

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

5

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Чл.-кор. проф. дмн Петър Бойваленков – главен редактор

НЕВЕНА СЪБЕВА – зам. главен редактор

Чл.-кор. проф. дмн Генчо СКОРДЕВ

Чл.-кор. проф. дмн Николай НИКОЛОВ

Проф. дмн Емил КОЛЕВ

Проф. д-р Иван ТОНОВ

Проф. д-р Станислав ХАРИЗАНОВ

Доц. д-р ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА

Доц. д-р ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

Емил КАРЛОВ

ТАТЯНА ПАРХОМЕНКО – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Стартира абонаментната кампания на списание „Математика“ за 2025 година. И през следващата година списанието ще се стреми да запази своята актуалност, събирайки на страниците си всичко в областта на училищната математика, което представлява съществен интерес за ученици, преподаватели, родители и любители.

Списанието се фокусира върху:

- подготовката на учениците от 4. – 12. клас за участие в математически състезания;
- подготовката на учениците от 4. клас за приемни изпити;
- подготовката на учениците от 7. и 10. клас за Национално външно оценяване;
- подготовката на учениците от 12. клас за матура и кандидат-студентски изпити.

Списанието публикува информация (задачи, решения, победители) за най-важните национални и международни математически състезания.

Цената на годишния абонамент е 36,00 лв. Възможни са следните отстъпки при групов абонамент:

- За 15 абонамента цената е $15 \times 28 = 420$ лв.
- За $15 + N$ абонамента цената е $420 + N \times 24$ лв., т.е. за всеки абонамент над 15-ия плащате по 24 лв.
- Извън горните бройки можете да абонирате членове на Съюза на математиците в България на цена 25 лв. за абонамент. При използване на тази опция молим да ни пращате списък с имената на съответните абонати и секцията на СМБ, в която членуват.

Събраната сума за абонамента можете да преведете на:

ТБ Алианс България АД, София,

IBAN BG36BUIN95611000003610

BICBUINBGSF – „Списание Математика“ ЕООД.

Молим на вносната бележка да е ясно записано колко бройки и на какъв адрес (добавете и телефон) да се изпраща списанието.

Срокът за груповите абонаменти е 17 февруари 2025 г.

СТРАННО СОРТИРАНЕ, ИЛИ КОГАТО ИНВАРИАНТИТЕ САМО ПРЕЧАТ

ДРАГОМИР ГРОЗЕВ

Ще разгледаме една олимпиадна задача, свързана със сортиране. Имате n книги наредени една върху друга. Надписвате ги, отгоре надолу, с числата от 1 до n и ги разбърквате. След това можете да вземете коя да е книга, да кажем с номер k , която не се намира на k -та позиция (броено отгоре надолу) и да я пъхнете на k -та позиция. Възможно ли е този процес да продължава безкрайно или, без значение какво правите, накрая книгите ще са подредени както в началото? Това ще обсъдим по-долу.

Първото нещо, което ни идва наум, когато видим подобна задача, е да използваме някакъв инвариант, или по-точно полуинвариант. Това означава да намерим някаква величина (цяло положително число), която се изчислява в зависимост от позицията на книгите, и строго намалява след всяко преместване на книга. Ако успеем с този план, от това веднага ще следва, че процесът спира след крайно време. Наистина, не може величина, приемаща само естествени стойности, да намалява безкрайно. Кандидати за такава величина са например броят на инверсиите в пермутацията на книгите, сумата от отклоненията на книгите от техните правилни позиции, и т.н. Но да видим първо задачата.

Задача (Киевска МО, 2024, 10.4). Дадени са n на брой книги, номерирани от 1 до n . Захар ги нарежда една над друга по случаен начин. След това повтаря следната операция. Избира случайно книга с номер k , която не е на k -то място, броено отгоре надолу, изважда я от стека книги и я подпъхва на тази позиция. Захар спира, ако настъпи момент в който всяка книга си е на нейното място.

Възможно ли е Захар да продължава този процес безкрайно?
(Захар Науменц)

Имаме силно подозрение, че както и да се местят книгите, този процес не може да продължава безкрайно, защото след всяка стъпка сортирането някак се подобрява. Нека в определен момент книга с номер i , $i = 1, 2, \dots, n$ е на позиция k_i . Една величина, която е кандидат

за полуинвариант, е $\Delta := \sum_{i=1}^n |k_i - i|$. Това е сумата на отклоненията

от текущата позиция k_i на всяка книга i до нейното правилно място в купчината. Тази величина има шанс, тъй като лесно се проверява, че тя не нараства. На нас обаче ни трябва величина, която строго намалява. Възшност, авторът коментира тази задача на лагер сбора на националния ни отбор за МОМ 2024. След обсъждане, единият от състезателите ни, Ангел Христов (сребърен медал на МОМ 2024) успя да реши задачата, използвайки точно този полуинвариант, като показва, че Δ не може безкрайно да запазва една и съща стойност и след известен брой стъпки, винаги намалява. Аргументите, които той използва, анализират процеса и не използват количествени техники, като идеите свързани с инварианти. Така или иначе, мисля че използването на инвариантна техника при тази задача само пречи.

По-добре е да направим наблюдения върху това как се развива процеса. Да се фокусираме върху книгата с номер 1 и да следим как се движи. Ако тя стигне до 1-ва позиция, оттам насетне тя не може да мръдне от там. В такъв случай, може да използваме индукция/рекурсия за останалите книги. Възможно е обаче книга номер 1 да се движи вечно нагоре-надолу и никога да не отиде най-отгоре. Ключовата идея е отговора на въпроса: Как ще се развива процесът точно след момента, когато книга номер 1 достигне възможната си най-горна позиция.

Решение. Ще докажем малко по-силно твърдение, от това в задачата.

Твърдение. Имаме купчинка от n на брой книги, номерирани с числата от 1 до n . Някои от книгите са маркирани. На всяка стъпка може да изберем някоя от маркираните книга, да кажем с номер k , и да я пхнем на k -та позиция броена отгоре надолу, при условие, че тя не е на това място. Без значение как местим книгите, процесът спира след краен брой стъпки.

За разлика от началното условие, тук можем да местим само определени книги. Останалите са просто пасивен пълнеж, техните номера не са важни и даже бихме могли да ги изтрием. Мястото, на което дадена книга се намира в определен момент, като броим отгоре надолу, ще наричаме нейна (текуща) позиция. Ще казваме че *местим* книга ℓ , когато избираме книга с номер ℓ и я слагаме на ℓ -та позиция. Очевидно, книга номер ℓ трябва да е от маркираните. Да допуснем сега обратното, т.е. че е възможно процесът да продължи безкрайно. Ако има маркирана книга, която местим само краен брой пъти, то можем да я „отмаркираме“ след момента, от който насетне тя не

се мести повече. Така че, може да считаме, че всяка от маркираните книги се мести безкраен брой пъти.

Да означим с $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ номерата на маркираните книги. Има момент, в който избираме книга m_1 и я слагаме на позиция m_1 . Твърдим, че от тук насетне, тя не слиза под тази позиция. Наистина, ако някоя от по-горните книги я „прескочи“ и слезе по-надолу, то книга номер m_1 отива на по-горна позиция. Не е възможно някоя от по-долните книги да я прескочи и отиде по-нагоре, защото тогава тази книга е маркирана и би имала номер по-малък от m_1 . И така, след определен момент, възможните позиции на книга номер m_1 са между 1 и m_1 . Да видим какво става по-нататък, когато преместим книга номер m_2 и тя отиде на позиция m_2 . Не е възможно след този момент тя да слезе на позиция с номер по-голям от m_2 . Това може да се случи само, ако маркирана книга под нея я прескочи и отиде нагоре, на позиция с номер по-малък или равен на m_2 . Това единствено може да бъде книга номер m_1 (защото другите маркирани книги са с номера по-големи от m_2). Но книга номер m_1 е на някоя от позициите $1, 2, \dots, m_1$. И така, след определен момент, книга номер m_2 остава на позициите $1, 2, \dots, m_2$.

Лесно с вижда по индукция, че всяка маркирана книга $m_i, i = 1, 2, \dots, s$, след определен момент се движи само по позициите с номера не по-големи от m_i . Оттам насетне, в момента в който преместим книга номер m_s на позиция m_s , всички маркирани книги ще са над нея. Забележете, че тя повече не може да си промени позицията. За да я промени трябва или маркирана книга над нея да я „прескочи“ и слезе на позиция по-голяма или равна на m_s , което е невъзможно, или да преместим маркирана книга под нея, но там такива няма. И така, установихме, че след определен момент, книга m_s повече не се мести, противоречие. $\square$

Коментар. Може да наречем идеята „динамична“ – наблюдаваме процеса и виждаме последователности от събития, които се случват. Инвариантната техника, от друга страна, може да наречем „статична“. Правим моментна „снимка“ на конфигурацията и по нея изчисляваме някаква величина. В случая, авторът не успя да намери полуинвариант, въпреки че си поигра. Хубавото, ако използвате полуинвариант, е че по-лесно може да оцените след колко време процесът спира. Идеята, използвана в горното решение не може да даде оценка на максималното време, след което процесът спира.

ЗА СОЗОПОЛ 2024

МИРОСЛАВ МАРИНОВ, ИМИ – БАН

Тринадесетият Фестивал на Младите Математици се проведе в периода 01 – 08.09.2024 в град Созопол. Тази година, както обичайно, възрастовите групи бяха 6 – 7 клас, 8 – 9 клас и 10 – 12 клас. Участваха съответно 16, 14 и 8 отбора във възрастовите групи, от градовете София (СМГ, ПЧМГ, НПМГ, 125 СУ), Бургас, Пловдив, Силистра, Варна, Добрич, Димитровград. С колегите смятаме, че събитието бе плод на продуктивна тренировка за учениците от всички възрасти и се надяваме занапред отново да имаме международни участници.

Темите бяха съставени както следва: 6 – 7 клас – Невена Събева и Емил Колев; 8-9 клас – Мирослав Маринов; 10 – 12 клас – Мирослав Маринов и Божидар Димитров. С предложения за задачи се включиха и Борис Барбов, Борис Михов, Станислав Димитров, Люба Конова, Галин Тотев, Марин Христов.

Предоставяме по три харесали се на публиката задачи във всяка от възрастовите групи.

6 – 7 клас

Задача 1. На дъската е записано естествено число n . Андрей и Боян, редувайки се, играят следната игра (първи е Андрей). Андрей има право да изтрие текущото число k и да запише или числото $3k - 1$, или числото $6k + 2$. На своя ход Боян има право да умножи написаното число по 3 или по 7. Докажете, че няма момент в играта, в който някой от двамата играчи да запише на дъската точен квадрат на естествено число.

(Люба Конова)

Решение. Всеки точен квадрат дава остатък 0 или 1 при деление на 3. Обаче след всеки ход на Андрей записаното число дава остатък 2 при деление на 3. Ако Боян умножи полученото от Андрей число по 7, то остатъкът 2 ще се запази, а ако избере да умножи числото по 3, тогава полученият резултат ще се дели в действителност на 3, но не и на 9. Следователно нито след ход на Андрей, нито след ход на Боян е възможно да се получи точен квадрат.

Задача 2. Дадени са 6 купчинки с камъчетата и празна кошница. Купчинките са номерирани от 1 до 6. За един ход се избира купчинка номер i , в която има точно i камъчета, и те се разпределят по едно в купчинките с номера, по-малки от i , и едно камъче се слага в кошницата.

По колко камъчета трябва да има във всяка купчина в началото, така че в кошницата да могат да се съберат максимален брой камъчета и колко е този максимален брой?

(Георги Златинов)

Отговор. 17.

Решение. *Пример.* В кошницата могат да се съберат 17 камъчета, например по следния начин.

6, 4, 2, 3, 1, **1**, кошница 0 $\rightarrow$ 6, 4, 2, **3**, 1, 0, кошница 1 $\rightarrow$
 6, 4, 2, 0, 2, **1**, кошница 2 $\rightarrow$ 6, 4, 2, 0, **2**, 0, кошница 3 $\rightarrow$
 6, 4, 2, 0, 0, **1**, кошница 4 $\rightarrow$ **6**, 4, 2, 0, 0, 0, кошница 5 $\rightarrow$
 0, 5, 3, 1, 1, **1**, кошница 6 $\rightarrow$ 0, **5**, 3, 1, 1, 0, кошница 7 $\rightarrow$
 0, 0, 4, 2, 2, **1**, кошница 8 $\rightarrow$ 0, 0, 4, 2, **2**, 0, кошница 9 $\rightarrow$
 0, 0, 4, 2, 0, **1**, кошница 10 $\rightarrow$ 0, 0, **4**, 2, 0, 0, кошница 11 $\rightarrow$
 0, 0, 0, 3, 1, **1**, кошница 12 $\rightarrow$ 0, 0, 0, **3**, 1, 0, кошница 13 $\rightarrow$
 0, 0, 0, 0, 2, **1**, кошница 14 $\rightarrow$ 0, 0, 0, 0, **2**, 0, кошница 15 $\rightarrow$
 0, 0, 0, 0, 0, **1**, кошница 16 $\rightarrow$ 0, 0, 0, 0, 0, 0, кошница 17.

Възможни са примери, при които накрая има 17 камъчета в кошницата, но не всички купчинки накрая са празни. Всички примери се получават, като в шестата купчинка са 6 камъчета; в петата са 4 или 5, в четвъртата са 2, 3 или 4, в третата са 3, във втората са 1 или 2, в първата е 1. Това са общо $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ примера. При всеки от тях по подобен на посочения начин се стига до 17 камъчета в кошницата.

От друга страна е ясно, че в шестата купчинка може да има само 6 камъчета; в петата може да има 4 или 5, а в четвъртата може да има 2, 3 или 4, за да може, като променяме последователността на ходовете, с всяка от тях да направим по един ход. В трета купчинка трябва да има 3 камъчета, за да могат да се направят два хода с нея (тъй като получава 3 камъчета). Във втората купчинка трябва да има 1 или 2 камъчета и само тогава с нея могат да се направят 3 хода, тъй като получава 5 камъчета. В първата купчинка трябва да има 1 камъче, за да могат да се направят 9 хода (тя получава 8 камъчета). Така ходовете стават общо $1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 9 = 17$, т.е. има 17 камъчета в кошницата.

Оценка. От шестата, петата и четвъртата купчинка може да се направи най-много 1 ход, а от третата най-много 2 хода (започва с

3 и получава още толкова от следващите три). Втората може да се избере най-много три пъти (от следващите е получила най-много 5 камъчета и с 1 или 2 в първоначалната позиция, можем да допълним броя до 6 или 7, което делим на 2). Първата може да се избере най-много $1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 9$ пъти – веднъж, защото започва с камъче, и по един път за всяко избиране на други купчинки. Най-много камъчетата в кошницата са 17.

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число, за което е вярно, че ако $n \geq 2$ е броят на простите му делители, a е най-малкият му прост делител, а b е най-големият му прост делител, то

$$n + a + b = 2024.$$

(Борис Барбов)

Отговор. 10085

Решение. Да разгледаме първо $n = 2$. Понеже числата 2020, 2019 и 2018 не са прости, то $a \geq 5$, като при $a = 5$ имаме $b = 2017$ и числото 10085. От неравенството

$$(a + 1) \cdot (b - 1) = ab + b - a - 1 \geq ab$$

за $a < b$ следва, че ако $a > 5$, ще получим произведение $ab > 10085$.

Нека сега $n > 2$. Тогава числото е по-голямо от $a^{n-1}b$. Ако $a = 2$, тогава или $n = 5, b = 2017$ и числото е поне $16 \cdot 2017 > 10085$, или $n = 11, b = 2011$ и числото е поне $1024 \cdot 2011 > 10085$, или $n \geq 19, b \leq 2003$ и числото е поне $2^{18} \cdot 1 > 10085$.

Аналогично, ако $a = 3$, тогава или $n = 4$ и числото е поне $27 \cdot 2017 > 10085$, или $n \geq 10$ и числото поне $3^9 > 10085$. Накрая, ако $a \geq 5$, то от неравенството

$$a^{n-1}b > a^{n-2}(b+1) > \dots > a^{n-k}(b+k-1) > \dots > a(b+n-2)$$

може да забележим, че няма как да получим отговор по-малък от 10085, заради аргумента от $n = 2$, тъй като $a + (b + n - 2) = 2022$.

8 – 9 клас

Задача 1. Да се намерят всички четворки (k, m, n, p) от цели неотрицателни числа k, m, n и просто число p , такива че $|4^m - 7^n| = p^k$.

Отговор. $(k, m, n, p) = (1, 1, 0, 1), (2, 2, 1, 3), (1, 1, 1, 3)$

Решение. Понеже $4^m \equiv 7^n \equiv 1 \pmod{3}$, непременно $p = 3$ и $k \geq 1$. Имаме два случая:

- Нека $4^m - 7^n = 3^k$. При $m = 0$ няма решение, при $m = 1$ следва $n = 0$ с $k = 1$, нека $m \geq 2$. По модул 8 получаваме, че k е четно. При $k = 2s$ имаме $(2^m - 3^s)(2^m + 3^s) = 7^n$. Най-големият общ делител на множителите вляво дели разликата $2 \cdot 3^s$, т.е. е 1, понеже никой от множителите не се дели на 2 или на 3. Оттук непременно $2^m - 3^s = 1$ (и $2^m + 3^s = 7^n$). В последното $m = 2$ дава $s = 1$ (съответно $k = 2$ и $n = 1$), а $m \geq 3$ е невъзможно по модул 8.
- Нека $7^n - 4^m = 3^k$. Разглеждаме два подслучая:
 - Нека $m \geq 2$. По модул 8 следва, че n и k са четни. При $n = 2t$ имаме разлагането $(7^t - 2^m)(7^t + 2^m) = 3^k$. Най-големият общ делител на множителите вляво дели разликата $2 \cdot 7^t$, т.е. е 1, понеже никой от множителите не се дели на 2 или на 7. Оттук непременно $7^t - 2^m = 1$ (и $7^t + 2^m = 3^k$), което е невъзможно по модул 3.
 - Нека $m = 1$, т.е. $7^n - 3^k = 4$. Явно $n = 1$ върши работа (с $k = 1$), нека $n \geq 2$. Директни пресмятания до 3^{42} по модул 49 показват, че за $3^k \equiv -4 \pmod{49}$ е необходимо $k = 42x + 31$ за някое цяло неотрицателно x . Но тогава по модул 43 (предвид $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$) от малката теорема на Ферма) получаваме $7^n \equiv 3^{31} - 4 \equiv 29 \pmod{43}$, което е невъзможно (пресметнете до $7^6 \equiv 1 \pmod{43}$).

Коментар. Уравнението $7^n - 3^k = 4$ може да се реши и чрез комбинирание на изводи от модулите 7, 9, 19.

Задача 2. Естествените числа от 1 до 60 са наредени в редица, първоначално в нарастващ ред. За един ход е позволено да разменим местата на две от числата, стига те да имат общ делител, по-голям от 1. Колко различни редици можем да получим с краен брой ходове?

Отговор. 52!

Решение. Простите числа между 30 и 60 (7 на брой: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59) и 1 не могат да бъдат премествани, понеже няма друго число в редицата, което да има общ делител по-голям от 1 с кое да е от тях. Ще докажем, че всяка пермутация на останалите 52 числа е достижима, откъдето ще следва и отговорът.

Да предположим, че двойките размени (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , (a_3, a_4) са възможни. Тогава от конкретна пермутация можем да получим

такава, в която само a_1 и a_4 са разменени (и всяко друго число в пермутацията си стои на мястото) чрез последователно прилагане в този ред на размените (a_3, a_4) , (a_2, a_3) , (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , (a_3, a_4) .

Остава да намерим подходяща верига от двойки между всеки две от гореспоменатите 52 числа. Наистина, ако за такива x и y изберем прости делители d_x и d_y , по-малки от 30 (ако x е просто, то $d_x = x$ работи, а иначе избираме $d_x \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{60} < 30$), то възможна верига е $(x, 2d_x)$, $(2d_x, 2d_y)$, $(2d_y, y)$ при $d_x \neq d_y$; а при $d_x = d_y$ е позволено веднага да разменим x и y .

Задача 3. Диагоналите на изпъкнал четириъгълник се пресичат в точка O и го разделят на четири триъгълника. Да се докаже, че центровете на вписаните им окръжности лежат на една окръжност тогава и само тогава когато центровете на външновписаните им срещу върха O окръжности лежат на една окръжност.

Решение. Първо ще докажем следната:

Лема. За всеки триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I и център на външновписаната окръжност J е изпълнено равенството $CI \cdot CJ = AC \cdot BC$.

Доказателство. Еквивалентното $\frac{AC}{CI} = \frac{CJ}{BC}$ следва от $\triangle AIC \sim \triangle JBC$, поради $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCJ = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle CJB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle ABC) - \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \sphericalangle IAC$. $\square$

Сега към задачата. Четириъгълникът е $ABCD$, като I_1, I_2, I_3, I_4 са центровете на вписаните окръжности в триъгълниците AOB , BOC , COD , DOA и J_1, J_2, J_3, J_4 са центровете на външновписаните срещу O окръжности. Явно I_1, J_1, I_3, J_3 лежат на ъглополовящата на $\sphericalangle AOB$, а I_2, J_2, I_4, J_4 – на тази на $\sphericalangle BOC$. От лемата имаме $OA \cdot OB = OI_1 \cdot OJ_1$ и $OC \cdot OD = OI_3 \cdot OJ_3$, откъдето $OI_1 \cdot OI_3 \cdot OJ_1 \cdot OJ_3 = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$. Аналогично $OI_2 \cdot OI_4 \cdot OJ_2 \cdot OJ_4 = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$ и значи

$$OI_1 \cdot OI_3 \cdot OJ_1 \cdot OJ_3 = OI_2 \cdot OI_4 \cdot OJ_2 \cdot OJ_4.$$

От съображения за степен на точка, I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на една окръжност точно когато $OI_1 \cdot OI_3 = OI_2 \cdot OI_4$, което е точно когато $OJ_1 \cdot OJ_3 = OJ_2 \cdot OJ_4$, а това е еквивалентно на J_1, J_2, J_3, J_4 да лежат на една окръжност.

10–12 клас

Задача 1. Дадени са просто число $p \geq 3$ и естествено число m . Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: за всяко естествено число a , което не се дели на p , сборът от естествените делители на a^n , по-големи от 1, се дели на p^m .

Отговор. $p^m(p-1)$

Решение. Първо нека изберем $a \equiv 1 \pmod{p^m}$ да е просто число (такова съществува от теоремата на Дирихле). Искаме сборът $a + a^2 + \dots + a^n$ да се дели на p^m . Тук всяко събираемо дава остатък 1, така сборът е сравним с n , значи непременно n се дели на p^m .

Нататък, нека изберем $a \equiv g \pmod{p^m}$ да е просто число, където g е примитивен корен по модул p^m (такъв съществува за $p \geq 3$, а пък a съществува от теоремата на Дирихле). Предвид $g \not\equiv 0, 1$, имаме $\text{НОД}(a, p^m) = \text{НОД}(a-1, p^m) = 1$ и значи сборът $a + a^2 + \dots + a^n$ се дели на p^m точно когато (след разделяне на a и умножаване по $a-1$) числото $a^n - 1 \equiv g^n - 1$ се дели на p^m . Понеже показателят на g е $p^{m-1}(p-1)$, непременно n се дели на $p^{m-1}(p-1)$. (Аргументът в този абзац може да се извърши и като просто се изисква сборът от делители да се дели на p , вместо на p^m , и се работи с примитивен корен по модул p .)

Обратно, ще покажем, че $n = p^m(p-1)$ върши работа за всяко a . При $a = \prod_{i=1}^s q_i^{e_i}$ искаме $\prod_{i=1}^s (1 + q_i + q_i^2 + \dots + q_i^{ne_i}) \equiv 1 \pmod{p^m}$. Ще докажем, всъщност, че всеки от множителите дава остатък 1. Понеже a не се дели на p по условие, имаме $p \neq q_i$ за всяко i . Ако p не дели $q_i - 1$, то $q_i + q_i^2 + \dots + q_i^{ne_i} = \frac{q_i((q_i^{e_i})^n - 1)}{q_i - 1}$ се дели на p^m от теоремата на Ойлер, тъй като $n = p\varphi(p^m)$. Ако p дели $q_i - 1$, то (предвид $p \neq 2$) чрез лемата за повишаване на експонентата пресмятаме

$$\begin{aligned} \nu_p(q_i + q_i^2 + \dots + q_i^{ne_i}) &= \nu_p(1 + q_i + \dots + q_i^{ne_i-1}) \\ &= \nu_p(q_i^{ne_i} - 1) - \nu_p(q_i - 1) = \nu_p(ne_i) \geq m \end{aligned}$$

и отново имаме делимост на p^m .

Задача 2. В зависимост от реалното число a да се намерят всички полиноми $P(x)$ с реални коефициенти, такива че

$$(x^3 - ax^2 + 1)P(x) = (x^3 + ax^2 + 1)P(x - 1)$$

за всяко реално число x .

Отговор. $P \equiv \text{const}$ при $a = 0$, $P \equiv 0$ при $a \neq 0$.

Решение. При $a = 0$ имаме $P(x) = P(x - 1)$ за всяко реално x , значи $P(n) = P(0)$ за всяко $n \geq 0$ по индукция, съответно $P(x) - P(0)$ има безбройно много корени и P е константа.

Нека сега $a \neq 0$ – ще докажем, че само $P \equiv 0$ е решение. Разглеждаме два случая:

- Нека $a = 2$. Полиномът $x^3 + 2x^2 + 1$ няма цели корени (от теоремата за рационални корени само евентуално ± 1 биха били такива, но не са). По индукция имаме, че $P(n) = 0$ за всяко $n \leq 0$. За базата полагаме $x = 1$ в даденото (лявата страна е 0 заради $x^3 - 2x^2 + 1$, значи $P(0) = 0$), а за стъпката полагаме $x = n$ (лявата страна е 0 заради P , в дясната първият множител е ненулев, значи $P(n - 1) = 0$). Следователно P има безбройно много корени и окончателно $P \equiv 0$.
- Нека сега $a \neq 2$. Сравняване на старшите коефициенти в еквивалентното равенство $(x^3 + 1)(P(x) - P(x - 1)) = ax^2(P(x) + P(x - 1))$ дава, че $a = \frac{d}{2}$, където d е степента на P (в частност, $d \geq 1$); в частност, a е рационално число. Полиномът $x^3 - ax^2 + 1$ е неразложим над рационалните числа (понеже от теоремата за рационалните корени евентуален такъв на $2x^3 - dx^2 + 2$ би бил само $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$, а разложим полином от трета степен непременно има рационален корен). Да отбележим, че тогава за всеки негов корен α и всяко цяло число m е изпълнено, че $\alpha - m$ не е корен на $x^3 + ax^2 + 1$. Наистина, $x^3 - ax^2 + 1$ е минималният полином на α и от $\alpha^3 - a\alpha^2 + 1 = (\alpha - m)^3 - a(\alpha - m)^2 + 1 = 0$ бихме получили квадратно уравнение за α , което е противоречие с минималността. (Тук съвсем спокойно α може да се разглежда като комплексно число, но за който предпочита – полином от нечетна степен има реален корен, така че α можем да считаме за реално число, като за посочения аргумент тук вярността за едно α е достатъчна.) Значи по индукция имаме, че $\alpha - m$ е корен на P за всяко $m \geq 1$: за базата от $x = \alpha$ в даденото следва $P(\alpha - 1) = 0$, а за стъпката по същия начин от $x = \alpha - m$, пред-

вид $P(\alpha - m) = 0$, следва $P(\alpha - m - 1) = 0$. Следователно P има безбройно много корени, т.е. $P \equiv 0$.

Коментар. В тази задача има многобройни съществено различни подходи с корени (някои от които работят без да се доказва предварително, че a е рационално) и съветваме да ги разгледате. Тя е част от Шортлист МОМ 2013 А6.

Задача 3. В пространството са дадени 13 точки, някои четири от които не лежат в една равнина. Три от точките са оцветени в синьо и триъгълникът с върхове тези точки ще наричаме *син*. Останалите 10 точки са оцветени в червено. Ще казваме, че триъгълник с три червени върха е *закачен* за синия триъгълник, ако границата на червения пресича синия (във вътрешността или по границата му) в единствена точка. Възможно ли е броят на закачените триъгълници да е 33?

Решение. За краткост ще пишем $n = 10$, като ще използваме само, че n е четно число. Нека G е граф с върхове червените точки, като ребро между две има ако тяхната отсечка пресича (във вътрешността или по границата) синия триъгълник. При всеки три върха има най-много две ребра, понеже отсечката на поне една двойка точки ще лежи изцяло от едната страна на равнината на синия триъгълник. Сумата $\frac{n-2}{2} \sum d_i$ (където d_i е степента на i -тия връх) е равна на броя двойки (ребро; връх, който не е от реброто), понеже за връх има d_i избора за съсед и $n-2$ за друг връх; т.е. тази сума е равна на броя тройки върхове с едно или с две ребра между тях. От друга страна, броят на тройките върхове с две ребра между тях е $\sum \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ (от всеки връх има d_i възможности за единия му съсед и d_i-1 за другия, като редът на избор няма значение). Следователно броят триъгълници с желаното свойство е

$$\frac{n-2}{2} \sum d_i - 2 \sum \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{n}{2} \sum d_i - \sum d_i^2.$$

(Коефициентът 2 се появява, понеже всяка тройка върхове с две ребра допринася с две двойки (ребро; връх, който не е от реброто).)

Понеже n е четно (по условие), $\sum d_i$ също е (от лемата за ръкостискането) и $\sum d_i^2$ също е (понеже d_i и d_i^2 са с еднаква четност, оттук и сумите им), то разглежданият брой триъгълници е непременно четен – в частност, не може да е 33.

БРОЕНЕ НА ПЕРМУТАЦИИ

СТАНИСЛАВ ЧОБАНОВ

Да разгледаме следната задача за броене на пермутации.

Задача 1. Нека π е произволна пермутация на числата от 1 до n . Една позиция i ще наричаме *красива* ако $i = 1$ или $\pi(i) > \pi(i-1)$, т.е. ако е първата позиция или ако числото на тази позиция е по-голямо от числото на предишната позиция. Да се намери вероятността π да има точно k красиви позиции.

Първо ще представя няколко наблюдения, отнасящи се към броенето на този тип пермутации, след което ще пристъпя към решението.

Нека с $Q(n, k)$ означим броя на пермутациите на числата от 1 до n с точно k красиви позиции. Тогава отговорът на задачата е

$$\frac{Q(n, k)}{n!}.$$

Ясно е, че $Q(n, 0) = Q(n, n+1) = 0$, тъй като е невъзможно да имаме 0 или $n+1$ красиви позиции. Лесно виждаме, че $Q(n, 1) = Q(n, n) = 1$, тъй като единствената пермутация с 1 красива позиция е намаляващата от n до 1, а единствената с n красиви позиции е растящата от 1 до n . Друго важно наблюдение е, че всяка пермутация може да има от 1 до n красиви позиции и общият брой на пермутациите е $n!$, откъдето следва

$$\sum_{i=1}^n Q(n, i) = n!.$$

Друго интересно наблюдение, което можем да видим когато разгледаме стойностите на $Q(n, k)$ за малки n е, че $Q(n, k) = Q(n, n+1-k)$. Това може да се докаже като на всяка пермутация с k красиви позиции се съпостави пермутацията, за която всяко число j е заменено с $n+1-j$, т.е. в някакъв смисъл „обърнем“ числата в пермутацията. Така ако една позиция след първата е била красива, то след обръщането тя вече не е и обратно. Първата позиция е красива и преди и след. Така броят на красивите позиции става точно $n+1-k$. Ако „обърнем“ числата пак, се връщаме в началната пермутация, което означава, че съответствието е взаимно еднозначно и можем да твърдим, че $Q(n, k) = Q(n, n+1-k)$.

Използвайки тези наблюдения, можем да изведем първите няколко стойности за $Q(n, k)$, които ще подредим в триъгълник, наподобяващ формата на триъгълника на Паскал:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 11 & 11 & 1 \end{array}$$

В този триъгълник, k -тото число на n -тия ред е $Q(n, k)$ и значи сборът на числата в n -тия ред е $n!$ (в триъгълника на Паскал е 2^n).

Неслучайно правя аналогия с триъгълника на Паскал. Оказва се, че подобно на него, в този триъгълник всяко число може да се получи рекурентно чрез двете числа над него, стига да знаем позицията в триъгълника, на която се намираме.

Твърдение 1. Нека n е естествено число и $1 \leq k \leq n + 1$. Тогава е в сила следната рекурентна зависимост

$$Q(n + 1, k) = kQ(n, k) + (n + 2 - k)Q(n, k - 1).$$

За сравнение, зависимостта в триъгълника на Паскал е същата, но без да участват множителите k и $n + 2 - k$. Така например, за да намерим $Q(5, 2)$, което се намира под числата 1 и 11 в триъгълника, можем да съобразим, че числото 11 е второто в реда си, броейки отляво, а числото 1 е четвъртото в реда си, броейки отдясно и значи според формулата

$$Q(5, 2) = 2Q(4, 2) + 4Q(4, 1) = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 1 = 26.$$

За да докажем Твърдение 1, нека да разгледаме възможните позиции, на които може да стои числото $n + 1$ в пермутацията и да разгледаме какво ще стане с броя красиви позиции ако премахнем това число от нея.

Ако $n + 1$ е на първа позиция и го премахнем, то броят на красивите позиции остава непроменен, тъй като в началото $n + 1$ е красиво, а числото след него да не е, а след премахването това число става първо и става красиво.

Подобна е ситуацията и когато $n + 1$ се намира между две числа p и q , такива че $p < q$. Тогава в началото $n + 1$ е красиво, а q не е, а след премахването q е красиво. За останалите числа няма промяна.

От друга страна, ако $n + 1$ е на последна позиция и го премахнем, то броят на красивите позиции намалява с 1, тъй като в началото

$n + 1$ е било красиво, а след премахването за останалите числа няма промяна.

Подобна е ситуацията и когато $n + 1$ се намира между две числа p и q , такива че $p > q$. Тогава в началото $n + 1$ е красиво, а q не е, а след премахването q продължава да не е красиво. За останалите числа няма промяна.

Сега нека разгледаме как можем да получим една пермутация на числата от 1 до $n + 1$ с k красиви позиции от пермутация на числата от 1 до n чрез добавяне на числото $n + 1$ на някое от $n + 1$ -те възможни места. Ако сложим числото точно преди число на красива позиция, то броят на красивите позиции ще се запази, а ако го сложим на някое от останалите места, броят на красивите позиции ще се повиши с 1. За да са накрая k красиви позиции, добавянето може да стане по два начина:

1) Добавяме числото $n + 1$ точно преди число на красива позиция в пермутация с k красиви позиции - имаме k места, на които можем да добавим числото за всяка такава пермутация, а броят им е $Q(n, k)$.

2) Добавяме числото $n + 1$ на място, което не е точно преди число на красива позиция в пермутация с $k - 1$ красиви позиции - имаме $n + 1 - (k - 1) = n + 2 - k$ места, на които можем да добавим числото за всяка такава пермутация, а броят им е $Q(n, k - 1)$.

Така броим всяка пермутация на числата от 1 до $n + 1$ с k красиви позиции точно по веднъж и получаваме резултата от Твърдение 1.

Въоръжени с тази рекурентна зависимост, ние можем да докажем формулата за $Q(n, k)$ с индукция по n , стига да се сетим каква е тя.

Твърдение 2. За всяко естествено число n и всяко цяло $k \in [0, n + 1]$ е в сила формулата

$$Q(n, k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n.$$

При $k = 0$ знаем, че $Q(n, k) = 0$, а сумата във формулата е празна, така че твърдението е доказано. За $k \in [1, n + 1]$, ще докажем формулата с индукция по n .

Базата е $n = 1$. Тогава при $k = 1$ имаме $1 = Q(1, 1) = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0)^1 = 1$, а при $k = 2$ имаме $0 = Q(1, 2) = 1 \cdot 1 \cdot (2 - 0)^1 - 2 \cdot 1^1 = 0$.

Индукционното допускане е, че за някое естествено m и произволно $1 \leq k \leq m + 1$ са в сила

$$Q(m, k - 1) = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k - 1 - i)^m.$$

и

$$Q(m, k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^m.$$

За индукционната стъпка ще докажем, че

$$Q(m+1, k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+2}{i} (k-i)^{m+1}.$$

От Твърдение 1 имаме

$$Q(m+1, k) = kQ(m, k) + (m+2-k)Q(m, k-1).$$

Разглеждаме първото събираемо. От индукционното предположение

$$\begin{aligned} kQ(m, k) &= k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^m \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^m (k-i+i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^{m+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^m i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^{m+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i-1} (k-i)^m (m+2-i). \end{aligned}$$

Разглеждаме второто събираемо. От индукционното предположение

$$(m+2-k)Q(m, k-1) = (m+2-k) \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-1-i)^m$$

$$\begin{aligned}
&= (m+2-k) \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \binom{m+1}{i-1} (k-i)^m \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i-1} (k-i)^m (k-i+i-2-m) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i-1} (k-i)^{m+1} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i-1} (k-i)^m (m+2-i).
\end{aligned}$$

Вторите суми в двете събираеми се съкращават и така остава

$$\begin{aligned}
Q(m+1, k) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (k-i)^{m+1} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+1}{i-1} (k-i)^{m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\binom{m+1}{i} + \binom{m+1}{i-1} \right) (k-i)^{m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{m+2}{i} (k-i)^{m+1}.
\end{aligned}$$

С това индукцията е завършена и Твърдение 2 е доказано.

Представеното доказателство е валидно, но то изисква човек да се сети за общия вид на $Q(n, k)$, за да знае какво да доказва. Освен това, то не ни дава възможност да вникнем по-надълбоко в задачата за броене на пермутации и да придобием интуиция за това откъде произлиза тази сума и защо тези биномни коефициенти и степени са свързани с броя на пермутациите от вида, който търсим. Затова нека разгледаме следното комбинаторно доказателство на Твърдение 2, а оттам и на Задача 1.

Комбинаторно доказателство на Задача 1. Да забележим, че за дадена пермутация на числата от 1 до n , можем да разделим числата по единствен начин в последователност от намаляващи подредици. Лесно се вижда, че всяка такава подредица започва от красива

позиция и приключва или в числото преди следващата красива позиция или в последното число от пермутацията. Напр. пермутацията 261435 се разделя по следния начин на четири намаляващи подредици (2)(61)(43)(5) и има четири красиви позиции – това са позиции 1, 2, 4, 6, на които стоят числата 2, 6, 4, 5. Така установихме, че броят на красивите позиции е равен на броя на намаляващите подредици. Едно важно тяхно свойство е, че последното число в една подредица е винаги по-малко от първото число в следващата. Идеята ни оттук нататък ще бъде, че вместо да започваме с пермутация и да броим подредиците, ще започнем с фиксиран брой подредици и ще броим пермутациите, които могат да се получат.

Дефиниция. Под k -разпределение ще разбираме резултатът от поставянето на числата $1, 2, \dots, n$ в k на брой наредени намаляващи подредици, където $k \leq n$.

Например, за $n = 6$, едно 4-разпределение може да бъде следното: Числото 1 разпределяме в подредица 2, числото 2 – в подредица 1, числото 3 – в подредица 3, числото 4 – в подредица 3, числото 5 – в подредица 4 и числото 6 – в подредица 2. Нарезждаме числата във всяка подредица в намаляващ ред и получаваме крайния резултат (2)(61)(43)(5). Това 4-разпределение съответства на пермутацията 261435 с точно 4 красиви позиции. Други 4-разпределения обаче няма да съответстват на пермутация с 4 красиви позиции, например $(\quad)(653)(21)(4)$. В този случай пермутацията има 2 красиви позиции и се разделя така $(65321)(4)$.

От примерите виждаме, че някои k -разпределения водят до валидни пермутации с k красиви позиции и тях ще наричаме „желани“. Другите ще наричаме „нежелани“. Причината да разглеждаме k -разпределения е, че можем лесно да ги преброим.

Свойство 1. Броят на всички k -разпределения е k^n .

Решение. Всяко от n -те числа може да го поставим по k начина в една от подредиците, а редът на числата във всяка подредица е единствен, с което броят на всички k -разпределения е k^n .

Не е трудно да се съобрази какво е необходимото и достатъчно условие едно k -разпределение да е желано.

Свойство 2. Едно k -разпределение е желано тогава и само тогава, когато са изпълнени едновременно следните две условия:

- Всяка от k -те подредици е непразна;

- Всеки две съседни подредици са такива, че последното число на тази отляво е по-малко от първото число на тази отдясно.

Ще разгледаме едно еквивалентно условие за желано k -разпределение, като за целта, ще дефинираме „място“ като пространството

- между две числа в едно k -разпределение ($n - 1$ на брой) или
- вляво от първото число и вдясно от последното (2 на брой).

Така общият брой на местата е $n+1$. Например, в 4-разпределението $()(653)(21)(4)$ имаме 7 места, като първото съдържа $()$ (т.е. празна подредица и начало на следваща, четвъртото и шестото съдържат $()$ (т.е. край на подредица и начало на следваща, а седмото съдържа $()$ (т.е. край на подредица, а останалите три места не съдържат нищо.

Едно място ще наричаме „добро“, ако изпълнява едно от следните условия (иначе е „лошо“):

- празно е, т.е. се намира между две числа от една и съща подредица;
- намира се между две числа от различни подредици, като лявото число е по-малко от дясното;
- намира се вляво от първото число и съдържа само начало на първата (непразна) подредица;
- намира се вдясно от последното число и съдържа само края на последната (непразна) подредица.

Следното условие е еквивалентно на това в Свойство 2.

Свойство 3. Едно k -разпределение е желано тогава и само тогава, когато всичките $n + 1$ места са добри.

Оттук нататък нашата цел ще бъде да преброим k -разпределенията с 0 лоши места по един път, а онези с поне 1 лошо място – по нула пъти.

Забелязваме, че за разлика от желаните, всяко нежелано k -разпределение може да се получи от $(k - 1)$ -разпределение, като се добави излишна подредица на някое от $(n + 1)$ -те места. Това добавяне ще наричаме „разделяща операция“ (РО) и то може да стане по два начина:

- ако мястото е празно е, т.е. се намира между две числа от една и съща подредица, разкъсваме подредицата на две на това място. Напр. 4-разпределението $(6, 4, 3)(2, 1)(5)()$ можем да получим като приложим разделяща операция на място номер 4 върху 3-разпределението $(6, 4, 3, 2, 1)(5)()$;
- ако мястото не е празно, добавяме празна подредица там. Напр. 4-разпределението $(6, 4, 3)(2, 1)(5)()$ можем да получим като приложим разделяща операция на място номер 7 върху 3-разпределението $(6, 4, 3, 2, 1)(5)$.

Наистина, след прилагане на РО върху едно $(k-1)$ -разпределение, резултатът винаги е нежелано k -разпределение, а мястото на прилагане е лошо, спрямо k -разпределението. Така, желаните k -разпределения можем да дефинираме като онези, които не могат да се получат от никое $(k-1)$ -разпределение след прилагане на РО.

По подобен начин, едно нежелано k -разпределение с поне i лоши места, може да се получи от $(k-i)$ -разпределение след прилагане на i разделящи операции на i различни места, които спрямо k -разпределението са лоши. Тук не позволяваме да се прилагат две РО на едно и също място и така дефинираме „последователни разделящи операции“ (ПРО) като последователното прилагане на разделящи операции върху едно k -разпределение, като всяко от $(n+1)$ -те места е било избрано най-много веднъж. Така максималният брой РО в едни ПРО е броят на всички места $n+1$. Напр. 4-разпределението $(6, 4, 3)(2, 1)(5)()$ можем да получим като приложим ПРО на места номер 4 и 7 върху 2-разпределението $(6, 4, 3, 2, 1)(5)$.

Сега ще разгледаме всички възможни начини, по които можем да получим едно k -разпределение след прилагане на ПРО.

Дефиниция. Нека σ е k -разпределение. Със S_σ ще означаваме множеството от ℓ -разпределения ($\ell \leq k$), от които, чрез прилагане на ПРО (вкл. 0 на брой РО в тези ПРО), можем да получим σ .

Ако σ е желано k -разпределение, то $S_\sigma \equiv \{\sigma\}$, тъй като то не може да се получи в следствие на прилагане на РО. В общия случай, $|S_\sigma|$ зависи от броя на лошите места в σ . Нека те са r на брой. Тогава множеството S_σ можем да получим по 2^r начина, защото за всяко лошо място имаме две възможности – или е избрано в ПРО, или не. Следователно $|S_\sigma| = 2^r$. Елементите на S_σ могат да се разбият на групи, в зависимост от броя на разделящите операции в ПРО:

$$S_\sigma \left\{ \begin{array}{l} \binom{r}{0} = 1 \text{ на брой } k\text{-разпределения (самото } \sigma, \text{ при } 0 \text{ РО)} \\ \binom{r}{1} = r \text{ на брой } (k-1)\text{-разпределения (при } 1 \text{ РО)} \\ \vdots \\ \binom{r}{r-1} = r \text{ на брой } (k-r+1)\text{-разпределения (при } r-1 \text{ РО)} \\ \binom{r}{r} = 1 \text{ на брой } (k-r)\text{-разпределения (при } r \text{ РО)} \end{array} \right.$$

Използвайки разлагането на $(1-1)^r$ получаваме, че функцията

$$f(\sigma) = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ е желано } (r=0) \\ 0, & \sigma \text{ е нежелано } (r>0) \end{cases}$$

и следователно сумата $\sum_{\sigma} f(\sigma)$ брой всички желани k -разпределения по един път, а всички нежелани по нула пъти, или

$$Q(n, k) = \sum_{\sigma} f(\sigma).$$

Остава да покажем, че

$$\sum_{\sigma} f(\sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n.$$

За целта, ще преброим $\sum_{\sigma} f(\sigma)$ по втори начин. Този път, вместо да фиксираме едно k -разпределение и да броим по колко начина може да се получи от $(k-i)$ -разпределения, ние ще фиксираме едно $(k-i)$ -разпределение и ще разгледаме всички k -разпределения, които може да се получат от него чрез прилагане на ПРО и как те се броят в сумата.

Нека Ω е едно $(k-i)$ -разпределение. Нека разгледаме всички k -разпределения, които могат да се получат от Ω , чрез прилагане на ПРО. Броят на разделящите операции в ПРО е i . Тези i места, на които да приложим РО, можем да изберем по $\binom{n+1}{i}$ начина, тъй

като всички места са $n + 1$ и не можем да избираме място повече от веднъж. Също така, всеки път, в който Ω се брои в $\sum_{\sigma} f(\sigma)$, то се брои със знак $(-1)^i$, тъй като знакът се определя от четността на броя на РО. Следователно, Ω се брои в сумата $\binom{n+1}{i}$ пъти със знак $(-1)^i$ или общо $(-1)^i \binom{n+1}{i}$ пъти.

Броят на $(k-i)$ -разпределенията е $(k-i)^n$ (от Свойство 1) и така, всички $(k-i)$ -разпределения се броят общо $(-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n$ пъти. Числото i може да е най-малко 0 и най-много $k-1$, така че за да намерим $\sum_{\sigma} f(\sigma)$ можем да сумираме по i :

$$Q(n, k) = \sum_{\sigma} f(\sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n,$$

с което доказателството е завършено.

Анализ на комбинаторното доказателство може да ни даде интуиция за това как успяхме да преброим пермутациите от търсения вид. За всяко $(k-i)$ -разпределение, прилагаме i разделящи операции на i места (от общо $n+1$ възможни) и получаваме всички възможни начини да се получи всяко едно k -разпределение, чрез ПРО. Обаче ако поставим знак минус, когато броят на разделящите операции е нечетен, се получава така, че всяко k -разпределение се брои по 0 пъти, освен ако е желано, когато се брои по 1 път.

Оттук естественият въпрос е какво става ако приложим подобни разсъждения, но без да ограничаваме разделящите операции да се прилагат само по веднъж на едно място. Оказва се, че тези разсъждения ще ни помогнат да решим следната задача.

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено число n и всяко цяло число $k \in [1, n]$ е в сила равенството

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i}{i} Q(n, k-i) = k^n.$$

Решение. Нека π_i е пермутация на числата $1, 2, \dots, n$ с $k-i$ красиви позиции и нека π'_i е съответстващото му желано $(k-i)$ -разпределение. Със S_{π_i} означаваме множеството от k -разпределенията, които може да се получат от π'_i след i на брой разделящи операции,

като вече имаме право да извършваме повече от една разделяща операция на едно и също място. Намирането на $|S_{\pi_i}|$ е задача от тип комбинации с повторение. Да поставим $*$ на всяко място, на което правим РО. Така получаваме $n + i$ обекта (числа и звезди), от които i са звезди. Кой да е i от тези $n + i$ обекта може да са звезди, така че имаме $\binom{n+i}{i}$ начина да поставим звездите измежду n -те числа.

Следователно $|S_{\pi_i}| = \binom{n+i}{i}$.

Тъй като имаме $Q(n, k-i)$ възможни пермутации π_i , получаваме

$$\sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}| = \binom{n+i}{i} Q(n, k-i)$$

и сумирайки по i следва, че

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i}{i} Q(n, k-i).$$

Сега ще представим $\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}|$ по втори начин.

За всяко k -разпределение съществува единствено желано $(k-i)$ -разпределение, от което то може да се получи, чрез прилагане на разделящи операции. Наистина, ако вземем пермутацията на числата в k -разпределението и разделим числата в нея в $k-i$ намаляващи подредици, ще получим желано $(k-i)$ -разпределение, от което след i разделящи операции, ще се получи първоначалното k -разпределение.

Да разгледаме множеството от k -разпределенията и да го разбием на непресичащи се подмножества, в зависимост от съответното им число i - броят на разделящите операции, които са необходими, за да го получим от съответното му желано $(k-i)$ -разпределение. Тогава броят на k -разпределенията в множеството, съответстващо на числото i са $\sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}|$ и значи общият брой на k -разпределенията е

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}|.$$

От друга страна, от Свойство 1 имаме, че общият брой на k -

разпределенията е k^n и така получаваме

$$k^n = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\pi_i} |S_{\pi_i}| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i}{i} Q(n, k-i).$$

Забележка. Следните равенства са следствие от Задача 2

$$Q(n, 2) = 2^n - n - 1,$$

$$\begin{aligned} Q(n, 3) &= 3^n - (n+1)(2^n - n - 1) - (n+2)(n+1)/2 \\ &= 3^n - (n+1)2^n + (n+1)n/2. \end{aligned}$$

В следващата част ще изследваме някои свойства на броя пермутации от искания вид, които започват с определено число.

Дефиниция. С $R(n, k, a)$ ще означаваме броя на пермутациите на числата от 1 до n с k красиви позиции, които започват с числото a .

От дефиницията следва

$$\sum_{a=1}^n R(n, k, a) = Q(n, k).$$

Задача 3. Да се докаже, че

$$R(n+1, k, a) = \sum_{i=1}^{a-1} R(n, k, i) + \sum_{i=a}^n R(n, k-1, i).$$

Решение. Нека с $R_1(n, k, a)$ означим броя на пермутациите на числата от 1 до n с k красиви позиции, които започват с числото a и второто число е по-малко от a . Аналогично, нека с $R_2(n, k, a)$ означим броя на същите пермутации, но за които второто число е по-голямо от a . Имаме $R(n+1, k, a) = R_1(n+1, k, a) + R_2(n+1, k, a)$. Ще докажем, че

$$R_1(n+1, k, a) = \sum_{i=1}^{a-1} R(n, k, i) \quad \text{и} \quad R_2(n+1, k, a) = \sum_{i=a}^n R(n, k-1, i).$$

За една пермутация на числата от 1 до $n+1$ с k красиви позиции, която започва с a, b и $a > b$, извършваме следната операция: Премахваме числото a и след това изваждаме по 1 от всяко число по-голямо

от a . Така ще получим пермутация също с k красиви позиции. Наистина, първоначално a е било на красива позиция, а b - не, а след премахването b е на красива позиция, а за останалите позиции няма промяна, тъй като изваждането на 1 не променя реда на числата. Така на всяка пермутация, която броим в $R_1(n+1, k, a)$, можем да съпоставим единствена пермутация на числата от 1 до n със същия брой красиви позиции, която започва с второто число на първоначалната, което от своя страна може да е в интервала $[1, a-1]$. Следователно

$$R_1(n+1, k, a) = \sum_{i=1}^{a-1} R(n, k, i).$$

Аналогично подходим и за $R_2(n+1, k, a)$. За една пермутация на числата от 1 до $n+1$ с k красиви позиции, която започва с a, b и $a < b$, извършваме следната операция: Премахваме числото a и след това изваждаме по 1 от всяко число по-голямо от a . Така ще получим пермутация с $k-1$ красиви позиции. Наистина, първоначално a и b са били на красиви позиции, а след премахването $b-1$ е на красива позиция, а за останалите позиции няма промяна, тъй като изваждането на 1 не променя реда на числата. Така на всяка пермутация, която броим в $R_2(n+1, k, a)$, можем да съпоставим единствена пермутация на числата от 1 до n с една по-малко красиви позиции, която започва с второто число на първоначалната минус 1, което от своя страна, може да е в интервала $[a, n]$. Следователно $R_2(n+1, k, a) = \sum_{i=a}^n R(n, k-1, i)$.

Като комбинираме тези резултати получаваме исканото.

Забележка 1. Като следствие от тази задача можем да получим равенствата $R(n, k, n) = Q(n-1, k) = R(n, k+1, 1)$. Доказателството оставяме на читателя. То може да се извърши и комбинаторно, без да се използва резултата от задачата.

Забележка 2. Друго следствие от тази задача, което също може да се докаже отделно, е следното: $R(n, 2, i) = 2^{i-1}$, за $1 \leq i \leq n-1$, а при $i = n$ е изпълнено $R(n, 2, n) = 2^{n-1} - n$.

Дефиниция. Една крайна редица ще наричаме k -специална, ако сумата от i -частичните ѝ суми е равна на k пъти сумата на числата, където под i -частична сума разбираме сумата на първите i числа в редицата. Напр. редицата $\{1, 2, 4, 4\}$ е 2-специална.

Задача 4. Да се докаже, че редицата

$$\{R(n, k, 1), R(n, k, 2), \dots, R(n, k, n)\}$$

е k -специална.

Решение. Като използваме резултата от Задача 3, получаваме

$$\begin{aligned}
 Q(n+1, k) &= \sum_{a=1}^{n+1} R(n+1, k, a) \\
 &= \sum_{a=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{a-1} R(n, k, i) + \sum_{i=a}^n R(n, k-1, i) \right) \\
 &= \sum_{a=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{a-1} R(n, k, i) + \sum_{a=1}^{n+1} \sum_{i=a}^n R(n, k-1, i) \\
 &= \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t) + \sum_{t=1}^n tR(n, k-1, t).
 \end{aligned}$$

Правим телескопично сумиране по k и получаваме

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k Q(n+1, j) &= \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, j, t) + \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^n tR(n, j-1, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, j, t) + \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^k \sum_{t=1}^n tR(n, j-1, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, j, t) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t=1}^n tR(n, j, t) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t=1}^n (n+1)R(n, j, t) + \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} (n+1)Q(n, j) + \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t)
 \end{aligned}$$

От Твърдение 1 имаме

$$Q(n+1, k) = kQ(n, k) + (n+2-k)Q(n, k-1).$$

Правим телескопично сумиране по k и получаваме

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k Q(n+1, j) &= \sum_{j=1}^k jQ(n, j) + \sum_{j=1}^k (n+2-j)Q(n, j-1) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} jQ(n, j) + kQ(n, k) + \sum_{j=2}^k (n+2-j)Q(n, j-1) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} jQ(n, j) + \sum_{j=1}^{k-1} (n+1-j)Q(n, j) + kQ(n, k) \\
 &= \sum_{j=1}^{k-1} (n+1)Q(n, j) + kQ(n, k)
 \end{aligned}$$

Последните два резултата дават

$$\begin{aligned}
 kQ(n, k) &= \sum_{t=1}^n (n+1-t)R(n, k, t) \\
 k \sum_{t=1}^n R(n, k, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^i R(n, k, t),
 \end{aligned}$$

което трябваше да докажем.

Следствие. Оттук лесно се вижда, че редицата

$$\{R(n, k, n), R(n, k, n-1), \dots, R(n, k, 1)\}$$

е $(n+1-k)$ -специална, като се докаже, че

$$(n+1-k)Q(n, k) = \sum_{t=1}^n tR(n, k, t).$$

Задача 5. Да се докаже, че броят на пермутациите на числата от 1 до n с k красиви позиции, такива че числото n е в началото или е между две числа в нарастващ ред, е равен на броя на пермутациите на числата от 1 до n с k красиви позиции, такива че първите две числа са в намаляващ ред.

Доказателството оставяме на читателя.

СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, 2024

Емил КОЛЕВ, Институт по математика и информатика – БАН

На 9 ноември 2024 г. се проведе поредното издание на Софийския математически турнир. Предлагаме Ви темите за 4., 5., 6. и 7. клас.

Тема за 4. клас

1. На колко е равно $516 - 416 : 4$?

- А) 25 Б) 50 В) 412 Г) 502

2. Намислих число. Извадих от него най-голямото двуцифрено число, което се записва с различни цифри, и получих сбора на всички естествени числа, които са по-големи от 7 и по-малки от 17. Кое число съм намислил?

- А) 196 Б) 199 В) 206 Г) 213

3. Ако от произведението на XIX и IV извадя LXVI, ще получа:

- А) X Б) XCVIII В) XXX Г) XVIII

4. В овощна градина има 2024 дървета общо. Измежду тях 876 са ябълки. Ябълките са 4 пъти повече от крушите и с 40 по-малко от сливите. Останалите дървета в градината са вишни. Колко са вишните в тази градина?

- А) 13 Б) 43 В) 93 Г) 670

5. Ако $535 : (353 - \Delta) = 5$ и $\Delta : \otimes - 4 = 2$, колко е $\otimes$?

- А) 41 Б) 56 В) 123 Г) 127

6. В една кошница има 11 червени и 17 жълти ябълки, както и 14 червени и 15 жълти круши. Със затворени очи Алиса вади плодове от кошницата, като не може да определи дали вади ябълка или круша. Най-малко колко плодове трябва да извади тя, за да е сигурно, че сред извадените има ябълка и круша с еднакъв цвят?

- А) 27 Б) 29 В) 30 Г) 32

7. Мис Маус оплела общо 120 ръкавички – червени, жълти, сини или зелени. Червените ръкавички били 2 пъти по-малко от жълтите и с 2 по-малко от зелените. Четвъртината от всички ръкавички били сини. Колко червени ръкавички е оплела мис Маус?

- А) 20 Б) 21 В) 22 Г) 24

8. Мис Маус опекла 63 кифли. Всяка кифла била или с шоколад, или с орехи, или и с двете. Третината от кифлите нямали шоколад, а третината от кифлите с шоколад имали и орехи. Колко от кифлите имали орехи?

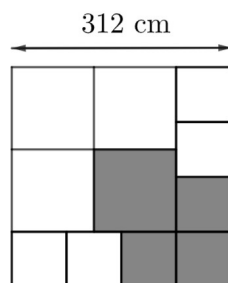
- А) 14 Б) 21 В) 35 Г) 42

9. Иво записал първите 66 букви в редицата С М Т С М Т С М Т Той оцветил в червено една буква С и една буква Т. Наляво от червеното С има 6 букви М. Надясно от червеното Т има 6 букви М. Колко букви има между двете червени букви?

- А) 24 Б) 28 В) 30 Г) 32

10. Квадрат със страна 312 см е сглобен от 11 квадрата, както е показано на чертежа. На колко сантиметра е равна обиколката на фигурата, която е оцветена в сиво?

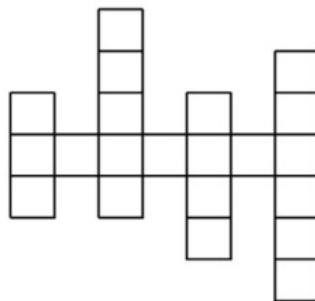
- А) 624 Б) 720
В) 780 Г) 800



11. Фермерите Том и Ема отглеждат 280 зайци. Том ги храни, като на 7 зайци разпределя 4 килограма моркови. Когато Ема храни зайците, на 8 зайци разпределя 5 килограма моркови. С колко килограма повече моркови са нужни на Ема, за да нахрани зайците, отколкото на Том?

12. На фигурата има 4 вертикални ивици и една хоризонтална ивица от квадратчета. Иво трябва да оцвети 5 квадратчета така, че във всяка от петте ивици да има точно по едно оцветено квадратче.

По колко начина Иво може да избере кои 5 квадратчета да оцвети?



13. В библиотеката на Хогуортс Хари Потър намерил свитък, на който е написана следната редица от цифри:

2 0 2 4 2 8 3 2 3 6 4 0 . . . 2 0 2 4 .



- а) Колко числа са записани в свитъка?
- б) Колко цифри са записани в свитъка?
- в) Кои цифри отключват тайната стая?

Тема за 5. клас

1. На колко е равно $(34 \cdot 43 - 51 \cdot 15) : 17$?
 А) 23 Б) 31 В) 41 Г) 43
2. Намислих число. Извадих от него НОК(24, 42), получената разлика умножих по НОД(24, 42) и получих сбора на простите числа, които са по-големи от 24 и по-малки от 42. Кое число съм намислил?
 А) 145 Б) 191 В) 211 Г) 660
3. Ако цифрата a е такава, че трицифреното число $\overline{3a2}$ се дели на 4, а трицифреното число $\overline{4a3}$ се дели на 3, то числото $\overline{24a}$ се дели на:
 А) 2 Б) 7 В) 13 Г) 17
4. Колко трицифрени числа са кратни на НОД(156, 325)?
 А) 68 Б) 69 В) 70 Г) 71
5. Колко естествени числа са делители на НОК(12, 18) или НОК(21, 81)?
 А) 16 Б) 18 В) 19 Г) 22
6. В кошница има 5 червени, 12 жълти и 16 зелени ябълки, както и 14 червени, 13 жълти и 8 зелени круши. Със затворени очи Пепа вади плодове от кошницата, като не може да определи дали вади ябълка

или круша. Най-малко колко плодове трябва да извади той, за да е сигурно, че сред извадените плодове има ябълка и круша с еднакъв цвят?

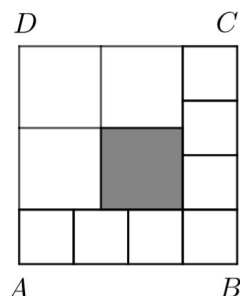
- А) 34 Б) 36 В) 43 Г) 44

7. Годишите на Ани и на Ина са двуцифрени числа със сбор 48. Ако най-големият общ делител на техните години е 4, колко е най-малкото им общо кратно?

- А) 72 Б) 96 В) 120 Г) 140

8. На чертежа квадратът $ABCD$ е сглобен от 11 квадрата. Лицето на сивия квадрат е 729 кв.см. На колко сантиметра е равна обиколката на квадрата $ABCD$?

- А) 144 Б) 216
В) 256 Г) 288



9. Колко са петцифрените числа, които се записват само с цифрите 3 и 5 и се делят и на 3, и на 5?

- А) 5 Б) 6 В) 8 Г) 10

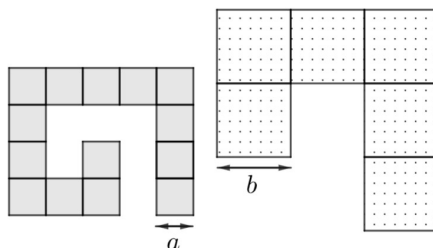
10. Иво записал първите 101 букви в редицата М О Р Е М О Р Е М О Р Е и оцветил в червено една буква О и една буква Р. Надясно от червеното О има 11 букви М, а наляво от червеното Р има 11 букви Е. Колко букви има между двете червени букви?

- А) 10 Б) 11 В) 12 Г) 13

11. Фермерите Том и Ема отглеждат 360 зайци. В дните, когато Том храни зайците, той разпределя 4 кг моркови на 9 зайци. В останалите дни Ема храни зайците, като разпределя 3 кг моркови на 8 зайци. Ако за няколко дни зайците изядли общо 2580 кг моркови, в колко от дните ги е хранила Ема?

12. Фигурите на чертежа са сглобени от два вида квадратни плочки. Страните на плочките са a см и b см, като a и b са естествени числа. Двете фигури имат равни обиколки.

Най-малко на колко квадратни сантиметра е равен сборът от лицата на двете фигури?



13. Асен, Борис, Васил, Галя, Диана и Елена играли на настолна игра. Те се разделили на три отбора и във всеки отбор имало момче и момиче.

В края на играта провели следния разговор и всеки казал истината.



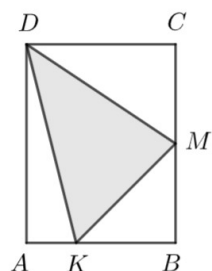
- Колко точки са събрали всички момчета?
- Колко точки е събрала Елена?
- Определете колко точки е събрал всеки участник и какво е отборното класиране.

Тема за 6. клас

- Неизвестното число x в равенството $\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{5} = 2$ е:
 А) $\frac{5}{6}$ Б) $1\frac{1}{6}$ В) $1\frac{2}{3}$ Г) $2\frac{1}{3}$
- Стойността на израза $5,1 - (11,4 - 5,9)$ е:
 А) $-0,4$ Б) $0,4$ В) $-1,4$ Г) $-12,2$
- Пълната повърхнина на правоъгълен паралелепипед е с 30 cm^2 по-голяма от околната повърхнина. Ако околният ръб е равен на 7 см, то обемът на паралелепипеда е равен на:
 А) 105 cm^3 Б) 210 cm^3 В) 100 cm^3 Г) 150 cm^3
- Ако $\frac{3}{5}$ от A е равно на $\frac{3}{4}$ от 100, то каква част от A е равна на 50?

- А) $\frac{1}{5}$ Б) $\frac{7}{10}$ В) $\frac{2}{5}$ Г) $\frac{3}{5}$

5. Пря̀уго̀л̀нѝк̀ът $ABCD$ има лице 24 cm^2 . На страната AB е избрана точка K така, че $AK = BK/2$, а M е средата на BC . На колко квадратни сантиметра е равно лицето на триъ̀г̀л̀нѝка DKM ?



- А) 8 Б) 9
В) 10 Г) 12

6. Ако $x + y = -10$ и

$$|x| - 19 = -2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} - 6\frac{1}{6}, \quad |y| = 5, 7, 1, 7 + 4, 3, 1, 7,$$

колко е $x - y$?

- А) 24 Б) 10 В) -10 Г) -24

7. Автомобил изминал разстоянието между два града за 2 часа. За колко време автомобилът ще измине същото разстояние, ако увеличи скоростта си с 25%?

- А) 1 час и 36 минути Б) 1 час и 30 минути
В) 1 час и 45 минути Г) 1 час и 25 минути

8. Колко е сборът на цифрите на най-голямото трицифрено число, което се дели на 12, 15 и 16, но не се дели на 32?

- А) 15 Б) 12 В) 9 Г) 6

9. В един клас има 25 ученици и два клуба. Ако трима ученици не членуват в нито един клуб, а в двата клуба членуват съответно 15 и 14 ученици, то колко процента от учениците в класа членуват и в двата клуба?

- А) 20% Б) 28% В) 36% Г) 40%

10. По колко различни начина Кари, Маги, Дари, Яна и Ема могат да седнат на пейка така, че Маги и Яна да са в двата края на пейката?

- А) 6 Б) 8 В) 10 Г) 12

11. Височината h на трапеца $ABCD$ е с 20% по-малка от голямата основа AB , и с 20% по-голяма от малката основа CD . Ако $h = 6 \text{ cm}$, намерете лицето на трапеца.

12. По колко различни начина четири букви **А** и пет букви **В** могат да бъдат подредени в редица така, че да няма две съседни букви **А**?

13. В турнир по шах участвали 6 състезатели, като всеки двама изигрвали по една партия помежду си.

В крайното класиране сборът от точките на последните трима бил равен на 3, а първите трима имали различен брой точки.

Колко точки има класираният на второ място?

В шаха за победа се дава една точка, при равен мач и двамата играчи получават по 0,5 точки, а за загуба не се дават точки.



Тема за 7. клас

1. Стойността на израза $\frac{-x^3y^5}{(-x)^4y^3}$ при $x = -8$ и $y = 4$ е равна на:

А) -2

Б) 1

В) 2

Г) 4

2. Нормалният вид на многочлена $(x^2 - 3)(x - 2) - x(1 - 2x)$ е:

А) $x^3 - 4x + 6$

Б) $x^3 - 4x^2 - 4x + 6$

В) $x^3 - 4x - 6$

Г) $x^3 - 2x + 6$

3. Разстоянието между два града по права линия е 150 km, а разстоянието между тях на карта е 35 cm. Колко е разстоянието в километри по права линия между два града, ако разстоянието между тях на същата карта е 42 cm?

А) 160

Б) 170

В) 180

Г) 200

4. За цилиндър с радиус на основата r , околна повърхнина S и обем V е изпълнено равенството:

А) $2V = Sr$

Б) $2S = Vr$

В) $V = 2Sr$

Г) $V = Sr^2$

5. На стените на зар са записани числата 1, 4, 5, 6, 8 и 9. Каква е вероятността при двукратно хвърляне на зара сборът от точките да е равен на 10?

А) $\frac{1}{12}$

Б) $\frac{1}{9}$

В) $\frac{5}{36}$

Г) $\frac{1}{6}$

6. Намислих си естествено число. От него извадих сбора на простите числа по-големи от 8 и по-малки от 18, след което разделих полученния резултат на 3. Получих естествено число, което се дели на 5. Намисленото число НЕ може да бъде:

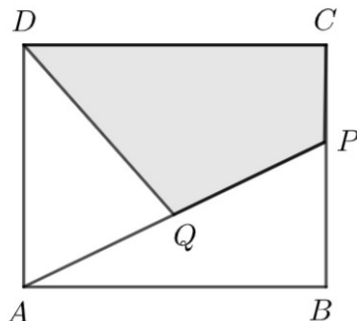
- А) 56 Б) 71 В) 89 Г) 101

7. Ако $\frac{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^7}{24^2} = 2^a \cdot 3^b$, то $a + b$ е равно на:

- А) 8 Б) 9 В) 10 Г) 11

8. На чертежа $ABCD$ е правоъгълник с лице 30 m^2 . Точките P и Q са такива, че $CP : PB = 2 : 3$ и $AQ = QP$. Лицето на четириъгълника $DQPC$ е равно на:

- А) $19,5 \text{ m}^2$ Б) $16,5 \text{ m}^2$
В) $13,5 \text{ m}^2$ Г) 12 m^2



9. Ако X е лицето на правоъгълен триъгълник с катети 4 cm и 25 cm; Y е лицето на кръг с радиус 4 cm и Z е лицето на квадрат със страна 7 cm, то е вярно, че:

- А) $Y > X > Z$ Б) $X > Y > Z$
В) $X > Z > Y$ Г) $Y > Z > X$

10. Средноаритметичното на 8 естествени числа е равно на 8. Средноаритметичното на първите 5 числа е равно на 5. Колко е средноаритметичното на останалите 3 числа?

- А) 3 Б) 5 В) 8 Г) 13

11. Автомобил изминал разстоянието между два града, като през първата една трета от времето на движение се движил с постоянна скорост 120 km/h и изминал две трети от целия път. През останалото време се движил с постоянна скорост v . Намерете v .

12. Дадено е естествено число n . Върху две успоредни прави са избрани съответно 4 и n точки. Всяка точка от едната права е свързана с всяка точка от другата права, като никои три от така построените отсечки не се пресичат в една точка. Ако пресечните точки на отсечките са 60 (без да броим краищата), намерете n .

13. По колко различни начина учител може да върне тестовите по математика на петима ученици, така че само двама от учениците

да получат собствените си контролни, а другите трима да получат чужди контролни?



Отговори и решения
4. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
В	В	А	А	А	Г	В	В	Б	В	15	360	а) 502; б) 1743; в) 444.

Решение на задача 13.

а) Числата в редицата са от 5.4 до 506.4 и са $506 - 5 + 1 = 502$.

б) Двуцифрените числа в редицата са от 5.4 до 24.4 и са

$$24 - 5 + 1 = 20.$$

Трицифрените числа в редицата са от 25.4 до 249.4 и са

$$249 - 25 + 1 = 225.$$

Четирицифрените числа в редицата са от 250.4 до 506.4 и са

$$506 - 250 + 1 = 257.$$

Цифрите в редицата са $20.2 + 225.3 + 257.4 = 40 + 675 + 1028 = 1743$.

в) След търсените три цифри има $(1743 - 3) : 3 = 580$ цифри, а пред тях има $2.580 = 1160$ цифри.

От тези 1160 цифри $40 + 675 = 715$ са от двуцифрените и трицифрените числа в редицата. Останалите $1160 - 715 = 445$ цифри се получават от 111 четирицифрени числа и една цифра от 112-тото четирицифрено число в редицата.

Следователно търсим последните три цифри на 112-тото четирицифрено число в редицата.

Първото четирицифрено число в редицата е $4.250 = 1000$, а 112-тото е $1000 + 111.4 = 1444$.

Така намираме, че търсеният код е 444.

Тема за 5. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
В	Б	Б	Б	А	Г	Г	Г	Б	А	12	2036	а) 490; б) 183.

Решение на задача 13.

а) Всички момичета събрали с $3.7 = 21$ точки повече от всички момчета. Момчетата са събрали общо $(1001 - 21) : 2 = 490$ точки.

б) Във всеки отбор точките на момчето и момичето са с различна четност, тъй като разликата им е 7. Следователно сборът на точките във всеки отбор е нечетен. Следователно нито Галя, нито Диана е в един отбор с Асен; Асен е заедно с Елена.

Елена има със 7 точки повече от Асен, значи Елена и Диана имат общо $360 + 7 = 367$ точки, а Елена и Галя имат общо $320 + 7 = 327$ точки.

Трите момичета имат общо $490 + 21 = 511$ точки. Следователно Галя има $511 - 367 = 144$ точки, а Елена има $327 - 144 = 183$ точки.

в) В един отбор са Елена и Асен, с общо $183 + 176 = 359$ точки.

Момчето, което е в отбор с Галя, има $144 - 7 = 137$ т. Диана има $367 - 183 = 184$ точки, а момчето, което е в отбор с Диана, има 177 точки.

Тъй като Асен има повече точки от Васил, Васил има 137 точки и е заедно с Галя, а Борис има 177 точки и е в отбор с Диана.

Класирането е:

I. Диана и Борис: $184 + 177 = 361$ точки,

II. Елена и Асен: $183 + 176 = 359$ точки,

III. Галя и Васил: $144 + 137 = 281$ точки.

Тема за 6. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Г	А	А	В	В	А	А	В	Б	Г	37,5 cm ²	15	4

Решение на задача 13.

Последните трима са изиграли 3 срещи помежду си и в трите срещи са получили общо 3 точки. Следователно всеки един от тях е загубил трите си срещи с първите трима, което означава, че първите трима имат по 3 точки от срещите си с последните трима.

Класираният на първо място има най-много 5 точки, а класираният на трето място има поне 3 точки. Тогава за точките на класирания на второ място има три възможности – 3,5 точки, 4 точки или 4,5 точки.

Ако има 3,5 точки, то срещата му с третия е завършила реми и те имат равен брой точки, което е невъзможно. Ако има 4,5 точки, то срещата му с първия е завършила реми и те имат равен брой точки, което е невъзможно. Следователно вторият в класирането има 4 точки.

Тема за 7. клас

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
В	А	В	А	В	В	В	В	А	Г	30 km/h	5	20

Решение на задача 13.

Да означим учениците с A , B , C , D и E . За двамата, които ще получат собствените си контролни има 10 възможности (A, B ; A, C ; A, D ; A, E ; B, C ; B, D ; B, E ; C, D ; C, E ; D, E).

Нека например A и B са получили собствените си контролни. Тогава C , D и E трябва да получат чужди контролни. Това може да стане по два начина:

C да получи контролното на D ; D да получи контролното на E и E да получи контролното на C или C да получи контролното на E ; E да получи контролното на D и D да получи контролното на C .

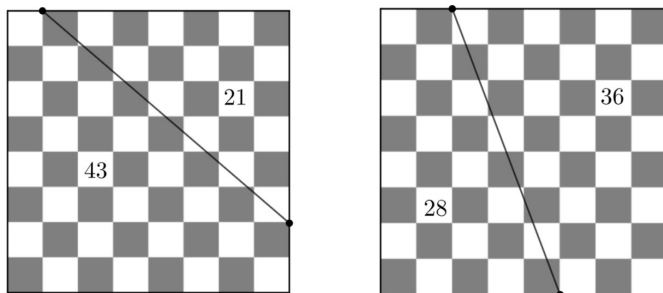
Следователно общият брой начини е равен на $10 \cdot 2 = 20$.

СЪСТЕЗАТЕЛНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

НЕВЕНА СЪБЕВА, Институт по математика и информатика – БАН

Предложените задачи са подходящи за състезателна подготовка на ученици от 5.– 7. клас.

Задача 1. Дадена е шахматна дъска със страна на малките квадратчета, равна на 1. Избирам два върха на квадратчетата по границата на дъската така, че отсечката, която ги свързва, да разделя дъската на две части, и пресмятам лицата на тези части. Две такива разделяния със съответните лица са показани на чертежа.



Колко различни стойности може да приема лицето на една така получена част?

Отговор. 59.

Решение. Нека първо едната част е правоъгълен триъгълник с катети $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и лице S , а другата част е с лице $64 - S$.

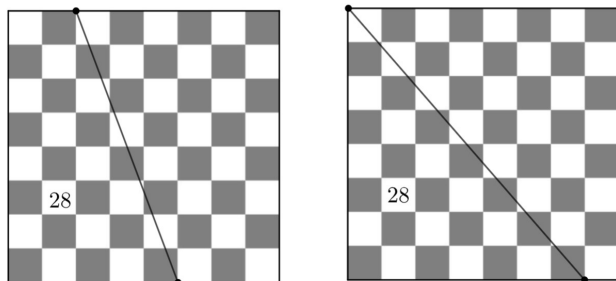
Нееднаквите триъгълници, които могат да се построят, са $8 + \frac{8 \cdot 7}{2} = 36$. Но сред тях има точно 6 двойки нееднакви равнолицеви триъгълници, които съответстват на равенствата:

$$1 \times 4 = 2 \times 2, 1 \times 6 = 2 \times 3, 1 \times 8 = 2 \times 4, \\ 2 \times 6 = 3 \times 4, 4 \times 4 = 2 \times 8, 4 \times 6 = 3 \times 8.$$

Така получаваме $36 - 6 = 30$ различни стойности на $S \leq 32$. На тях съответстват 30 различни помежду си стойности на $64 - S \geq 32$; остава да забележим, че при $S = 32$ получаваме $64 - S = 32$ и това е единственото повторение; т.е. различните стойности на лицата са $2 \times 30 - 1 = 59$.

Случаят, когато отсечката разделя дъската на два трапеца (правоъгълника), се свежда към разглеждания случай. Ако основите

на трапеците са a_1 , b_1 и a_2 , b_2 , имаме $a_1 + a_2 = 8$ и $b_1 + b_2 = 8$. Това означава, че един от сборовете $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$ не надхвърля 8; нека $a_1 + b_1 \leq 8$. Трапецът с основи a_1 , b_1 е равнолицев с триъгълник с катети $a_1 + b_1$ и 8. Примерът илюстрира това съответствие при $a_1 = 2$, $b_1 = 5$.



Задача 2. Фигурата на чертежа, която ще наричаме стълбичка, има 3 стъпала, всяко от които с широчина и височина 1.

Четири еднакви стълбички са поставени (без да се припокриват) в правоъгълник с лице 1155, както е показано на чертежа.

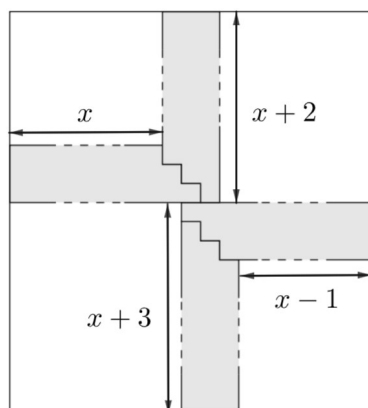
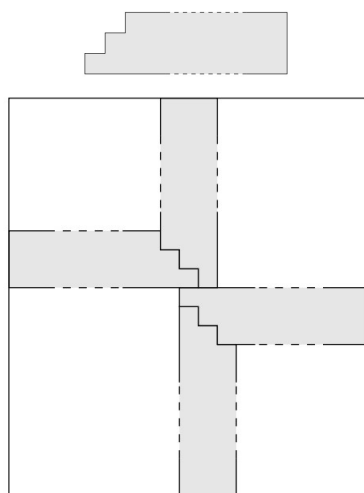
- Намерете лицето на една стълбичка и размерите на правоъгълника.
- Най-много колко стълбички могат да се поставят без припокриване в празен правоъгълник с получените размери?

Отговор. 48; 24 стълбички.

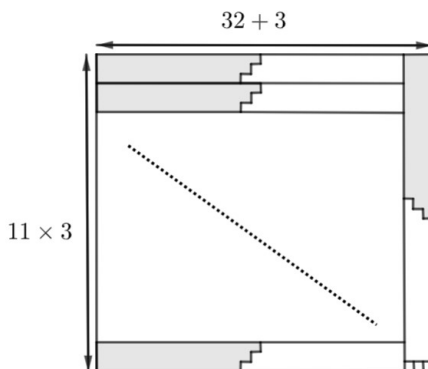
Решение. Да означим с x и $x+2$ двете основи на стълбичката (виж чертежа). Тогава вертикалната страна на правоъгълника е $x + 2 + x + 3 = 2x + 5$, а хоризонталната е $x + 4 + x - 1 = 2x + 3$. Получаваме

$$(2x+3)(2x+5) = 1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 33 \cdot 35.$$

Следователно $2x + 3 = 33$ и $x = 15$. Размерите на правоъгълника са 33×35 . Лицето на стълбичката е $16 \cdot 3 = 48$.

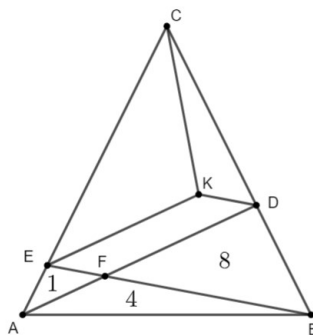


От две стълбички се получава правоъгълник $(15 + 17) \times 3$. Както е показано на чертежа, в правоъгълника 33×35 могат да се поставят 12 правоъгълника 32×3 , т.е. 24 стълбички, и остават само 3 квадратчета.



Задача 3. Даден е триъгълникът ABC . Точките D и E са съответно на страните BC и CA , а AD пресича BE в точката F .

Лицата на триъгълниците AEF , ABF и BDF са съответно 1 cm^2 , 4 cm^2 и 8 cm^2 . Ако $EFDK$ е успоредник, намерете лицата на триъгълниците EKC и KDC .



Отговор. 10 cm^2 , 3 cm^2

Решение. Ако $S_{EDF} = x$, от $x : 8 = EF : FB = 1 : 4$ намираме $x = 2$.

Ако $S_{EDC} = y$, от $y : (1 + 2) = CE : EA = (y + 2 + 8) : (1 + 4)$ намираме $5y = 3(y + 10)$, $y = 15$.

В успоредника $EFDK$ имаме $S_{EDK} = S_{EFD} = 2$, а в трапеца $ADKE$ имаме $S_{AKE} = S_{DKE} = 2$. Накрая,

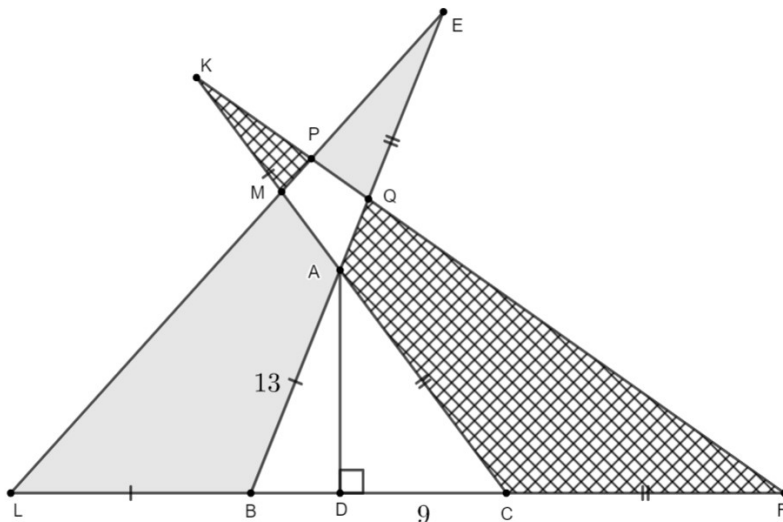
$$S_{EKC} : S_{EAK} = EC : EA = S_{BCE} : S_{ABE}$$

и получаваме $S_{EKC} : 2 = 25 : 5$, т.е. лицето на триъгълника EKC е 10 cm^2 , а на KDC е 3 cm^2 .

Задача 4. В остроъгълния триъгълник ABC е построена височината AD . Известно е, че $AB = 13 \text{ cm}$, $DC = 9 \text{ cm}$ и отсечката AC е 3 пъти по-голяма от BD .

а) Намерете лицето на триъгълника ABC .

б) На правата BC са нанесени отсечките $BL = BA$ и $CF = CA$, на правата BA – отсечката $AE = AC$, а на правата CA – отсечката $AK = AB$. Намерете лицата на триъгълниците BLE и CFK .



в) Да разгледаме нова конфигурация: фиксираме точките B и C и пускаме точката A да се движи така, че сборът $AC + AB$ се запазва. Нека $EL \cap KF = P$, $EL \cap KC = M$, $KF \cap BE = Q$. Докажете, че сборът от лицата на $ABLM$ и PQE е равен на сбора на лицата на $ACFQ$ и MPK .

Решение. а) Ако $BD = x$, то $AC = 3x$ и от питагоровата теорема за триъгълниците ABD и ACD получаваме

$$AD^2 = 13^2 - x^2 = (3x)^2 - 9^2,$$

откъдето $x = 5$ и намираме страните $BC = 5 + 9 = 14$ cm и $AC = 15$ cm. От $AD^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ намираме $AD = 12$ cm и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$ cm².

б) Последователно намираме

$$S_{ABL} = \frac{BL}{BC} \cdot S = \frac{13}{14} \cdot S_{ABC}, \quad S_{AEL} = \frac{AE}{AB} \cdot S_{ABL} = \frac{15}{13} \cdot \frac{13}{14} \cdot S = \frac{15}{14} \cdot S_{ABC},$$

$$\text{т.е. } S_{BLE} = S_{ABL} + S_{AEL} = 2S_{ABC} = 168 \text{ cm}^2.$$

По същия начин,

$$S_{ACF} = \frac{CF}{BC} \cdot S = \frac{15}{14} \cdot S_{ABC}, \quad S_{AKF} = \frac{AK}{AC} \cdot S_{ACF} = \frac{13}{15} \cdot \frac{15}{14} \cdot S = \frac{13}{14} \cdot S_{ABC},$$

$$\text{т.е. } S_{CFK} = S_{ACF} + S_{AKF} = 2S_{ABC} = 168 \text{ cm}^2.$$

в) Ако докажем, че лицата на триъгълниците BLE и CFK са равни, като извадим от тях лицето на общата им част $MAQP$, ще получим желаното равенство.

Нека $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $S_{ABC} = S$. Последователно намираме

$$S_{ABL} = \frac{BL}{BC} \cdot S = \frac{c}{a} \cdot S, \quad S_{AEL} = \frac{AE}{AB} \cdot S_{ABL} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot S = \frac{b}{a} \cdot S,$$

$$\text{т.е. } S_{BLE} = S_{ABL} + S_{AEL} = \frac{b+c}{a} \cdot S.$$

По същия начин,

$$S_{ACF} = \frac{CF}{BC} \cdot S = \frac{b}{a} \cdot S, \quad S_{AKF} = \frac{AK}{AC} \cdot S_{ACF} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot S = \frac{c}{a} \cdot S,$$

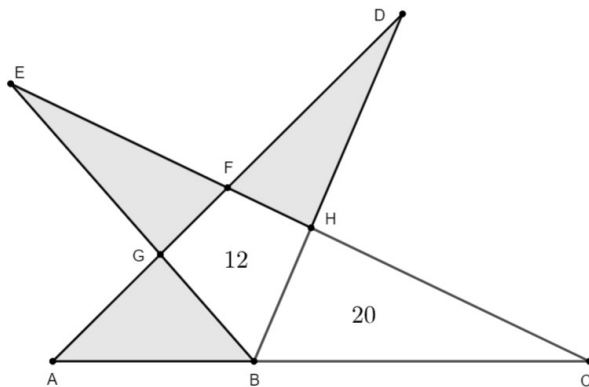
$$\text{т.е. } S_{CFK} = S_{ACF} + S_{AKF} = \frac{b+c}{a} \cdot S.$$

Забележка. В дадената задача $b+c = 2a$, но както доказахме, то е вярно и в общия случай.

Задача 5. На чертежа точките A , B и C лежат на една права, AD пресича BE и CE съответно в точките G и F , а BD и EC се пресичат в точка H .

Триъгълниците ABG , EFG и DHF имат едно и също лице S , лицето на триъгълника BCH е 20 cm^2 , а лицето на $GBHF$ е 12 cm^2 .

Намерете S .



Отговор. $9,6 \text{ cm}^2$

Решение. Първо ще докажем, че CG разполовява лицето на $BCFG$. Нека $S_{BCG} = x$, $S_{FCG} = y$, $S_{AGE} = z$. От

$$\frac{S_{AGC}}{S_{GFC}} = \frac{AG}{GF} = \frac{S_{AGE}}{S_{GFE}} \implies \frac{S+x}{y} = \frac{z}{S}$$

и

$$\frac{S_{AEG}}{S_{AGB}} = \frac{EG}{GB} = \frac{S_{CGE}}{S_{CGB}} \implies \frac{z}{S} = \frac{S+y}{x}$$

следва, че

$$\frac{S+x}{y} = \frac{S+y}{x}.$$

Това равенство е възможно, само ако $x = y$ (ако $x > y$, то $\frac{S+x}{y} > \frac{S+y}{x}$, а ако $x < y$, то $\frac{S+x}{y} < \frac{S+y}{x}$).

Следователно $S_{GFC} = \frac{12+20}{2} = 16$. Аналогично BF разполовява лицето на $BGFH$, т.е. $S_{BGF} = S_{BHF} = \frac{12}{2} = 6$.

Тогава от

$$S_{GEF} : S_{GFC} = EF : FC = S_{BEF} : S_{BFC}$$

получаваме

$$S : 16 = (S+6) : (6+20) \iff 26S = 16(S+6) \iff S = 9,6.$$

Задача 6. Дворът на четиримата братя има форма на правоъгълник $ABCD$, $AB = 100$ m и $AD = 120$ m. В двора расте златна ябълка, разположена в точка P , за която триъгълниците PAC и PBD имат лица съответно 100 m² и 120 m².

Четиримата братя си разделили градината, като всеки взел един от триъгълните участъци ABP , BSP , CDP , DAP . Най-малкият брат взел ABP .

а) Колко квадратни метра може да е площта на участъка на най-малкия брат? Намерете всички възможности.

б) Всеки от братята отглежда в градината си поне една билка: трима отглеждат змийско грозде и двама отглеждат змийско мляко.

Най-малкият брат гледа и двете билки.

Градината на Вичо няма обща страна с градината на Дичо.

И двамата съседни на Вичо гледат змийско грозде.

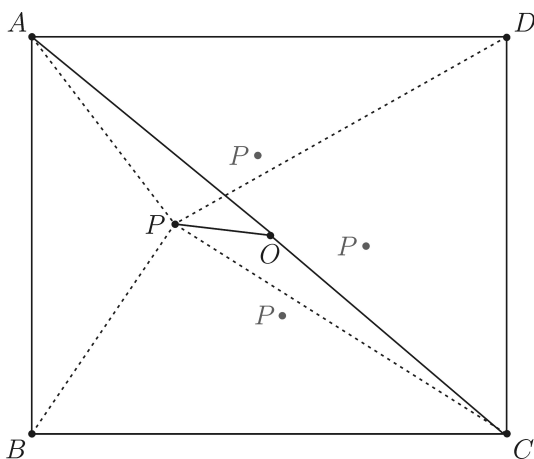
Змийско мляко има само в две съседни (с обща страна) градини.
Ачо отглежда само змийско грозде.

Градината на Ичо е със 100 m^2 по-голяма от градината на Дичо.
В най-малката градина се отглежда змийско мляко.

Как се казва най-малкият брат и колко е площта на градината му?

Решение. а) Точката P може да е във всеки от триъгълниците AOB , BOC , COD , DOA .

Тъй като PO е медиана във всеки от триъгълниците ACP и BDP , то лицето на AOP и на COP е 50 m^2 , а лицето на BOP и на DOP е 60 m^2 .



Ако P е вътрешна за AOB , то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} - S_{PBO} = 3000 - 50 - 60 = 2890.$$

Ако P е вътрешна за COD , то

$$S_{PAB} = S_{AOB} + S_{PAO} + S_{PBO} = 3000 + 50 + 60 = 3110.$$

Ако P е вътрешна за BOC , то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} + S_{PBO} = 3000 - 50 + 60 = 3010.$$

Ако P е вътрешна за DOA , то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} - S_{PBO} = 3000 + 50 - 60 = 2990.$$

б) Градините на братята са с площ 2890, 2990, 3010, 3110, като общата площ на срещуположните градини е 6000.

Тъй като градината на Ичо е със 100 m^2 по-голяма от градината на Дичо и градините на Вичо и Дичо са срещуположни, има две възможности:

- 1) Ичо – 3110, Дичо – 3010, Ачо – 2890, Вичо – 2990
- 2) Ичо – 2990, Дичо – 2890, Ачо – 3010, Вичо – 3110.

Първият случай отпада, тъй като в най-малката градина, в случая на Ачо, се отглежда змийско мляко, но Ачо отглежда само змийско грозде; противоречие.

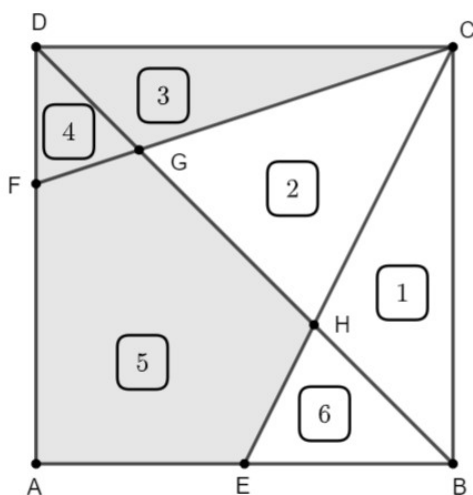
Във втория случай най-малката градина е на Дичо, той гледа змийско мляко, както и съседът му Ичо.

И двамата съседни на Вичо, Ачо и Ичо, гледат змийско грозде.

Следователно Ичо гледа и двете билки, той е най-малкият брат и има градина от 2990 m^2 .

Задача 7. Емо разрязал торта, изобразена на чертежа като квадрат $ABCD$. Първият разрез бил по диагонала BD , а вторият свързал C със средата E на AB . Той планирал третия разрез да е от C до точка F от страната AD и така да получи 6 парчета, съответно означени на чертежа.

Как да избере Емо точката F (т.е. в какво отношение тя дели страната AD), ако иска:



- а) парчетата $\boxed{2}$ и $\boxed{4}$ да са еднакво големи;
- б) парчетата $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$ общо да са половината торта?

Отговор. а) $AF : FD = 1 : 2$; б) $AF : FD = 4 : 1$.

Решение. Да означим лицето на квадрата с S .

а) Първо намираме

$$BH : HD = S_{CBE} : S_{CDE} = \frac{S}{4} : \frac{S}{2} = 1 : 2.$$

Ако $S_2 = S_4$, то $S_{DFC} = S_4 + S_3 = S_2 + S_3 = S_{DHC}$, което означава, че разстоянията от F и от H до правата DC са равни, т.е. $FH \parallel DC \parallel AB$.
Тогава

$$S_{AFB} = S_{ABH} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{6}S$$

и оттук

$$AF : FD = S_{AFB} : S_{DFB} = \frac{1}{6}S : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)S = 1 : 2.$$

б) Условието $S_3 + S_4 + S_5 = \frac{1}{2}S = S_4 + S_5 + S_6$ е еквивалентно на равенството $S_3 = S_6$.

От $EH : HC = S_{DBE} : S_{DBC} = \frac{S}{4} : \frac{S}{2} = 1 : 2$ получаваме, че

$$S_6 = \frac{1}{3}S_{EBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} = \frac{S}{12}.$$

Ако $AF : FD = a : b$, изразяваме

$$S_{CDF} = S_{BDF} = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{S}{2},$$

$$FG : GC = S_{DBF} : S_{DBC} = b : (a+b).$$

Тогава $S_3 : S_{CFD} = CG : CF = (a+b) : (a+2b)$ и

$$S_3 = \frac{a+b}{a+2b} \cdot S_{CFD} = \frac{a+b}{a+2b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{S}{2} = \frac{b}{a+2b} \cdot \frac{S}{2}.$$

Така $S_3 = S_6$ се свежда до равенството

$$\frac{b}{a+2b} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{12} \iff 6b = a+2b \iff a = 4b,$$

т.е. $AF : FD = 4 : 1$.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

ЗА 5. – 7. КЛАС

НЕВЕНА СЪБЕВА, Институт по математика и информатика – БАН

Предлагам ви серия задачи, илюстриращи основни свойства по теория на числата, достъпни за ученици от 5. – 7. клас. Задачите са от състезателните теми на 13. фестивал на младите математици в Созопол.

Задача 1. Естествените числа a, b, c изпълняват следните условия:

- (1) $a \cdot b$ се дели на $2^{14} \cdot 7^{10}$;
- (2) $b \cdot c$ се дели на $2^{17} \cdot 7^{17}$;
- (3) $a \cdot c$ се дели на $2^{20} \cdot 7^{37}$.

Най-малко на колко е равно произведението $a \cdot b \cdot c$?

Отговор. $2^{26} \cdot 7^{37}$

Решение. За да е най-малко произведението abc , числата a, b, c имат прости делители само 2 и 7. Нека $a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3}$. От условие (1) следва, че

$$x_1 + x_2 \geq 14, \quad y_1 + y_2 \geq 10.$$

От условие (2) следва, че

$$x_2 + x_3 \geq 17, \quad y_2 + y_3 \geq 17.$$

От условие (3) следва, че

$$x_3 + x_1 \geq 20, \quad y_3 + y_1 \geq 37.$$

Като съберем почленно неравенствата за показателите на 2, получаваме

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5.$$

Тъй като показателите са неотрицателни цели числа, то $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$.

Тъй като

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq y_1 + y_3 \geq 37,$$

стойността на $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 7^{y_1+y_2+y_3}$ е не по-малка от $2^{26} \cdot 7^{37}$.

Пример за достигането на тази стойност е $a = 2^8 \cdot 7^{18}$, $b = 2^6 \cdot 7^0$, $c = 2^{12} \cdot 7^{19}$.

Задача 2. Петко, Галин, Мария и Иво решавали следната задача.

Намислих трицифрено число A , всички цифри на което са различни от 0. Изтрих една цифра на A и получих двуцифреното число B . След това изтрих една цифра на B и получих едноцифреното число C . Оказа се, че $A + B + C = 765$. Кое число съм намислил?

Всеки от четиримата получил различно число, което удовлетворява условието. Ако числото на Мария се дели на простото число p , числото на Иво се дели на $p + 10$ и на простото число q , а числото на Петко се дели на $q + 10$, кое число е получил Галин?

Отговор. 695.

Решение. Ако $A = \overline{xyz}$, имаме следните шест случая.

Първи случай. $\overline{xyz} + \overline{xy} + x = 765 \iff 111x + 11y + z = 765$.
Тъй като

$$765 - (11 \cdot 9 + 8) \leq 111x \leq 765 - (11 \cdot 1 + 2),$$

то $x = 6$ и получаваме $11y + z = 99$, което не е изпълнено за ненулеви цифри y, z .

Втори случай. $\overline{xyz} + \overline{xy} + y = 765 \iff 110x + 12y + z = 765$.
Тъй като

$$765 - (12 \cdot 9 + 8) \leq 110x \leq 765 - (12 \cdot 1 + 2),$$

то $x = 6$ и получаваме $12y + z = 105$, което е изпълнено за $y = 8, z = 9$.
Получаваме $A = 689$.

Трети случай. $\overline{xyz} + \overline{xz} + x = 765 \iff 111x + 10y + 2z = 765$.
Тъй като

$$765 - (10 \cdot 9 + 2 \cdot 8) \leq 111x \leq 765 - (10 \cdot 1 + 2 \cdot 2),$$

то $x = 6$ и получаваме $10y + 2z = 99$, което не е изпълнено за ненулеви цифри y, z .

Четвърти случай. $\overline{xyz} + \overline{xz} + z = 765 \iff 110x + 10y + 3z = 765$.
Тъй като

$$765 - (10 \cdot 9 + 3 \cdot 8) \leq 110x \leq 765 - (10 \cdot 1 + 3 \cdot 2),$$

то $x = 6$ и получаваме $10y + 3z = 105$, което е изпълнено за $y = 9, z = 5$. Получаваме $A = 695$.

Пети случай. $\overline{xyz} + \overline{yz} + y = 765 \iff 100x + 21y + 2z = 765$.
Тъй като

$$765 - (21 \cdot 9 + 2 \cdot 8) \leq 100x \leq 765 - (21 \cdot 1 + 2 \cdot 2),$$

то $x = 6$ или 7 .

При $x = 6$ получаваме $21y + 2z = 165$, което е изпълнено при $y = 5, z = 9$. Получаваме $A = 679$.

При $x = 7$ получаваме $21y + 2z = 65$, което е изпълнено при $y = 3, z = 1$. Получаваме $A = 731$.

Шести случай. $\overline{xyz} + \overline{yz} + z = 765 \iff 100x + 20y + 3z = 765$.
От делимост на 5 следва, че $z = 5$; тогава $10x + 2y = 75$, което е невъзможно.

Възможните стойности за A са $731 = 17.43$, $679 = 7.97$, $689 = 13.53$, $695 = 5.139$.

Числото на Мария е 679 и се дели на $p = 7$, числото на Иво е 731 и се дели на $p + 10 = 17$ и на $q = 43$, а числото на Петко е 689 и се дели на $q + 10 = 53$. Числото на Галин е 695 .

Задача 3. Колко са тройките естествени числа (a, b, c) , които изпълняват следните условия:

- (1) $a : b = b : c$;
- (2) $a \cdot b \cdot c = 2^{66} \cdot 3^{66}$?

Отговор. 2025

Решение. Нека $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3}$, където степенните показатели са естествени числа или 0 . От условие (1) следва, че $a \cdot c = b^2$, т.е.

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \quad y_1 + y_3 = 2y_2,$$

а от условие (2) следва, че

$$x_1 + x_2 + x_3 = 66, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 66.$$

Намираме $x_2 = y_2 = 22$, а $x_1 + x_3 = 44$, $y_1 + y_3 = 44$. Така търсените тройки се определят от избора на x_1 и y_1 . Числото x_1 (както и y_1) може да изберем измежду числата $0, 1, 2, \dots, 44$ по 45 начина. Следователно възможните тройки са $45 \cdot 45 = 2025$.

Задача 4. От редицата на естествените числа $1, 2, 3, \dots$ изтрили всички точни квадрати и всички точни кубове (т.е. числата

$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \dots$ и $8 = 2^3, 27 = 3^3, \dots$). Кое е 2024-тото число в получената редица?

Отговор. 2078

Решение. Да разгледаме колко числа ще бъдат изтрети, например до 2025. Тъй като $2025 = 45^2$, от редицата $1, 2, \dots, 2025$ са изтрети 45 точни квадрата ($1^2, 2^2, \dots, 45^2$).

Тъй като $12^3 = 1728$ и $13^3 = 2197$, от редицата $1, 2, \dots, 2025$ са изтрети 12 точни куба ($1^3, 2^3, \dots, 12^3$).

Точните шести степени са и точни квадрати, и точни кубове. До 2025 са изтрети следните шести степени: $1^6 = 6, 2^6 = 64, 3^6 = 729$ (тъй като $4^6 = 4096$).

Следователно до 2025 са изтрети $45 + 12 - 3 = 54$ числа и са останали $2025 - 54 = 1971$ числа, последното от които е 2024. Следващото число 2025 е изтрето, а 1972-то число в редицата, свободна от кубове и квадрати, е 2026. Следващото изтрето число ще е $46^2 = 2116$. Следователно 2024-тото число в редицата е $2026 + (2024 - 1972) = 2078$.

Задача 5. Намерете броя на четворките естествени числа (a, b, c, d) , за които

$$12a + 21b + 28c + 84d = 2024.$$

Отговор. 2024

Решение. От делимост на 4 следва, че b се дели на 4; $b = 4b_1$.

От делимост на 3 следва, че $c \equiv 2 \pmod{3}$, $c = 3c_1 + 2$.

От делимост на 7 следва, че $5a \equiv 1 \pmod{7} \iff a \equiv 3 \pmod{7}$,
 $a = 7a_1 + 3$.

Като заместим в даденото равенство, получаваме

$$84a_1 + 84b_1 + 84c_1 + 84d = 2024 - 3 \cdot 12 - 2 \cdot 28 = 1932 \iff a_1 + b_1 + c_1 + d = 23.$$

Тъй като a, b, c, d са естествени числа, то събираемите a_1 и c_1 са естествени или 0, а b_1 и d са естествени. Ако запишем $a_1 = a_2 - 1$ и $c_1 = c_2 - 1$, получаваме

$$a_2 + b_1 + c_2 + d = 25,$$

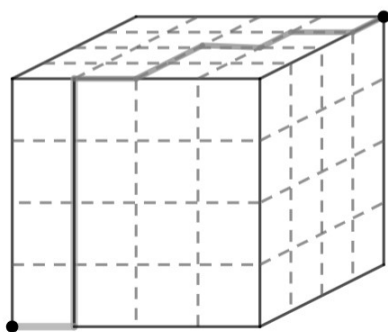
където всички събираеми са естествени числа.

Броят на начините да се изберат такива четворки събираеми със сбор 25 се намира стандартно. Поставяме 25 точки в редица и три прегради някъде в 24-те интервала, определени от точките. Броят на точките до първата преграда съответства на първото събираемо, броят на точките между първата и втората – на второто и т.н. Броят на начините да се поставят тези 3 прегради е $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2024$.

МАРШРУТИТЕ НА МРАВКАТА

По една задача от 13. фестивал на младите математици

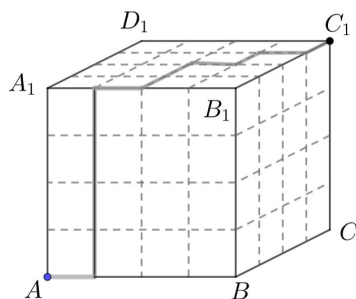
Всяка стена на куб с ръб 4 е покрита с мрежа от квадратчета със страна 1. Мравка се намира в един връх на куба и иска да допълзи до срещуположния връх, като се движи само по линиите на мрежата.



Измежду колко различни маршрута с дължина 12 може да избора мравката?

Първо да отбележим, че мравката прави по 4 стъпки в три посоки, като се движи по две стени на куба.

Двете стени, по които да се стигне от един връх до противоположния му, могат да се изберат по 6 начина. Като използваме означенията на чертежа, това са $ABCD$ и BCC_1B_1 или CDD_1C_1 ; ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$ или BCC_1B_1 ; ADD_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$ или CDD_1C_1 .



Ако разгърнем двете избрани стени, получаваме правоъгълник 4×8 . Маршрутите от един негов връх до противоположния връх можем да преброим постъпково, като събираме пътищата във всеки възел на мрежата; на чертежа е показан броят на маршрутите по стените ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – от A до C_1 са 495 маршрута.

		5	15	35	B_1 70	126	210	330	C_1 495
1		4	10	20	35	56	84	120	165
1		3	6	10	15	21	28	36	45
1		2	3	4	5	6	7	8	9
1									
	A	1	1	1	1	1	1	1	1

(Може да разсъждаваме и по следния начин. Маршрутът в правоъгълника 4×8 включва 4 стъпки в едната посока и 8 стъпки в другата и се определя еднозначно, ако изберем кои 4 от 12-те стъпки да са в първата посока; това става по $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ начина.)

Така получаваме $6 \cdot 495 = 2970$, но това не е търсеният брой, тъй като някои маршрути лежат едновременно в две двойки стени. Това са маршрутите, които минават по ребро на куба и по перпендикулярна на това ребро стена (от връх до срещуположния му връх в стената): AB и BCC_1B_1 ; AA_1 и $A_1B_1C_1D_1$; AD_1 и DCC_1D_1 ; ABB_1A_1 и B_1C_1 ; ADD_1A_1 и D_1C_1 ; $ABCD$ и CC_1 .

Във всеки от тези 6 случая броят на маршрутите е равен на броя на маршрутите от връх до срещуположния му връх в стена 4×4 ; например от A до B_1 , който брой от горната схема е 70.

(Може да разсъждаваме и по следния начин. Маршрутът включва 4 стъпки в едната посока и 4 в другата и се определя от избора на 4-те стъпки в една посока; това става по $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ начина.)

Така получаваме $6 \cdot 70 = 420$ маршрута по ръб и стена.

Остава да съобразим, че има маршрути, които минават по три ребра на куба; например, $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1$. При първото броене всеки такъв маршрут е броен 3 пъти (например, $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1$ е в двойките стени $(ABCD; BCC_1B_1)$, $(ABB_1A_1; A_1B_1C_1D_1)$ и $(ABB_1A_1; BCC_1B_1)$). При второто броене всеки маршрут по три ръба е броен 2 пъти (например, $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1$ е в двойките $(ABB_1A_1; B_1C_1)$ и $(AB; BCC_1B_1)$). Следователно в разликата $2970 - 420 = 2550$ те са броени по веднъж.

Така търсеният брой е 2550.

ПО ПЪТЯ

НЕВЕНА СЪБЕВА, Институт по математика и информатика – БАН

Задачите за движение са класика в учебниците по математика. Като задължителна част от подготовката за НВО, решенията на тези задачи са почти алгоритмизирани и не оставят място за творчество. Но нека се върнем към очарованието на задачите „по пътя“, като разгледаме няколко примера от темите за 6. – 7. клас на 13. фестивал на младите математици в Созопол.

Задача 1. Велосипедист се движил по маршрута $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, като разстоянието от B до C е с 9 km по-голямо от разстоянието от A до B и с 9 km по-малко от разстоянието от C до D .

Велосипедистът пътувал с постоянна скорост от A към B , след което увеличил скоростта си с 20% и продължил от B към C , а от C към D отново увеличил скоростта си с 20%. По този начин той пътувал от A до C с 20% по-дълго, отколкото от C до D .

Колко километра е разстоянието от A до D ?

Отговор. 49,5 km

Решение. От A до B велосипедистът изминал a km със скорост v km/h; от B до C изминал $a + 9$ km с $1,2v$ km/h; от C до D изминал $a + 18$ km с $1,44v$ km/h. Времето от A до C е $\frac{a}{v} + \frac{a+9}{1,2v}$, а от C до D е $\frac{a+18}{1,44v}$ и имаме $\frac{a}{v} + \frac{a+9}{1,2v} = 1,2 \cdot \frac{a+18}{1,44v} \iff a + \frac{a+9}{1,2} = \frac{a+18}{1,2} \iff a = \frac{9}{1,2} = 7,5$. Разстоянието от A до D е $3 \cdot 7,5 + 27 = 49,5$ km.

Задача 2. Преди да стигне до Езерния град, пътят от Графството минава през Ломидол, града на елфите.

В първия ден на есента към Ломидол тръгнали Билбо от Графството и Арагорн от Езерния град и, без да знаят, вървели един към друг. През този ден Билбо изминал $\frac{3}{4}$ от пътя си, а Арагорн изминал $\frac{2}{3}$ от своя път и спрели да нощуват на 18 km един от друг.

На следващия ден имало буря, но Билбо успял да измине $\frac{2}{3}$ от останалия му път до града на елфите, а Арагорн изминал $\frac{3}{4}$ от пътя, който му оставал. Нощта ги застигнала, когато били само на 5 km един от друг.

При изгрева на третия ден те едновременно продължили към Ломидол. Арагорн се движел 2 пъти по-бързо от Билбо и пристигнал в Ломидол 10 минути преди него.

За колко минути Билбо е стигнал до Ломидол на третия ден от своето пътешествие?

Отговор. 40 минути.

Решение. Нека разстоянието от Графството до Ломидол е a km, а от Езерния град до Ломидол е b km. След първия ден на Билбо му оставали $\frac{1}{4}a$ km, а на Арагорн му оставали $\frac{1}{3}b$ km, следователно

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b = 18 \iff 3a + 4b = 216.$$

След втория ден на Билбо му оставали $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{12}a$ km, а на Арагорн му оставали $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{12}b$ km, следователно

$$\frac{1}{12}a + \frac{1}{12}b = 5 \iff a + b = 60.$$

От двете получени равенства намираме, че $a = 24$, $b = 36$.

Следователно на третия ден Билбо е изминал 2 km, а Арагорн е изминал 3 km. Тъй като Арагорн се движел 2 пъти по-бързо от Билбо, за времето, за което Арагорн изминал 3 km и пристигнал в Ломидол, Билбо изминал 1,5 km. Оставащите 0,5 km Билбо е изминал за 10 минути, значи се е движел с $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3$ km/h. На третия ден Билбо е пътувал $\frac{2}{3}$ часа, т.е. 40 минути.

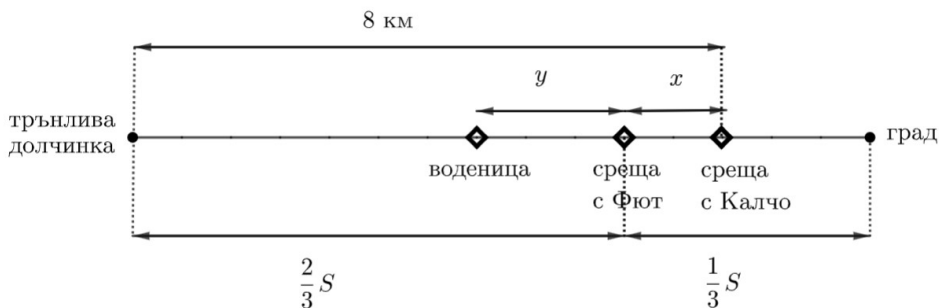
Задача 3. Ян Бибиян и дяволчето Фют излезли от трънливата долчинка, всеки от тях се качил на един катер и отплавали по течението на реката към града. Катерът на Ян Бибиян се движел по-бързо, но когато изминал 8 km, видял на брега Калчо, който го помолил да го върне до воденицата. Без да губи време, Ян Бибиян качил Калчо и потеглил обратно. По пътя към воденицата се разминали с Фют, точно когато на дяволчето му оставала една трета от пътя до града.

Ян Бибиян оставил Калчо във воденицата, веднага продължил към града и пристигнал едновременно с Фют.

Колко километра е разстоянието от воденицата до града?

Отговор. 4 km

Решение. Ключът към решението на задачата е следното разсъждение: от тръгването до срещата с Ян Бибиян, дяволчето Фют е изминало 2 пъти по-голямо разстояние, отколкото от срещата до града; следователно времето тръгването до срещата е 2 пъти повече, отколкото от срещата до града.



До срещата си с дяволчето, Ян Бибиян е изминал 8 км по течението и x км обратно срещу течението. Следователно

$$\frac{2}{3}S = 8 - x \implies \frac{1}{3}S = 4 - \frac{x}{2}.$$

След това е изминал още y км срещу течението (до воденицата), след това y км по течението и оставащата една трета от пътя, т.е. $4 - \frac{x}{2}$ км по течението.

Като използваме ключовото наблюдение, с което започнахме, получаваме, че времето, за което Ян Бибиян е изминал 8 км по течението и x км срещу течението е 2 пъти повече, от времето, за което е изминал y км срещу течението, y км по течението и $4 - \frac{x}{2}$ км по течението.

Това означава, че времето, за което Ян Бибиян е изминал 8 км по течението и x км срещу течението е равно на времето, за което би изминал $2y$ км срещу течението, $2y$ км по течението и $8 - x$ км по течението.

Оттук следва, че времето за изминаване на x км по и срещу течението е равно на времето за изминаване на $2y$ км по и срещу течението, т.е.

$$x = 2y.$$

Разстоянието от воденицата до града е $y + 4 - \frac{x}{2} = y + 4 - \frac{2y}{2} = 4$ км.

Задача 4. По пътеката от хижа A до хижа B има чешма и пейка. В 8:00 Пешо тръгнал от хижа A към хижа B . Като изминал $\frac{2}{5}$ от пътя, минал край чешмата (без да спира). Когато му оставало да измине $\frac{1}{3}$ от пътя, минал край пейката (без да спира).

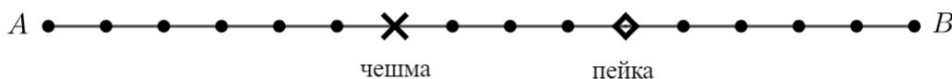
До пейката Пешо се разминал с Тошо, който вървял по пътеката към A .

Когато Пешо стигнал в B , по пътеката от B към A тръгнал Гошо. Гошо настигнал Тошо точно до чешмата и пристигнал в A в 10:00.

Ако приемем, че всеки от тримата се движел с постоянна скорост, намерете в колко часа Тошо е пристигнал в A .

Отговор. 11 часа.

Решение. Нека пътят е $15s$. Тогава разстоянието от A до чешмата е $\frac{2}{5} \cdot 15s = 6s$, от пейката до B е $\frac{1}{3} \cdot 15s = 5s$, а между чешмата и пейката е $15s - (6s + 5s) = 4s$.



Да означим времето, за което Пешо, Гошо и Тошо изминават разстояние s съответно с a , b и c минути.

Пешо отишъл от A до B (т.е. изминал разстояние $15s$) за $15a$ минути, след което Гошо отишъл от B до A за $15b$ минути; това станало общо за 2 часа, т.е.

$$15a + 15b = 120 \iff a + b = 8.$$

След срещата с Тошо при пейката, Пешо изминал разстояние $5s$ за $5a$ минути, след което Гошо отишъл от B до чешмата за $9b$ минути; през това време Тошо отишъл от пейката до чешмата, като изминал разстояние $4s$ за $4c$ минути. Следователно

$$5a + 9b = 4c \iff 9(a + b) = 4c + 4a \iff 9 \cdot 8 = 4(a + c) \iff a + c = 18.$$

От $a + b = 8$ и $a + c = 18$ следва, че

$$c - b = 10.$$

От чешмата до A разстоянието е $6s$; Гошо го изминал за $6b$ минути, а Тошо – за $6c$ минути. Тъй като $6c - 6b = 6 \cdot 10 = 60$ минути, то Тошо е пристигнал в A 60 минути по-късно от Гошо, т.е. в 11 часа.



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

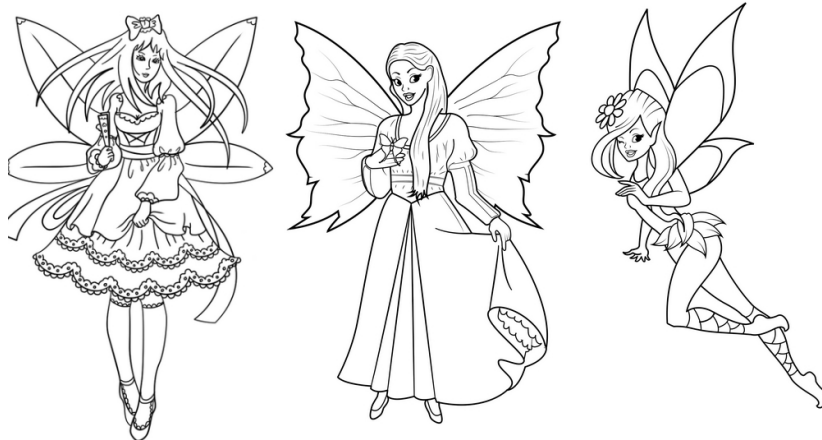
Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2022 г. и бр. 1, 2 и 3 от 2023 г.

Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас. Победителят получава наградата на броя – разбира се, математическа литература.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg.

* * *

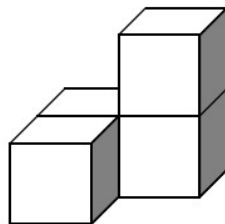
1. От началото на числовия лъч тръгнали три феи – червена, синя и жълта. Те се разходили по числовия лъч, като червената стъпвала през 18 единици (в 0, 18, 36 и т.н.), синята – през 21 единици (в 0, 21, 42 и т.н.), а жълтата – през 24 единици (в 0, 24, 48 и т.н.).



Всяка точка, в която стъпи фея, се оцветява в цвета на феята. Ако в някоя точка стъпят две феи, цветовете се сливат (червен и жълт – в оранжев, червен и син – в лилав, син и жълт – в зелен). Точка, в която стъпят и трите феи, става кафява (например, точката 0 е кафява).

Всяка фея стъпила в точно 101 точки на числовия лъч и отлетяла.

- Срокът за представяне на решенията е 31.01.2025 г.



че n се дели на 3. Сега отново от първото равенство получаваме, че $\overline{abc}$ се дели на $18 \cdot 9 = 162$.

Кратните на 162 трицифрени числа са 162, 324, 486, 648, 810, 972.

Като вземем предвид, че от признака за делимост на 4 числото $\overline{ab}$ се дели на 4, възможностите 810 и 972 отпадат.

При $\overline{abc} = 162$ получаваме $n^2 = 9$, т.е. $n = 3$, но $4 \cdot 3^3 = 108 \neq \overline{cab} = 216$.

При $\overline{abc} = 324$ получаваме $n^2 = 18$, няма такова естествено число n .

При $\overline{abc} = 486$ получаваме $n^2 = 27$, няма такова естествено число n .

При $\overline{abc} = 648$ получаваме $n^2 = 36$, т.е. $n = 6$. Наистина $4 \cdot 6^3 = 864 = \overline{cab}$.

И така, $a = 6$, $b = 4$, $c = 8$.

2. Чарли има книга с n страници, като всички страници са номерирани последователно с числата $1, 2, 3, \dots, n$. Ако отворите книгата на произволно място, на страницата отляво има четен номер, а на страницата отдясно има нечетен номер. На последната страница (преди задната корица) има четен номер.

За съжаление един лист от книгата на Чарли е скъсан. Чарли преброил, че общо 2024 цифри са използвани за номериране на останалите $n - 2$ страници. (Обърнете внимание, че това е не сборът на номерата на страниците.) Да се намери n .

Решение. Да преброим колко цифри са използвани за номериране на страниците, преди да се откъсне този лист. Ясно е, че n е трицифрено четно число. Имаме

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 3 \cdot (n - 99) = 3n - 108$$

цифри преди откъсването на листа.

На откъснатия лист има 4, 5 или 6 цифри. Следователно $3n - 108$ е равно на $2024 + 4$, $2024 + 5$ или $2024 + 6$. Като забележим, че $3n - 108$ се дели на 3, остава само възможността

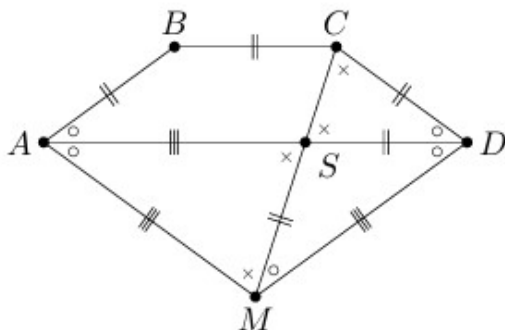
$$3n - 108 = 2024 + 4,$$

откъдето намираме $n = 712$.

3. Точката M е центърът на правилния десетоъгълник $ABCDEFGHIJ$ със страна 12. Ако S е пресечната точка на MC и AD , намерете разликата между периметъра на четириъгълника $ABCD$ и периметъра на триъгълника DMS .

Решение. От симетрията следва, че отсечките от M до върховете на десетоъгълника го разделят на еднакви равнобедрени триъгълници с ъгъл при върха 36° и ъгли при основата 72° . Ъглите на десетоъгълника са $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$.

Да разгледаме петоъгълника $ABCDM$.



Четириъгълникът $ABCD$ е трапец и тъй като $\angle ABC = \angle BCD = 144^\circ$, то $\angle DAB = \angle CDA = 36^\circ$. Следователно AD е ъглополовяща на $\angle MAB$ и на $\angle MDC$ и $\angle MAS = \angle MDS = 36^\circ$.

В $\triangle SDC$ намираме $\angle CSD = 180^\circ - \angle CDS - \angle MCD = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$, следователно той е равнобедрен и $SD = CD = 12$.

В $\triangle MAS$ имаме $\angle MSA = \angle DSC = 72^\circ$ и $\angle MAS = 36^\circ$, следователно $\angle AMS = 72^\circ$, откъдето $SA = MA$.

В $\triangle MDS$ имаме $\angle MDS = \angle DMS = 36^\circ$, следователно $MS = DS = 12$.

Накрая, разликата между периметъра на $ABCD$ и периметъра на DMS е равна на

$$\begin{aligned} & (AB + BC + CD + DA) - (DM + MS + SD) = \\ & = (12 + 12 + 12 + (12 + SA)) - (DM + 12 + 12) = \\ & = 24 + MA - MD = 24. \end{aligned}$$

ХАРИ ПОТЪР НА 13. ФЕСТИВАЛ В СОЗОПОЛ

НЕВЕНА СЪБЕВА, Институт по математика и информатика – БАН

Предлагам ви серия задачи в стил fan fiction от 13. фестивал на младите математици в Созопол. Задачите са подходящи за ученици от 5. – 7. клас.

Задача 1. Хари Потър и Рон Уизли се упражнявали да правят бонбонени магии. След всяка такава магия се получава бонбон във вид на шоколадова жаба, всякаквовкусово бобче или лакрицова пръчка. Двамата направили общо 444 магии и спрели. Всеки разгледал своите бонбони. Рон казал:

– Сред моите бонбони 30% са жаби, а 25% са бобчета!

– А сред моите $\frac{1}{6}$ са жаби, а $\frac{4}{9}$ – бобчета. – отговорил Хари. – Но ти имаш повече лакрицови пръчки от мен.

Колко лакрицови пръчки са направили двамата общо?

Отговор. 191.

Решение. Нека Хари е направил x магии, а Рон y магии; $x + y = 444$.

Лакрицовите пръчки на Хари са $\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right)x = \frac{7}{18}x$, следователно x се дели на 18, т.е. $x = 18a$, където a е естествено число.

Лакрицовите пръчки на Рон са $\left(1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)y = \frac{9}{20}y$, следователно y се дели на 20, т.е. $y = 20b$, където b е естествено число.

Тогава

$$18a + 20b = 444 \iff 9a + 10b = 222.$$

Тъй като $9a$ има цифра на единиците 2 и $a < 25$, то $a = 8$ (тогава $b = 15$) или $a = 18$ (тогава $b = 6$).

Лакрицовите пръчки на Хари са $7a$, а на Рон са $9b$. Условието $9b > 7a$ е изпълнено само в първия случай, $a = 8, b = 15$. Лакрицовите пръчки са общо $7 \cdot 8 + 9 \cdot 15 = 191$.

Задача 2. Едно четирицифрено число A се нарича *подозрително*, ако A се дели на 10, $A + 1$ се дели на 11 и $A + 2$ се дели на 12.

Хари Потър знае, че в два от трезорите на банката Гринготс са скрити хоркрукси, като номерата на тези два трезора са подозрителни числа и сборът им се дели на 7.

С едно заклинание Хари може да посочи два номера и ако и в двата трезора с тези номера има хоркрукси, те се унищожават.

С колко най-малко заклинания Хари Потър може със сигурност да унищожи хоркруксите?

Отговор. 13.

Решение. Ако изключим условието, че A е четирицифрено число, най-малкото число A_0 , което се дели на 10, $A_0 + 1$ се дели на 11 и $A_0 + 2$ се дели на 12, е $A_0 = 10$. Тъй като $\text{НОК}(10, 11, 12) = 660$, числата A са от вида $660.k + 10$.

Четирицифрените числа от този вид са 14 на брой (получават се при $k = 2, 3, \dots, 15$): 1330, 1990, 2650, 3310, 3970, 4630, 5290, 5950, 6610, 7270, 7930, 8590, 9250, 9910.

Те дават следните остатъци при деление на 7:

остатък 0: 1330, 5950

остатък 1: 3970, 8590

остатък 2: 1990, 6610

остатък 3: 4630, 9250

остатък 4: 2650, 7270

остатък 5: 5290, 9910

остатък 6: 3310, 7930

Сборът на две числа се дели на 7, ако остатъците им при деление на 7 са 0 и 0, или 1 и 6, или 2 и 5, или 3 и 4. Следователно има $1 + 3 \cdot (2.2) = 13$ начина да се изберат два от тези 14 трезора със сбор, кратен на 7. За да е сигурно, че е унищожил хоркруксите, Хари трябва да направи 13 заклинания.

Задача 3. Хари Потър се возел в Ричарския автобус и забелязал, че $\frac{2}{3}$ от пътниците в автобуса са седнали, а останалите са правостоящи; при това 25% от седалките в автобуса са свободни.

На следващата спирка слезли $\frac{1}{3}$ от седящите и $\frac{2}{3}$ от правостоящите пътници, а се качили 15 магьосници, някои от които седнали. Когато автобусът потеглил, Хари забелязал, че 20% от пътниците са правостоящи.



След това автобусът спрял на Диагон Али и слезъл само Хари Потър, като отбелязал, че остават 2 пъти повече свободни места, отколкото правостоящи пътници в автобуса.

Прав или седнал е пътувал Хари Потър и колко пътници са останали в автобуса, когато той е слезъл?

Отговор. 54.

Решение. Нека седалките в автобуса са x , а в началото на пътуването имало y пътници; x и y са естествени числа.

Седналите пътници са $\frac{2}{3}y$ и са колкото заетите седалки, т.е. $\frac{3}{4}x$.
Тогава

$$\frac{2}{3}y = \frac{3}{4}x \iff 8y = 9x,$$

следователно y се дели на 9 и може да запишем $y = 9a$, където a е естествено число; оттук $x = 8a$.

Да проследим движението на пътниците. Първоначално са седнали $\frac{2}{3} \cdot 9a = 6a$ пътници, а $3a$ пътници са прави. След това са слезли $\frac{1}{3} \cdot 6a = 2a$ седнали и $\frac{2}{3} \cdot 3a = 2a$ правостоящи пътници. Останали са $4a$ седнали и a правостоящи. Качили са се 15 магьосници и нека от тях b са седнали, а c са останали прави; $b + c = 15$. От

$$20\%(5a + 15) = a + c \iff c = 3$$

следва, че преди Диагон Али е имало $4a + 12$ седнали и $a + 3$ правостоящи пътници. Свободните места в автобуса са били $8a - (4a + 12) = 4a - 12$.

Ако Хари е пътувал седнал, като е слезъл, свободните места са станали $4a - 12 + 1 = 4a - 11$ и $4a - 11 = 2(a + 3)$, което от съображения за четност е невъзможно.

Значи Хари е пътувал прав; като е слезъл, са останали $a + 2$ правостоящи и $4a - 12 = 2(a + 2) \iff a = 8$.

Когато Хари е слезъл, са останали $5a + 14 = 54$ пътници.

Задача 4. Учебната година в училището за магьосници Хогуортс завършва с три изпита: по аритмантика, геомагика и комбигурация. На изпитите се явили 2024 магьосници и всеки взел поне един изпит.

Оказало се, че всеки изпит е взет от един и същ брой магьосници. Отличниците, които са взели и трите изпита, били:

- $\frac{2}{3}$ от тези, които са взели аритмантика и геомагика;

- $\frac{3}{4}$ от тези, които са взели геомагика и комбигурация;
- $\frac{4}{5}$ от тези, които са взели аритмантика и комбигурация.



На поправителна сесия се явили $\frac{1}{2}$ от тези, които са взели само аритмантика, $\frac{1}{9}$ от тези, които са взели само геомагика и $\frac{2}{19}$ от тези, които са взели само комбигурация.

Колко магьосници се явили на поправителната сесия?

Отговор. 74

Решение. Нека всеки изпит е взет от a магьосници, а отличниците са x . Тогава тези, които са взели аритмантика и геомагика, са $\frac{3}{2}x$; тези, които са взели геомагика и комбигурация – $\frac{4}{3}x$; тези, които са взели аритмантика и комбигурация – $\frac{5}{4}x$. Следователно x се дели на $\text{НОК}(2, 3, 4) = 12$ и може да запишем $x = 12k$, където k е естествено число. Броят на тези, които са взели аритмантика и геомагика, става $\frac{3}{2} \cdot 12k = 18k$; тези, които са взели геомагика и комбигурация – $\frac{4}{3} \cdot 12k = 16k$; тези, които са взели аритмантика и комбигурация – $\frac{5}{4} \cdot 12k = 15k$. Получаваме

$$2024 = 3a - (18k + 16k + 15k) + 12k \iff 3a - 37k = 2024.$$

Тъй като $k = 1$, $a = 687$ са решения на полученото уравнение, то всички други естествени решения на уравнението са от вида

$$a = 687 + 37p, \quad k = 1 + 3p,$$

където p е естествено число.

Тези, които са взели само аритмантика, са

$$a - (18k + 15k) + 12k = a - 21k = 666 - 26p$$

и половината от тях, т.е. $333 - 13p$, са се явили на поправка.

Тези, които са взели само геомагика, са

$$a - (18k + 16k) + 12k = a - 22k = 665 - 29p$$

и $\frac{1}{9}$ от тях, т.е. $\frac{665 - 29p}{9} = 74 - 3p - \frac{2p + 1}{9}$, са се явили на поправка.

Следователно $2p + 1$ се дели на 9, т.е. $p \equiv 4 \pmod{9}$.

Тези, които са взели само комбигурация, са

$$a - (15k + 16k) + 12k = a - 19k = 668 - 20p$$

и $\frac{2}{19}$ от тях, т.е. $\frac{2(668 - 20p)}{19} = 2 \left(35 - p - \frac{p - 3}{19} \right)$, са се явили на поправка. Следователно $p - 3$ се дели на 19, т.е. $p \equiv 3 \pmod{19}$.

Остава да забележим, че тъй като $665 - 29p$ е естествено число, то естественото число p е най-много 22. Условието $p \equiv 4 \pmod{9}$ и $p \equiv 3 \pmod{19}$ са изпълнени само при $p = 22$.

И така, на поправка са се явили

$$(333 - 13 \cdot 22) + \frac{665 - 29 \cdot 22}{9} + \frac{2(668 - 20 \cdot 22)}{19} = 47 + 3 + 24 = 74$$

магьосници.

Задача 5. Тази година Разпределителната шапка изпрати в Грифиндор с 20% повече момичета, отколкото миналата година, и с 30% по-малко момчета, отколкото миналата година. Броят на новоприетите ученици в Грифиндор тази година е трицифрено число, записано с ненулеви различни цифри и огледално на броя на новоприетите ученици в Грифиндор миналата година.

Колко ученици са приети в Грифиндор тази година?

Отговор. 537 или 587.

Решение. Броят на приетите миналата година момичета се дели на 5; нека е $5a$. Тази година са приети $6a$ момичета.

Броят на приетите миналата година момчета се дели на 10; нека е $10b$. Тази година са приети $7b$ момчета.

Ако тази година са приети $\overline{xyz}$ ученици, миналата година са приети $\overline{zyx}$. Получаваме

$$5a + 10b = \overline{zyx}, \quad 6a + 7b = \overline{xyz}.$$

От първото равенство следва, че $\overline{zyx}$ се дели на 5, откъдето $x = 5$ (цифрата е ненулева). Тогава

$$5a + 10b = 100z + 10y + 5 \iff a + 2b = 20z + 2y + 1.$$

Като заместим във второто равенство с $a = 20z + 2y + 1 - 2b$, получаваме

$$5b = 119z + 2y - 494 = 120z - 495 + (1 + 2y - z).$$

Следователно цялото число $1 + 2y - z$ се дели на 5. Като отчетем, че цифрите 5, y и z са ненулеви и различни, получаваме следните възможности:

z	2, 7	3, 8	4, 9
y	3, 8	1, 6	4, 9

(Ако z дава остатък 1 при деление на 5, то y е 0 или 5, невъзможно.)

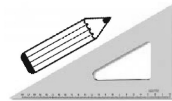
Получаваме 10 възможности за $\overline{xyz}$: 532, 582, 537, 587, 513, 563, 518, 568, 549, 594.

Може да съкратим проверките, като забележим, че $5b = 119z + 2y - 494 > 0$, т.е. $119z > 494 - 18 \iff z \geq 5$. Като изразим

$$\begin{aligned} 5a &= 100z + 10y + 5 - 10b = 100z + 10y + 5 - 2(119z + 2y - 494) \\ &= 993 + 6y - 138z > 0 \end{aligned}$$

получаваме, че $993 + 6y - 138z > 0$, следователно $138z < 993 + 6 \cdot 9$, т.е. $z \leq 7$.

Така $\overline{xyz}$ може да е само 537 или 587. (В първия случай $b = 69$, $a = 9$ и са приети 483 момчета и 54 момичета; във втория случай $b = 71$, $a = 15$ и са приети 497 момчета и 90 момичета.)



ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА УЛИЦА ДИАГОН–АЛИ

СТЕФАНКА ПЕТРОВА, ОЦ „МАТЕРИКА“, ВАРНА

За миг си представете, че сте част от голямото семейство на училището за вълшебства и магия! За съжаление стари дълго пазени тайни са разкрити и приключението Ви в света на магията може да приключи още преди да е започнало!

Улица Диагон-Али е пред вас и предизвикателствата, които се крият във всеки неин магазин, застрашават живота на всички в училището за вълшебства и магия. Дали учебната година ще започне или магичният свят ще бъде унищожен завинаги, зависи само от Вас.

Съсредоточете се, напрегнете мислите си и дайте всичко от себе си да разрешите всяко предизвикателство и приключението Ви в света на магията да продължи.

„Сладоледената къща“ на Флориан предлага сладолед и други лакомства. Хари прекарва приятни часове там, докато пише домашните си. Самият господин Фортеску му помага за училищните есета, като на всеки половин час дава на Хари безплатна мелба.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 1: *Ако Хари е изял 10 мелби, то колко време е бил престоят му в сладоледената къща?*

„Флориш и Блотс“ е книжарница, предлагаща голямо разнообразие от магически книги, включително учебниците, по които учат учениците от „Хогвортс“. В задната част на книжарницата има ъгъл, в който известният писател Гилдрой Локхарт подписва копия от книгата си „Аз, магьосникът“, за номерирането на страниците на която са използвани 2020 цифри.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 2: *Можеш ли да познаеш колко страници има книгата „Аз, магьосникът“?*

„Играчка-плачка“ е магазин за шегички и вълшебства. Тук е *Стаята на тайните*, където Хари и Хърмаяни се запасяват с фойерверките на д-р Филибъстър.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 3: В този ден, в магазина има промоция, която гласи, че за всеки осем закупени фойерверки на д-р Филибъстър, следващите три ще струват по 50 стикли. Възползвайки се от промоцията, Хари си купил 35 фойерверки за 25 галеона и 30 стикли (1 галеон = 100 стикли). Колко стикли е струвала поръчката на неговата приятелка Хърмаяни, ако тя си е купила 20 фойерверки?

Магьосническата банка „Гринготс“ е единствената известна банка в света на магьосниците. Има няколко метода за отваряне на трезорите. Повечето трезори, като този на Хари, използват специални числови кодове скрити под златни букви.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 4: Открийте числовия код, с който се отваря трезора на Хари ако: $ИИР + РИР = ХАА$, на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри. Кодът е сборът от цифрите скрити под буквите Х, А, Р, И.

„Боргин и Бъркс“ е антикварен магазин, в който се продават много опасни и тъмни артефакти като прокълнатата огърлица от опал.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 5: Колко кръгли перли от опал има между първия и 300 елемент (ако броите от ляво надясно) на огърлицата от картинката?



„Магическата менажерия“ е магазин за магически същества, в който се продават магически животни в клетки – огромни лилави жаби, котки от всякакъв цвят, гарвани, пухкавелци, dots

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 6: Общият брой на жабите и гарваните в магазина е 44. Те имат общо 110 крака. С колко жабите са по-малко от гарваните?

Магазинът за котли „Потаж“ продава различни разновидности и размери котли – медни, месингови, оловни, сребърни, саморазбъркващи се, сгъваеми и масивни златни. „Хогуортс“ изисква от своите ученици да имат оловен котел с размер 2.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 7: Рон иска да отдели 6 литра магическа течност в своя оловен котел от пълнен съд с 11 литра магическа течност, но разполага само с два медни съда от 7 литра и 4 литра. С колко най-малко преливания той може да изпълни своята цел?

Гара „Хогсмийд“ е най-близката гара до „Хогуортс“, на която всеки ден пристигат и тръгват влакове.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 8: За колко секунди ще се разминат два влака, движещи се един срещу друг, ако първият е дълъг 20 метра и се движи със 7 метра/секунда, а вторият е дълъг 24 метра и се движи с 4 метра/секунда?

Аптеката „Слъг и Джигърс“ – Стените на аптеката са запълнени с рога на еднорози и очи на черни осмокраки бръмбари. За да ги видят и преброят трябва в аптеката трябва да е светло.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 9: Влизайки в аптеката Хари натиснал ключа за лампата 2017 пъти. В момента на влизане лампата включена ли е била или изключена ?

Пощенската служба е пълна с от двеста до триста сови, вариращи от големи сиви сови до малки, които се спускат от цветно кодираните рафтове. Тези сови доставят поща на хората в света на магьосниците.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 10: На три рафта имало общо 280 накацали сови, като тези на втория били с 40 повече от тези на първия. Също така е известно, че след като 96 от совите се преместили от втория на третия рафт и 18 се преместили от третия на първия рафт, броят на совите върху първия рафт станал равен на броя на совите на третия. Колко са били първоначално совите, кацнали на третия рафт?

Магазинът за пера „Скривеншафт“ продава магьоснически канцеларски материали като пера, мастило, пергамент, пликове, печати и т.н. Хърмаяни си купува ново магично перо от този магазин.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 11: Хърмаяни решила да използва магичното перо и да реши следната магическа задача: В магазина 3 печата, 5 пера и 7 плика струват 7 галеона и 60 стикли, а за 6 печата, 6 пера и 8 плика трябва да бъдат платени 9 галеона и 20 стикли. Цената на 4 пера е с 20 стикли по-голяма от цената един плик. Колко е цената на един плик в стикли? Хърмаяни пресметнала, че един плик е с цена 60 стикли. Вашият отговор съвпада ли с нейния ?

Магазинчето за шегички „Зонко“ е магазин за шегички и трикове, които могат да „изпълнят и най-смелите мечти“.

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВО 12: В магазинчето има три стаи, в които има куче, котка и единорог. Върху вратите на трите стаи има съответно табели:

Над първата : „Вътре няма куче.“

Над втората : „Вътре няма котка.“

Над третата: „Вътре има куче.“

Ако е известно, че точно една от трите табели „казва“ истината и че във всяка от трите стаи има точно по едно животно, да се намери кое животно е в третата стая.

След приключване и на последното предизвикателство един по един магически се появиха отговорите им:

- | | |
|------------------|---------------|
| 1. 4 ч 30 мин; | 2. 710 стр; |
| 3. 1 480 стикли; | 4. 17; |
| 5. 18; | 6. 22; |
| 7. 6 преливания; | 8. 4 секунди; |
| 9. включена; | 10. 40 сови; |
| 11. 60 стикли; | 12. Котка. |



Сравнете Вашите отговори и ... да се надяваме, че учебната година в училището за магии и вълшебства ще започне.



Деление с остатък. Делител и кратно

1. Нека a е остатъкът при делението $200 : 7$,
 b е най-големият възможен остатък при деление на 7 и
 c е остатъкът при делението $2345 : 10$. Колко е $a + b + c$?
2. Делителят е 8, частното е 7, а остатъкът е 6. Колко е делимото?
3. Делимото е 888, частното е 7, а остатъкът е 6. Колко е делителят?
4. Запишете всички делители на числото 48.
Кои от тях са кратни на 3?
5. Запишете всички двуцифрени кратни на 10.
Кои от тях са делители на 100?
6. Кое е най-малкото четирицифрено число, кратно на 15?
Кое е най-голямото четирицифрено число, кратно на 15?
Колко четирицифрени числа са кратни на 15?
Колко е сборът на всички четирицифрени числа, които са кратни на 15?

Делимост на сбор и произведение. Признаци за делимост. Разлагане на прости множители. НОД

Верният отговор на задачи 1. – 6. носи по 5 точки.

1. Коя цифра трябва да поставя на мястото на a в числото $\overline{1234a}$, за да получа число, което се дели на 3, но не се дели на 2?
А) 8 Б) 5 В) 3 Г) 2
2. Колко е разликата на най-голямото трицифрено число, записано с различни цифри, което се дели на 5, и най-малкото трицифрено число, записано с различни цифри, което се дели на 9?
А) 859 Б) 887 В) 883 Г) 877

3. Колко е сборът на делителите на 36, които са кратни на 6?
 А) 48 Б) 36 В) 72 Г) 60
4. Разликата на НОК(18, 16) и НОК(14, 12) е равна на:
 А) НОК(10, 12) Б) НОК(10, 14) В) НОК(10, 16) Г) НОК(10, 18)
5. Квадрат може да се покрие както с квадратни плочки със страна 24 см, така и с квадратни плочки със страна 30 см. Най-малко колко сантиметра е страната на квадратния под?
 А) 90 Б) 120 В) 240 Г) 360
6. Правоъгълник с размери 280 см и 385 см е покрит с еднакви квадратни плочки. Най-много колко сантиметра е страната на една плочка?
 А) 5 Б) 15 В) 25 Г) 35

Верният числов отговор на задачи 7. – 10. носи по 10 точки.

7. Колко е стойността на израза $(55 \cdot 89) : 11 + (3648 + 9624) : 12$?
8. Намислих естествени числа a , b , c и пресметнах $K = 2 \cdot a + 66$, $L = 5 \cdot b + 75$, $M = 3 \cdot c + 12$. Числата K , L , M , в някакъв ред, са равни на 300, 140 и 355. Колко е $a + b + c$?
9. Ако $a \cdot a = 5625$ и $b \cdot b \cdot b = 1728$, намерете $\text{НОК}(a, b) : \text{НОД}(a, b)$.
10. Колко е сборът на всички числа от вида $\overline{a2024b}$, които се делят на 5 и на 9?

Пълното решение на задачи 11. и 12. носи по 15 точки.

11. Баба набрала 61 ябълки и 50 круши. Тя разпределила и ябълките, и крушите поравно на внуците си, като оставила за себе си само една ябълка и две круши. Най-много колко са внуците и какви плодове е получил всеки внук в този случай?
12. Дядо набрал равен брой ябълки и круши. Ябълките подредил по 60 в кашон, а крушите – по 48 в кашон, след което за него останали 3 ябълки и 3 круши. Най-малко колко ябълки и колко круши е набрал дядо?

Допълнителна задача. (10 точки) Сборът на девет последователни числа е между 1100 и 1110. Намерете сбора на всички делители на най-малкото от тези числа.



ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

1. Намерете $x - y$, ако $\frac{4}{15} - x = -3,2 - (6,3 - 7,1)$ и $y - 3\frac{1}{3} = -9\frac{1}{9}$.

2. Пресметнете $b : a$, където

$$a = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{17}{35}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \frac{70}{34}, \quad b = 7,28 \cdot (-33,76) - 7,28 \cdot 66,24.$$

3. Точката A върху числовата ос се получава, като се преместим от -9 с 2 единици наляво, а точката B се получава, като се преместим от -4 с 2 единици надясно. Определете координатите на средата на отсечката AB .

4. Ако $|x| = 3$, $|y| = 13$ и $x + y = -10$, колко е $x - y$?

5. Даден е изразът $y = x - 3 + (-2 - x) - (1 - x)$.

а) Опростете израза.

б) Намерете стойността на y , за която $x = -3,5$.

в) Намерете стойността на x , за която $y = -5,3$.

6. Пресметнете $a + b \cdot (c - 6d)$, където $a = -8 - 5 \cdot (-3)$, $b = 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 7$

$$c = -8 \cdot 3 + 5 \cdot (-2), \quad d = -5 \cdot (-1,2) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$$

7. Опростете израза:

а) $11(2a - 1) - 9(3a - 2)$ и пресметнете стойността му при $a = -1,8$;

б) $2(x - 8) - 3(x - 3)$ и пресметнете стойността му при $x = -7,8$;

в) $5(x - 9) - 4(x - 5)$ и пресметнете стойността му при $x = 7,8$;

г) $5(a - 2b) - 2(2a - b)$ и пресметнете стойността му при $a = -1,5$, $b = 3,2$;

д) $7(a - 2b + 1) - (5a - 9b + 7)$ и пресметнете стойността му при $a = 0,05$ и $b = 0,02$.

8. Опростете израза $M = 2(3x - 5) - 3(5 - 2x)$ и пресметнете стойността му при $x = -\frac{2}{15} \cdot \frac{5}{8} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{6}$.

9. Намерете неизвестното число:

а) $-(x - 9) - 2(x + 3) = 6$

б) $12(x + 5) - 7(6 - 2x) + 4(x - 3) = -9$

в) $2\frac{1}{3}x - 2\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{-5 \cdot (-4) + 8}{-8}$

г) $\frac{-128 \cdot 2,05 - 72 \cdot 2,05}{3 - 2(2 - x)} = \frac{-2 + 3 \cdot (-1)}{(-2 + 3) \cdot (-1)}$

10. Дадени са равенствата $\left(x - \frac{2}{3}\right) + 2\frac{5}{6} = -5\frac{1}{3}$ и $-7,2 - (y - 3,2) = 2$.

а) Намерете x и y .

б) Колко е сборът на всички цели числа, които са по-големи от $x + y$ и по-малки от $|x - y|$?

11. Решете уравненията и пресметнете $x + y + z$, ако

$$7 - 3 : x = -2 - 3 \cdot (-5) \quad 6 + y \cdot (-0,2) = -0,2 \quad z : (-5) - 0,1 = 1,3.$$

12. Ако $2(3 - a) + 3(2 - a) = 20$, намерете a и стойностите на x , за които $|x| = 4 - a$.

Действия с рационални числа. Примерен тест

Верният отговор на задачи 1. – 6. носи по 5 точки.

1. Стойността на израза $-3 - 4 \cdot (-5)$ е равна на:

А) 17 Б) 35 В) -23 Г) -35

2. Колко е $a \cdot b$, където a е най-голямото цяло число, по-малко от $-5,3$, а b е най-малкото цяло число, по-голямо от $-3,5$?

А) -20 Б) -24 В) 18 Г) 15

3. Колко е произведението на всички цели числа x , за които $1 < |x| < 4$?

А) 36 Б) -12 В) 6 Г) -9

4. Ако $a = 5 \cdot (-4) - 12 : (-2)$ и $b = 1,6 - 0,9 - 2,7$, колко е $a : b$?
 А) 7 Б) 13 В) 70 Г) -130
5. Ако $x : (-0,2) = 8$ и $5y - 9 = -21$, колко е $x + y$?
 А) -42,4 Б) -7,6 В) 4,4 Г) -4
6. Като се опрости изразът $2(3 - 4a) - 3(5a - 7)$, се получава:
 А) $-23a - 15$ Б) $-7a - 15$ В) $16 - 19a$ Г) $27 - 23a$

Верният числов отговор на задачи 7. – 10. носи по 10 точки.

7. Написах пет числа, първото, от които е 16, а всяко следващо да се получава, като предходното се раздели на -2 . Сбора на първото и шестото разделете на сбора на второто, третото, четвъртото и петото число.
8. Колко е x , ако $\left(1\frac{1}{3} - 2x\right) : \left(-\frac{5}{13}\right) = 4\frac{1}{3}$?
9. На колко е равно $5,04 \cdot (-2) - 34 \cdot |1 - 6,04| - 64 \cdot 5,04$?
10. Колко е стойността на $3(x + 2) - 2(x - 2) - (2x + 1)$ при $x = -3,2$?

Пълното решение на задачи 11. и 12. носи по 15 точки.

11. Пресметнете $\frac{a + b}{a - b}$, където

$$a = \frac{-4 \cdot 21 \cdot (-25)}{10 \cdot (-7)}, \quad b = -2 \cdot 3\frac{1}{4} - 32 : \left(-21\frac{1}{3}\right).$$

12. Даден е изразът $y = 12(x - 5) - 7(6 - 2x) + 4x$.

- а) Опростете израза.
 б) Намерете стойността на y при $x = 3$.
 в) Намерете стойността на x , за която $y = 3$.

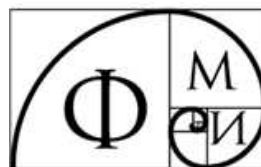
Допълнителна задача. Алтернативната сума на цифрите на едно число се получава от сумата на цифрите му, като се сменят знаците: първата цифра е със знак $+$, а знакът на всяка следваща е противоположен на знака на предишната цифра. Например, алтернативната сума на 123 е $1 - 2 + 3 = 2$, а на 162 е $1 - 6 + 2 = -3$.

Арсений пресметнал алтернативната сума на всяко трицифрено число.

Колко е сборът на 900-те алтернативни суми, които е пресметнал той?



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Бакалавърската програма „**Приложна математика**“ подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научно-изследователски проекти и други.

2. В бакалавърската програма „**Компютърни науки**“ се подготвят специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цветознание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

СТРАННО СОРТИРАНЕ, ИЛИ КОГАТО ИНВАРИАНТИТЕ САМО ПРЕЧАТ, <i>Д. Грозев</i>	3
ЗА СОЗОПОЛ 2024, <i>М. Маринов</i>	6
БРОЕНЕ НА ПЕРМУТАЦИИ, <i>С. Чобанов</i>	14
СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, 2024, <i>Е. Колев</i>	29
СЪСТЕЗАТЕЛНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ, <i>Н. Събева</i>	40
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА ЗА 5. – 7. КЛАС, <i>Н. Събева</i>	49
МАРШРУТИТЕ НА МРАВКАТА	53
ПО ПЪТЯ, <i>Н. Събева</i>	55
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	59
ХАРИ ПОТЪР НА 13. ФЕСТИВАЛ В СОЗОПОЛ, <i>Н. Събева</i>	63
ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА УЛИЦА ДИАГОН–АЛИ, <i>С. Петрова</i> ..	69
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ	73
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ	75

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230

1113 София

тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169

e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.

Дадена за печат на 28.11.2024 г.

Печат „Фастумпринт“ ЕООД

Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.