получила $\dfrac{1}{6}$. Колко би получила Ани, ако първо беше разделила X на 2 и резултата беше умножила по 3?

Решение. По обратен път намираме $X = \left(\dfrac{1}{6} \cdot 3\right) : 2 = \dfrac{1}{4}$. Отговорът е $\left(\dfrac{1}{4} : 2\right) \cdot 3 = \dfrac{3}{8}$.

6. Над река, която е широка 49 m, е построен мост. Една трета от дължината на моста е над единия бряг на реката, а 20% от дължината на моста е над другия бряг. Колко метра е дълъг мостът?

Решение. Над бреговете е $\dfrac{1}{3} + 20\% = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$ от дължината на моста. Останалите $\dfrac{7}{15}$ от дължината на моста са над реката и са 49 m. Следователно мостът е $49 : \dfrac{7}{15} = 105$ m.

7. На шахматната дъска 8×8 има общо 204 квадрата (с различна големина). Ако в един квадрат има равен брой черни и бели единични квадратчета, го наричаме *хубав*. Колко от 204-те квадрата на шахматната дъска са хубави?



Решение. Хубавите квадрати са квадратите 2×2 (общо $7.7 = 49$), 4×4 (общо $5.5 = 25$), 6×6 (общо $3.3 = 9$) и даденият квадрат 8×8. Общо има $49 + 25 + 9 + 1 = 84$ хубави квадрата.

8. В една надпревара участвали три коня – бял, сив и черен. По колко различни начина може да се класират те? (Възможно е няколко коня да финишират едновременно.)

Решение. Имаме следните възможни класирания:

– трите коня финишират едновременно;

– един кон е първи, а другите два финишират едновременно. Първият кон може да се избере по 3 начина;

– два коня финишират едновременно и след тях третият. Последният кон може да се избере по 3 начина;

– трите коня финишират по различно време. Възможните класирания са 6 (БСЧ, БЧС, СЧБ, СБЧ, ЧБС, ЧСБ).

Общо класиранията са $1 + 3 + 3 + 6 = 13$.

9. Четири еднакви метални сфери с радиус 6 cm са разтопени и от тях е отлят цилиндър с диаметър 8 cm. Да се намери височината на цилиндъра.

Решение. Ако височината на цилиндъра е h, обемът му е равен на

$$\pi.4^2.h = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi.6^3, \text{ откъдето намираме } h = 72 \text{ cm}.$$

10. Пресметнете $\dfrac{9^5.10^{11}.6^6}{15^{10}.16^4.3^6}$.

Решение. Имаме $\dfrac{9^5.10^{11}.6^6}{15^{10}.16^4.3^6} = \dfrac{3^{10}.2^{11}.5^{11}.2^6.3^6}{3^{10}.5^{10}.2^{16}.3^6} = 10$.

11. Средната височина на момчетата в една компания е 162 cm. Ако към компанията се присъедини и Тошко, който е висок 165 cm, средната височина в компанията ще стане 162,2 cm. Колко са момчетата в компанията, заедно с Тошко?

Решение. Нека броят на момчетата без Тошко е n; сборът от височините им е $162n$. Заедно с Тошко, средната височина в компанията от $n + 1$ момчета става

$$\frac{162n + 165}{n + 1} = 162,2.$$

Оттук $162n + 165 = 162,2(n+1)$ и получаваме $165 - 162,2 = 162,2n - 162n$, т.е. $2,8 = 0,2n$ и намираме $n = 14$. Заедно с Тошко, момчетата са 15.

12. Мила е висока 1,2 m. Привечер сянката на Мила е дълга 3 m. Ако Мила стъпи и се изправи на раменете на брат си, които са на височина 1,5 m над земята, колко метра ще е дълга сянката им?

Решение. От пропорцията $\dfrac{1,2}{3} = \dfrac{1,2+1,5}{x}$ намираме, че сянката x на Мила и брат и е $x = 6,75$ m.

13. Ако $x = 3$ е решение на уравнението $(px - q)(qx + p) = 0$ и $pq = 1$, да се намери стойността на $p^2 - q^2$.

Решение. Имаме

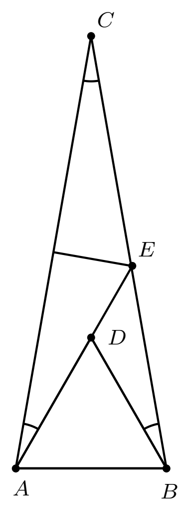
$$0 = (px - q)(qx + p) = pqx^2 + (p^2 - q^2)x - pq = x^2 + (p^2 - q^2)x - 1.$$

Тъй като $x = 3$ е решение на горното уравнение, то $9 + 3(p^2 - q^2) - 1 = 0$, откъдето намираме $p^2 - q^2 = -\dfrac{8}{3}$.

14. Разтвор A съдържа 45% сол, а разтвор B съдържа 54% сол. Разтворите A и B са смесени в отношение 2 : 1. Да се намери концентрацията на сол в получения разтвор.

Решение. Ако смесим 2 литра от разтвор A и един литър от разтвор B, ще получим 3 литра разтвор, в който има $45\%.2 + 54\%.1 = 1,44$ сол. Концентрацията на получения разтвор е $\dfrac{1,44}{3} = 48\%$.

15. На основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е построен равностранен триъгълник ABD (точката D е вътрешна за триъгълника ABC). Правата AD и симетралата на AC се пресичат в точка от страната BC. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC.



Решение. Триъгълникът ABD е равностранен, следователно $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$. Триъгълникът ABC е равнобедрен, значи $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$ и $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 2\alpha$. Тогава $\sphericalangle DAC = \alpha - 60^\circ$.
Нека $E = s_{AC} \cap AD$. Тогава $EA = EC$, т.е. триъгълникът EAC е равнобедрен и $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA$. Получаваме равенството

$$180^\circ - 2\alpha = \alpha - 60^\circ,$$

откъдето намираме $\alpha = 80^\circ$. Триъгълникът ABC има ъгли $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 1/2019 г.

1. В; **2.** В; **3.** В; **4.** Г; **5.** Б.

6. а) При $x = 1$ $a = 0$.

б) Ако положим $3^x = y$, получаваме уравнението $y^2 - 3y + a = 0, y > 0$. При $a = 2$ корените му са 1 и 2, откъдето $x_1 = 0,\ x_2 = \log_3 2$.

в) За уравнението $y^2 - 3y + a = 0$ искаме

1. $D = 0 \to a = \frac{9}{4}$ $\left(y = \frac{3}{2} > 0\right)$;
2. $y_1 = 0 \to a = 0$ $(y_2 = 3 > 0)$;
3. $y_1 y_2 < 0 \to \frac{1}{a} < 0 \to a < 0$, т. е. $a \in (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

7. а) По синусова теорема $BH = a \sin\gamma = \frac{ac}{2R}$.

б) Нека K е средата на AB. От подобието на $\triangle MBK$ и $\triangle ABH$ следва, че $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BH}$, т.е. $BM = \frac{c^2}{2BH} = \frac{Rc}{a}$. Аналогично, $BN = \frac{Ra}{c}$.

в) Разглеждаме функцията $f(c) = \frac{c}{a} - \frac{a}{c}$, $c \in (a, 2R]$. Тъй като $f'(c) = \frac{1}{a} + \frac{a}{c^2} > 0$, функцията $f(c)$ е растяща и достига най-голямата си стойност за $c = 2R$.

8. а) Ако Q е пресечната точка на MN и CD, то $DQ = \frac{a}{2}$ и CQ дели DD_1 в отношение 1 : 2.

б) Точката C_1 се проектира в точката C от (ABC). Разстоянието от C до MN е $\frac{3}{2}CK$, където CK е височината към BD в триъгълника BCD. Но

$$CK = \frac{CB.CD}{BD} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

и сега ако φ е търсеният ъгъл, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{\frac{3}{2}CK} = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60^\circ$.

в) Тъй като $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}CK$, то $CM \perp BD$. Сега от теоремата за трите перпендикуляра следва, че и $DB_1 \perp CM$. Търсеното разстояние е перпендикулярът KL към DB_1.

От подобието на триъгълниците DKL и DB_1B следва, че

$$KL = \frac{BB_1.DK}{DB_1} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

(тъй като $DK = \frac{2}{3}DB$).

ПО СЛЕДИТЕ НА ЕДНА ГРЕШКА

На втора страница в предишния брой на списание *Математика* е допусната грешка в първото от *Удивителните свойства на числото 2019*. Вярното свойство е:

> Сборът на четвъртите степени на **ПЕТ** от първите шест естествени числа е 2019:
>
> $$1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4 = 2019.$$

Редакцията на списанието благодари на нашия колега Господин Господинов, който ни посочи тази грешка.

Нека се поучим от грешката си. Човек лесно може да си представи как вярното равенство се е превърнало в грешното

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \boxed{4^4} + 5^4 + 6^4 = 2019.$$

Но грешката лесно би могла да се избегне, ако се сетим за формулата за сбора на четвъртите степени на естествените числа

$$(\star) \qquad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Тази формула се споменава за първи път в едно от писмата на Пиер Ферма до Мерсен през 1636 година. Ферма пише следното:

Ако числото n, умножено по 4 и увеличено с 2, умножим по квадрата на n-тото триъгълно число и от това произведение извадим сбора на квадратите на първите n естествени числа, ще получим 5 пъти сбора на четвъртите степени на първите n естествени числа.

Като знаем, че n-тото триъгълно число е

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

а сборът на квадратите на първите n естествени числа е

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

от писмото на Ферма разбираме, че

$$(4n+2) \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4),$$

откъдето лесно следва формулата $(\star)$.

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика"

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)"

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика"

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии"

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет"

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация"

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ"

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по . . .

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 15.03.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.