Министерство на образованието и науката

72. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12. февруари 2023 г.

ТЕМА ЗА 4. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Намерете числата a, b и c от равенствата

$$2023 : (202\,.\,3 - a) = 2 + 0 + 2 + 3,$$

$$b = (7\,.\,987 - 987\,.\,6) : (2013 : 3 - 2004 : 3),$$

$c = 6789 - 789\,.\,d$, където

$$d = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) : (15 - 13 + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1).$$

Числата a, b и c в някакъв ред са номерата на стаите на Иван, Петър и Стоян. Номерата на стаите на Иван и Петър имат равни цифри на стотиците, а номерата на стаите на Иван и Стоян имат различни цифри на единиците. Намерете номерата на стаите на Иван, Петър и Стоян.

Решение. Имаме

$$2023 : (202\ .\ 3 - a) = 2 + 0 + 2 + 3, \quad 606 - a = 2023 : 7, \quad 606 - a = 289,$$

$$a = 606 - 289 = 317 \quad \text{(2 точки)}$$

$$b = (7\,.\,987 - 987\,.\,6) : (2013 : 3 - 2004 : 3) = [987\,.\,(7 - 6)] : [(2013 - 2004) : 3]$$
$$= 987 : (9 : 3) = 987 : 3 = 329 \quad \text{(2 точки)}$$

$$d = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) : (15 - 13 + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1) =$$
$$= (4\,.\,16) : (4\,.\,2) = 8, \qquad \text{(1 точка)},$$

$$c = 6789 - 789\,.\,8 = 6789 - 6312 = 477. \qquad \text{(1 точка)}$$

Номерата на стаите са 317, 329 и 477. Номерата на стаите на Иван и Петър имат равни цифри на стотиците и са 317 и 329. Следователно стаята на Стоян е 477. Номерът на стаята на Иван и 477 имат различни цифри на единиците. Следователно стаята на Иван е 329.

Номерът на стаята на Иван е 329, на Петър е 317, а на Стоян е 477. (1 точка)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 2. В имението на Гарфийлд живеят общо 100 животни – бели, черни и пъстри котки и бели, черни и пъстри кокошки. Белите животни имат общо 33 глави и 102 крака.

Третината от кокошките са бели. Третината от черните животни са кокошки. Черните котки са със 7 повече от пъстрите котки.

а) Колко са котките във фермата?

б) Колко пъстри животни (котки и кокошки) има във фермата?

в) Може ли Гарфийлд да настани всички кокошки в клетки по пет така, че във всяка клетка да има най-много две бели, най-много две черни и най-много две пъстри кокошки? Обяснете своя отговор.

Решение. а) Белите животни са с 33 глави. Ако са 33 кокошки, ще имат $33 \,.\, 2 = 66$ крака. Краката са със $102 - 66 = 36$ повече. Следователно $36 : 2 = 18$ от белите животни са котки. Белите кокошки са $33 - 18 = 15$. Те са третината от всички кокошки и следователно кокошките са $15 \,.\, 3 = 45$. Котките са $100 - 45 = 55$.

(3 точки)

б) Белите котки са 18, черните котки са със 7 повече от пъстрите котки, а всички котки са 55. Следователно пъстрите котки са $(55 - 18 - 7) : 2 = 15$, а черните котки са $15 + 7 = 22$. (1,5 точки)

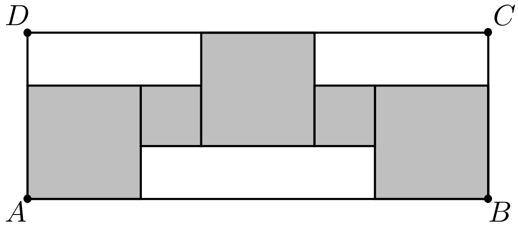
Тъй като третината от черните животни са кокошки, тези 22 черни котки са две третини от черните животни. Следователно черните кокошки са $22 : 2 = 11$, черните животни са общо 33 и пъстрите животни са общо $100 - (33 + 33) = 34$. (1,5 точки)

в) Кокошките са 45 и за да се настанят по 5 в клетка са нужни $45 : 5 = 9$ клетки. Пъстрите кокошки са $45 - (11 + 15) = 19$. Ако във всяка клетка има най-много по две пъстри кокошки, ще се настанят най-много $9 \,.\, 2 = 18$ пъстри кокошки. Следователно Гарфийлд не може да настани кокошките по желания начин. (1 точка)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

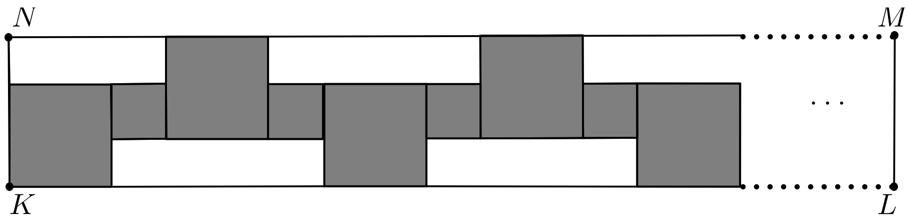
При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 3. Правоъгълникът $ABCD$ има страна $AB = 74$ см, която е с 48 см по-голяма от страната AD. В правоъгълника са поставени три еднакви квадрата със страна a см и два по-малки квадрата със страна b см, както е показано на чертежа.



а) Намерете a и b.

б) Намерете обиколката на правоъгълника $KLMN$, в който по показания начин са поставени общо 2023 квадрата със страни съответно a см и b см.



Решение. а) Намираме $AD = 74 - 48 = 26$ см. Имаме

$$3.a + 2.b = 74 \quad \text{и} \quad 2.a - b = 26.$$

Като удвоим последното равенство, получаваме

$$4.a - 2.b = 52.$$

Следователно

$$3.a + 2.b + 4.a - 2.b = 74 + 52,$$

т.е. $7.a = 126$ и намираме $a = 18$ см. Следователно $b = (74 - 3\,.\,18) : 2 = 10$ см. (3 точки)

б) Както в а), $KN = 18 + (18 - 10) = 26$ см. Отляво надясно се редуват квадрат със страна 18 см и квадрат със страна 10 см. Тъй като $2023 : 2 = 1011$ (ост. 1), то в редицата има 1012 квадрата със страна 18 см и 1011 квадрата със страна 10 см. Намираме

$$KL = 1012\,.\,18 + 1011\,.\,10 = 1012\,.\,10 + 1012\,.\,8 + 10\,110 = 28\,326 \text{ см.}$$

Тогава $P_{KLMN} = 2\,.\,(28\,326 + 26) = 56\,704$ см. (4 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 5. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Числото x е такова, че

$$20 : (1 - 3 : x) = 20\frac{1}{3}.$$

Естественото число y е най-малкото кратно на 7, което при деление на 8 дава остатък 5, а при деление на 9 дава остатък 6.

Ако $(a \triangle b) = a\,.\,b + 3\,.\,a$, числото z е такова, че $\left(\frac{1}{4} \triangle z\right) = 5$.

Намерете стойността на израза

$$z\,.\,y : \left(x - \frac{x+y}{3}\right).$$

Решение. Имаме $1 - 3 : x = 20 : 20\frac{1}{3}$, $\quad 1 - 3 : x = \frac{60}{61}$,
$3 : x = 1 - \frac{60}{61}$, $\quad 3 : x = \frac{1}{61}$, $\quad x = 3 : \frac{1}{61}$, $\quad x = 183$.

(2 точки)

Естественото число $y+3$ е общо кратно на 8 и на 9, т.е число от редицата $72,\ 144,\ 216, 288, 360, \ldots$ За y получаваме $69,\ 141,\ 213, 285, 357\ldots$ Най-малкото число от последната редица, което се дели на 7, е 357.

(2 точки)

За z получаваме $\frac{1}{4} \cdot z + 3 \cdot \frac{1}{4} = 5$, $\quad \frac{1}{4} \cdot z = 4\frac{1}{4}$, $\quad z = 17$.

(2 точки)

Накрая пресмятаме

$$17\,.\,357 : \left(183 - \frac{183+357}{3}\right) = 17\,.\,357 : (183 - 180) = 17\,.\,119 = 2023.$$

(1 точка)

Забележка. При намиране на y е възможно следното разсъждение. Тъй като $y+3$ е кратно на НОК(8, 9) = 72, то $y+3 = 72\,.\,n$. Следователно

$$y = 72\,.\,n - 3 = 70\,.\,n + (2\,.\,n - 3).$$

Това означава, че y се дели на 7, точно когато разликата на $2\,.\,n$ и 3 се дели на 7. С непосредствена проверка за $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ намираме, че най-малкото такова число е $n = 5$. Следователно $y = 72\,.\,5 - 3 = 357$.

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 2. Пиратите Джак и Бил намерили сандък със златни монети. Джак предложил:

– Днес аз ще взема $\dfrac{1}{3}$ от монетите и ти ще вземеш $\dfrac{1}{4}$ от монетите в сандъка. От останалите монети в сандъка утре ти ще вземеш $\dfrac{1}{3}$ и аз ще взема $\dfrac{1}{4}$. Каквото остане след това, ще го делим поравно.

След известен размисъл, Бил отговорил:

– Ще се съглася, ако след като разделим останалите монети поравно, ти ми дадеш още 77 монети от твоите. Тогава ще имаме равен брой монети.

Ако пиратите са смятали вярно, колко монети е имало в съкровището?

Решение. Според предложението на Джак, той ще вземе

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12}=\frac{7}{16}$$

от монетите в сандъка и половината от останалите след второто раздаване. (2 точки)

Бил ще вземе $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{18}$ от монетите в сандъка и половината от останалите след второто раздаване. (2 точки)

Така Джак ще получи $\dfrac{7}{16}-\dfrac{7}{18}=\dfrac{7}{144}$ от монетите повече, отколкото Бил. (1 точка)

Ако Джак даде на Бил 77 монети, те ще имат равен брой монети. Следователно Джак е имал $2\,.\,77=154$ монети повече от Бил. (1 точка)

Получаваме, че

$$\frac{7}{144}\,.\,x=154,$$

където x е броят на монетите в сандъка.

Следователно $x=154:\dfrac{7}{144}=3168$. (1 точка)

Забележка. Възможен е следният подход в първата част от решението.

	Джак	Бил	Остават
Днес	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$
Утре	$\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{48}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$
Накрая	$\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{144}=\frac{25}{288}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{144}=\frac{25}{288}$	0
Общо	$\frac{151}{288}$	$\frac{137}{288}$	

Така Джак ще получи $\frac{151}{288}-\frac{137}{288}=\frac{14}{288}=\frac{7}{144}$ от монетите повече, отколкото Бил. По-нататък се продължава както в предишното решение.

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 3. Иван решил всеки понеделник да слага в касичката си по 7 лв., а ако забрави, тогава в сряда да слага 17 лв. След N седмици той събрал в касичката 2023 лева.

а) Ако N е повече от 170, но по-малко от 180, колко пъти Иван е забравил да сложи пари в понеделник?

б) Намерете всички възможни стойности на N.

Решение. а) Нека с m означим броя на понеделниците, в които Иван е сложил по 7 лева, а с n броя на седмиците, в които е сложил по 17 лв. Събраната сума ще е

$$7m+17n=2023. \qquad \text{(1 точка)}$$

Имаме $2023=7.17.17$. Тъй като 17 дели 2023 и $17n$, то 17 дели $7m$. Числата 17 и 7 са взаимнопрости, следователно m се дели на 17. Тъй като 7 дели 2023 и $7m$, то 7 дели $17n$. Числата 17 и 7 са взаимнопрости, следователно n се дели на 7. (1 точка)

Следователно $m=17k$, а $n=7p$, където k и p са естествени числа. Получаваме $7\,.\,17k+17\,.\,7p=7\,.\,17\,.\,17$, т.е.

$$k+p=17. \qquad \text{(1 точка)}$$

За броя на седмиците $N = m + n$ получаваме

$N = m+n = 17k+7p = 10k+7.(k+p) = 10k+7.17 = 10k+119.$ (1 точка)

Тогава от условието, че N е между 170 и 180 следва, че $k = 6$. Тогава $p = 11$. (1 точка)

Така Иван е слагал пари в касичката си общо $17\,.\,6 + 7\,.\,11 = 179$ седмици. Забравил е 77 пъти да сложи пари в понеделник. (1 точка)

б) Диофантовото уравнение $k+p = 17$ от а) има 18 решения и на всяко от тях съответства различна стойност на $N = 17k + 7p = 10k + 119$. (1 точка)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	119	129	139	149	159	169	179	189	199

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
N	209	219	229	239	249	259	269	279	289

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 6. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Зад буквите Л и А са скрити две различни цифри. Открийте ги, като решите ребуса

$$\left(\left(\left(2023^{\text{ЛА}}\right)^{\text{Л}}\right)^{\text{А}}\right)^{\text{ЛА}} = 2023^{2023}.$$

Намерете цифрата на единиците на сбора

$$\text{ЛА}^0+\text{Л}^1+\text{А}^2+\text{ЛА}^3+\text{ЛА}^4+\text{Л}^5+\text{А}^6+\text{ЛА}^7+\text{ЛА}^8+\text{Л}^9+\text{А}^{10}+\dots+\text{ЛА}^{2023}.$$

Решение. От даденото равенство следва, че

$$2023^{\text{ЛА}\cdot\text{Л}\cdot\text{А}\cdot\text{ЛА}} = 2023^{2023}.$$

Следователно

$$\text{ЛА}\cdot\text{Л}\cdot\text{А}\cdot\text{ЛА} = 2023 \iff \text{ЛА}^2\cdot\text{Л}\cdot\text{А} = 2023. \quad \text{(1 точка)}$$

Разлагаме 2023 на прости множители и получаваме, че $2023 = 17^2.7$. Съобразяваме, че четвъртият множител може да е само 1 и откриваме решението

$$\text{Л} = 1,\ \text{А} = 7. \quad \text{(1 точка)}$$

В сбора

$$\text{ЛА}^0+\text{Л}^1+\text{А}^2+\text{ЛА}^3+\text{ЛА}^4+\text{Л}^5+\text{А}^6+\text{ЛА}^7+\text{ЛА}^8+\text{Л}^9+\text{А}^{10}+\dots+\text{ЛА}^{2023},$$

чиято последна цифра търсим, има 2024 събираеми, чиито основи на степените се редуват през 4, т.е. има $2024 : 4 = 506$ групи от степени с повтарящи се основи (ЛА, Л, А, ЛА), т.е. $(17, 1, 7, 17)$. Тъй като търсим последна цифра при повдигане на степен, може да имаме предвид само последната цифра на всяка основа и да разсъждаваме, все едно има 506 групи с повтарящи се основи $(7, 1, 7, 7)$. (2 точки)

Ясно е, че второто число от всяка група, повдигнато на произволна степен, завършва на 1.

Остава да разгледаме периодичността на последните цифри на степените на седмицата.

Степен на 7	7^0	7^1	7^2	7^3	7^4
Последна цифра	1	7	9	3	1

Следователно в групите $(7^{4k}, 1^{4k+1}, 7^{4k+2}, 7^{4k+3})$ се повтарят последните цифри $(1, 1, 9, 3)$. (1 точка)

Значи сборът на всяка група от 4 степени завършва със същата последна цифра, като на $1 + 1 + 9 + 3 = 14$, а имаме 506 сбора. Тъй като $506.4 = 2024$, последната цифра на голямата сума е 4. (2 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 2. В равнобедрен триъгълник ABC $(AC = BC)$ височината CH разделя основата AB на две равни части $(AH = BH)$. Дадено е, че $AB = 14$ cm, а $CH = 24$ cm.

а) Да се намери сборът на трите височини в триъгълника.

б) Да се определи на какво разстояние от точката C се намират всички точки P от правата CH, за които

$$2 \cdot S_{APB} = S_{APC} + S_{BPC}.$$

Решение. а) Имаме $AH = BH = \dfrac{1}{2} \cdot AB = 7$ cm. По питагоровата теорема за правоъгълния триъгълник AHC намираме хипотенузата

$$AC^2 = AH^2 + BH^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2,$$

Следователно $AC = 25$ cm и $BC = 25$ cm. (1 точка)

Нека дължината на височината в триъгълника през върха A означим с h_a, а през върха B с h_b. Лицето на $\triangle ABC$ изразяваме по три начина:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_c,$$

откъдето

$$AC \cdot h_b = BC \cdot h_a = AB \cdot h_c = 14 \cdot 24 = 336$$

и намираме $h_a = h_b = 336 : 25 = 13,44$ cm. Значи

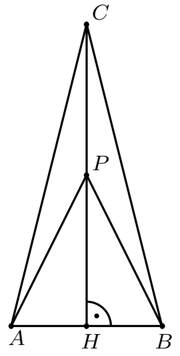
$$h_a + h_b + h_c = 2 \cdot 13,44 + 24 = 50,88 \text{ cm}.$$

(1 точка)

б) Щом точката P лежи на правата CH, то $PH \perp AB$, значи PH е височина в APB и $S_{APB} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot PH$. (0,5 точки)

1 случай. Нека P е между C и H. Тогава

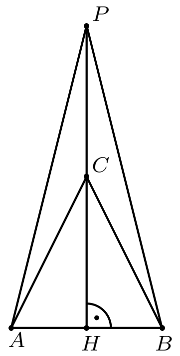
$S_{ABC} = S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC} = S_{ABP}+2\cdot S_{ABP} = 3\cdot S_{ABP}$.



Следователно

$$\frac{1}{2}\cdot CH\cdot AB = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot PH\cdot AB,$$

откъдето $CH = 3\cdot PH$, т.е. $PH = 8$ cm и намираме $CP = 16$ cm. (2 точки)



2 случай. Нека C е между P и H. В този случай $S_{ABP} > S_{APC} + S_{BPC}$, така че условието и $2\cdot S_{ABP} = S_{APC} + S_{BPC}$ не може да бъде изпълнено.

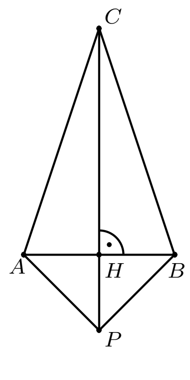
(0,5 точки)

3 случай. Нека H е между C и P. Имаме

$$S_{ABC} + S_{ABP} = S_{APC} + S_{BPC},$$

$$S_{ABC} + S_{ABP} = 2\cdot S_{ABP},$$

$$S_{ABC} = S_{ABP}.$$



Триъгълниците ABC и ABP имат обща основа AB, следователно височините им към нея са равни, т.е. $CH = PH$ и $CP = 2\cdot CH = 48$ cm.

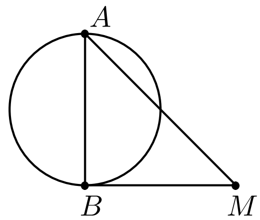
(2 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 3. В близост до училището на Антони и Вера има кръгова писта за бягане. Двамата отишли да бягат, като започнали и завършили тренировката едновременно. Всеки направил няколко пълни обиколки – Антони направил 10 обиколки, а Вера – по-малко от 10, но повече от 5 обиколки.

На чертежа са изобразени диаметърът AB на окръжността, ограждаща пистата, и училището M. Известно е, че отсечките AB и BM са перпендикулярни, $AB = 105$ m и $BM = 140$ m.



Антони стартирал от точка A, а Вера – от точка B. По време на бягането се случило така, че два пъти двамата се намирали едновременно в B, а един път (но не в началото и не в края на тренировката) пак едновременно Антони бил в A, а Вера – в B.

Антони бягал така, че изминавал 3 km за 16 min.

а) Намерете колко обиколки е направила Вера.

б) Намерете скоростта на Антони и скоростта на Вера в m/s.

в) Веднага след приключване на тренировката, всеки със своята скорост побягнал към училището. Кой по-бързо е пристигнал в M: Антони, който бягал по отсечката AM, или Вера, която е трябвало да пробяга отсечката BM?

Решение. Първо да отбележим, че посоката на тичане по пистата не е от значение.

а) Антони и Вера бягали с постоянни скорости в кръг. Това означава, че след първото им заставане в началните позиции (след тръгването), тази позиция ще се повтаря периодично през същия брой обиколки. Това се е случило в момента, в който Антони завършил десетата си обиколка, и веднъж преди това, по време на движението им. Следователно Антони е завършил петата си обиколка в момента, в който Вера е завършила половината от своите обиколки. (1 точка)

Това означава, че обиколките, които е направила Вера, са четно число и тъй като са между 5 и 10, те са 6 или 8. (0,5 точки)

За да проверим, дали двамата са се срещнали два пъти в точка B, трябва да проверим дали се случва два пъти Антони да е направил цяло число обиколки и още половин обиколка за времето, за което Вера е направила цяло число обиколки.

Да приемем, че обиколките на Вера са 6. В момента, в който Вера е направила n обиколки, са минали $\dfrac{n}{6}$ от времето за тренировката ѝ и Антони е направил $10 \cdot \dfrac{n}{6} = \dfrac{5}{3} \cdot n$ обиколки.

Записваме в таблица броя на обиколките на Вера и съответния им брой на обиколките на Антони.

Обиколки на Вера	1	2	3	4	5	6
Обиколки на Антони	$1\dfrac{2}{3}$	$3\dfrac{1}{3}$	5	$6\dfrac{2}{3}$	$8\dfrac{1}{3}$	10

В този случай няма момент, в който Антони да е направил цяло число обиколки и още половин обиколка за времето, за което Вера е направила цяло число обиколки.

Ако обиколките на Вера са 8, в момента, в който Вера е направила n обиколки, Антони е направил $10 \cdot \dfrac{n}{8} = \dfrac{5}{4} \cdot n$ обиколки.

Записваме в таблица броя на обиколките на Вера и съответния им брой на обиколките на Антони.

Обиколки на Вера	1	2	3	4	5	6	7	8
Обиколки на Антони	$1\dfrac{1}{4}$	$2\dfrac{1}{2}$	$3\dfrac{3}{4}$	5	$6\dfrac{1}{4}$	$7\dfrac{1}{2}$	$8\dfrac{3}{4}$	10

Двамата са били два пъти едновременно в точка B – в края на втората и в края на шестата обиколка на Вера. Значи Вера е направила 8 обиколки.

(1,5 точки)

Второ решение на а). Нека Вера е направила n обиколки (n е 6, 7, 8 или 9). Отношението на скоростите на Антони и Вера е $10 : n$.

Когато двамата се намирали едновременно в B, Вера е направила b обиколки, а Антони $a + \dfrac{1}{2}$ обиколки, където $a < 10$ и $b < n$ са естествени числа. Тъй като отношението на пътищата е равно на отношението на скоростите, получаваме

$$\left(a + \frac{1}{2}\right) : b = 10 : n \iff 20b = (2a + 1)n.$$

Тъй като n дели $20b$ и $b < n$, то n не е 7 и не е 9. Следователно n е 6 или 8.

Ако $n = 6$, то b се дели на 3 и е по-малко от 6, т.е. b може да е само 3, но равенството $20.3 = (2a + 1).6$ не води до естествено решение за a.

Следователно $n = 8$. Наистина, равенството $20b = 8(2a+1)$ е изпълнено в два момента: при $a = 2$, $b = 2$ и при $b = 6$, $a = 7$.

Забележка. Това разсъждение не използва условието, че един път по време на бягането едновременно Антони бил в A, а Вера – в B.

Трето решение на а). Нека Вера е направила n обиколки (n е 6, 7, 8 ли 9). Отношението на скоростите на Антони и Вера е $10 : n$.

Нека по време на бягането, когато едновременно Антони бил в A, а Вера – в B, Вера е направила b обиколки, а Антони a обиколки, където $a < 10$ и $b < n$ са естествени числа. Тъй като отношението на пътищата е равно на отношението на скоростите, получаваме

$$a : b = 10 : n \iff 10b = an.$$

Тъй като n дели $10b$ и $b < n$, то n не е 7 и не е 9. Следователно n е 6 или 8.

Ако $n = 6$, то b се дели на 3 и е по-малко от 6, т.е. b може да е само 3 и тогава $a = 5$. Остава да проверим дали два пъти по време на бягането може двамата да са се намирали едновременно в B. Но

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) : m = 10 : 6 \iff 10m = 3(2k + 1).$$

Следователно m се дели на 3 и е по-малко от 6, т.е. $m = 3$. Но равенството $10 = 2k + 1$ не води до естествено решение за k.

Следователно n може да е само 8.

б) Скоростта на Антони е била $V_A = 3000 : (16.60) = \dfrac{25}{8} = 3{,}125$ m/s.

(0,5 точки)

Вера изминала 8 обиколки за времето, за което Антони изминал 10, следователно нейната скорост е била $V_B = \dfrac{8}{10} \cdot V_A = \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{25}{8} = 2{,}5$ m/s.

(1,5 точки)

в) След като двамата приключили бягането по пистата, за да стигнат до училище, Антони трябвало да пробяга отсечката AM, а Вера – отсечката BM, като двамата тръгнали по едно и също време.

По питагоровата теорема намираме хипотенузата AM правоъгълния триъгълник AMC.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 105^2 + 140^2 = (35.3)^2 + (35.4)^2 =$$
$$= 35^2.(3^2 + 4^2) = (35\,.\,5)^2 = 175^2.$$

Следователно $AM = 175$ m. (0,5 точки)

Антони пробягал разстоянието на AM за $175 : \dfrac{25}{8} = 56$ s. (0,5 точки)

Вера пробягала отсечката $BM = 140$ m за $140 : 2,5 = 56$ s. (0,5 точки)

Това означава, че двамата са пристигнали в училище едновременно.

(0,5 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Дадени са естествените числа a, b, c и d, за които е вярно равенството

$$b(c^2 - ad) + c(b^2 - ad) = 0.$$

Докажете, че произведението на числата a, b, c и d е квадрат на естествено число.

б) Разложете многочлена $x^3(x^2-13)^2 - 144x$ на множители от първа степен.

Решение. а) Последователно получаваме

$$b(c^2-ad)+c(b^2-ad) = 0 \iff bc^2-abd+cb^2-acd = 0 \iff (b+c)(bc-ad) = 0.$$

(1 точка)

Тъй като числата са естествени, то $b+c \neq 0$ и следователно $bc-ad = 0$, т.е. $ad = bc$. Тогава $abcd = adbc = (ad)^2 = (bc)^2$. (1 точка)

б) Последователно получаваме

$$\begin{aligned} x^3(x^2-13)^2 - 144x &= = x(x^2(x^2-13)^2 - 12^2) = x((x^3-13x)^2 - 12^2) = \\ &= x(x^3-13x-12)(x^3-13x+12). \end{aligned}$$

От (1,5 точки)

$$\begin{aligned} x^3-13x-12 &= x^3-x-12x-12 = x(x^2-1)-12(x+1) = \\ &= x(x-1)(x+1)-12(x+1) = (x+1)(x^2-x-12) = \\ &= (x+1)(x^2-4x+3x-12) = (x+1)(x(x-4)+3(x-4)) = \\ &= (x+1)(x-4)(x+3), \end{aligned}$$

(1,5 точки)

$$\begin{aligned} x^3-13x+12 &= x^3-x-12x+12 = x(x^2-1)-12(x-1) = \\ &= x(x-1)(x+1)-12(x-1) = (x-1)(x^2+x-12) = \\ &= (x-1)(x^2+4x-3x-12) = (x-1)(x(x+4)-3(x+4)) = \\ &= (x-1)(x+4)(x-3). \end{aligned}$$

(1,5 точки)

следва, че

$$x^3(x^2-13)^2 - 144x = (x+4)(x+3)(x+1)x(x-1)(x-3)(x-4).$$

(0,5 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 2. От точка A по кръгова писта в една и съща посока тръгнали едновременно автомобил и мотоциклет, всеки с постоянна скорост. Автомобилът направил две обиколки без да спира. В момента, в който автомобилът настигнал мотоциклета, мотоциклетът сменил посоката си и увеличил скоростта си с 30 km/h. Двадесет минути след смяната на посоката, автомобилът и мотоциклетът пристигнали едновременно в точка A. Целият път, който е изминал мотоциклетът, е с 20 km по-малък от дължината на кръговата писта.

а) Намерете разликата на началните скорости на автомобила и мотоциклета.

б) Намерете пътя, който е изминал мотоциклетът.

в) Намерете началните скорости на автомобила и на мотоциклета.

Решение. Да означим първоначалните скорости на автомобила и мотоциклета с V_A и V_M (в km/h).

Да означим пътя на мотоциклета от A до настигането с x км ($x > 0$). Целият път, изминат от мотоциклета, е $2x$ km. Следователно дължината на пистата е $(2x + 20)$ km.

Щом като автомобилът направил две обиколки, настигането станало преди мотоциклетистът да направи една обиколка.

За $20 \text{ min} = \dfrac{1}{3}$ h мотоциклетът е изминал x km със скорост $(V_M + 30)$ km/h, а автомобилът е изминал $(2x + 20) - x = (x + 20)$ km. От тук изразяваме скоростите им

$$V_M + 30 = x : \frac{1}{3} \iff V_M = 3x - 30, \qquad V_A = (x + 20) : \frac{1}{3} = 3x + 60.$$

а) Разликата на началните скорости е

$$V_A - V_M = (3x + 60) - (3x - 30) = 90 \text{ km/h}. \quad \text{(2 точки)}$$

б) От тръгването до настигането мотоциклетът е изминал x km, а автомобилът $2x + 20 + x = (3x + 20)$ km. Тъй като отношението на изминатите пътища е равно на отношението на скоростите, получаваме

$$\frac{V_A}{V_M} = \frac{3x + 20}{x}. \quad \text{(1 точка)}$$

Заместваме скоростите

$$\frac{3x + 60}{3x - 30} = \frac{3x + 20}{x} \quad \text{(1 точка)}$$

и от основното свойство на пропорциите получаваме

$$x(3x+60) = (3x-30)(3x+20) \Leftrightarrow 6x^2 - 90x - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 15x - 100 = 0. \quad \text{(1 точка)}$$

Тъй като

$$x^2 - 15x - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 5x - 100 = 0 \Leftrightarrow x(x-20) + 5(x-20) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-20)(x+5) = 0,$$

корените на полученото уравнение са $x = 20$ и $x = -5$, като вторият отпада, понеже е отрицателен.

Следователно $x = 20$ и мотоциклетът е изминал 40 km. (1 точка)

в) Скростите на мотоциклета и автомобила са

$$V_M = 3x - 30 = 30 \text{ km/h и } V_A = 3x + 60 = 120 \text{ km/h} \quad \text{(1 точка)}$$

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 3. Крал Артур събрал на кръгла маса 24 рицари. Всеки двама от тях са или приятели, или врагове. Всеки рицар враждува с точно 6 други рицари. Крал Артур иска да създаде бойни групи за защита на кралството, като във всяка група има по трима рицари.

Интересни наричаме тези бойни групи, в които или всеки двама рицари са приятели, или всеки двама рицари са врагове.

а) По колко различни начина крал Артур може да избере една бойна група?

б) Рицарят Ланселот направил списък на бойните групи, в които той участва с двама свои приятели или с двама свои врагове. Колко бойни групи има в списъка на Ланселот?

в) Намерете общия брой на интересните бойни групи.

Решение. а) Крал Артур избира трима рицари по следния начин. За първия рицар има 24 кандидати, за втория остават 23 възможности и за третия 22. Така се получават 24.23.22 тройки, в които рицарите са подредени (първи, втори, трети). В този брой бойната група, съставена от рицарите A, B и C, участва 6 пъти, като:

$$(A,B,C),\ (A,C,B),\ (B,A,C),\ (B,C,A),\ (C,A,B),\ (C,B,A).$$

Следователно броят на различните бойни групи е

$$\frac{24.23.22}{6} = 2024. \quad \text{(1 точка)}$$

б) Ланселот има 17 приятели и 6 врагове. Той може да избере двама приятели по $\frac{17.16}{2} = 136$ начина, а двама врагове по $\frac{6.5}{2} = 15$ начина. В неговия списък има $136 + 15 = 151$ бойни групи. (2 точки)

в) Да означим с x броя на интересните бойни групи, а с y броя на останалите бойни групи, които ще наричаме *неинтересни*. Тогава от а) следва, че

$$x + y = 2024.$$

От б) знаем, че ако всеки рицар направи списък на бойните групи, във всяка от които другите двама са или негови приятели, или негови врагове, всеки ще запише в списъка си по 151 групи.

Всяка интересна група ще е в три списъка. (1 точка)

Във всяка неинтересна група (A, B, C) има поне едно приятелство. Нека рицарите A и B са приятели. Ако C е враг на A и B, групата ще е само в списъка на C. Ако C е враг на единия, например на A, и приятел на B, групата ще е само в списъка на B. Получаваме, че всяка неинтересна група е в точно един списък. (1 точка)

Общо във всички списъци има $24.151 = 3624$ бойни групи, като всяка интересна група е в три списъка, а всяка неинтересна е в един списък. Тогава

$$3x + y = 3624.$$

Намираме $(3x + y) - (x + y) = 2x = 3624 - 2024 = 1600$ и $x = 800$. (2 точки)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задачите са предложени от: Невена Събева (4.2, 4.3 и 5.2), Юлиян Цветков (5.3), Николина Бъчварова (5.1), Павлина Парушева (6.1, 6.2 и 6.3), Стойчо Стоев (7.1, 7.2 и 7.3).