

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

3

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн Петър Бойваленов – главен редактор

Невена Събева – зам. главен редактор

Чл.-кор. проф. дмн Генчо Скордев

Чл.-кор. проф. дмн Николай Николов

Проф. дмн Емил Колев

Проф. д-р Иван Тонов

Проф. д-р Станислав Харизанов

Доц. д-р Евгения Сендова

Доц. д-р Ивайло Кортезов

Александър Иванов

Емил Карлов

Татяна Пархоменко – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

ТРИНАДЕСЕТА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА

ЛЮБА КОНОВА, ВИОЛЕТА ЛИЧЕВА

Тазгодишното издание на Европейската олимпиада по математика за момичета се проведе в периода 11.04-17.04 в град Цхалтубо, Грузия. България се представи достойно, завоювайки три бронзови медала. Резултатите в индивидуалното класиране на момичетата са, както следва:

- Симона Гагарова, 11 клас – **20 точки**
- Демира Недева, 11 клас – **14 точки**
- Мая Минкова, 9 клас – **13 точки**
- Ралица Марчева, 11 клас – **10 точки**

В отборното класиране българският отбор се нареди на 29-то място в света и 19-то в Европа.

Ръководители на отбора бяха **Виолета Личева**, възпитаник на Оксфорд, и **Ивайла Радкова**, студент от ФМИ. **Люба Конова** участва в комисията по избиране на задачите.

С удоволствие ви представяме тазгодишната тема.

Задача 1. На дъската са написани две различни цели числа u и v . Извършва се поредица от ходове, като на всеки ход се извършва една от следните две операции:

- Ако a и b са две различни числа, присъстващи на дъската, и $a + b$ не е било написано до този момент, то $a + b$ може да бъде написано на дъската.
- Ако a, b и c са три различни числа, присъстващи на дъската, и ако цялото число x изпълнява $ax^2 + bx + c = 0$ и не е било написано до този момент, то x може да бъде написано на дъската.

Да се намерят всички двойки начални числа (u, v) , такива, че което и да е цяло число може да бъде написано на дъската след краен брой ходове.

Решение. Ще докажем, че търсените двойки са $u \neq 0, v \neq 0, (u, v) \neq (-1, 1)$ и $u > 0$ или $v > 0$.

Очевидно, ако едно от двете е нула, никога няма да получим ново число с първата операция и никога няма да разполагаме с три числа, за да приложим втората. Оттук наметне, нека $u \neq 0, v \neq 0$.

Нека $u < 0, v < 0$. Тогава $u + v < 0$, ако извършим първата операция, а ако разгледаме квадратно уравнение само с отрицателни коефициенти, то ще има само отрицателни корени. Следователно на дъската няма как да се появи положително число. Оттук наметне, нека $u < v$ и $0 < v$.

Прилагайки първата стъпка, разполагаме с числата $u, v, u + v$, които са различни, така че можем да съставим следното квадратно уравнение, имащо за решение числото -1 :

$$ux^2 + (u + v)x + v = 0$$

Нека да разгледаме следните две случая.

Ако $v = 1$, тогава $u < v = 1$, но $u \neq 0$, и следователно $u \leq -1$. Подслучаят, в който $u = -1$ няма да има решение, тъй като лесно се установява, че ще могат да бъдат генерирани единствено числата $\{-1, 0, 1\}$.

Ако $u < -1$, то можем да достигнем до произволно отрицателно число, добавяйки първо определен брой u към -1 , а след това добавяйки необходимия брой единици към резултата. За да получим произволно положително число t , прилагаме втората операция за $(a, b, c) = (0, 1, -t)$, като имаме предвид, че $-t$ е на дъската ($t \in \mathbb{N}$).

Нека сега $v > 1$ и отново генерираме числото -1 . Тогава на дъската можем да запишем и числата $v - 1, 2v - 1, 3v - 1, \dots, mv - 1$. Това означава, че можем да получим произволно положително число, като първо получим число от вида $mv - 1$, по-голямо от него, а след това добавим определен брой -1 . Аналогично на предишния случай, избираме (a, b, c) да са $(0, 1, t)$ за някое положително $t \neq 1$ и така по втората операция генерираме числото $-t$. По този начин записваме и всички отрицателни числа.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , за който $AC > AB$. Нека Ω е описаната около ABC окръжност и I е центърът на вписаната в ABC окръжност. Вписаната окръжност допира страните BC, CA, AB в точки D, E, F съответно. Върху дъгите $\widehat{DF}$ и $\widehat{DE}$ от вписаната окръжност са взети съответно точките X и Y така, че $\sphericalangle BXD = \sphericalangle DYC$. Правите XY и BC се пресичат в точка K . Точка T върху Ω е такава, че KT е допирателна до Ω , като T и A лежат от една и съща страна спрямо правата BC . Да се докаже, че правите TD и AI се пресичат върху Ω .

$$\sphericalangle DBX + \sphericalangle XYC = \sphericalangle DBX + \sphericalangle XDB + \sphericalangle BXD = 180^\circ.$$
$$KX.KY = KB.KC = KD^2 = KT^2,$$
$$\nless KTD = \nless KDT \Rightarrow \widehat{TM} = \widehat{BT} + \widehat{MC} \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC}.$$
$$\text{НОД}(A, B, C, D) = 1.$$

МАТЕМАТИКА 3/2024 г.

Нека представим $n = ab$, където a е най-малкият прост делител на n . Тогава, прилагайки условието за $d = b$, получаваме, че

$$b(b+1) \mid ab(ab+1) \Rightarrow b+1 \mid a(ab+1).$$

Но

$$b \equiv -1 \pmod{b+1} \Rightarrow -a^2 + a \equiv 0 \pmod{b+1} \Rightarrow b+1 \mid a(a-1).$$

Значи $b \leq a^2 - a - 1 \Rightarrow b < a^2$, откъдето можем да заключим, че b е просто. В противен случай най-малкият му прост делител би бил по-малък от $\sqrt{b} < a$. Също така, няма как $b+1 \mid a-1$, тъй като иначе $b \leq a-2 < a-1$. Можем да заключим, че $b+1 = a \cdot c$, за $c \mid a-1$.

Нека сега приложим условието за $d = a$, което ни дава, че

$$a(a+1) \mid ab(ab+1) \Rightarrow a+1 \mid b(ab+1) \Rightarrow a+1 \mid b(b-1).$$

Тъй като доказахме, че b е просто, нека проверим дали $b \mid a+1$. Ако това е така, то $b \leq a+1$ и $a \leq b$, откъдето $a = b$ или $(a; b) = (2; 3)$. И двата случая не водят до решение, тъй като в първия $a \mid a+1$ и $a = 1$, а във втория 12 не дели 42. Това показва, че

$$a+1 \mid b-1 = ac-2.$$

От друга страна,

$$ac-2 \equiv -c-2 \pmod{a+1} \Rightarrow a+1 \mid c+2.$$

Имаме също и $c \mid a-1$, което означава, че c може да е единствено $a-1$. Обединявайки резултатите до този момент, получихме, че b е просто от вида $a^2 - a - 1$. Наистина, нека $n = a \cdot (a^2 - a - 1)$, където a и $a^2 - a - 1$ са прости. Тогава $a \cdot (a+1) \mid (a^3 - a^2 - a) \cdot (a^3 - a^2 - a + 1)$ и $(a^2 - a - 1) \cdot (a^2 - a) \mid (a^3 - a^2 - a) \cdot (a^3 - a^2 - a + 1)$ и числото n удовлетворява условието.

Задача 4. За редица от цели числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, една двойка (a_i, a_j) , където $1 \leq i < j \leq n$, се нарича *интересна*, ако съществува двойка (a_k, a_ℓ) , където $1 \leq k < \ell \leq n$, за която

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

За всяко $n \geq 3$, намерете най-големия възможен брой интересни двойки в редица с дължина n .

Решение. Ще докажем, че отговорът е $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$. Нека разгледаме следната редица:

$$a_1 = 0 < a_2 = 4 < 8 < 16 < \dots < a_n = 2^n.$$

Ще използваме означението (i, j) вместо (a_i, a_j) . Забелязваме, че $(1, j)$ е интересна за всяко $2 \leq j \leq n-1$, тъй като $\frac{a_{j+1} - a_1}{a_j - a_1} = \frac{2^{j+1}}{2^j} = 2$. Тоест, оттук имаме $n-2$ интересни двойки.

Също така, (i, j) е интересна за всяко $2 \leq i < j \leq n-1$, тъй като

$$\frac{a_{j+1} - a_{i+1}}{a_j - a_i} = \frac{2^{j+1} - 2^{i+1}}{2^j - 2^i} = 2.$$

Оттук излизат още $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ двойки. Финално, имаме, че и двойката $(n-1, n)$ е интересна, защото $\frac{a_n - a_1}{a_n - a_{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$.

Остават само двойките (i, n) за $1 \leq i \leq n-2$. За тях

$$a_n - a_i = 2^n - 2^i > 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

което означава, че няма как да има двойно по-голяма разлика (най-голямата възможна е 2^n). Следователно тези $n-2$ двойки са единствените, които не са интересни, т.е. общия брой на интересните двойки е

$$\binom{n}{2} - (n-2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1.$$

За да докажем оценката, ще покажем, че поне $n-2$ двойки не са интересни. Очевидно, двойката $(1, n)$ е сред тях, тъй като е двойката с най-голяма разлика.

Ако двойката (i, j) е интересна, то $a_i - a_j \leq \frac{1}{2}(a_n - a_1)$. Нека сега са интересни двойките $(1, i)$ и (i, n) , $2 \leq i \leq n-1$. Тогава $a_i - a_1 \leq \frac{1}{2}(a_n - a_1)$ и $a_n - a_i \leq \frac{1}{2}(a_n - a_1)$, откъдето следва, че $a_n - a_1 \leq a_n - a_1$ следователно и двете неравенства трябва да бъдат равенства и $a_n - a_i = a_i - a_1 = \frac{a_n - a_1}{2}$. Това може да бъде изпълнено за максимум една стойност на i , а за останалите $n-3$ стойности на i поне една от двете двойки не е интересна. Комбинирайки ги с

двойката $(1, n)$, получаваме $n - 3 + 1 = n - 2$ двойки, които не са интересни.

Задача 5. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такива, че за всяка двойка естествени числа (x, y) са изпълнени следните две условия:

- (i) x и $f(x)$ имат един и същи брой положителни делители.
- (ii) Ако x не дели y и y не дели x , то

$$\text{НОД}(f(x), f(y)) > f(\text{НОД}(x, y)).$$

Решение. Нека f е функция, която изпълнява двете условия. От първото следва, че $f(1) = 1$, а $f(2) = q$ за някое просто q . Също така за всяко друго просто число p е ясно, че $f(p)$ също е просто и от второто условие, тъй като 2 и p са взаимнопрости, най-големият общ делител на q и $f(p)$, трябва да е по-голям от 1, откъдето $f(p) = q$.

Ще докажем, че $f(n) = q^{d(n)-1}$, където с $d(n)$ ще означаваме броя на делителите на числото n . Нека първо n е степен на просто число. Ще докажем, че ако $f(p^m) = q^m$ за всяко $m \leq k$ и за всяко просто p , ще следва, че $f(p^{k+1}) = q^{k+1}$ за всяко просто число p .

Нека $r \neq p$ е просто. Тогава за $x = p^{k-1}r, y = p^k$ имаме:

$$\text{НОД}(f(p^{k-1}r), q^k) > f(p^{k-1}) = q^{k-1}$$

Следователно, тъй като $\text{НОД}(f(p^{k-1}r), q^k) \mid q^k$, то

$$\text{НОД}(f(p^{k-1}r), q^k) = q^k.$$

Тоест, $f(p^{k-1}r) = q^k \cdot N$ за някое естествено N . Обаче, $d(f(p^{k-1}r)) = d(p^{k-1}r) = 2k$, а $d(q^k \cdot N) \geq (k+1) \cdot 2$, при условие, че N има прост делител, различен от q . Това очевидно би довело до противоречие, така че може да заключим, че $f(p^{k-1}r) = q^{2k-1}$.

Нека сега $x = p^{k+1}, y = p^{k-1}r$:

$$\text{НОД}(f(p^{k+1}), q^{2k-1}) > f(p^{k-1}) = q^{k-1}$$

Оттук, $q^k \mid f(p^{k+1})$ и по съображения за броя делители, получаваме, че $f(p^{k+1}) = q^{k+1}$. С това доказваме по индукция, че за всяко просто число p и всяко естествено число k е в сила

$$f(p^k) = q^k.$$

Нека сега разгледаме най-малкото число n , за което не сме пресметнали $f(n)$. Знаем, че n има поне два различни прости делителя $p_1 < p_2$, тоест $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} N$, където N е взаимнопросто с p_1 и p_2 . Нека $m = p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2-1} N < n$. Заради последното неравенство, имаме, че $f(m) = q^{d(m)-1}$.

Замествайки $(x, y) \rightarrow (m, n)$, получаваме

$$\text{НОД}(f(n), q^{d(m)-1}) > f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1} N) = q^{(\alpha_1+1)\alpha_2 \cdot d(N)-1}.$$

Следователно

$$q^{(\alpha_1+1)\alpha_2 \cdot d(N)} \mid f(n).$$

Но $f(n)$ има точно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)d(N)$ делители, а ако има делител, различен от q , би имал поне

$$(\alpha_1+1)\alpha_2 \cdot d(N) \cdot 2 > (\alpha_1+1)\alpha_2 \cdot d(N) + (\alpha_1+1) \cdot d(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)d(N)$$

делители, което е невъзможно. Следователно, $f(n) = q^{d(n)-1}$.

Задача 6. Да се намерят всички естествени числа d , за които съществува полином P от степен d с реални коефициенти, такъв, че сред $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2-d)$ се срещат най-много d различни стойности.

Решение. Ще докажем, че такива полиноми съществуват само при $d \leq 3$.

$$\begin{aligned} d = 1 : \quad & d^2 - d = 0, \quad P_1(x) = x, & P(0) = 0; \\ d = 2 : \quad & d^2 - d = 2, \quad P_2(x) = x(x-1), & \begin{cases} P(0) = P(1) = 0, \\ P(2) = 2; \end{cases} \\ d = 3 : \quad & d^2 - d = 6, \quad P_3(x) = x(x-4)(x-5), & \begin{cases} P(0) = P(4) = P(5) = 0, \\ P(1) = P(2) = P(6) = 12, \\ P(3) = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно наблюдение е, че ако $P(x)$ е полином от търсения вид, то $kP(x) + c$ за $k \neq 0$ също ще бъде такъв. Тоест можем да приемем, че разглеждаме полином от степен поне 4, със старши коефициент 1, такъв че $P(i) > 0$ за всички цели числа $0 \leq i \leq d^2 - d + 1$. Също, нека d -те стойности на полинома в тези цели числа са $p_1 < p_2 < \dots < p_d$. Нека $A_i = \{x \in \{0, 1, \dots, d^2 - d\} : P(x) = p_i\}$ е множеството от целите числа между 0 и $d^2 - d$ включително, които дават стойността p_i , и нека $n_i = |A_i|$ е броят на тези числа. Тогава $n_1 + n_2 + \dots + n_d = d^2 - d + 1$.

Можем да направим следните начални наблюдения:

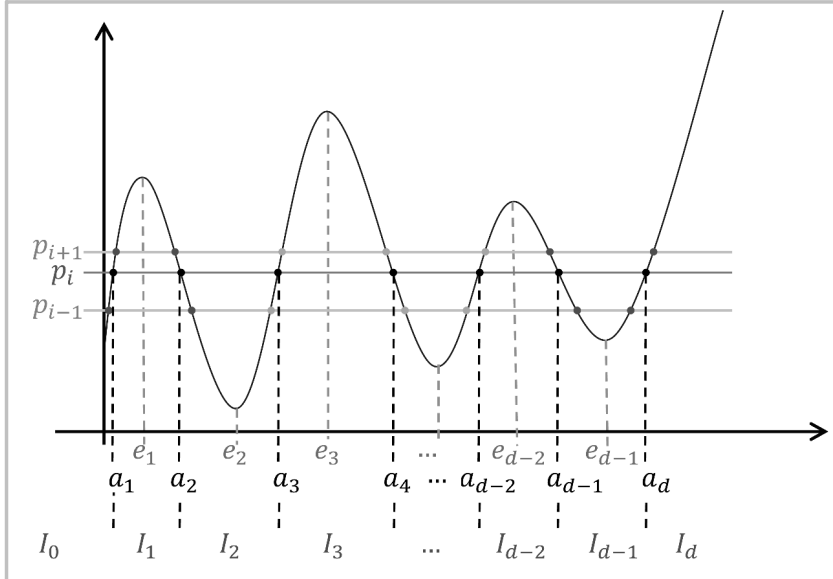
- Понеже $P(x)$ е полином от степен d , то той е определен еднозначно от които и да е $d + 1$ различни точки от вида $(a, P(a))$ (следствие от интерполация по Лагранж).
- $n_i \leq d$ за всяко i , понеже в противен случай можем да вземем $d + 1$ точки върху една и съща хоризонтална права, което означава, че $P(x)$ е константен полином и приема точно 1 стойност, противоречие.
- От принцип на Дирихле имаме, че съществува i , за което

$$n_i \geq \left\lceil \frac{d^2 - d + 1}{d} \right\rceil = d,$$

т.е. $n_i = d$ заради предишното наблюдение.

- Ако $n_i = d$, то $P(x) - p_i$ е моничен полином от степен d , който е 0 за всяко от d -те числа в A_i , т.е. $P(x) - p_i = \prod_{a \in A_i} (x - a)$.
- Всеки полином от степен d има най-много $d - 1$ локални екстремума (понеже производната му е от степен $d - 1$). Знаем, че съществува i , за което $|A_i| = d$ и $P(x) - p_i = \prod_{a \in A_i} (x - a)$, което

означава, че между всеки два последователни елемента на A_i има един локален екстремум на $P(x)$, т.е. $P(x)$ има точно $d - 1$ локални екстремума $e_1 < e_2 < \dots < e_{d-1}$.



Ще докажем следното ключово твърдение, за което въвеждаме означение $n_0 = n_{d+1} = 0$.

Твърдение I. Ако $n_i = d$ за някое i изпълняващо $1 \leq i \leq d$, то

$$n_{i\pm 1} \leq d - 2.$$

Доказателство. A_i има d елемента (нека те са $a_1 < a_2 < \dots < a_d$), които разделят числовата ос на $d + 1$ интервала. Означаваме тези интервали с $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{d-1}, I_d$ в този ред. I_0 и I_d са безкрайни интервали, а останалите са с крайна дължина. Понеже $n_i = d$, имаме

$$P(x) - p_i = \prod_{a \in A_i} (x - a),$$

който редува знаците си върху $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{d-1}, I_d$. За удобство ще наричаме интервалите, върху които $P(x) - p_i > 0$ „положителни“, а останалите – „отрицателни“. Тъй като $P(x) - p_i$ има положителен старши коефициент, то I_d е „положителен“. Полиномът $P(x)$ има $d - 1$ локални екстремума и всеки от интервалите с крайна дължина $I_1, I_2, \dots, I_{d-1}$ съдържа поне един локален екстремум, следователно всеки от тях съдържа точно един, $e_j \in I_j$.

Да разгледаме елементите на A_{i+1} (разсъжденията за A_{i-1} са аналогични). За всяко $b \in A_{i+1}$ имаме $P(b) = p_{i+1} > p_i \Rightarrow b$ лежи в $\bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} I_{d-2k}$.
обединението на „положителните“ интервали $\bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} I_{d-2k}$.

- Ако $b \in I_j$ за $1 \leq j \leq d - 1$, то $I_j = (a_j, a_{j+1})$. Понеже I_j съдържа точно един локален екстремум на $P(x)$, то поне един от подинтервалите (a_j, b) и (b, a_{j+1}) не съдържа локален екстремум, т.е. $P(x)$ е монотонна функция върху този подинтервал. В единия му край $P(x) = p_i$, докато в другия $P(x) = p_{i+1}$. Следователно $P(x)$ не приема никоя от стойностите $p_1 < p_2 < \dots < p_d$ във вътрешността на този подинтервал, понеже никоя от тези стойности не лежи между p_i и p_{i+1} . Оттук следва, че нито едно от числата $0, 1, 2, \dots, d^2 - d$ не лежи между целочислените краища на подинтервала (в единия случай краищата са a_j и b , а в другия – b и a_{j+1}). Това означава, че $b = a_j + 1$ или $b = a_{j+1} - 1$.
- Ако $b \in I_0$ или $b \in I_d$, по аналогичен начин получаваме съответно $b = a_1 - 1$ или $b = a_d + 1$, понеже $P(x)$ е монотонна функция върху I_0 и I_d .

Дотук получаваме, че възможните елементи на A_{i+1} са

$$a_d + 1, a_{d-1} - 1, a_{d-2} + 1, \dots, a_1 + (-1)^{d-1},$$

което дава оценка $n_{i+1} = |A_{i+1}| \leq d$. Да допуснем, че $n_{i+1} > d - 2$. Тогава или само 1 число от горния списък е написано два пъти и всички числа в списъка са елементи на A_{i+1} , или всички написани числа са различни и най-много едно не присъства в A_{i+1} . Да разгледаме двете най-големи числа от списъка, $(a_d + 1, a_{d-1} - 1)$, и двете най-малки числа, $(a_2 + (-1)^{d-2}, a_1 + (-1)^{d-1})$. Поне една от тези двойки е съставена от два различни елемента от A_{i+1} - означаваме тази двойка с (b, c) . Имаме

$$P(b) = P(c) = p_{i+1} \Rightarrow P(b) - p_i = P(c) - p_i \Rightarrow$$

$$p_{i+1} - p_i = \prod_{a \in A_i} (b - a) = \prod_{a \in A_i} (c - a) \Rightarrow \prod_{a \in A_i} \frac{b - a}{c - a} = 1.$$

Също така имаме $b > c$.

- Ако $(b, c) = (a_d + 1, a_{d-1} - 1)$, то $\frac{b - a}{c - a} > 1$ за всяко $a < c$. Това важи за $a \in \{a_1, a_2, \dots, a_{d-2}\}$ ($a_{d-1} - 1 \neq a_{d-2}$, понеже $P(x)$ приема различни стойности в двете числа). Остават два множителя в произведението:

$$\frac{b - a_{d-1}}{c - a_{d-1}} \cdot \frac{b - a_d}{c - a_d} = \frac{a_d + 1 - a_{d-1}}{-1} \cdot \frac{1}{a_{d-1} - 1 - a_d} = 1.$$

Следователно $\prod_{a \in A_i} \frac{b - a}{c - a} > 1$, противоречие.

- Ако $(b, c) = (a_2 + (-1)^{d-2}, a_1 + (-1)^{d-1})$, то $0 < \frac{b - a}{c - a} < 1$ за всяко $a > b$. Това важи за $a \in \{a_3, a_4, \dots, a_d\}$ ($a_2 + (-1)^{d-2} \neq a_3$, понеже $P(x)$ приема различни стойности в двете числа). Остават два множителя в произведението:

$$\frac{b - a_1}{c - a_1} \cdot \frac{b - a_2}{c - a_2} = \frac{a_2 + (-1)^{d-2} - a_1}{(-1)^{d-1}} \cdot \frac{(-1)^{d-2}}{a_1 + (-1)^{d-1} - a_2} = 1.$$

Следователно $\prod_{a \in A_i} \frac{b - a}{c - a} < 1$, противоречие.

Получаваме, че допускането $n_{i+1} > d - 2$ е грешно, следователно $n_{i+1} \leq d - 2$. Разсъжденията досега ни позволяват и да заключим, че равенство $n_{i+1} = d - 2$ се достига, само ако A_{i+1} има следните елементи:

- Всички $d - 4$ числа от списъка

$$a_{d-2} + 1, a_{d-3} - 1, \dots, a_4 + (-1)^{d-4}, a_3 + (-1)^{d-3}$$

(всички тези числа трябва да бъдат различни, иначе няма как да има равенство).

- Едно число измежду $a_d + 1$ и $a_{d-1} - 1$.
- Едно число измежду $a_2 + (-1)^{d-2}$ и $a_1 + (-1)^{d-1}$.

Доказателството на $n_{i-1} \leq d - 2$ използва аналогични разсъждения, като вместо „положителните“ интервали разглеждаме „отрицателните“ интервали (т.е. интервалите от вида I_{d-2k-1}). С това доказателството на Твърдение I е завършено.

Тогава за всяко $i \in \{1, \dots, d - 1\}$, съществуват три възможности:

- $n_i, n_{i+1} \leq d - 1$,
- $n_i = d$ и $n_{i+1} \leq d - 2$,
- $n_{i+1} = d$ и $n_i \leq d - 2$.

И в трите случая, $n_i + n_{i+1} \leq 2(d - 1)$. За четно d това означава

$$\begin{aligned} (n_1 + n_2) + (n_3 + n_4) + \dots + (n_{d-1} + n_d) &\leq \frac{d}{2} 2(d - 1) = \\ &= d(d - 1) < d^2 - d + 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_d, \end{aligned}$$

противоречие.

Остава да разгледаме случая, когато d е нечетно, $d \geq 5$. Тогава за $i = 0, 1, \dots, \frac{d-1}{2}$ можем да групираме по двойки съседни всички числа в сумата $n_1 + n_2 + \dots + n_d$, оставяйки n_{2i+1} само:

$$\begin{aligned} d^2 - d + 1 &= \\ &= (n_1 + n_2) + \dots + (n_{2i-1} + n_{2i}) + n_{2i+1} + (n_{2i+2} + n_{2i+3}) + \dots + (n_{d-1} + n_d) \\ &\leq \frac{d-1}{2} 2(d - 1) + d = d^2 - d + 1. \end{aligned}$$

Следователно всички неравенства трябва да бъдат равенства, което дава $n_{2i+1} = d$ за $i = 0, 1, \dots, \frac{d-1}{2}$ и също така $n_j + n_{j+1} = 2(d-1)$ за $j = 1, 2, \dots, d-1$. Комбинирайки двете, получаваме $n_{2i} = d-2$.

В частност това означава, че $n_1 = d$. По подобие на означенията в доказателството на Твърдение I, нека A_1 има елементи $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и интервалите, на които те разделят числовата ос, са $I_0, I_1, \dots, I_d$. Знаем, че във всеки от $I_1, I_2, \dots, I_{d-1}$ има по един екстремум – нека означим екстремумите с $e_1 < e_2 < \dots < e_{d-1}$. Функцията $P(x)$ е монотонна върху всеки от интервалите

$$(-\infty, e_1], (e_1, e_2], (e_2, e_3], \dots, (e_{d-1}, \infty).$$

Това са d интервала на монотонност, следователно всеки от тях съдържа по един елемент от всяко от d -елементните $A_1, A_3, A_5, \dots, A_d$. Също така, няма как e_i да е някой от тези елементи, защото тогава следващият интервал на монотонност няма как да съдържа елемент (в този интервал $P(x)$ е или строго по-голям или строго по-малък от $P(e_i)$). От случая за равенство в Твърдение I имаме, че $d-4$ от елементите на A_{2i+2} лежат в (e_2, e_{d-2}) . Отново разглеждайки интервали на монотонност, получаваме, че всеки от интервалите $(e_2, e_3), (e_3, e_4), \dots, (e_{d-1}, e_d)$ съдържа по един елемент от всяко от множествата $A_2, A_4, \dots, A_{d-1}$. Следователно всеки от интервалите $(e_2, e_3), (e_3, e_4), \dots, (e_{d-1}, e_d)$ съдържа по d цели числа (по един елемент от $A_1, A_2, \dots, A_d$).

Нека целите числа в (e_2, e_3) са $n_1 < n_2 < \dots < n_d$, а тези в (e_3, e_4) са $m_d < m_{d-1} < \dots < m_1$. Понеже не можем да пропускаме цели числа измежду $0, 1, \dots, d^2-d$, имаме, че $n_1, n_2, \dots, n_d, m_d, m_{d-1}, \dots, m_1$ са последователни цели числа. Също, $p_i = P(n_i) = P(m_i)$ за $1 \leq i \leq d$. Тогава P е еднозначно определен от точките $(m_1, p_1), (m_2, p_2), \dots, (m_n, p_n)$. Но полиномът $P(n_d + (m_d - x))$ минава през тези точки, т.е. $P(x) = P(\text{const} - x)$, което е невъзможно за полином от нечетна степен; противоречие.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ КОНТРОЛНИТЕ ЗА БАЛКАНСКАТА ОЛИМПИАДА

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ, ДРАГОМИР ГРОЗЕВ

На 7. и 8. април в ИМИ – БАН се проведеха контролните за определяне на двата отбора, които ще представят България на БОМ'24. Предлагаме Ви избрани задачи от контролните.

Задача 1. Някои от градовете в страната Графландия са свързани с пътища. Оказало се, че всеки град A може да си избере свое любимо число, да го означим с $f(A)$, което е цяло положително число, по-малко или равно на 2024, така, че следното условие е в сила:

- (i) От всеки град може да се стигне до всеки друг и любимите числа на всеки два града, които са свързани с директен път, са различни.

Нека m е дадено цяло число и $1 \leq m \leq 2024$. Турист пристига в столицата на страната. Той може да се придвижва от град A в град B (в тази посока), само ако между двата града има път и ако освен това е изпълнено условието

$$f(B) - f(A) \equiv m \pmod{2024}.$$

За кои стойности на m може да твърдим (без значение на броя на и конфигурацията на пътищата, при условие, че удовлетворяват (i)), че градовете могат така да си изберат любими числа (удовлетворяващи (i)), че туристът, тръгвайки от столицата, може да стигне до произволно избран град?

Решение. *Отговор:* За всички m взаимно прости с 2024.

Да предположим първо, че $(m, 2024) > 1$. Тогава, тръгвайки от град с номер r , всички възможни градове, които може да посети туристът, са с номера даващи остатъци $km + r \pmod{2024}$, $k \in \mathbb{N}$. Тъй като това не е пълна система остатъци по модул 2024, за да може да стигне туристът до всеки възможен град трябва при номерацията им да са използвани по-малко от 2024 номера. Ако вземем 2024 града и всеки два свържем с път ще получим пример, за който (i) може да е изпълнено единствено ако използваме за номерация всички възможни числа от 1 до 2024. Т.е. в този случай няма как да се стигне до всеки от тях.

Нека сега $(m, 2024) = 1$. Ще докажем, че номерирането е възможно. Да означим с V множеството от всички градове. Нека $W \subset V$ да бъде максималното възможно подмножество, за които съществува номериране, такова, че тръгвайки от столицата v_0 да можем да стигнем до всеки град в W . Да допуснем че $W \neq V$. Тогава, за всеки град $u \in W, v \in V \setminus W$, които са свързани с път е изпълнено

$$f(v) - f(u) \neq m \pmod{2024}.$$

Сега ще направим различно номериране f_1 като променим номерата само на градовете в $V \setminus W$ по следната схема

$$f_1(v) \in [1..2024], f_1(v) = f(v) - m \pmod{2024}, \forall v \in V \setminus W.$$

За всяко $v \in W$ полагаме $f_1(v) = f(v)$. Да забележим, че при новото номериране f_1 , условието (i) все още е валидно. Наистина, ако за някои два свързани града $u \in W, v \in V \setminus W$ е изпълнено $f_1(u) = f_1(v)$, това ще означава че $f(u) = f(v) + m$ и значи бихме могли да стигнем от u във v при номерацията f , което противоречи на максималността на W .

И така, номерацията f_1 удовлетворява (i), освен това от v_0 може да стигнем до всички градове в W . Тъй като W е максимално, не може да достъпим град извън W . Това ни позволява отново да преномериране градовете в $V \setminus W$ по формулата

$$f_2(v) = f_1(v) - m \pmod{2024}, \forall v \in V \setminus W$$

и така нататък. Ако $u \in W, v \in V \setminus W$ са два свързани града, то за някое k имаме $f(u) + m = f(v) - km$, тъй като $km, k = 1, 2, \dots, 2024$ са пълна система остатъци по модул 2024. Но това ще означава, че за номерирането f_k ще можем да стигнем от u във v , противоречие с максималността на W .

Задача 2. В равнината е фиксирана отсечка BC . Подвижната точка A е такава, че триъгълникът ABC е остроъгълен. Нека BP ($P \in AC$) и CQ ($Q \in AB$) са височини в ABC и O е центърът на описаната около ABC окръжност. Точките K и L са симетричните на O относно правите AB и AC , съответно. Правите през P и Q , перпендикулярни съответно на LP и KQ , се пресичат в точка T . Да се докаже, че когато A се мени, точката T лежи на постоянна права.

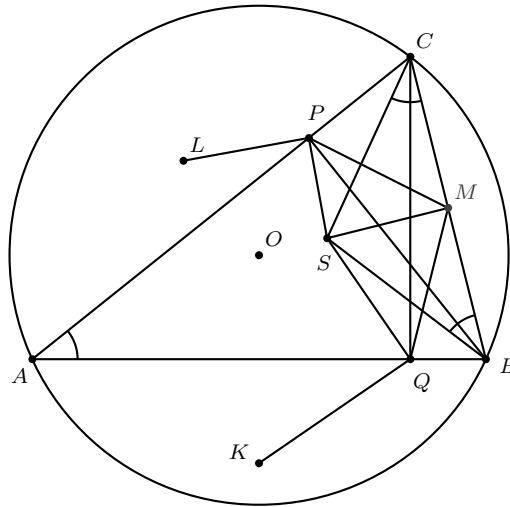
Решение. Нека точката S е от същата полуравнина спрямо BC като A и е такава, че $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB = \sphericalangle BAC$ – достатъчно е да докажем, че $S \equiv T$, съответно търсената права е симетралата на BC .

$\sphericalangle OSC = \sphericalangle OCM = 90^\circ - \sphericalangle BAC$, имаме

$$\Delta OCM \sim \Delta CSM,$$

откъдето следва, че $\frac{CM}{OC} = \frac{SM}{SC}$. Получихме

$$\frac{PM}{LC} = \frac{SM}{SC}.$$



Също пресмятаме

$$\begin{aligned}\sphericalangle SMP &= |\sphericalangle SMB - \sphericalangle PMB| = |90^\circ - 2\sphericalangle ACB|, \\ \sphericalangle SCL &= |\sphericalangle OCL - \sphericalangle OCS| = |2\sphericalangle ACO - \sphericalangle OCS| = \\ &= |2(90^\circ - \sphericalangle ABC) - (2\sphericalangle BAC - 90^\circ)| = |90^\circ - 2\sphericalangle ACB|.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\Delta SPM \sim \Delta SLC,$$

т.е. $\frac{SP}{SM} = \frac{SL}{SC}$ и $\nless MSP = \nless CSL$, т.е. $\frac{SP}{SL} = \frac{SM}{SC}$ и $\nless LSP = \nless CSM$.
Следовательно

$$\Delta SPL \sim \Delta SMC$$

и $\sphericalangle SPL = \sphericalangle SMC = 90^\circ$. Аналогично $\sphericalangle SQK = 90^\circ$ и исканото следва.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които следното условие е в сила

$$f(f(x) + xf(y)) = xf(y + 1), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. Нека $f(0) = a, a \in \mathbb{R}$. Полагаме в условието $x = 0$ и получаваме $f(a) = 0$. При $y = a$ имаме

$$f(f(x)) = xf(a + 1). \quad (1)$$

Да допуснем първо, че $f(a + 1) \neq 0$. Тогава f е инекция. Наистина, ако допуснем, че $f(x_1) = f(x_2)$ за $x_1 \neq x_2$ и сложим тези стойности в (1), получаваме противоречие. Като положим в условието $x = 1$ и от факта, че функцията е инективна, следва

$$f(1) + f(y) = y + 1 \quad (2)$$

При $y = 1$ се получава $2f(1) = 2$, откъдето $f(1) = 1$. Сега (2) дава $f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Това наистина е решение.

Нека сега допуснем, че $f(a + 1) = 0$. Тогава

$$f(f(x)) = 0.$$

Това означава, че $f(y) = 0, \forall y \in \text{Im}(f)$. Да допуснем, че има точка y_0 , за която $f(y_0 + 1) \neq 0$. Като положим $y = y_0$ в условието, се получава

$$f(f(x) + xf(y_0)) = xf(y_0 + 1). \quad (3)$$

За кое да е реално x_0 нека положим $x := x_0/(f(y_0 + 1))$ в (3). Имаме

$$f(f(x) + xf(y_0)) = x_0.$$

Тъй като x_0 произволно, значи f е сюрективна. Това от своя страна означава, че $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, което води до $f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, противоречие с това, че $f(y_0 + 1) \neq 0$. И така в този случай имаме $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, което също е решение.

Задача 4. Даден е разностранен триъгълник ABC . Върху лъчите $AC^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$ са избрани съответно точките C_a и C_b , такива че $AC_a = BC_b = AB$. Означаваме с O_c центъра на описаната около триъгълника CC_aC_b окръжност. Аналогично дефинираме точките O_a и O_b . Да се докаже, че правите AO_a , BO_b и CO_c се пресичат в една точка, която лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност.

Решение. (Първи начин, тригонометрия) Нека CO_c пресича окръжността за втори път в T и $\sphericalangle TCB = \varphi$. Без ограничение нека $AC < AB < BC$. При стандартните означения за триъгълник и $\sphericalangle CC_aC_b = x = 90^\circ - \varphi$ имаме $CC_a = c - b$, $CC_b = a - c$ и значи синусовата теорема за триъгълника CC_aC_b дава $\frac{c-b}{\sin(\gamma-x)} = \frac{a-c}{\sin x}$, т.е. $\frac{c-b}{a-c} = \sin \gamma \cotg x - \cos \gamma = \sin \gamma \tg \varphi - \cos \gamma$, т.е.

$$\tg \varphi = \frac{\frac{c-b}{a-c} + \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

Аналогично, ако AO_a пресича окръжността в S и $\sphericalangle BAS = \psi$, то $AA_c = a - c$, $AA_b = a - b$ и за $\sphericalangle AA_bA_c = s = 90^\circ - \psi$ имаме от синусовата теорема $\frac{a-c}{\sin s} = \frac{a-b}{\sin(\alpha+s)}$, т.е.

$$\frac{a-b}{a-c} = \frac{\sin(\alpha+s)}{\sin s} = \sin \alpha \cotg s + \cos \alpha = \sin \alpha \tg \psi + \cos \alpha,$$

т.е. $\tg \psi = \frac{\frac{a-b}{a-c} - \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Така с цел $S \equiv T$ вече е достатъчно да докажем, че

$$\frac{c-b}{a-c} \sin \alpha + \cos \gamma \sin \alpha = \frac{a-b}{a-c} \sin \gamma - \cos \alpha \sin \gamma,$$

т.е. $(a-b) \sin \gamma + (b-c) \sin \alpha + (c-a) \sin \beta = 0$. Но това следва от равенствата $a \sin \gamma = c \sin \alpha$, $b \sin \gamma = c \sin \beta$ и $b \sin \alpha = a \sin \beta$ от синусовата теорема за триъгълника ABC .

(Втори начин, синтетично) Нека O и I са центровете на описаната и вписаната окръжност за ABC , а A_1 , B_1 , C_1 са средите на дъгите $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ (несъдържащи третите върхове) от описаната окръжност. От симетрия спрямо AA_1 имаме $A_1C_a = A_1B = A_1C$ и заедно с $O_cC = O_cC_a$ следва, че A_1O_c е симетралата на CC_a . Аналогично B_1O_c е симетралата на CC_b . Така четириъгълникът $OA_1O_cB_1$ е успоредник с $OA_1 = OB_1$, т.е. ромб. С други думи, O и O_c са симетрични относно A_1B_1 , а това е вярно и за C и I , т.е. CO_c е симетрична на OI спрямо A_1B_1 . Аналогично AO_a и BO_b са симетрични на OI спрямо B_1C_1 и A_1C_1 , съответно. Понеже I е ортоцентърът на $A_1B_1C_1$, окончателно правите AO_a , BO_b и CO_c се пресичат в Анти-Щайнер точката за правата OI и триъгълник $A_1B_1C_1$ (с описана окръжност като на ABC).

Задача 5. Нека $n \geq 4$ е цяло число и $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$. Дадени са две множества $A \subset S_n, B \subset S_n \setminus S_{n-1}$, като $|A| = n + 1, |B| = 2$. Възможно ли е $ab - 1$ да е куб на цяло число за всеки две $a \in A, b \in B$?

Решение. *Отговор:* НЕ.

Да допуснем противното. Да подредим числата в A и B в нарастващ ред $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq 2^n$ и $2^{n-1} < b_1 < b_2 \leq 2^n$. Съществува индекс $i \leq n$, така че $a_i < a_{i+1} \leq 2a_i$. Да означим

$$a_i b_1 - 1 = q_1^3, a_{i+1} b_2 - 1 = q_2^3, a_i b_2 - 1 = s_1^3, a_{i+1} b_1 - 1 = s_2^3.$$

От $a_i < a_{i+1} \leq 2a_i$ и $b_1 < b_2 < 2b_1$ лесно следва

$$q_1 < s_1, s_2 < q_2 < 2q_1. \quad (1)$$

Имаме $(q_1^3 + 1)(q_2^3 + 1) = (s_1^3 + 1)(s_2^3 + 1)$, което дава

$$(q_1 q_2)^3 + q_1^3 + q_2^3 + 1 = (s_1 s_2)^3 + s_1^3 + s_2^3 + 1. \quad (2)$$

Като се използва условието (1), се съобразява, че ако $q_1 q_2 > s_1 s_2$ или $q_1 q_2 < s_1 s_2$, то равенството (2) не може да е изпълнено. Следователно $q_1 q_2 = s_1 s_2$.

Да разгледаме функцията $f(x) = x^3 + \frac{C}{x^3}$ в интервала $x \in [q_1, q_2]$, където $C = (q_1 q_2)^3$. Тя намалява в интервала $[q_1, \sqrt{q_1 q_2}]$ и расте в $[\sqrt{q_1 q_2}, q_2]$, значи достига най-голяма стойност в краищата на този интервал, където $f(q_1) = f(q_2) = q_1^3 + q_2^3$. Това означава, че (2) при условието (1) е изпълнено, само ако $(q_1, q_2) = (s_1, s_2)$, с което търсеното противоречие е установено.

Задача 6. Нека n е естествено число. Крал Артур е поканил $2^n - 1$ рицари на аудиенция в замъка Камелот. Магьосникът Мерлин наредил рицарите в списък с последователни номера от 1 до $2^n - 1$. Оказало се, че кои да е двама рицари с номера a и $b, a < b$, са приятели тогава и само тогава, когато $0 \leq b - 2a \leq 1$. Кралят си избрал едно естествено число $k, 1 \leq k < 2^n$, и наредил на Мерлин да направи нов списък, изпълняващ следното изискване: За всяко $1 \leq i \leq 2^n - k - 1$, всички приятели на рицаря с номер i в новия списък трябва да са поставени или преди него, или да са на позиции измежду $i + 1, i + 2, \dots, i + k$. Докажете че най-малкото k , за което Мерлин може да изпълни нареждането на крал Артур, удовлетворява условията

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{2^n}{n} \leq k \leq 100 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Решение. Да разгледаме граф T , чиито върхове съответстват на множеството от всички рицари. Във всеки връх да запишем номера на съответния рицар в първия списък. Два върха са свързани, ако съответните рицари са приятели. Ясно е, че T е идеално балансирано двоично дърво.

Да допуснем, че върховете могат да се подредят в нов списък $i_1, i_2, \dots, i_m$ така, както иска крал Артур ($m = 2^n - 1$ и i_j е номерът на съответния връх според първия списък). Съществува единствен път в T , $i_1 = v_1 v_2 \dots v_\ell = i_m$, който свързва върховете i_1 и i_m . Ясно е, че

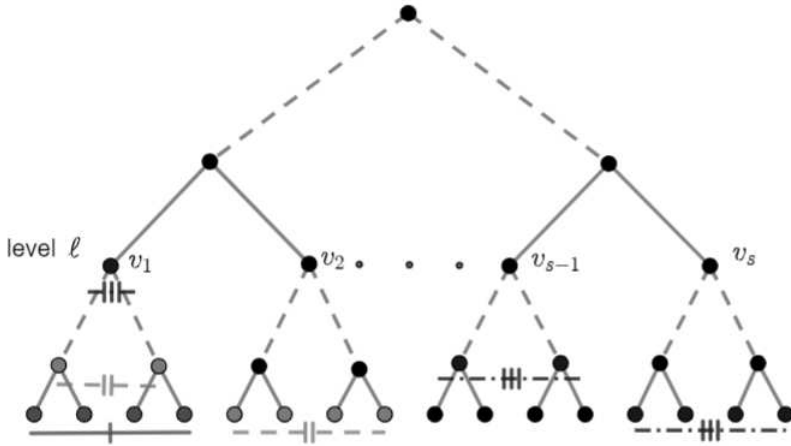
$$\ell \leq 2(n-1) + 1,$$

тъй като най-дългият път в T има дължина $2(n-1)$. Тъй като разстоянието между позициите на v_i и v_{i+1} в новия списък е най-много k , то $(\ell-1)k \geq m-1$, откъдето

$$k \geq \frac{2^n - 2}{2n - 2} > \frac{2^n}{4n},$$

което доказва долната граница за k .

Сега ще подредим върховете на T в нов списък. Нека ℓ е естествено число, което ще дефинираме допълнително. Означаваме с $v_1, v_2, \dots, v_s$, $s := 2^\ell$ върховете на T на ℓ -то ниво и нека $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_s)$ са поддърветата с корени в тези точки; всяко от тях има точно $2^{n-1-\ell}$ листа.



Последователно нареждаме в списъка върховете на T по следния начин. Първо поставяме последното ниво от върхове на $T(v_1)$, т.е.

листата на $T(v_1)$. След това поставяме предпоследното ниво на $T(v_1)$ и последното ниво на $T(v_2)$. На i -та стъпка поставяме i -тото ниво на $T(v_1)$ (като се брои отдолу нагоре) и след това $(i-1)$ -то ниво на $T(v_2)$ (отдолу нагоре) и така нататък. Накрая поставяме последния слой на $T(v_i)$ (т.е. неговите листа). Броят на върховете, които поставяме на i -тата стъпка, $i = 1, 2, \dots, s - \ell - 1$, е равен на

$$\sum_{j=0}^{i-1} 2^{n-1-\ell-j} \leq 2^{n-\ell}.$$

Изпълняваме описаните стъпки, докато не се случи едно от следните две събития:

- 1) стигаме до корена v_1 на $T(v_1)$;
- 2) записваме в списъка листата на $T(v_s)$.

Първото събитие ще се случи след $n - \ell$ стъпки, а второто – след $s = 2^\ell$ стъпки. За да гарантираме, че второто събитие ще се случи първо, избираме ℓ да е равно на най-голямото естествено число, за което

$$s = 2^\ell \leq n - \ell.$$

По този начин на s -тата стъпка сме поставили в списъка листата на $T(v_s)$. На $s + 1$ -та стъпка записваме останалите върхове на T .

Броят на всички върхове в $T(v_s)$, без последния му слой, не надвишава $2^{n-\ell-1}$. Броят на върховете в $T(v_{s-1})$, без последните му два слоя, не надвишава $2^{n-\ell-2}$ и така нататък. Като добавим върховете на T до неговия ℓ -ти слой, получаваме, че броят на записаните върхове на последната стъпка е най-много

$$2 \cdot 2^\ell + 2^{n-\ell} \leq 2 \cdot 2^{n-\ell} \leq 8 \cdot \frac{2^n}{n},$$

тъй като $2^{n+2} \geq n$.

Ако v е произволен връх, който е поставен в позиция j за първите s стъпки, всички негови съседи в T , които са поставени след него, са на позиции с номер най-много $j + 2 \cdot 2^{n-\ell} \leq j + 8 \cdot \frac{2^n}{n}$. Като вземем предвид броя на върховете, добавени при последната стъпка, получаваме, че в конструируания списък се изпълнява условието на крал Артур за

$$k := \left\lceil 16 \cdot \frac{2^n}{n} \right\rceil.$$

Това доказва горната граница.

СЕДЕМНАДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ XI И XII КЛАС

Любомир Христов, Димитър Цветков, Милен Христов,
Паскал Пиперков, Росен Ангелов

На 10 март 2024 г. се проведе за седемнадесети път Математическият турнир на Великотърновския университет за ученици от XI и XII клас. Състезанието традиционно се организира от ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“ чрез факултет „Математика и информатика“ съвместно с Регионално управление на образованието — Велико Търново, и секция „Великотърновски университет“ на Съюза на математиците в България.

В турнира взеха участие 59 ученици от градовете Велико Търново, Елхово, Димитровград, Горна Оряховица, Шумен, Плевен, Бургас, Габрово, Козлодуй, Роман, Свищов, Стара Загора и Ямбол.

Темата се състоеше от 21 задачи, структурирани в следните части: **дванадесет** тестови задачи от затворен тип, за които се посочва един от четири възможни отговора; **пет** тестови задачи от свободен тип, на които да се запише само отговор; **три** задачи, на които да се представят пълни решения с необходимите обосновки; **задача на журито** с повишена трудност, за която също да се даде пълно решение.

Състезателната тема включваше следните задачи с посочените за всяка задача точки за оценяване.

ПЪРВА ЧАСТ

1. Най-голямото от следните четири числа е:

А) $\cos 150^\circ$ Б) $(0,5 \cdot \sqrt[3]{27})^{-2}$ В) 5% от 8 Г) $\log_2 \frac{1}{8}$

2 т.

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_{x+1} \sqrt{x^2 - 16}$ е:

А) $[-4; 4]$ Б) $(-1; +\infty)$ В) $(0; +\infty)$ Г) $(4; +\infty)$

2 т.

3. Ако $a = \log_2 40$, $b = \log_2 100$ и $c = 2a - b$, то стойността на c е:

- А) 5 Б) 4 В) 3 Г) 2

2 т.

4. Числата $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ образуват геометрична прогресия. Известно е, че $\frac{a_7}{a_5} = 3$. Тогава $\sqrt{\frac{a_{17}}{a_1}}$ е равно на:

- А) 81 Б) 243 В) 729 Г) 2024

3 т.

5. Изразът $\frac{\sin 42^\circ \sin 56^\circ - \sin 48^\circ \sin 34^\circ}{\cos 24^\circ \cos 74^\circ - \cos 66^\circ \cos 16^\circ}$ е равен на:

- А) -1 Б) 0 В) 1 Г) -2

3 т.

6. Хорда пресича диаметър на окръжност под ъгъл 30° и го дели на отсечки с дължини 4 cm и 12 cm. Разстоянието от центъра на окръжността до хордата е:

- А) 1 cm Б) 2 cm В) 2,5 cm Г) 3 cm

3 т.

7. За триъгълник ABC е дадено, че $AC = 8$ cm, $AB = 10$ cm и $BC = 12$ cm. Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ ($L \in AB$), то тогава BL е равна на:

- А) 6 cm Б) 7 cm В) 8 cm Г) 9 cm

2 т.

8. Даден е успоредник $ABCD$ с лице 60 m^2 . Нека M е средата на страната AB и N е пресечната точка на AC и DM . Лицето на четириъгълника $MBCN$ е равно на:

- А) 15 m^2 Б) 20 m^2 В) 25 m^2 Г) 30 m^2

2 т.

9. Дадени са три окръжности, всяка с радиус 2 и всяка от които минава през центровете на другите две. Лицето на фигурата, образувана от всички точки, които са вътрешни едновременно и за трите окръжности е равно на:

- А) $2\pi - \sqrt{3}$ Б) $\pi - \sqrt{3}$ В) $\pi + \sqrt{3}$ Г) $2\pi - 2\sqrt{3}$

2 т.

10. Височината на правилна триъгълна пирамида е равна на основния ръб. Ако обемът на пирамидата е $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, то ръбът на пирамидата е:

- А) 9 Б) $9\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3}$ Г) 3

3 т.

11. Колко прави, лежащи в една равнина, от които никои 3 нямат обща точка и никои две не са успоредни, се пресичат в 55 точки?

- А) 10 Б) 15 В) 11 Г) 22

3 т.

12. От множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ се избира по случаен начин двойка различни числа (a, b) и се съставя квадратната функция $f_{(a,b)}(x) = x^2 - (a + b + 2)x + ab + 2b$. Да се намери вероятността за сбъждане на събитието $A = \{\text{Уравнението } f_{(a,b)}(x) = 0 \text{ има четни корени}\}$.

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{3}{2}$

3 т.

ВТОРА ЧАСТ

13. В правоъгълен триъгълник ABC височината CC_1 разделя хипотенузата AB на части с дължини $AC_1 = m$ и $BC_1 = n$. Да се намерят дължините на медианите AA_1 и BB_1 .

5 т.

14. Единият от ъглите на триъгълника ABC е с мярка 120° и страните му a , b , c в този ред са последователни членове на растяща аритметична прогресия. Ако периметърът на $\triangle ABC$ е 15 cm , да се намери лицето му.

5 т.

15. Основите на равнобедрения трапец $ABCD$ са $AB = 12 \text{ cm}$, $CD = 8 \text{ cm}$ и дължината на бедрото му е тяхното средно геометрично. Да се намери тангенсът на острия ъгъл φ между диагоналите AC и BD .

5 т.

16. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - x + 1$. Да се реши неравенството

$$2^{f(-x)+f(x)} > 4^{f(2x)-2x}.$$

5 т.

17. С цифрите 0, 1, 3, 5 и 7 са записани всички четири цифрени числа с неповтарящи се цифри. Да се намери вероятността случайно избрано от тях число да се дели на 5.

5 т.

ТРЕТА ЧАСТ

18. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете на триъгълника. Лицата на получените триъгълници са 28,60, 80. Да се намерят страните на триъгълника. 15 т.

19. Да се реши уравнението

$$3. \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}.$$

15 т.

20. Зар се хвърля 6 пъти. Да се намери вероятността повече от 3 пъти да се падне число, което се дели на 3. 15 т.

ЗАДАЧА НА ЖУРИТО

21. Дадена е квадратната функция $f(x) = 1 + x + x^2$.

а) Да се докаже, че най-голямата стойност на функцията $F(x) = \log_{(4-2\sqrt{3})} f(x)$ е

$$\log_{(2\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{12})} \left(\sin \frac{\pi}{3}\right).$$

б) Да се намери стойността $M = K_{12} \cdot (W_4)^{-1}$, където K_{12} е коефициентът пред x^{12} в нормалния вид на полинома $P(x) = [f(x)]^{10}$, а W_4 е броят на всички четирибуквени думи без повтарящи се символи, съставени с първите 10 букви на избрана азбука.

20 т.

Отговори

1. Б; **2.** Г; **3.** Б; **4.** А; **5.** А; **6.** Б; **7.** А; **8.** В; **9.** Г; **10.** Г; **11.** В; **12.** А.

13. $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 + n^2 + 5m \cdot n}$, $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4n^2 + 5m \cdot n}$;

14. $S_{\triangle ABC} = 15\frac{\sqrt{3}}{4}$; **15.** $\operatorname{tg} \varphi = 5\sqrt{23}$; **16.** $x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$; **17.** $P = \frac{7}{16}$;

18. 14, 30, 40; **19.** $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \bigcup x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$; **20.** $P = \frac{73}{729}$;

21. $M = \frac{451}{336}$.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 18.

Нека даденият триъгълник е ABC със страни $a < b < c$, нека O е центърът на вписаната в него окръжност и r е нейният радиус. От условието следва, че

$$\left| \begin{array}{l} S_{\triangle OBC} = 28 \\ S_{\triangle OCA} = 60 \\ S_{\triangle OAB} = 80 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{a \cdot r}{2} = 28 \quad (1) \\ \frac{b \cdot r}{2} = 60 \quad (2) \\ \frac{c \cdot r}{2} = 80 \quad (3) \end{array} \right. .$$

След събиране на трите равенства се получава

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r = 168 \quad (4).$$

От (1), (2), (3) и (4) се изразяват: $a = \frac{56}{r}$, $b = \frac{120}{r}$, $c = \frac{160}{r}$ и полупериметърът $p = \frac{168}{r}$. След заместване във формулата на Херон се стига до

$$\begin{aligned} \underbrace{S_{\triangle ABC}}_{=168} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\frac{168}{r} \left(\frac{168-56}{r} \right) \left(\frac{168-120}{r} \right) \left(\frac{168-160}{r} \right)} \iff \\ 168 &= \frac{1}{r^2} \sqrt{168 \cdot 112 \cdot 48 \cdot 8} \iff r^2 = \frac{\sqrt{168 \cdot 112 \cdot 48 \cdot 8}}{168} \iff r = 4. \end{aligned}$$

След заместване в изразите за страните се получават:

$$a = \frac{56}{r} = \frac{56}{4} = 14, \quad b = \frac{120}{r} = \frac{120}{4} = 30, \quad c = \frac{160}{r} = \frac{160}{4} = 40.$$

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 19.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{\sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} &= 3^{\sin 2x} \iff 3 \cdot 3^{-2 \sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \\ \iff 3^{1-2 \sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} &= 3^{\sin 2x} \iff 3^{\cos 2x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \\ \iff 3^{1+\cos 2x} &= 3^{\sin 2x} \iff 1 + \cos 2x = \sin 2x \iff \sin 2x - \cos 2x \\ &= 1 \left| \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right. \iff \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &\in \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ \Leftrightarrow x &= (4n+1)\frac{\pi}{4} \cup x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 20.

Задачата се моделира чрез схема на Бернули – равновероятно появяване на събитие (успех) при всеки опит от серия повтарящи се опити. Оттук вероятността за k успеха при серия от n опита е $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}$, където p е вероятността за успех при всеки опит и $q = 1 - p$ е вероятността за неуспех при всеки опит, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ е броят на комбинациите без повторения от n елемента k -ти клас. Конкретно за задачата, $n = 6$, $k = 4, 5, 6$ и $p = P(A)$, където $A = \{3, 6\}$ – два изхода за число, което се дели на 3 от общо 6 възможни, т. е. $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Тогава търсената вероятност е

$$\begin{aligned} P &= P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \underbrace{C_6^4}_{=15} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\frac{4}{3^6}} + \underbrace{C_6^5}_{=6} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)}_{\frac{2}{3^6}} + \underbrace{C_6^6}_{=1} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^6}_{\frac{1}{3^6}} = \\ \frac{60 + 12 + 1}{3^6} &= \frac{73}{729}. \end{aligned}$$

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 21.

а) Логаритмичната функция $F(x)$ е дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$ понеже $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (дискриминантата на $f(x)$ е $D_f = -3 < 0$ и параболата $p: y = f(x)$ е насочена по направление на ординатата Oy от декартовата координатна система Oxy). Понеже основата на логаритъма е $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \in (0, 1)$, то монотонността на $F(x)$ – намаляваща или растяща – е противоположна на тази на $f(x)$ в съответните интервали. Параболата на $f(x)$ има положителен старши коефициент и връх $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, откъдето $f(x)$ е намаляваща за $x \leq -\frac{1}{2}$ и $f(x)$ е растяща за $x \geq -\frac{1}{2}$. Тогава $F(x)$ е растяща за $x \leq -\frac{1}{2}$ и $F(x)$ е намаляваща за $x \geq -\frac{1}{2}$, като при $x = -\frac{1}{2}$ се достига НГС $F(x)$.

$$\text{НГС } F(x) = \log_{4-2\sqrt{3}}(\text{НМС } f(x)) = \log_{(\sqrt{3}-1)^2} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \log_{(\sqrt{3}-1)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Основата $(\sqrt{3} - 1)$ на логаритъма има следното тригонометрично представяне:

$$\sqrt{3}-1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}, \text{ а това на аргумента му е } \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}. \text{ Така НГС } F(x)=\log_{(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Имаме

$$[f(x)]^{10}=\underbrace{(1+x+x^2)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2)}_{10 \text{ множителя}}.$$

Едночлен, съдържащ x^{12} , се получава от избора на:

- x^2 от 6 множителя и 1 от останалите 4 множителя, т. е. по C_{10}^6 начина;
- x^2 от 5 множителя, x от 2 множителя и 1 от останалите 3 множителя, т. е. по $C_{10}^5 \cdot C_{10-5}^2$ начина;
- x^2 от 4 множителя, x от 4 множителя и 1 от останалите 2 множителя, т. е. по $C_{10}^4 \cdot C_{10-4}^4$ начина;
- x^2 от 3 множителя, x от 6 множителя и 1 от останалите 1 множител, т. е. по $C_{10}^3 \cdot C_{10-3}^6$ начина;
- x^2 от 2 множителя и x от останалите 8 множителя, т. е. по $C_{10}^2 \cdot C_{10-2}^8$ начина.

$$\text{Тогава } K_{12}=C_{10}^6+C_{10}^5 \cdot C_{10-5}^2+C_{10}^4 \cdot C_{10-4}^4+C_{10}^3 \cdot C_{10-3}^6+C_{10}^2 \cdot C_{10-2}^8.$$

$$K_{12}=\frac{10!}{6!4!}+\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{2!3!}+\frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{6!1!}+\frac{10!}{2!8!}.$$

От условието следва, че W_4 е равно на броя на наредените 4-елементни подмножества на множество с 10 елемента, т. е. на броя на вариациите от 10 елемента 4-ти клас.

$$W_4=V_{10}^4=10.9.8.7=\frac{10!}{6!}.$$

Оттук за търсената стойност M се получава

$$M=K_{12} \cdot (W_4)^{-1}=\frac{6!}{10!}\left(\frac{10!}{6!4!}+\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{2!3!}+\frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{6!1!}+\frac{10!}{2!8!}\right),$$

$$M=\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!}+\frac{5}{2!.4}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!.7.8}=\frac{1}{2!}\left(\underbrace{\frac{1}{3.4}+1+\frac{5}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7.8}}_{=\frac{8}{3}}\right)=$$

$$=\frac{7.8.8+3}{2.3.7.8}=\frac{451}{336}.$$

РЕЗУЛТАТИ

Максималният брой точки бе 120, като резултатът на всички участници бе преобразуван в оценка по шестобалната система. Тази оценка е валидна две години за кандидатстване в специалностите **Информатика, Компютърни науки, Софтуерно инженерство, Информационно брокерство и дигитални медии и Педагогика на обучението по математика и информатика** на факултет „Математика и информатика“ при ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Награди бяха определени за 5 участници. Победител в турнира с резултат от 97 точки е **Даниел Николаев Йовчев** от XII клас на ПМГ „Иван Вазов“ — Димитровград, който спечели златен медал и наградата на журито за най-пълно решение на задача 21. Сребърен медалист е **Божидар Тодоров Станчев** (82 точки), ученик в XII клас на същото училище. Бронзови медали бяха присъдени на **Светлозара Димова Колева** (78 точки) от XI клас на ПМГ „Васил Друев“ — Велико Търново, **Ивайло Пламенов Шопов** (77 точки) от XI клас на същото училище и **Станислав Иванов Трендафилов** (77 точки) от XII клас на ППМГ „Акад. Никола Обрешков“ — Бургас.

Повече подробности по организацията и резултатите има на сайта на турнира: <http://www.math-vt.com>.

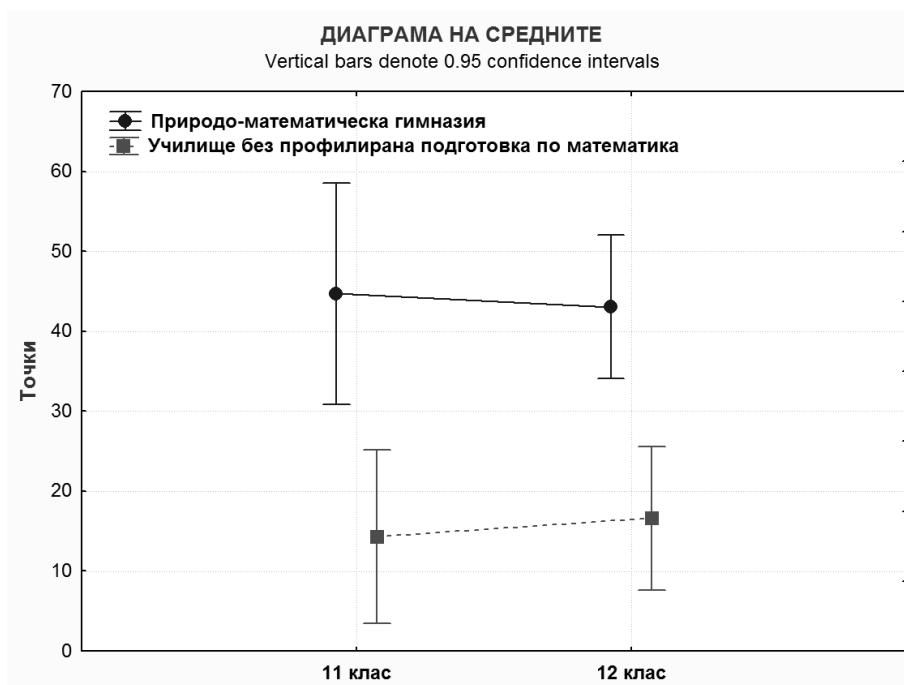
СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

В общия брой от 59 участвали ученици имаше 27 от природо-математически гимназии и 32 от училища без профилирана подготовка по математика, 21 от участниците бяха от XI клас, а останалите 38 — от XII клас, при независимо взаимно разпределение [$\chi^2(1) = 0,772$; $p\text{-value} = 0,380$].

Слаба приравнена оценка получиха 33 ученици, показали резултат по-малък от 23 точки, което представлява 56% от всички участвали. Оценка слаб получиха и 5 ученици от природо-математически гимназии.

Отлични оценки завоюваха 5 ученици, получили 77 или повече точки, а само един от тях има оценка 6,00.

Дисперсионният анализ на постиженията по точки показва статистически значим ефект на принадлежността към тип училище [$F(1,55) = 27,550$; $p\text{-value} < 0,001$] и отсъствие на значимост при фактора клас [$F(1,55) = 0,003$; $p\text{-value} = 0,954$], както и отсъствие на значимо взаимодействие [$F(1,55) = 0,138$; $p\text{-value} = 0,712$]. Post-Hoc анализът показва, че различието между класовете не е значимо както в групата на природо-математическите гимназии [$p\text{-value} = 0.838$], така и в групата на останалите училища [$p\text{-value} = 0,742$].



Както можеше да се очаква, учениците от природо-математическите гимназии показаха хомогенно по-високи резултати, което добре се вижда на фиг. 1. Тестът на Стюдънт за независими извадки показва отсъствие на статистически значимо различие по пол [$t(57) = 0,646$; $p\text{-value} = 0,521$] (при 26 мъже и 33 жени), което се потвърждава и след добавянето на пола като трети фактор в дисперсионния анализ [$F(1,51) = 0,326$; $p\text{-value} = 0,570$].

UNITED STATES ERSATZ MATH OLYMPIAD'23

Петко ЛАЗАРОВ, ППМГ „АКАД. Н. ОБРЕШКОВ“, БУРГАС

Информация за състезанието

USEMO е малко по-нова математическа олимпиада, отворена за участие към учениците от САЩ. Първото издание (USEMO 2019) е на 23 – 24 май 2020 година и от 2020 до 2023 година включително има издание към края на месец октомври. Причината за създаването на тази олимпиада е фактът, че националната олимпиада на САЩ беше отложена (както стана тогава и в България) заради COVID-19. За компенсация Еван Чен направи това състезание, както и подсказва името на олимпиадата, *ersatz* (бълг. *ерзац*, зн. непълноценен заместител). Но самата олимпиада е на едно много високо ниво със задачи, наподобяващи нивото на Международната Олимпиада по Математика (МОМ), но с няколко важни разлики.

- Тъй като една от целите на олимпиадата е да окуражава учениците да се занимават с математика и тъй като тя е не толкова престижна като МОМ или националната олимпиада на САЩ, тука има няколко интересни момента. Първият е, че можеш да станеш „лауреат“ най-много един път. Ако веднъж попаднеш в топ 3 на резултатите, ти вече нямаш право да участваш като състезател, а ако искаш можеш да предлагаш задачи или да проверяваш работите.
- Тук, за разлика от МОМ и националните олимпиади/състезания, е по-свободно предлагането на задачи. Всеки, който не се състезава, има право да предложи задачи за тазгодишното издание до 10 май 2024 г. и вече можете да се записвате да проверявате задачи (което силно препоръчваме, тъй като е забавно, интересно и е добро умение да можеш да намиращ грешки в математически решения). За повече информация може да погледнете сайта на олимпиадата <https://web.evanchen.cc/usemo.html> Доколкото ми е известно, дори неприетите задачи ги връщат с коментари, алтернативни решения и т.н.
- Целта на олимпиадата е повече да тренира математиците, а не да ги оценява. Затова заедно със самото оценяване на задачите, ние (проверяващите) пишем обратна връзка на участника, казвайки какво е сгрешил, обяснение защо има дадените точки и съвети какво е трябвало да направи и как да не допуска подобни грешки в бъдеще.

Тук прилагаме условията на задачите от олимпиадата.

Задачите от USEMO'23

Задача 1 (Олег Крижановски). Ще наричаме естественото число n *красиво*, ако за всяко цяло число $4 \leq b \leq 10000$ числото n , написано в b -ична бройна система, съдържа като последователни цифрите 2, 0, 2, 3 (в този ред, отляво надясно). Краен или безкраен брой са *красивите* числа?

Задача 2 (Холдън Муй). Всяка точка в равнината е обозначена с реално число. Покажете, че съществуват две различни точки P и Q , които са обозначени с числа с по-малка разлика, отколкото е разстоянието от P до Q .

Задача 3 (Максим Ли). Канму се опитва да чертае, обаче няма нито линия, нито пергел. Канму има устройство, което за дадени четири точки A, B, C, P в равнината построява изогонално спрегната точка на P спрямо триъгълника ABC , ако тя съществува. Покажете, че ако са маркирани две точки в равнината, Канму може само с това устройство и молив (за маркиране на други точки) да определи средата на отсечката, съединяваща тези две точки.

(Нека припомним, че *изогонално спрегната* точка на P спрямо триъгълника ABC е точката Q , такава, че AP и AQ са симетрични спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$, BP и BQ са симетрични спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$, CP и CQ са симетрични спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle BCA$.)

Задача 4 (Анкан Бхатачаря). Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H . Точките A_1, B_1, C_1 са избрани върху страните BC, CA, AB съответно така, че ортоцентърът на триъгълника $A_1B_1C_1$ е също H . Нека $A_2 = AH \cap B_1C_1$, $B_2 = BH \cap C_1A_1$ и $C_2 = CH \cap A_1B_1$.

Докажете, че ортоцентърът на $\triangle A_2B_2C_2$ е отново точката H .

Задача 5 (Николай Белухов). Дадено е $n \geq 2$ цяло число. Куб $n \times n \times n$ е разделен на n^3 единични кубчета. Реално ненулево число е написано във всеки от центровете на кубчетата така, че сумата на всички n^2 числа във всяка плочка $1 \times n \times n$, $n \times 1 \times n$ или $n \times n \times 1$ е равна на нула.

Възможно ли е да се окаже, че съществува равнина, която не минава през нито един от центровете и разделя положителните и отрицателните числа?

Задача 6 (Кайхин Уанг). Нека $n \geq 2$ е дадено цяло число.

- (а) Кое е най-голямото естествено число m (изразено чрез n) такова, че съществуват комплексни числа $r_1, r_2, \dots, r_n$, не всички от които са нули, за които

$$\prod_{k=1}^n (r_k + 1) = \prod_{k=1}^n (r_k^2 + 1) = \dots = \prod_{k=1}^n (r_k^m + 1) = 1.$$

- (б) За тази стойност на m определете максималната стойност на израза

$$\prod_{k=1}^n (r_k^{m+1} + 1).$$

Маркинг схема на задача 4

Аз бях отговорен за проверките на четвърта задача, както и за подготвянето на схема за оценяване, която направихме заедно с Мирослав Маринов. Първо ще разкажем какви бяха изискванията. Условието бяха да не се дават много точки за частични резултати, т.е. резултатите да са или 0^+ , или 7^- (тоест да няма резултати от типа 3, 4). Ще покажем двата най-често срещани подхода за решаване на задачата, като това бяха над 90% от синтетичните подходи.

Решение със степен на точка, от Николай Белухов

Нека D, E, F са петите в триъгълника ABC , а D_1, E_1, F_1 да са петите в триъгълник $A_1B_1C_1$,

$$\begin{aligned} k &:= HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF, \\ k_1 &:= HA_1 \cdot HD_1 = HB_1 \cdot HE_1 = HC_1 \cdot HF_1. \end{aligned}$$

Тъй като четириъгълникът $A_2D_1DA_1$ е вписан в окръжност с диаметър A_1A_2 , от степен на точка имаме, че

$$\begin{aligned} HA_2 \cdot HD &= HD_1 \cdot HA_1 = k_1 \\ \Rightarrow HA_2 &= \frac{k_1}{HD} = \frac{k_1}{k} \cdot HA. \end{aligned}$$

Общи указания за оценяване

Непълни подходи за смятане (координатна система, комплексни числа, ...) биват оценявани спрямо синтетичните наблюдения в тях.

Не се дават точки за чертеж и прости наблюдения.

Не се взимат точки за проблеми при разположение на точките (например неползване на насочени ъгли).

Ако състезателят е подброял към задачата по повече от едно от официалните решения, той получава максимума от всички възможни оценявания.

Не се дават точки за показване, че задачата е еквивалентна на това да се докаже, че $AB \parallel A_2B_2$, или че ABC е хомотетичен на $A_2B_2C_2$ с център H .

Оценяване за решение 1

Следните частични точки са налични и адитивни:

- **+1 точка** за доказване, че A_1 , D , A_2 и D_1 лежат на една окръжност.
- **+1 точка** за показване, че е достатъчно да докажем, че $\frac{HA_2}{HA}$ е константа (или $\frac{HA_2}{HA} = \frac{HB_2}{HB} = \frac{HC_2}{HC}$, както каквото и да е идентично).

Оценяване за решение 2

Следните частични точки са налични, като само първите две са адитивни:

- **+1 точка** за доказване, че A_1 , D , A_2 и D_1 лежат на една окръжност.
- **+1 точка** за показване, че е достатъчно да докажем, че B_2 , C_2 , E и F лежат на една окръжност.
- **+2 точки** за доказателство, че B_2 , C_2 , E и F лежат на една окръжност.

Коментар. Идеята зад правенето на маркинг схемите беше да не даваме много частични точки. Беше решено да дадем **+1 точка** за пренаписване на исканото условие $AB \parallel A_2B_2$ в по-удобен за атакуване вид.

Само трима ученици се възползваха от частичните точки, един за вписаността на B_2C_2EF , един за пренаписване на исканото условие във вида $\frac{HA_2}{HA} = \frac{HB_2}{HB} = \frac{HC_2}{HC}$ и третият за получаване на равенства на определени отношения. Освен тези трима, имаше 29 състезатели с пълни решения по задачата, и един с 6 точки, поради недефиниране на петите на височините и липса на чертеж (тоест имаше писания от типа „ $A_1B_2D_1E$ е вписан“, обаче ние не знаехме какво е E).

Ще покажем решения и на останалите две задачи с българско участие в тях.

Задача 1

В тази задача се включиха трима българи при проверяването, както и двамата с М. Маринов също помагахме, като си свършихме с нашата задача. Ще покажем най-доброто според нас решение на тази задача.

Всъщност ще докажем, че „повечето“ естествени числа са *красиви*.

Твърдение. За всяко фиксирано цяло число $b \geq 4$ аритметичната плътност на числата, чийто запис в b -ична бройна система не съдържа 2023 в този ред, е нула.

Доказателство. Да наречем едно число *грозно*, ако то не съдържа 2023 в запис си. Числото N има най-много $\lceil \log_b N \rceil + 1$ цифри в b -ична система, значи за всяко $1, 2, \dots, N$ можем да гледаме само последните $4 \left\lceil \frac{\log_b N + 1}{4} \right\rceil$ цифри. Разделяме тези числа на групи от по 4. Тогава за всяко *грозно* число нито една от групите не съдържа 2023, значи за всяка група има най-много $b^4 - 1$ възможности. Тоест броят на *грозните* числа е най-много

$$(b^4 - 1)^{\left\lceil \frac{\log_b N + 1}{4} \right\rceil} \leq C(b^4 - 1)^{\frac{\log_b N}{4}},$$

където C зависи само от b . За да докажем, че плътността на множеството от *грозните* числа е нула, ще разпишем

$$\begin{aligned} C \frac{(b^4 - 1)^{\log_b N / 4}}{N} &= C \sqrt[4]{\frac{(b^4 - 1)^{\log_b N}}{N^4}} = \\ &= C \sqrt[4]{\frac{(b^4 - 1)^{\log_b N}}{(b^4)^{\log_b N}}} = C \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{b^4}\right)^{\log_b N}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

когато $N \rightarrow \infty$. Така доказахме, че плътността на числата, които не изпълняват условието на задачата, е нула, тоест има безкрайно много красиви числа.

Коментар. Изненадващ брой от решенията бяха по-конструктивни, опитвайки се (индуктивно или конструктивно) да докажат, че съществуват безкрайно много „подобни по вид“ числа, които да са *красиви*. Според нас решението с вероятностен методи и плътност на множества е много по-красиво и поучително.

Задача 5

Тази задача е предложена от Николай Белухов.

Ще покажем, че няма как да се случи равнина, която не минава през нито един от центровете на кубчетата, да разделя положителните и отрицателните числа. Нека да допуснем противното – че съществува таква равнина α . Нека O_{xyz} е координатна система, чийто център O лежи в α и осите са успоредни на ръбовете на куба. Нека уравнението на α е $ax + by + cz = 0$. Без загуба на общността можем да допуснем, че всички положителни числа са в полуравнината $ax + by + cz > 0$ и всички отрицателни са в полуравнината $ax + by + cz < 0$ спрямо α .

За всяко $i \in \{1, 2, \dots, n^3\}$ нека в точка (x_i, y_i, z_i) е написано числото r_i . Тогава за всяко i имаме

$$(ax_i + by_i + cz_i)r_i > 0.$$

Значи

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = \\ &= \sum_x ax \cdot \left(\sum_{i; x_i=x} r_i \right) + \sum_y by \cdot \left(\sum_{i; y_i=y} r_i \right) + \sum_z cz \cdot \left(\sum_{i; z_i=z} r_i \right) = \\ &= \sum_i ax_i r_i + \sum_i by_i r_i + \sum_i cz_i r_i = \\ &= \sum_i (ax_i + by_i + cz_i) r_i > 0. \end{aligned}$$

С това получаваме противоречие и решението е завършено.

ИЗБРАНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ СЪСТЕЗАНИЯТА ПРЕЗ 2023/24 ГОДИНА

НЕВЕНА СЪБЕВА, ИМИ-БАН

Задача 1 (TST'24, Malaysia). Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и височини BE и CF . Избрани са точки $P \in BH^\rightarrow$ и $Q \in CH^\rightarrow$ така, че $PQ \parallel BC$ и четириъгълникът $APHQ$ е вписан. Ако втората пресечна точка на окръжностите, описани около APF и около AQE , е $X \neq A$, докажете, че $AX \parallel BC$.

Решение. Тъй като $APHQ$ е вписан и $PQ \parallel BC$, като използваме традиционните означения в триъгълник, изразяваме:

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle ANQ = \beta, \sphericalangle QAN = \sphericalangle QPH = \sphericalangle CBH = 90^\circ - \gamma,$$

$$\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BAH - \sphericalangle QAN = 90^\circ - \beta - (90^\circ - \gamma) = \gamma - \beta,$$

$$\sphericalangle QAP = \sphericalangle QNB = \alpha,$$

$$\sphericalangle FAP = \sphericalangle BAQ + \sphericalangle QAP = \gamma - \beta + \alpha = 180^\circ - 2\beta,$$

$$\sphericalangle QAE = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAQ = \alpha - \gamma + \beta = 180^\circ - 2\gamma.$$

От

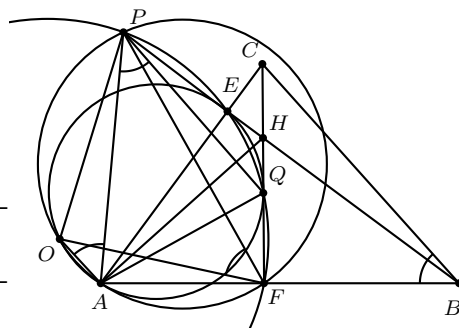
$$\frac{HE}{HF} = \frac{CH}{BH} = \frac{HQ}{HP}$$

следва, че

$$HP \cdot HE = HE \cdot HF,$$

т.е. четириъгълникът $PEQF$ е вписан.

Нека центърът на описаната окръжност около $PEQF$ е O . Тогава



$$\sphericalangle FOP = 2(180^\circ - \sphericalangle PQF) = 360^\circ - 2(90^\circ + \beta) = 180^\circ - 2\beta.$$

Така получихме, че $\sphericalangle OFP = \sphericalangle OPF = \beta$.

Освен това $\sphericalangle FOP = 180^\circ - 2\beta = \sphericalangle PAF$, т.е. четириъгълникът $OFPA$ е вписан. Следователно $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OFP = \beta = \sphericalangle APQ$, т.е.

$$OA \parallel PQ.$$

Аналогично, $\sphericalangle QOE = 2\sphericalangle QPE = 2\sphericalangle PBC = 2(90^\circ - \gamma) = \sphericalangle QAE$, т.е. четириъгълникът $OAQE$ е вписан; $O \equiv X$ и твърдението е доказано.

В решението на следващата задача ще използваме следната

Теорема за изогоналните прави. Нека правите OB и OC са изогонални в ъгъл $\sphericalangle AOD$. Ако $AC \cap BD = Q$, $AB \cap CD = P$, то OP и OQ също са изогонални относно $\sphericalangle AOD$.

Решение. Лесно е да се съобрази, че при съответните означения на чертежа, условието за изогоналност на правите OP и OQ в $\sphericalangle MON$ е

$$\frac{x_P \cdot x_Q}{y_P \cdot y_Q} = 1.$$

В дадената задача да означим с x_K и y_K съответните разстояния от точка K до OA и OD .

Имаме

$$x_B \cdot x_C = y_B \cdot y_C.$$

От съответните подобия следва, че

$$\frac{x_P}{x_B} = \frac{AP}{AB}, \quad \frac{x_Q}{x_C} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{x_P \cdot x_Q}{x_B \cdot x_C} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}.$$

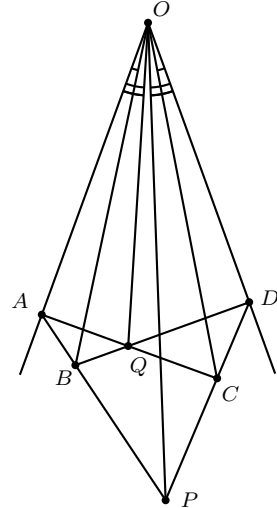
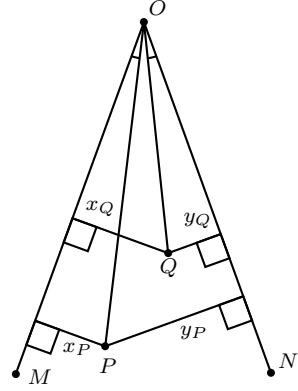
Аналогично

$$\frac{y_P \cdot y_Q}{y_B \cdot y_C} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DB}.$$

Тогава

$$\frac{x_P \cdot x_Q}{y_P \cdot y_Q} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{DC}{DP} \cdot \frac{DB}{DQ},$$

а последното произведение е 1, което се получава от теоремата на Менелай за $\triangle BPD$ и правата AC и за $\triangle CQD$ и правата AP .



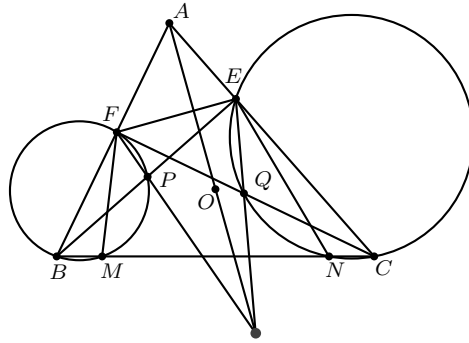
Задача 2 (Квант, 2024). В остроъгълния триъгълник ABC с височини BE и CF и център на описаната окръжност O са избрани точките $M, N \in BC$ така, че $BM = CN$. Ако правата BE пресича описаната около триъгълника MBF окръжност в точка P , а правата CF пресича описаната около триъгълника NCE окръжност в точка Q , да се докаже, че правите PF , QE и AO се пресичат в една точка.

Решение. От $\sphericalangle FPB = \sphericalangle FMB$ (четириъгълникът $BMPF$ е вписан) и $\sphericalangle FEP = \sphericalangle FCM$ (четириъгълникът $BCEF$ е вписан) следва, че

$$\triangle EPF \sim \triangle CMF \Rightarrow \frac{PE}{EF} = \frac{MC}{CF}.$$

Аналогично,

$$\frac{FQ}{EF} = \frac{BN}{BE}.$$



Тъй като $MC = BN$, то

$$\frac{PE}{BE} = \frac{QF}{CF},$$

т.е. точките P и Q делят височините BE и CF в едно и също отношение.

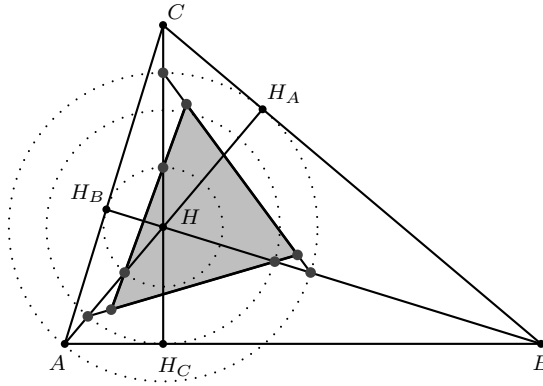
Като използваме, че $\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF}$, получаваме, че

$$\frac{PE}{FQ} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \triangle AEP \sim \triangle AFQ.$$

Последното означава, че AP и AQ са изогонални.

Сега ще използваме теоремата за изогоналност. Двойките прави AE , AF и AP , AQ са изогонални в $\sphericalangle BAC$, следователно AH и AG също са изогонални, където $H = PE \cap QF$ и $G = PF \cap QE$. Но H е ортоцентърът на ABC , следователно правата AO (която е изогонална на AH) съвпада с правата AG .

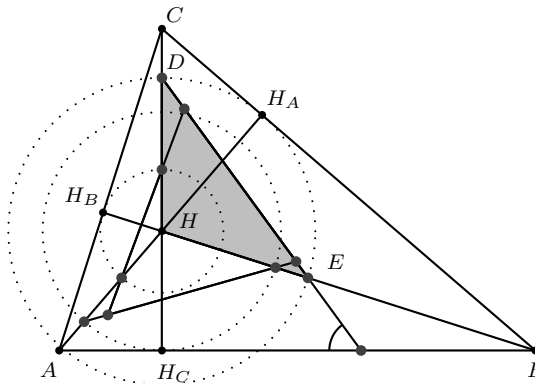
Задача 3 (Московска олимпиада, 11 клас, 2024). В остроъгълния триъгълник ABC височините AH_A , BH_B и CH_C се пресичат в точка H . През точките, в които окръжността с център H и радиус HH_A пресича отсечките BH и CH , е построена права l_A . Аналогично се определят правите l_B и l_C . Докажете, че ортоцентърът на триъгълника, образуван при пресичането на правите l_A , l_B , l_C съвпада с центъра на вписаната в триъгълника ABC окръжност.



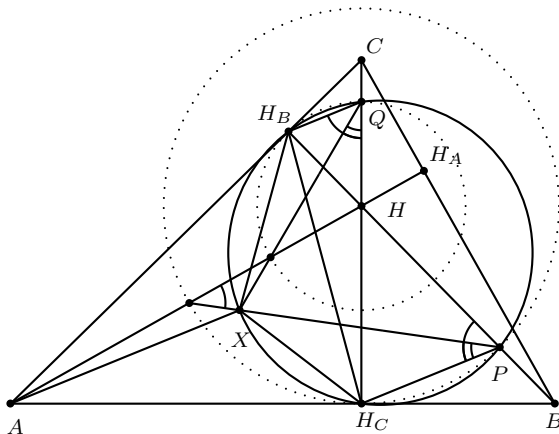
Решение. Нека D и E са съответните пресечни точки на окръжността с център H и радиус HH_A с отсечките CH и BH , т.е. DE е правата l_A . Тъй като $\sphericalangle(l_A, HE) = \frac{\alpha}{2}$, то

$$\sphericalangle(l_A, AB) = \sphericalangle(l_A, HE) + \sphericalangle(HE, AB) = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

т.е. l_A е перпендикулярна на ъглополовящата през върха A в триъгълника ABC .



Достатъчно е да покажем, че ъглополовящата през върха A в триъгълника ABC минава през пресечната точка X на l_B и l_C .



Нека $l_B \cap HC = Q$, $l_C \cap HC = Q$. Изразяваме $\sphericalangle HPX = \frac{\gamma}{2}$,

$$\sphericalangle H_B QX = \sphericalangle H_B QH - \sphericalangle XQH = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Следователно X , H_B , Q и P лежат на една окръжност.

Аналогично $\sphericalangle HQX = \frac{\beta}{2}$,

$$\sphericalangle H_C PX = \sphericalangle H_C PH - \sphericalangle XPH = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Следователно X , H_C , Q и P лежат на една окръжност.

Получихме, че петте точки X , H_C , H_B , Q и P лежат на една окръжност. Тогава

$$\sphericalangle XH_C H_B = \sphericalangle XPH_B = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sphericalangle AH_C H_B,$$

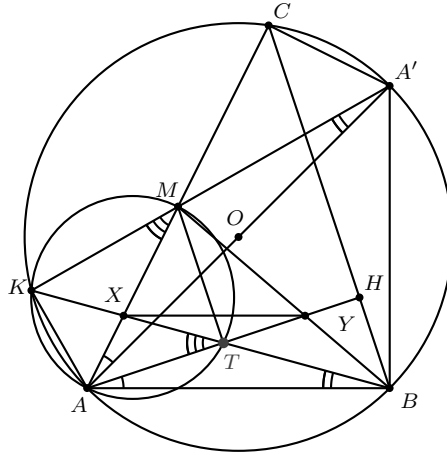
т.е. $H_C X$ е ъглополовяща в $\triangle AH_C H_B$.

Аналогично и $H_B X$ е ъглополовяща в $\triangle AH_C H_B$, т.е. X е пресечната точка на ъглополовящите в този триъгълник. Получихме, че X лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$.

Така се оказа, че височините на триъгълника, образуван при пресичането на правите l_A , l_B , l_C , лежат на съответните ъглополовящи в триъгълника ABC окръжност, откъдето следва желаното твърдение.

Задача 5 (Санкт-Петербург, 2023). Точката M е среда на страната AC на остроъгълния триъгълник ABC . На по-малката дъга AC от описаната около този триъгълник окръжност k е избрана точка K така, че $\angle AKM = 90^\circ$. Нека $BK \cap AM = X$, а височината през A пресича BM в точка Y . Да се докаже, че $XY \parallel AB$.

Решение. Ако A' е диаметрално противоположната точка на A , то K е пресечната точка на правата $A'M$ и окръжността k .

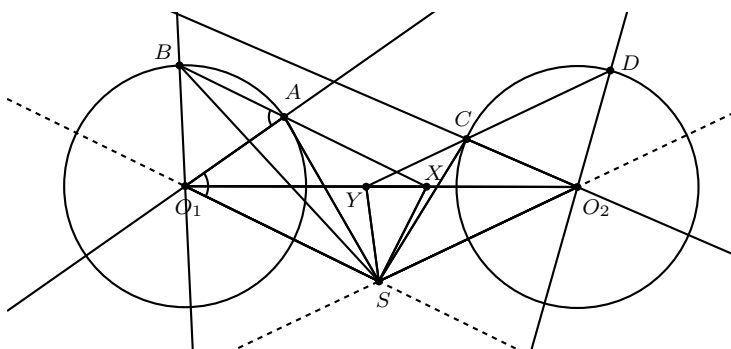


От $\angle BAN = \angle CAA'$ и $\angle ABK = \angle AA'K$ следва, че ако T е пресечната точка на AN и BK , то $\angle AMK = \angle ATK$, т.е. четириъгълникът $ATMK$ е вписан и от тук $MT \perp AN$.

Последното означава, че MT е средна отсечка в триъгълника ANC , т.е. MT разполювава AB . Тъй като в триъгълника ABM точка T лежи на медианата през M , то правите AT и BT разделят страните BM и AN в едно и също отношение, т.е. $XY \parallel AB$.

Задача 6 (Турнир на градовете, пролетен тур, 2024). Дадени са две еднакви окръжности $\omega_1(O_1)$ и $\omega_2(O_2)$. На отсечката O_1O_2 са взети точки X и Y така, че $O_1Y = O_2X$. Точките A и B лежат на ω_1 и правата AB минава през X . Точките C и D лежат на ω_2 и правата CD минава през Y . Да се докаже, че съществува окръжност, която се допира до правите AO_1 , BO_1 , CO_2 и DO_2 .

Решение. Нека външните ъглополовящи на $\angle AO_1B$ и $\angle CO_2D$ се пресичат в точка S , а правите BO_1 и DO_2 – в точка T . Тогава $\angle TO_1S = \frac{1}{2} \angle TO_1A = \angle O_1BA$, т.е. $O_1S \parallel BX$. Аналогично $O_2S \parallel DY$.



От равенството на лицата на следните триъгълници

$$[O_1AS] = [O_1XS] = [O_2YS] = [O_2CS]$$

следва, че S е равноотдалечена не само от правите O_1T и O_1A ; O_2T и O_1C , но и от правите O_1A и O_2C , т.е. е център на окръжност, която се допира до правите AO_1 , BO_1 , CO_2 и DO_2 .

Задача 7 (Турнир на градовете, пролетен тур, 2024). На описаната около триъгълника ABC окръжност са отбелязани точките M и N – среди съответно на дъгите BAC и CBA , и точките P и Q – среди съответно на дъгите BC и AC . Окръжността k_1 е външнoвписана срещу върха A и се допира до страната BC в точка A_1 , а окръжността k_2 е външнoвписана срещу върха B и се допира до страната BC в точка B_1 . Ако $A_1 \in NP$, докажете, че $B_1 \in MQ$.

Решение. От лемата за триъбеца следва, че $PB = PC = PI_A$, а от външната лема за триъбеца $NA = NC = NI_A$.

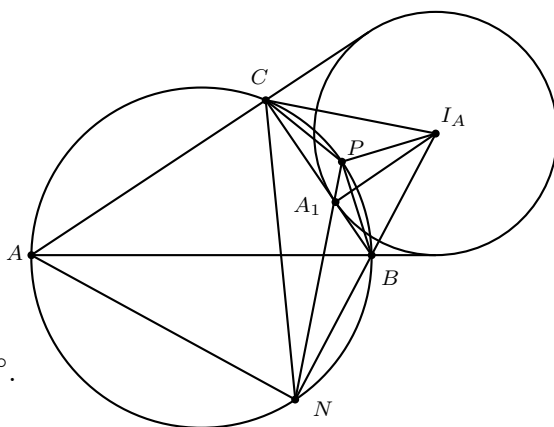
Следователно PN е симетрала на CI_A . Тогава

$$A_1 \in PN \iff CA_1 = A_1I_A,$$

т.е. $\triangle CA_1I_A$ е равнобедрен и правоъгълен, т.е. $\sphericalangle BCA = 90^\circ$.

Аналогично

$$B_1 \in MQ \iff \sphericalangle BCA = 90^\circ.$$



МАРИЯ ДРЕНЧЕВА, МАРИН ХРИСТОВ, СМГ

Задача 1. Нека B' и C' са симетричните точки на B и C спрямо страните AC и AB на $\triangle ABC$. Допирателната към описаната около $\triangle AB'C'$ окръжност в точка A пресича правите BC и $B'C'$ в точки D и E съответно. Да се докаже, че $AD = AE$.

Композиция на инверсия и симетрия

Следователно $AE'C'B'$ е равнобедрен трапец. От друга страна, D' (образът на D) е пресечната точка на правата AE' и описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Да забележим, че от инверсията

$$AD' = \frac{AB \cdot AC}{AD} \quad \text{и} \quad AE' = \frac{AB \cdot AC}{AE}.$$

Следва, че $AE = AD \iff AE' = AD'$. Ако предефинираме D' като точката, за която $AD' = AE'$ и $D' \neq E'$, то искаме еквивалентно да докажем, че точките A, D', C, B лежат на една окръжност. Сведохме задачата до еквивалентната

Задача 2. Нека B' и C' са симетричните точки на B и C спрямо страните AC и AB на $\triangle ABC$. Нека правата през A , успоредна на $B'C'$, пресича описаната около $\triangle AB'C'$ окръжност в точка E' , а D' е симетричната точка на E' относно A . Да се докаже, че точките A, D', B, C лежат на една окръжност.

Ще използваме тригонометричен вариант на теоремата на Птолемей.

Лема. Ако $\sphericalangle XOZ < 180^\circ$ и точката Y лежи във вътрешността на този ъгъл, то $OXYZ$ е вписан четириъгълник тогава и само тогава, когато

$$OX \sin \sphericalangle YOZ + OZ \sin \sphericalangle XOY = OY \sin \sphericalangle XOZ.$$

Доказателство. Нека фиксираме точките O, X, Z и лъча OY . Нека този лъч пресича описаната около $\triangle XOZ$ окръжност в точка Y' . Точката Y' изпълнява равенството от теоремата на Птолемей. От друга страна, ние сме фиксирали $\sphericalangle XOY$ и значи всичко в равенството, освен OY , е фиксирано и понеже $0^\circ < \sphericalangle XOY < 180^\circ$, съществува единствена стойност на OY , която изпълнява уравнението. С това лемата е доказана.

Ще приложим лемата за $\{O, X, Y, Z\} = \{A, D', C, B\}$. Условието четирите точки да лежат на една окръжност се превръща в

$$AD' \sin \sphericalangle BAC + AB \sin \sphericalangle D'AC = AC \sin \sphericalangle D'AB.$$

За краткост нека $\sphericalangle B'AC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC' = \alpha$, $\sphericalangle AB'C' = \beta$, $\sphericalangle AC'B' = \gamma$, $AD' = AE' = a$, $AB = AB' = b$, $AC = AC' = c$. Горното равенство става

$$a \sin \alpha + b \sin(\beta + \alpha) = c \sin(\beta + 2\alpha).$$

Можем да се справим с a, b, c със синусови теореми в $\triangle AC'E'$ и $\triangle AB'C'$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{AE'}{AC'} = \frac{\sin \sphericalangle AC'E'}{\sin \sphericalangle AE'C'} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(180^\circ - \beta)} = \\ &= \frac{-\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta} = \frac{-\sin(2\beta + 3\alpha)}{\sin \beta}, \\ \frac{b}{c} &= \frac{AB'}{AC'} = \frac{\sin \sphericalangle AC'B'}{\sin \sphericalangle AB'C'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + 3\alpha)}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

Сега остава да разпишем тригонометричното равенство:

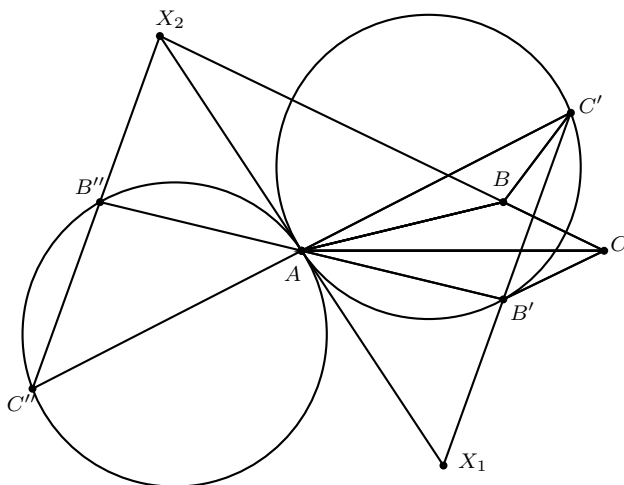
$$\begin{aligned} 0 &= a \sin \alpha + b \sin(\beta + \alpha) - c \sin(\beta + 2\alpha) \\ \iff 0 &= \frac{a}{c} \sin \alpha + \frac{b}{c} \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta + 2\alpha) \\ \iff 0 &= \frac{-\sin(2\beta + 3\alpha)}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha + \frac{\sin(\beta + 3\alpha)}{\sin \beta} \cdot \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta + 2\alpha) \\ \iff 0 &= -\sin(2\beta + 3\alpha) \sin \alpha + \sin(\beta + 3\alpha) \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta + 2\alpha) \sin \beta \\ \iff 0 &= -\frac{1}{2}(\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos(2\beta + 4\alpha)) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(2\beta + 4\alpha)) - \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(2\alpha + 2\beta)). \end{aligned}$$

Последното равенство е тъждество, понеже всеки от изразите $\cos(2\beta + 4\alpha)$, $\cos(2\alpha + 2\beta)$, $\cos(2\alpha)$, се среща по два пъти и се съкращава. С това задачата е решена.

Да разгледаме и решението на Мария Дренчева, което е изцяло синтетично.

С помощта на една симетрия

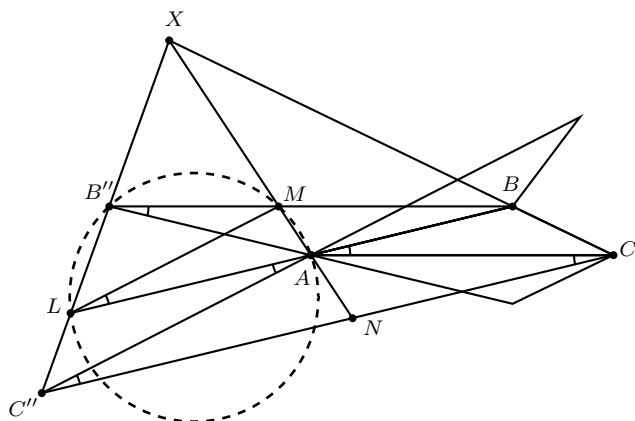
Да означим симетричните точки на B' и C' относно точката A с B'' и C'' .



Описаните окръжности около триъгълниците $AB''C''$ и $AB'C'$ се допират в точка A . Нека l е общата им допирателна и $B'C' \cap l = X_1$, $B''C'' \cap l = X_2$. Тъй като $B''C'' \parallel B'C'$ и $AB'' = AB'$, то X_1 и X_2 са симетрични спрямо A .

Твърдението на задачата е еквивалентно на това $B''C''$ и BC да се пресичат върху общата допирателна на $(AB'C')$ и $(AB''C'')$.

Сега може да опростим чертежа и да работим със следната част от него. Означаваме $B''C'' \cap BC = X$, $AX \cap BB'' = M$, $AX \cap CC'' = N$.



Твърдение. Четириъгълникът $LAMB''$ е вписан.

Доказателство. Първо да видим, че $AB \parallel CC''$. Наистина, имаме $\sphericalangle CAC'' = 180^\circ - 2\sphericalangle CAB$ и тъй като $AC = AC''$, то

$$\sphericalangle AC''C = \sphericalangle ACC'' = \sphericalangle BAC = \alpha$$

и така $AB \parallel CC''$. Аналогично $AC \parallel BB''$.

Нека $AB \cap C''X = L$. От $BL \parallel CC''$ и $MB \parallel AC$ с теоремата на Талес получаваме

$$\frac{XL}{XC''} = \frac{XB}{XC} = \frac{XM}{XA} \implies LM \parallel AC'',$$

откъдето $\sphericalangle MLA = \sphericalangle LAC'' = \alpha$, т.е. $\sphericalangle ALM = \sphericalangle AB''M = \alpha$, което означава, че четириъгълникът $LAMB''$ е вписан.

Сега остава да видим, че това решава задачата. Наистина, от тук следва, че

$$\sphericalangle B''AM = \sphericalangle B''LM = \sphericalangle B''C''A,$$

което означава, че XN е допирателната l към описаната около триъгълника $AB''C''$ окръжност.

Опитайте сами: още три задачи от Санкт Петербургската олимпиада

Задача 1. В триъгълника ABC е построена медианата BM . На продължението на страната AC след точка C е отбелязана точка D така, че $BD = 2CD$. Описаната окръжност за триъгълника BMC пресича отсечката BD в точка N . Да се докаже, че $AC + BM > 2MN$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 120^\circ$. На ъглополовящата на $\sphericalangle B$ е отбелязана такава точка D , за която $\sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB$. На отсечката AB е отбелязана такава точка E , за която $AE = AD$. Докажете, че $EC = ED$.

Задача 3. През върховете A и B на равнобедрения триъгълник ABC ($AB = BC$) минава окръжност, която пресича отсечките AC и BC съответно в точките X и Y . Описаната около триъгълника CXY окръжност пресича отсечката BX в точката Z . Ако $AB = 2CZ$, намерете отношението $BZ : ZX$.

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА НОМ ЗА 7. КЛАС

НЕВЕНА СЪБЕВА, БОЯНКА САВОВА

Националният кръг на 73. Национална олимпиада по математика с проведе на 13 април 2024 г. Домакин на състезанието беше НПМГ „Акад. Любомир Чакалов“.

Победителите в олимпиадата са:

Стоян Балтов (ППМГ, Бургас) с резултат $6,75 + 7 + 7 = 20,75$ точки, на първо място,

Кирил Зулямски (СМГ) с резултат $7 + 4,75 + 6,75 = 18,5$ точки, на второ място,

Мартин Чавдаров (СМГ) и **Боян Бояджиев** (ЧОУ „Св. София“), и двамата с резултат $7 + 7 + 2 = 16$ точки, на трето място.

Предлагаме Ви условията и решенията на задачите.

Задача 1. В редица са записани в нарастващ ред сто последователни естествени числа. Сборът на първите пет числа е k пъти по-малък от сбора на последните пет числа в редицата, като k е естествено число. Намерете:

- а) всички възможни стойности на k ;
- б) най-малкия възможен сбор на всички числа в редицата.
- в) най-голямото просто число, което може да е член на дадената редица.

Решение. а) *Отговор:* 2, 6 и 20.

Нека първото число в редицата е n . Сборът на първите пет числа е

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10,$$

а сборът на последните пет числа е

$$(n + 95) + (n + 96) + (n + 97) + (n + 98) + (n + 99) = 5n + 485.$$

От условието следва, че

$$k(5n + 10) = 5n + 485 \iff k(n + 2) = n + 97 \iff (k - 1)n = 97 - 2k.$$

Следователно $k - 1 \neq 0$ и $k - 1$ е делител на $97 - 2k = 95 - 2(k - 1)$. Това означава, че $k - 1$ дели 95 и имаме следните възможности:

- 1. *случай.* $k - 1 = 1 \iff k = 2$ и $n = 93$;
- 2. *случай.* $k - 1 = 5 \iff k = 6$ и $n = 17$;
- 3. *случай.* $k - 1 = 19 \iff k = 20$ и $n = 3$;

4. случай. $k - 1 = 95 \iff k = 96$ и $n = -1$, което не е естествено число.

Така търсените стойности са 2, 6 и 20.

Забележка. До решението може да се стигне, като от равенството $k(n+2) = n+97$ се заключи, че $n+2$ дели 95; тъй като $n+2 > 2$, то $n+2$ е 5, 19 или 95, а k съответно е 20, 6 или 2.

б) *Отговор:* 5250.

Най-малък сбор се получава при най-малката възможна стойност на n , т.е. при $n = 3$. Тогава сборът е $3+4+\dots+102 = 50(3+102) = 5250$.

в) *Отговор:* 191.

При $k = 2$ последните две числа на редицата са 191 и 192, т.е. в тази редица 191 е най-голямото просто число.

При $k = 6$ последното число на съответната редица е 116, а при $k = 20$ е 102, т.е. в тези редици няма по-голямо от 191 просто число.

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC е построена ъглополовящата AL ($L \in BC$). Точка M лежи на катета AC , а симетралата на отсечката CM пресича AL в точка P . През M е построена права t , перпендикулярна на AL , която пресича хипотенузата AB в точка N , като $\angle CPN = 144^\circ$.

а) Намерете $\angle ABC$.

б) Ако правата BP пресича страната AC в точка Q и $QL = BL$, намерете $\angle CBQ$ и докажете, че $S_{ABQ} = \frac{AB \cdot AP}{4}$.

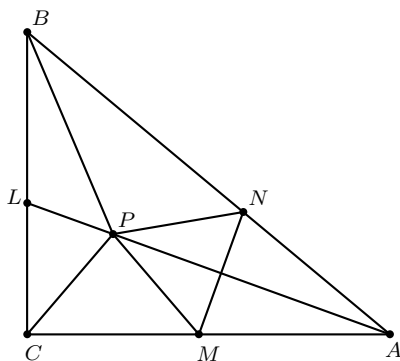
Решение. Първо да отбележим, че $P \in s_{CM} \implies PM = PC$.

Триъгълникът AMN е равнобедрен, тъй като ъглополовящата на $\angle MAN$ е перпендикулярна на MN . Следователно AL е симетрала на отсечката MN . От $P \in AL$ следва, че $PN = PM$.

Така получихме, че

$$PN = PM = PC.$$

Да означим $\angle MPN = x$ и $\angle MPC = y$. По условие $\angle CPN = 144^\circ$, т.е. $x + y = 144^\circ$.



От равнобедрените триъгълници MPN и MPC получаваме, че $\sphericalangle NMP = 90^\circ - \frac{1}{2}x$ и $\sphericalangle CMP = 90^\circ - \frac{1}{2}y$. Тогава

$$\sphericalangle CMN = \sphericalangle NMP + \sphericalangle CMP = 180^\circ - \frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{144^\circ}{2} = 108^\circ,$$

а съседният му ъгъл е $\sphericalangle AMN = 72^\circ$. В равнобедрения триъгълник AMN намираме

$$\sphericalangle MAN = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ,$$

т.е. в правоъгълния $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Втори начин. След като сме доказали, че $PN = PM = PC$, да построим височината PD към основата в равнобедрения $\triangle PCM$. Да означим $\sphericalangle CPD = \sphericalangle MPD = x$ и $\sphericalangle MPA = \sphericalangle NPA = y$. От

$$\sphericalangle CPN = 2x + 2y = 144^\circ \Rightarrow \sphericalangle DPA = x + y = 72^\circ.$$

От $\triangle PDA$ намираме

$$\sphericalangle PAD = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 36^\circ, \sphericalangle ABC = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$

б) Първо ще намерим $\sphericalangle CBQ$.

Първи начин. Върху страната AB избираме точка R така, че $AQ = AR$. Триъгълниците ALQ и ALR са еднакви по първи признак ($AQ = AR$, AL е обща, $\sphericalangle LAQ = \sphericalangle LAR = 18^\circ$), следователно

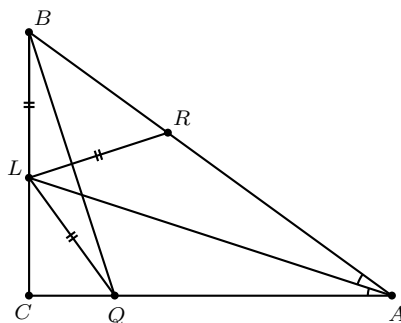
$$LR = LQ = LB.$$

В равнобедрения триъгълник LRB имаме $\sphericalangle LRB = \sphericalangle LBR = 54^\circ$.

От равенството на съответните външни ъгли в еднаките триъгълници ALQ и ALR получаваме, че $\sphericalangle CQL = 54^\circ$.

В правоъгълния триъгълник CQL намираме $\sphericalangle CLQ = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Тъй като $\sphericalangle CLQ$ е външен на ъгъла срещу основата в равнобедрения триъгълник LQB , намираме $\sphericalangle LBQ = \sphericalangle LQB = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$.

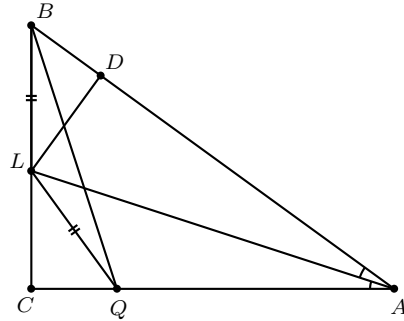


Втори начин. Построяваме $LD \perp AB$.

Тъй като $L \in l_{\angle BAC}$, то $LD = LC$ и получаваме, че триъгълниците CLQ и BLD са еднакви по четвърти признак, откъдето $\angle CLQ = \angle BLD$. Но

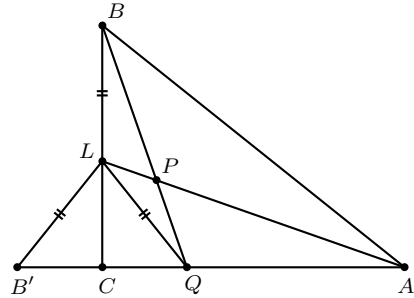
$$\angle BLD = 90^\circ - \angle LBD = 36^\circ,$$

следователно $\angle CLQ = 36^\circ$, откъдето решението продължава както при първия начин.



Трети начин. На правата AC да отбележим точка B' , $AB' = AB$.

Триъгълниците ABL и $AB'L$ са еднакви по първи признак, следователно $\angle AB'L = \angle ABL = 54^\circ$ и $B'L = BL = QL$. Последното означава, че $\triangle B'QL$ е равнобедрен и $\angle B'QL = \angle AB'L = 54^\circ$. Тогава в правоъгълния $\triangle CQL$ намираме $\angle CLQ = 36^\circ$, откъдето решението продължава както при първия начин.



Остава да докажем, че $S_{ABQ} = \frac{AB \cdot AP}{4}$.

Първи начин. Първо да отбележим, че

$$\angle QBA = \angle CBA - \angle LBQ = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ = \angle QAB,$$

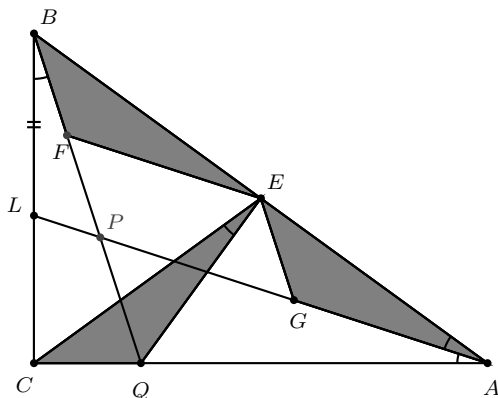
т.е. триъгълникът ABQ е равнобедрен, като $AQ = BQ$. Нека $QE = h$ е височината към основата AB в този триъгълник; E е среда на AB . Тогава CE е медиана към хипотенузата в $\triangle ABC$, следователно $CE = EA = EB$ и $\angle ACE = \angle CAE = 36^\circ$, а $\angle CEA = 80^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ$. Намираме

$$\angle CEQ = \angle CEA - \angle QEA = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

Да построим $EF \parallel AP$, $F \in BQ$, и $EG \parallel BQ$, $G \in AP$. Да отбележим равенствата на съответните ъгли $\angle GAE = \angle FEB = 18^\circ$ и $\angle GEA = \angle FEB = 36^\circ$.

Триъгълниците CQE , EGA и BFE са еднакви по втори признак ($CE = EA = EB$, $\sphericalangle CEQ = \sphericalangle GAE = \sphericalangle FEB = 18^\circ$, $\sphericalangle QCE = \sphericalangle GEA = \sphericalangle FBE = 36^\circ$). Следователно

$$FE = GA = QE = h.$$



Остава да забележим, че $PGEF$ е успоредник и следователно $PG = EF = h$. Тогава $AP = PG + GA = 2h$ и получаваме

$$S_{ABQ} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AP}{2} = \frac{AB \cdot AP}{4}.$$

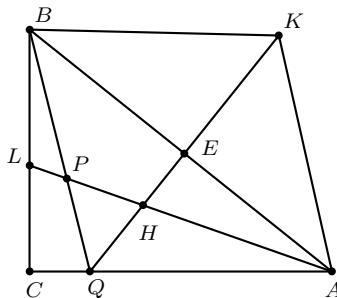
Втори начин. Да удвоим височината QE в $\triangle ABQ$, т.е. отбелязваме точка $K \in QE$, $QE = EK$. Тогава четириъгълникът $QBKA$ има взаимно разполовяващи се и перпендикулярни диагонали, следователно е ромб. От тук $\sphericalangle QAE = \sphericalangle KAE = 36^\circ$. От $\triangle QBE$ намираме $\sphericalangle BQK = 54^\circ$ и тъй като $BQ \parallel AK$, то и $\sphericalangle QKA = 54^\circ$.

Ако $H = QK \cap AP$, от $\sphericalangle HAK = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$ следва, че $\triangle HAK$ е равнобедрен и $KH = AH$.

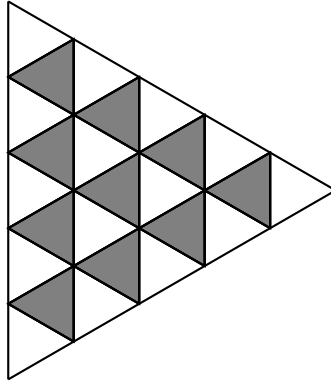
От $\sphericalangle QPH = \sphericalangle PAK = 54^\circ$ (кръстни) следва, че и $\triangle PHQ$ е равнобедрен и $PH = QH$. Тогава

$$AP = AH + HP = KH + HQ = 2QE.$$

Нататък решението продължава както при първия начин.



б) Да оцветим шахматно триъгълничетата, като във върховете са бели триъгълничета. Нека сборът на числата в черните триъгълничета е b , а сборът на числата в белите триъгълничета е w .



Тъй като на всеки ход се променят по еднакъв начин числата в едно бяло и едно черно триъгълниче, то разликата $w - b$ се запазва. Тъй като в началото $w = b = 0$, то след всеки ход

$$w = b.$$

В момента, в който в триъгълничетата са записани k^2 последователни естествени числа $n, n + 1, \dots, n + k^2 - 1$, имаме

$$w = b = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} \left(k^2 n + \frac{1}{2}(k^2 - 1)k^2 \right) = \frac{1}{2}k^2 n + \frac{1}{4}(k^2 - 1)k^2.$$

Броят на белите триъгълничета е

$$N_w = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Най-малката възможна стойност на сбора на числата в белите триъгълничета е

$$\begin{aligned} w &\geq n + (n + 1) + \dots + (n + N_w - 1) = \\ &= N_w \cdot n + (1 + 2 + \dots + (N_w - 1)) = \\ &= N_w \cdot n + \frac{1}{2}(N_w - 1)N_w = \\ &= \frac{N_w}{2}(2n + N_w - 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)}{4} \left(2n + \frac{k(k+1)}{2} - 1 \right) = \\
&= \frac{k(k+1)}{2}n + \frac{k(k+1)(k^2+k-2)}{8}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{1}{2}k^2n + \frac{1}{4}(k^2-1)k^2 \geq \frac{k(k+1)}{2}n + \frac{k(k+1)(k^2+k-2)}{8}.$$

Като разделим двете страни на неравенството на k и приведем към общ знаменател, получаваме

$$4kn + 2(k-1)(k+1)k \geq 4(k+1)n + (k+1)(k-1)(k+2),$$

откъдето

$$2(k-1)(k+1)k - (k+1)(k-1)(k+2) \geq 4n \iff$$

$$4n \leq (k+1)(k-1)(2k-k-2) = (k+1)(k-1)(k-2),$$

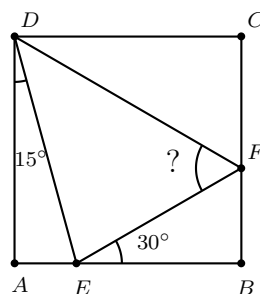
което искахме да докажем.

Намерете ъгъла!

На читателите на списание *Математика* **Димитър Георгиев** предлага следната задача.

Даден е квадрат $ABCD$. Точката $E \in AB$ е такава, че $\sphericalangle ADE = 15^\circ$, а точката $F \in BC$ е такава, че $\sphericalangle BEF = 30^\circ$.

Намерете $\sphericalangle EFD$.



Задачата може да се реши и от седмокласник – но е нужно въображение (и допълнително построение).

Решението ще намерите на стр. 68.



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2022 г. и бр. 1, 2 и 3 от 2023 г.

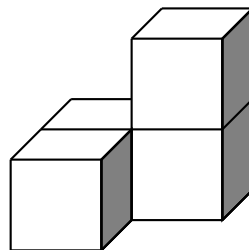
Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас. Победителят получава наградата на броя – разбира се, математическа литература.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg.

* * *

Задача 1. Тялото на чертежа е съставено от четири кубчета. Повърхнината на тялото е $\overline{abc} \text{ cm}^2$, а обемът на тялото е $\overline{cab} \text{ cm}^3$.

Намерете цифрите a , b и c .



Задача 2. Чарли има книга с n страници, като всички страници са номерирани последователно с числата $1, 2, 3, \dots, n$. Ако отворите книгата на произволно място, на страницата отляво има четен номер, а на страницата отдясно има нечетен номер. На последната страница (преди задната корица) има четен номер.

За съжаление един лист от книгата на Чарли е скъсан. Чарли преброил, че общо 2024 цифри са използвани за номериране на останалите $n - 2$ страници. (Обърнете внимание, че това е не сборът на номерата на страниците.) Да се намери n .

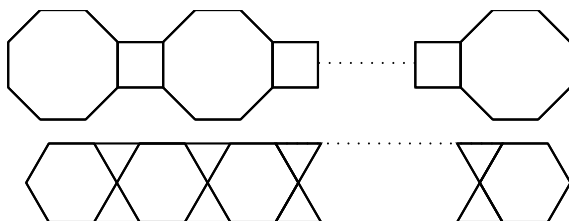
Задача 3. Точката M е центърът на правилния десетоъгълник $ABCDEFGHIJ$ със страна 12. Ако S е пресечната точка на MC и AD , намерете разликата между периметъра на четириъгълника $ABCD$ и периметъра на триъгълника DMS .

Срокът за представяне на решенията е 30.06.2024 г.

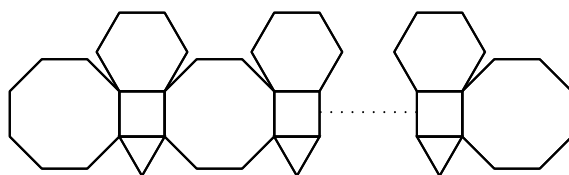
**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 1/2024 Г.**

Задача 1. Дари получила комплект, който съдържа плочки с формата на равностранен триъгълник, квадрат, правилен шестоъгълник и правилен осмоъгълник. Всяка от фигурите има страна a cm, където a е естествено число, по-голямо от 1.

Като използвала всички плочки в комплекта, Дари сглобила показаните фигури. Първата фигура има обиколка 2024 cm, а втората има обиколка 726 cm.



- а) Намерете страната a и общия брой плочки в комплекта.
- б) От плочките в комплекта Дари сглобила най-голямата възможна фигура от вида:



Намерете обиколката на получената фигура.

Решение. Ако осмоъгълниците са n на брой, квадратите са $n - 1$ и обиколката на първата фигура е $8 \cdot n \cdot a = 2024$. От последното равенство следва, че $n \cdot a = 11.23$.

Ако шестоъгълниците са k на брой, равностранните триъгълници са $2k - 2$ и обиколката на втората фигура е $2 \cdot (2k + 1) \cdot a = 726$. От последното равенство следва, че $(2k + 1) \cdot a = 3.11.11$.

Тъй като $\text{НОД}(11.23; 3.11.11) = 11$, то $a = 11$. Намираме $n = 23$ и $2k + 1 = 33$, т.е. $k = 16$. Следователно има 23 осмоъгълни, 22 квадратни, 16 шестоъгълни и 30 триъгълни плочки; общо 91.

б) В получената фигура участват всичките 16 шестоъгълни плочки, 16 квадратни, 16 триъгълни и 17 осмоъгълни. Обиколката е

$$(16 \cdot 7 + 17 \cdot 6 + 2) \cdot 11 = 2376 \text{ cm.}$$

Задача 2. Дядо Желъо има пет внучки: Ирина, Теодора, Лилия, Димана и Милица. Оказало се, че:

- $\frac{1}{8}$ от годините на дядо Желъо са колкото $\frac{1}{3}$ от сбора на годините на Теодора и Милица;
- възрастта на Ирина е $\frac{1}{4}$ от годините на дядо Желъо;
- $\frac{1}{4}$ от годините на Ирина са колкото $\frac{1}{3}$ от годините на Лилия;
- $\frac{1}{3}$ от годините на Теодора са колкото $\frac{1}{2}$ от годините на Милица.

Ако Димана е с 1 година по-голяма от Милица и с 2 години по-малка от Лилия, намерете на колко години е дядо Желъо.

Решение. Нека дядо Желъо е на $8x$ години. Тогава Ирина е на $\frac{1}{4} \cdot 8x = 2x$ години.

Щом $\frac{1}{8}$ от годините на дядо Желъо, т.е. x години, са колкото $\frac{1}{3}$ от сбора на годините на Теодора и Милица, то Теодора и Милица са общо на $3x$ години. Ако означим

$$\frac{1}{3} \text{ от годините на Теодора} = \frac{1}{2} \text{ от годините на Милица} = a \text{ години,}$$

получаваме, че Теодора е на $3a$ години, а Милица е на $2a$ години. Общо са на $3x$ години, т.е.

$$3a + 2a = 3x \iff 5a = 3x \iff a = 0,6x.$$

Така получихме, че годините на Теодора са $3 \cdot 0,6x = 1,8x$, а годините на Милица са $2 \cdot 0,6x = 1,2x$.

Щом $\frac{1}{3}$ от годините на Лилия са колкото $\frac{1}{4}$ от годините на Ирина, което е $\frac{1}{4} \cdot 2x = 0,5x$, то Лилия е на $3 \cdot 0,5x = 1,5x$ години.

От условието, че Димана е с 1 година по-голяма от Милица следва, че Димана е на $1,2x + 1$ години.

От друга страна, Димана е с 2 години по-малка от Лилия, т.е. е на $1,5x - 2$ години. Получаваме уравнението

$$1,2x + 1 = 1,5x - 2 \iff 3 = 0,3x \iff x = 10.$$

Следователно дядо Желъо е на 80 години.

Задача 3. Асен и Боби играят игра. Дават им кутия с $n \geq 1$ бонбони. Асен започва първи. За един ход, ако в кутията има k бонбони, играчът избира естествено число $l \leq k$, като l и k са взаимнопрости, и изяде l бонбони от кутия. Играчът, който изяде последния бонбон, печели. Кой има печеливша стратегия, в зависимост от n ?

Решение. Ако $n > 1$ е нечетно, първият играч, Асен, изяде $n - 2$ бонбона и побеждава. При $n = 1$ той очевидно побеждава.

Ако n е четно, първият играч трябва да вземе нечетен брой бонбони. Така вторият, Боби, ще получи кутия с нечетен брой бонбони и ще победи.

Следователно при нечетно n печели първият, а при четно n печели вторият.

НАГРАДА

Наградата на броя печели **Ирина Янакиева** от 5 клас, СМГ, която ни изпрати верни и отлично описани решения и на трите конкурсни задачи.

ЗАДАЧИ ЗА ЛИЦА – СТЬПКА ПО СТЬПКА

Задача 1. Даден е успоредник $ABCD$. Точка M лежи на страната BC , а пресечната точка на отсечките DM и AC е P . Лицето на $\triangle ABM$ е 5 cm^2 , а лицето на $\triangle PMC$ е 4 cm^2 .

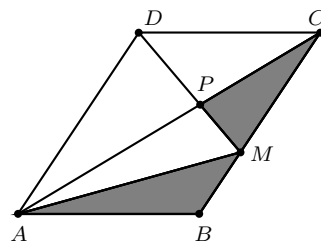
а) Намерете лицето на $\triangle APD$.

б) Докажете, че $S_{APM} = S_{DPC}$.

в) Докажете, че

$$S_{APD} \cdot S_{PMC} = S_{APM} \cdot S_{DPC}.$$

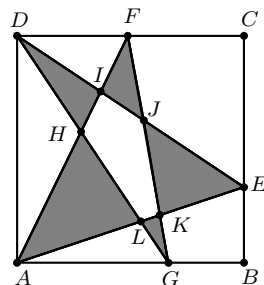
г) Намерете лицето на $ABCD$.



Отговор. г) 30 cm^2

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 12 cm . На страните му са отбелязани точките E , F и G , както е показано на чертежа. Ако лицето на петоъгълника $HIJKL$ е 12 cm^2 , да се намери сборът от лицата на оцветените триъгълници.

Отговор. 48 cm^2





ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ДЗИ ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

Юлиян Цветков, ППМГ „Гео Милев“, Стара Загора

На задачи от 1 до 15 посочете верния отговор.

1. За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаме $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Дължината на вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ е:

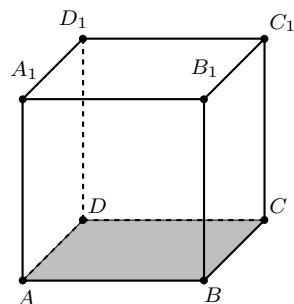
- А) 3 Б) $\sqrt{13}$ В) $\sqrt{17}$ Г) 5

2. Правата l минава през точката $A(2; 3)$ и е успоредна на правата с уравнение $4x - y - 4 = 0$. Правата l отсича от координатните оси триъгълник с лице:

- А) 2 кв.ед. Б) 3 кв.ед. В) $\frac{25}{8}$ кв.ед. Г) $\sqrt{17}$ кв.ед.

3. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ има ръб с дължина $\sqrt{3}$. Дължината на ос-отсечката на правите BD и CC_1 е:

- А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
В) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ Г) $\frac{3}{2}$



4. Стойностите на a , за които фокусът на параболата $y^2 = ax$ лежи на окръжността $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, са:

- А) -2 Б) 0,5 В) 2 Г) 2 и -2

5. Уравнението $x^3 - 3x^2 + (a + 1)x - 1 = 0$ има един цял и два ирационални корена. Стойността на параметъра a е:

- А) -6 Б) 0 В) 2 Г) 5

6. Границата на числовата редица $a_n = \frac{n^2 - \sqrt{n}}{2n^2 + 3n + 1}$ е:

- А) 0 Б) $\frac{1}{2}$ В) 2 Г) $\sqrt{2}$

7. Уравнението $6x^2 - x - 1 = 0$ има корени x_1 и x_2 . Безкрайната сума

$$S = x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_1^n + x_2^n + \dots$$

има стойност:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{3}{4}$ Г) 1

8. Кои от посочените функции

I. $y = x \cdot \operatorname{tg} x$ II. $y = \sin^2 x$ III. $y = \sin x + \cos x$

са четни и периодични?

- А) I Б) II В) I и III Г) II и III

9. Колко е сборът на локалните екстремуми на функцията

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 ?$$

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

10. Броят на точките от графиката на функцията

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

в които допирателните към графиката на $f(x)$ са успоредни на правата $y = \frac{1}{2}x$, е:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

11. Радиусът на сфера, описана около правилна триъгълна призма, всички ръбове на която имат дължина 6, е:

- А) $3\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{19}$ В) $2\sqrt{5}$ Г) $\sqrt{21}$

12. Триъгълник със страна 9 cm и височина към нея $\sqrt{5}$ cm е завъртян около дадената страна. Обемът на полученото ротационно тяло е:

- А) $3\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$ Б) $15\pi \text{ cm}^3$ В) $9\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$ Г) $45\pi \text{ cm}^3$

13. Джеки и Арни стрелят последователно по мишена, избирайки реда по случаен начин с равен шанс за всеки.

Ако Джеки стреля пръв, улучва с вероятност 0,5, а ако стреля втори – с вероятност 0,9.

Ако стреля пръв, Арни улучва с вероятност 0,8. Ако стреля след Джеки, улучва с вероятност 0,3.

След като всеки е стрелял по веднъж, се оказало, че мишената е улучена и от двамата. Шансът на всеки от тях да стреля първи е равен. Каква е вероятността Арни да е стрелял втори?

- А) $\frac{5}{29}$ Б) $\frac{7}{11}$ В) $\frac{7}{9}$ Г) $\frac{29}{100}$

14. Вероятността баскетболист да улучи кош с всеки свой изстрел е една и съща и е по-голяма от тази да не го улучи. При това, вероятността от четири опита стрелецът да улучи точно два пъти, е $\frac{8}{27}$. Вероятността да улучи кош с един изстрел е:

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{5}{9}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{8}{9}$

15. Теглото на рибите от даден вид е нормално разпределена случайна величина с математическо очакване 2 кг и стандартно отклонение 0,53 кг. Вероятността произволно избран екземпляр да тежи между 1,8 кг и 2,2 кг е приблизително:

- А) 4% Б) 30% В) 48% Г) 85%

На задачи 16, 17 и 18 напишете подробни решения и обосновки.

16. В декартова координатна система са дадени точките $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$, $C(13, 2)$ и $D(9, 6)$.

А) Докажете, че $ABCD$ е успоредник и намерете периметъра и лицето му.

Б) Намерете уравнението на описаната около $\triangle ABD$ окръжност и проверете дали средата M на BC е вътрешна за окръжността.

17. А) Решете уравнението

$$3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$$

в множеството на реалните числа.

Б) Докажете, че редицата

$$\{a_n\}, \text{ за която } a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \geq 1),$$

е строго растяща, ограничена отгоре и намерете нейната граница, ако съществува.

18. В триъгълна пирамида $ABCD$ е дадено, че $AB + CD = 20$, $CD \perp (ABC)$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.

Нека $AB = x$.

Изразете обема на пирамидата като функция на x .

Намерете стойността на x , за която се достига максимален обем.

За получената стойност на x намерете радиуса на описаната около пирамидата сфера и дължината на ос отсечката на правите AB и CD .

Отговори и кратки решения

1 Б; **2** В; **3** В; **4** Г; **5** А; **6** Б; **7** В; **8** Б; **9** В; **10** В; **11** Г; **12** Б; **13** А; **14** В; **15** Б.

16. А) Намираме

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2); -2 - 2) = (4; -4) \text{ и } \overrightarrow{DC} = (13 - 9; 2 - 6) = (4; -4). \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD \text{ е успоредник. Тогава } \overrightarrow{AD} = (11, 4). \text{ Намираме}$$

$$\cos(\sphericalangle BAD) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{4 \cdot 11 + (-4) \cdot 4}{\sqrt{4^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{11^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{274}}.$$

$$\text{Следователно } \sin(\sphericalangle BAD) = \frac{15}{\sqrt{274}}. \text{ Тогава}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin(\sphericalangle BAD) = 60 \text{ кв.ед.}, \quad P_{ABCD} = 2 \left(4\sqrt{2} + \sqrt{137} \right).$$

Б) Нека т. $(x_0; y_0)$ е центърът на описаната около ABD окръжност. Решаваме системата:

$$\begin{cases} (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 2)^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 + 2)^2 \\ (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 2)^2 = (x_0 - 9)^2 + (y_0 - 6)^2 \end{cases}$$

$$\text{и намираме } x_0 = \frac{109}{30}; y_0 = \frac{109}{30}. \text{ Тогава}$$

$$R^2 = \left(\frac{109}{30} + 2 \right)^2 + \left(\frac{109}{30} - 2 \right)^2 = \frac{30962}{900}.$$

Уравнението на окръжността е

$$c: \left(x - \frac{109}{30}\right)^2 + \left(y - \frac{109}{30}\right)^2 = \frac{30962}{900}.$$

За $M = (7,5; 0)$, получаваме $MO^2 < \frac{30962}{900}$, т.е. M е вътрешна за k .

17. А) Прилагаме схемата на Хорнер и намираме, че

$$3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (3x - 1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

Търсените корени са $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Б) Ще използваме индукция и за двете свойства.

Твърдение 1. Редицата е строго растяща.

1. При $n = 1$ имаме $a_2 = \sqrt{2} > a_1 = 0$.

2. Допускаме, че за $n = k$ е изпълнено $a_{k+1} > a_k$.

$$3. a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{2 + a_{k+1}} - \sqrt{2 + a_k} = \frac{a_{k+1} - a_k}{\sqrt{2 + a_{k+1}} + \sqrt{2 + a_k}} > 0.$$

Следователно $\{a_n\}$ е растяща.

Твърдение 2. Редицата е ограничена отгоре, като $a_n < 2$.

1. За $n = 1$ е вярно $a_1 = 0 < 2$.

2. Допускаме, че за $n = k$ е изпълнено $a_k < 2$.

$$3. a_{k+1} - 2 = \sqrt{2 + a_k} - 2 = \frac{a_k - 2}{\sqrt{2 + a_k} + 2} > 0.$$

Следователно $a_n < 2$.

Редицата е ограничена отгоре и растяща, следователно е сходяща. Ако $\lim a_n = l$, от $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ следва, че

$$l = \sqrt{2 + l} \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0.$$

От решенията само $l = 2$ е положително. Получаваме, че $\lim a_n = 2$.

18. Нека $AB = x$. Изразяваме $CD = 20 - x$ и $BC = x$. $\cotg 30^\circ = \sqrt{3}$. Тогава

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{3} \cdot x(20 - x) = \frac{\sqrt{3}}{6} (-x^3 + 20x^2).$$

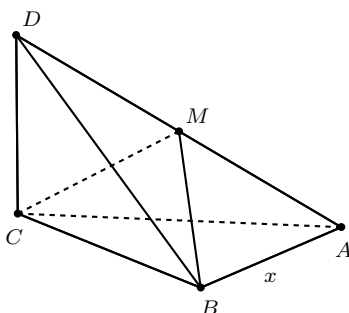
Определяме ДМ: $x \in (0; 20)$. Намираме

$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} (-3x^2 + 40x) = \frac{-3\sqrt{3}}{6} \left(x - \frac{40}{3}\right) x.$$

За $x \in \left(0; \frac{40}{3}\right)$ функцията $V(x)$ расте, за $x \in \left(\frac{40}{3}; 20\right)$ намалява.

Имаме

$$\max V(x) = V\left(\frac{40}{3}\right).$$



От теорема за трите перпендикуляра следва, че $BD \perp BA$. Нека е средата на AD . Тогава $CM = BM = AM = DM = R_{\text{оп.сф}}$.

$$R_{\text{оп.сф}} = \frac{1}{2}AD = \frac{10}{3}\sqrt{17}.$$

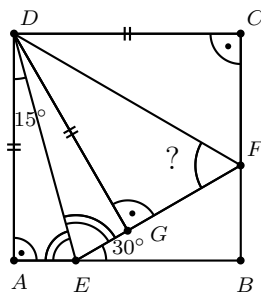
Тъй като $BC \perp DC$ и $BC \perp AB$, то $BC = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ е търсената ос отсечка.

Решение на задачата от страница 58

Забележете, че $\sphericalangle AED = \sphericalangle FED = 75^\circ$. Това означава, че DE е ъглополовяща на $\sphericalangle AEF$ и следователно разстоянието DG от D към EF е равно на DA , т.е. на страната на квадрата.

Тогава точка D е на равни разстояния и от раменете на $\sphericalangle EFC$, което означава, че DF е ъглополовяща на $\sphericalangle EFC = 120^\circ$.

Така получихме, че $\sphericalangle EFD = 60^\circ$.



ПЪРВА ЧАСТ

1. Колко са 30% от $1\frac{1}{3}$?

- А) 0,1 Б) 0,3 В) 0,4 Г) 1

2. Обиколката на окръжност с радиус r cm е 16π cm. Колко квадратни сантиметра е лицето на кръг с радиус $\frac{r}{2}$?

- А) 8π Б) 16π В) 32π Г) 64π

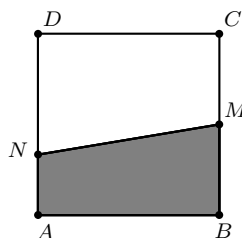
3. Ако x е решението на уравнението $\frac{2-x}{3} - 2 = \frac{x+4}{6}$, стойността на израза $\frac{x^2 \cdot x^3}{(x^2)^3}$ е:

- А) 1 Б) -1,5 В) -0,25 Г) -1

4. Нормалният вид на многочлена $(x-2)(x+4) - (x+2)(x-4)$ е:

- А) 0 Б) $4x$ В) $4x - 16$ Г) $2x^2 - 16$

5. На чертежа $ABCD$ е квадрат със страна $4x+8$ cm, точката M е среда на BC , а точката N от страната AD е такава, че NA е равна на 25% от AD . Колко квадратни сантиметра е лицето на трапеца $ABMN$?



- А) $6x^2 + 24x + 24$ Б) $12x^2 + 24x + 48$
В) $8x^2 + 32x + 32$ Г) $6x^2 + 12x + 48$

6. Числената стойност на израза

$$(x-1)(x^2+x+1) - x(x-2)(x+2)$$

при $x = -\frac{3}{4}$ е:

- А) 0 Б) -1 В) -4 Г) 2

7. Кой от посочените изрази може да е множител в разлагането на многочлена $2x^3 - 18xy^2$ на множители?

- А) $x + 9y$ Б) $x - 9y$ В) $x^2 + 3y$ Г) $x - 3y$

8. Две числа a и b се отнасят както $2 : 3$. Ако a намалим с 1, а b увеличим с 1, новите числа се отнасят както $1 : 2$. Сборът $a + b$ е равен на:

- А) 5 Б) 7,5 В) 10 Г) 15

9. Общият корен на уравнения $(x + 3)(x - 6) = 0$ и $|x + 4,5| = 1,5$ е:

- А) -3 Б) -6 В) 3 Г) 6

10. Коренът на уравнението $(x + 1)(2x - 3) = 2(x + 2)^2$ е:

- А) $-\frac{7}{5}$ Б) $-\frac{1}{5}$ В) $-\frac{11}{9}$ Г) $-\frac{7}{9}$

11. Параход изминал разстоянието между две пристанища по течението за 2 h, а срещу течението за 2 h 30 min. Ако скоростта на течението на реката е 2 km/h, то разстоянието между пристанищата е:

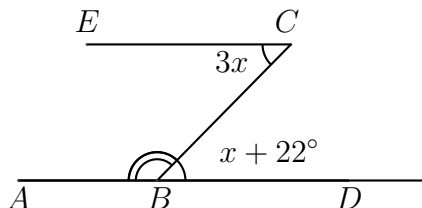
- А) 30 km Б) 35 km В) 40 km Г) 45 km

12. В два рудника се добива желязна руда. Смесици 60 kg руда със 70% съдържание на желязо от първия рудник с 90 kg руда със 80% съдържание на желязо от втория рудник. Колко е процентното съдържание на желязо в получената смес?

- А) 75% Б) 76% В) 77,5% Г) 78%

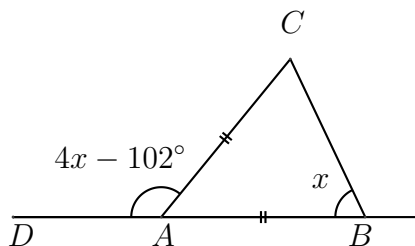
13. Точка B лежи на отсечката AD и CE е успоредна на AB . Ако е дадено, че $\angle ECB = 3x$ и $\angle DBC = x + 22^\circ$, намерете $\angle ABC$.

- А) 158° Б) 157°
В) 150° Г) 147°



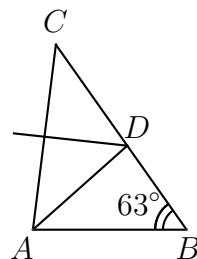
14. На чертежа $AB = AC$, $D \in AB$, $\sphericalangle B = x$ и $\sphericalangle DAC = 4x - 102^\circ$. Тогава $\sphericalangle BAC$ е равен на:

- А) 72° Б) 76°
В) 78° Г) 88°



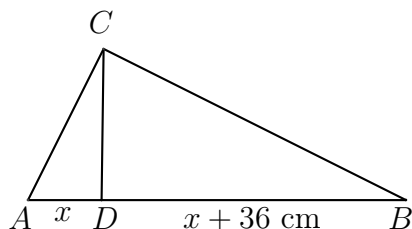
15. В триъгълника ABC ъглополовящата на $\sphericalangle A$ пресича симетралата на страната AC в точка D от страната BC . Ако $\sphericalangle B = 63^\circ$, то $\sphericalangle CAB$ е равен на:

- А) 66° Б) 72°
В) 78° Г) 84°



16. В правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 90^\circ$ и $\sphericalangle B = 30^\circ$ е построена височината CD . Ако $AD = x$ cm, $BD = x + 36$ cm, колко сантиметра е дължината на AC ?

- А) 12 Б) 18
В) 36 Г) 54



17. Неравенството $4x + 2 < 7x - 13$ е еквивалентно на:

- А) $(x + 1)^2 < x^2 - 9$ Б) $(x + 1)^2 < x^2 + 9$
В) $(x - 1)^2 < x^2 + 9$ Г) $(x - 1)^2 < x^2 - 9$

18. В успоредник $ABCD$ диагоналите имат дължини 32 cm и 28 cm, а страната AD има дължина 20 cm. Колко сантиметра е обиколката на триъгълника BOC ?

- А) 40 Б) 50 В) 52 Г) 56

19. Ромб $ABCD$ има обиколка 24 cm и $\sphericalangle ADC : \sphericalangle CAB = 10 : 1$. Колко квадратни сантиметра е лицето на $ABCD$?

- А) 8 Б) 12 В) 18 Г) 24

20. Вероятността произволно избран ученик от клас с 24 ученици да е момиче, е равна на $\frac{5}{6}$. Момчетата в този клас са:

- А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 8

ВТОРА ЧАСТ

21. а) Намерете произведението на корените на уравнението

$$17 - 7|1 - x| = 3.$$

б) Намерете сбора на целите отрицателни решения на неравенството

$$2x - 8 \leq (2x + 1)^2 + (1 - 2x)(1 + 2x).$$

22. В 8 часа от град А към В тръгнал автобус със скорост 90 km/h, а в 8 h 50 min по същия път от В към А отпътувал камион със скорост 100 km/h. Автобусът и камионът се срещнали, като до момента на срещата автобусът изминал 63 km повече от камиона.

а) Да се намери в колко часа са се срещнали автобусът и камионът.

б) Да се намери разстоянието от А до В.

23. В успоредника $ABCD$ ъглополовящите на $\angle BAD$ и $\angle ABC$ се пресичат в точка E . Построен е перпендикуляр $EF = 4$ cm към CD , $F \in CD$. Оказало се, че $DF = 5$ cm и $CF = 11$ cm. Да се намери периметърът на успоредника.

Решения и отговори

Задача	отговор	точки
1	В	3
2	Б	3
3	В	3
4	Б	3
5	А	4
6	В	3
7	Г	3
8	Г	4
9	А	3
10	В	3

Задача	отговор	точки
11	В	4
12	Б	4
13	Г	3
14	В	3
15	В	3
16	В	3
17	Г	3
18	Б	3
19	В	4
20	А	3

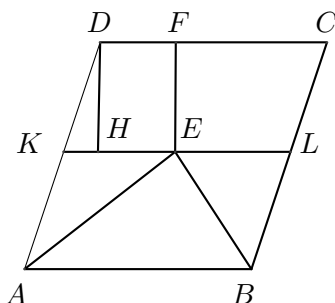
21. а) Корените са -1 и 3 ; търсеното произведение е -3 .

б) Неравенството е равносилно на $x \geq -5$. Сборът на целите отрицателни решения на неравенството е $-5 - 4 - 3 - 2 - 1 = -15$.

22. Ако камионът е пътувал x ч до срещата, автобусът е пътувал $x + \frac{5}{6}$ часа до срещата. От уравнението $100x + 63 = 90 \left(x + \frac{5}{6} \right)$ намираме $x = \frac{6}{5}$. Срещата е 1 час и 12 минути след тръгването на камиона, т.е. в 10:02.

Разстоянието от А до В е $100 \cdot \frac{6}{5} + 90 \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6} \right) = 303$ km.

23. Намираме $AB = CD = 5 + 11 = 16$ cm. През точката E построяваме права, успоредна на AB ; да означим пресечните точки на тази права с AD и BC съответно с K и L .



Тогава $ABLK$ е успоредник; $LK = AB = 16$ cm и $AK = BL = x$. От $\sphericalangle KEA = \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAK$ следва, че триъгълникът AKE е равнобедрен; аналогично BLE е равнобедрен. Следователно $KE = EL = x$ и $LK = 2x$. От равенството $2x = 16$ намираме $x = 8$ cm.

Построяваме $DH \perp KL$, $H \in KL$. Тогава $HEFD$ е правоъгълник (защо?) и $DH = EF = 4$ cm, а $HE = DF = 5$ cm.

Намираме $KH = KE - HE = 8 - 5 = 3$ cm.

В правоъгълния триъгълник KHD по питагоровата теорема намираме, че $KD^2 = KH^2 + DH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, т.е. $KD = 5$ cm.

Тогава $AD = AK + KD = 8 + 5 = 13$ cm, $P_{ABCD} = 2(16 + 13) = 58$ cm.

В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ: ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

ТАНЯ ДИДОВА, ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

Задача 1. Решете уравненията:

а) $-5(-2 + 3x) - 7 = 6 - (-2x + 5)$;

б) $\frac{2x-3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{3x-1}{-5}\right) = 1$.

Задача 2. Пресметнете:

а) $\left(\frac{5^{-17} \cdot 15^2}{5^{-18} \cdot 15^3}\right)^{-2}$; б) $\frac{7^{15} + 6 \cdot 7^{14}}{-2 \cdot 7^{14} - 7^{15}}$.

Задача 3. А) От 10 килограма сурово кафе се получава 8 килограма печено. Колко килограма сурово кафе са необходими за получаване на 60 килограма печено кафе?

Б) Трима приятели имат общо 48 топчета. Разделили ги помежду си в отношение 3 : 4 : 5. По колко топчета е получил всеки от тях?

Задача 4. В една шивашка работилница купили 3 вида плат. От първия купили 2 пъти повече, отколкото от втория, а от третия вид – с 8 метра по-малко, отколкото от първия вид. По колко метра плат от всеки вид са купили, ако общо купените платове са 52 метра?

Задача 5. По време на събиране на реколтата от пшеница, за да ожъне една нива в срок, комбайн трябвало да жъне по 20 декара на ден. Той жънел по 30 декара на ден и затова два дни преди срока останали неожънати 10 декара. Намерете колко декара е била нивата.

Задача 6. Разстоянието между градовете А и В е 240 km. По едно и също време от А за В тръгнала лека кола със средна скорост 90 km/h, а от В за А – автобус със средна скорост, която е с 30 km/h по-малка от тази на колата. Намерете след колко време превозните средства ще са на разстояние 40 km едно от друго.

Отговори. 1. а) $\frac{2}{17}$; б) 8,5. 2. а) 9; б) $-\frac{13}{9}$. 3. а) 75 кг; б) 12, 16, 20. 4. 24

м, 12 м, 16 м. 5. 100 дка. 6. 1 ч 20 мин и 1 ч 52 мин.

В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ: ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ЗА ЛИЦА

ЛИЛЯНА ДЕМЕВУКОВА, ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

Задача 1. Даден е триъгълник ABC . Страната AB е равна на 2,4 dm, а височината през върха C е равна на $\frac{5}{12}$ от AB .

Трапец има лице, което е равно на лицето на триъгълника ABC . Височината на трапеца е с 2 cm по-голяма от височината към страната AB в триъгълника ABC . Да се намери периметърът на трапеца, ако сборът на бедрата му е с 30% по-голям от сбора на основите.

Отговор. 46 cm

Задача 2. Даден е трапец $ABCD$. Точка M е на основата AB , а точка P е на основата CD . Известно е, че $AM = CD = 5$ cm и отсечката CP е равна на 60% от CD . Ако лицето на трапеца $AMPD$ е равно на лицето на трапеца $MBCP$, да се намери основата AB .

Отговор. 9 cm

Задача 3. Трапец с височина 12 cm има периметър 98 cm, а сборът на основите му е с 25% по-малък от сбора на бедрата. Лицето на трапеца е с 20% по-голямо от лицето на ромб с периметър 120 cm. Да се намери височината на ромба.

Отговор. 7 cm

Задача 4. Обиколката на успоредник с лице $7,2 \text{ cm}^2$ и височини 2 cm и 3 cm е равна на обиколката на правоъгълен трапец. Едното бедро на трапеца е 2,5 cm, а другото е с 20% по-малко от него.

а) Да се намери лицето на трапеца.

б) С колко процента лицето на успоредника е по-малко от лицето на трапеца?

Отговор. б) 4%

Задача 5. Ромб има страна, равна на сбора на основите на трапец с лице 12 cm^2 , а височината на ромба е равна на 40% от височината на трапеца.

С колко процента лицето на ромба е по-малко от лицето на трапеца?

Отговор. 20%

ЗАДАЧИ ЗА ПОВЪРХНИНИ И ОБЕМИ

НЕВЕНА СЪБЕВА, ИМИ – БАН

Задача 1. Правоъгълен паралелепипед има дължина 18 cm, която е с 20% по-голяма от широчината и с 25% по-малка от височината. Намерете сбора от всички ръбове на паралелепипеда.

Отговор. 228 cm

Задача 2. Обемът на куб с повърхнина 150 dm^2 е равен на 25% от обема на правоъгълен паралелепипед с основа квадрат с обиколка 160 cm. Намерете повърхнината на паралелепипеда.

Отговор. 532 dm^2

Задача 3. Повърхнината на куб, който има обем 64 m^3 , е с 25% по-малка от повърхнината на правоъгълен паралелепипед с основа квадрат с лице 2500 dm^2 . Намерете обема на паралелепипеда.

Отговор. $97,5 \text{ m}^3$

Задача 4. Аквариум има вместимост 84 L. Дължината му е 5 dm и е с 25% по-голяма от широчината.

а) Намерете височината на аквариума.

б) В аквариума наляли 60 L вода и потопили във водата 4 метални кубчета с ръб 1 dm. На колко сантиметра под горния ръб на аквариума стига водата в него?

Отговор. а) 4,2 dm; б) 10 cm

Задача 5. Вики и Дари изработили по един правоъгълен паралелепипед.

Вики казал: *Лицата на три от стените на моя паралелепипед са 20 кв.см, 24 кв.см и 30 кв.см.*

Дари казала: *Обиколките на три от стените на моя паралелепипед са 20 см, 24 см и 32 см.*

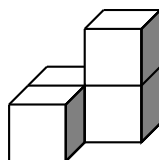
а) Определете измеренията на техните паралелепипеди.

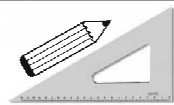
б) С колко процента обемът на паралелепипеда на Дари е по-голям от обема на паралелепипеда на Вики?

Отговор. б) 57,5%

Задача 6. Тялото на чертежа е съставено от четири кубчета и има повърхнина 72 cm^2 . Намерете обема на тялото.

Отговор. 32 cm^3





ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

НОВКА ТОДОРОВА, ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

1. Пресметнете:

а) $108 \cdot 37 - 88 \cdot 37 + 324 : 12 + 876 : 12$; б) $49 \cdot 19 - 18 + 180 : (90 - 75)$.

2. Намерете числената стойност на израза $A = 4 \cdot a - (b : 15 + 105)$ при $a = 4040 : 20 + 20$ и $b = 4 \cdot 750$.

3. Ако $17068 = x \cdot 17$, пресметнете $x : 4 + 14 \cdot 24$.

4. Кое число трябва да извадя от най-голямото четирицифрено число, записано с четири различни цифри, за да получа частното на числата 111 333 и 37?

5. Намерете сбора на числата x , y и z , където

$$x \cdot 33 = 8514 : 6 + 33 \cdot 71, \quad 581 - 123 \cdot 4 = y : 19, \quad 780 : z = 45 \cdot 50 - 148 \cdot 15.$$

6. Ники има 3 лв. 90 ст и похарчил третината от тях. С останалите пари си купил пет вафли (без ресто). Колко струва една вафла?

7. В една кошница има 324 череши. Третината от тях са бели, а останалите са червени. Половината от белите череши и третината от червените череши изяла Мими, а останалите череши изяла сестра ѝ. По колко череши изяло всяко дете?

8. Правоъгълно дворно място има широчина 16 м, която е 3 пъти по-малка от дължината му.

а) Колко метра мрежа е необходима за ограждането му, ако са оставили 2 м свободно място за врата?

б) Една трета от площта на двора засяли с моркови, а останалата – с картофи. Колко квадратни метра са засяли с картофи?

9. Дядо Иван отглежда кокошки и овце, общо 24 животни. Броят на краката на кокошките е равен на броя на краката на овцете. Колко овце има дядо Иван?

10. Два хляба и половина струват колкото един хляб и 1 лв. 95 ст. Колко струва един хляб?

Отговори. 1. а) 840; б) 925. 2. 583. 3. 587. 4. 6867. 5. 1831. 6. 52 ст. 7. 126 и 198. 8. а) 126 м; б) 512 кв.м. 9. 8. 10. 1 лв. 30 ст.



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Новоразкритата бакалавърска програма „**Анализ на данни**“, която стартира за първи път през учебната 2022/2023 година, е първа по рода си в България и ще се осъществява съвместно между Софийския университет и Техническия университет – София. Цел на обучението в тази специалност е придобиването на умения и знания свързани с обработка и анализ на големи масиви от данни, с акцент върху познаването и разработката на необходимия за целта софтуер. Нуждата от такъв вид специалисти в съвременния бизнес и индустрия са големи, което е и предпоставка за наличието на много добри перспективи за реализация на завършилите специалността.

2. Бакалавърската програма „**Софтуерно инженерство**“ подготвя специалисти, които да познават добре всички аспекти на разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер. Учебният ѝ план е разработен в съответствие с изисквания, известни като Computing Curriculum – Software Engineering, на световните професионални организации ACM и IEEE. Завършилите успешно тази програма могат да се реализират като: софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер; аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрол на качеството, консултанти и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цветознание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ТРИНАДЕСЕТА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА <i>Л. Конова, В. Личева</i>	3
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ КОНТРОЛНИТЕ ЗА БАЛКАНСКАТА ОЛИМПИАДА, <i>А. Иванов, Д. Грозев</i>	15
СЕДЕМНАДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ XI И XII КЛАС, <i>Л. Христов, Д. Цветков, М. Христов, П. Пиперков, Р. Ангелов</i>	23
UNITED STATES ERSATZ MATH OLYMPIAD'23, <i>П. Лазаров</i>	32
ИЗБРАНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ СЪСТЕЗАНИЯТА ПРЕЗ 2023/24 ГОДИНА, <i>Н. Събева</i>	39
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАТА ОЛИМПИАДА, <i>М. Дренчева, М. Христов</i>	46
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА НОМ ЗА 7. КЛАС, <i>Н. Събева, Б. Савова</i>	51
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	59
ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ДЗИ ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА, <i>Ю. Цветков</i>	63
ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ СЛЕД 7. КЛАС	69
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Т. Дидова</i>	74
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Л. Демебукова, Н. Събева</i>	75
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Н. Тодорова</i>	77

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 9.05.2024 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.