мате мати ка

БРОЙ 2
2016 г.
ГОДИНА LV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Задача 1. Да се реши неравенството $(x-3)(x-7)\sqrt{\dfrac{x-4}{x-5}} \le 0$.

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC ($BC > AC$), с прав ъгъл при върха C, радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е $r = 6$, а радиусът на описаната около него окръжност е $R = \dfrac{39}{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 3. Нека $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$. Да се намери $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 4. В трапеца $ABCD$ с основи $AB = 3\sqrt{39}$ и $CD = \sqrt{39}$ ъглите при голямата основа са $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$, а точката $E \in AD$. Да се намери дължината на отсечката BE, ако тя разполовява лицето на трапеца.

Задача 5. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1.$$

Задача 6. В равнобедрения триъгълник ABC с бедра $AC = BC = 13$ точката $M \in AB$ е такава, че $CM = 5$. Да се намери основата на триъгълника, ако лицето му е възможно най-голямо.

Задача 7. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ със страна $AB = 2$. Точка $M \in BC$ е такава, че равнината α определена от точките A, D_1 и M разделя куба на две части, отношението на обемите на които е $17 : 7$. Намерете лицето на сечението на α и куба.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$(x^2 + 2x + 3 - a)(a - |x-3|) = 0$$

има точно три различни решения.

ТЕМА 2: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

1. Ако $a = \lg 64$ и $x = \lg \sqrt[3]{25}$, то x, изразено чрез a е:

А) $x = \dfrac{6+a}{9}$;

Б) $x = \dfrac{6-a}{9}$

В) $x = \dfrac{a-6}{9}$

Г) $x = \dfrac{9+a}{6}$

2. Нека $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$. Тогава най-малката стойност на функцията f в интервала $[0, +\infty)$ е:

А) $-\dfrac{17}{3}$

Б) -1

В) 1

Г) $\dfrac{17}{3}$

3. В триъгълник две от страните са 3 и 5, а ъглополовящата между тях е $\dfrac{15}{8}$. Третата страна на триъгълника е:

А) 8

Б) 7

В) 4

Г) 6

4. Ако $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$, $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, то α е:

А) 255°

Б) 240°

В) 225°

Г) 195°

5. Основата на призма с обем 36 е успоредник със страни 3 и 4 и ъгъл 60°. Околният ѝ ръб е 4. Ъгълът между околния ръб и основата е:

А) 30°

Б) 45°

В) 60°

Г) 90°

6. Дадено е уравнението

$$(k+1)\lg^2 x - 3k\lg x + k = 0,$$

където k е параметър.

а) Да се реши уравнението за $k = 1$.

б) За кои стойности на k уравнението има реални корени x_1 и x_2, за които $10x_1x_2 = 10^{4k}$?

в) За кои стойности на k уравнението има точно едно решение, по-голямо от 1?

7. Нека $ABCD$ е ромб със страна a и ъгъл $\sphericalangle A = 60^\circ$. Допирателната през точка C към вписаната в $\triangle ABD$ окръжност пресича AB в точка F.

а) Да се докаже, че $\sin\sphericalangle ACF = \dfrac{1}{4}$.

б) Да се пресметне CF.

в) Да се пресметне S_{AFEO}, където O е центърът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност, а E – допирната точка на CF с нея.

8. Дадена е правата призма $AMNA_1M_1N_1$ с основа $\triangle AMN$ околен ръб $AA_1 = b$. Пирамидата $ABCD$ е такава, че точките M и N лежат съответно на основните ръбове ѝ AB и AC, M_1 и N_1 – на ръбовете DB и DC, а A_1 лежи на AD.

а) Да се пресметне височината на пирамидата $ABCD$ през върха D, ако обемът ѝ е възможно най-малък.

б) Нека $\triangle ABC$ е равнобедрен и правоъгълен с хипотенуза AB. Ако $AD = 3b$ и $MN = b\sqrt{2}$, то да се намерят ъгълът и разстоянието между правите BD и AC.

ЗИМЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АТАНАС РАДЕВ“

Петър Бойваленков, Емил Колев

На 22–24.01.2016 г. в Ямбол се проведе Зимният математически турнир „Атанас Радев“. В състезанието взеха участие 361 ученици от цялата страна. Резултатите на всички участници са на сайта на МГ „Атанас Радев“ `http://mgyambol.com/`, както и на няколко други сайта. Ето и имената на победителите.

Осми клас. Алек Димитров (ПЧМГ), Димитър Опърлаков (МГ Варна), Евгени Кайряков (СМГ) и Петър Лангов (СМГ) – по 26 т., Виктор Балтин (ПМГ Бургас) и Иво Петров (СМГ) – по 25 т., Добрин Бараков (МГ Плевен) и Спасиян Тодоров (НПМГ) – по 24 т.

Девети клас. Радомир Пеев (СМГ) – 26 т., Бойко Борисов (СМГ) – 24 т., Иван-Александър Мавров (СМГ) – 21 т., Борислав Антов (СМГ), Кристиян Василев (ПЧМГ) и Пламен Иванов (СМГ) – по 20 т., Борис Барбов (СМГ), Иван Кирев (СМГ), Кирил Трифонов (СМГ), Надежда Китипова (МГ Варна), Орлин Кучумбов (ПМГ Бургас) и Цветан Лалов (МГ Плевен) – по 19 т.

Десети клас. Атанас Динев (ПМГ Бургас), Калоян Алексиев (СМГ), Кирил Бангачев (СМГ) и Константин Гаров (ПМГ Бургас) – по 26 т., Георги Димитров (СМГ) – 25 т., Илия Божинов (ПМГ Благоевград) – 24 т., Димитър Любенов (СМГ) – 22 т., Васил Йорданов (СМГ) и Симона Кукова – по 20 т.

Единадесети клас. Иван Ганев (АК) и Христо Папазов (АК) – по 26 т., Виолета Найденова (СМГ) – 25 т., Костадин Гаров (ПМГ Бургас) – 21 т., Георги Русинов (СМГ), Димитър Ружев (СМГ) и Христо Попов (СМГ) – по 20 т.

Дванадесети клас. Даниел Атанасов (СМГ) – 26 т, Станислав Славов (СМГ) – 25 т., Александър Чергански (СМГ), Деница Маркова (СМГ) и Светлин Тотев (СМГ) – по 24 т., Еожен Овагемян (ПМГ Бургас) – 21 т., Иво Дилов (СМГ), София Бурова (МГ Варна) и Станислав Димитров (СМГ) – по 19 т.

Предлагаме ви условията на задачите, отговори и кратки решения.

Условия

Задача 8.1. Дадени са изразите

$$M = a^4 - 6a^3 + b^2 + 24b - 199 \quad \text{и} \quad N = b^4 - 6b^3 + a^2 + 24a + 151,$$

където a и b са реални числа. Да се докаже, че $M + N \geqq 0$. Кога се достига равенство?

Задача 8.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височини AK ($K \in BC$) и BL ($L \in AC$). Ако G и T са медицентровете съответно на $\triangle ABL$ и $\triangle ABK$, да се докаже, че острият ъгъл между AK и BL е равен на 60° тогава и само тогава, когато $GT = \dfrac{1}{6}AB$.

Задача 8.3. Дадени са 2016 точки в равнината, разстоянията между които са различни. Всяка точка е свързана с отсечка с най-близката до нея точка. Нека M е множеството от тези отсечки

а) Да се намери възможно най-малкият и най-големият брой елементи на M с различни дължини.

б) Да се докаже, че ако l е начупена линия от отсечки в M, то тя е отворена (т.е. краят на l не съвпада с началото) и несамопресичаща се.

Задача 8.4. В танцов фестивал участвали 129 танцьорки, които по случаен начин изпълнявали танци по двойки. След приключване на фестивала се оказало, че нито една двойка не е участвала в повече от един танц и за всяко естествено число n от 1 до 128 включително има танцьорка, която е участвала точно в n танци. Да се докаже, че две от танцьорките са участвали в равен брой танци и да се намери този брой.

Задача 9.1. Дадено е уравнението $2p^2(x-p)x = \sqrt{2}$, където p е реален параметър.

а) Колко реални решения има уравнението?

б) Ако уравнението има решения, да се намери най-малкия възможен сбор на техните четвърти степени.

Задача 9.2. Даден е правоъгълен равнобедрен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Точките P и Q от отсечката AB са такива, че $\sphericalangle PCQ = 45^\circ$ и P е между A и Q. Описаните окръжности около триъгълниците ACQ и BCP се пресичат за втори път в точка R. Да се докаже, че центърът на описаната около триъгълник CPQ окръжност лежи на правата CR.

Задача 9.3. В една държава има 50 летища, някои от които са свързани с (директни двупосочни) линии. Едно летище се нарича локално, ако към него водят не повече от пет линии. Една линия се нарича *ямболска*, ако поне едно от летищата, които свързва, е локално. Да се намери най-големия възможен брой ямболски линии в тази държава.

Задача 9.4. Да се докаже, че за всяко реално число $d > 1$ съществуват безбройно много естествени числа n със следното свойство: в интервала $[n^2, n^2 + n + d\sqrt{n}]$ съществуват три различни цели числа a, b и c, такива, че c дели ab.

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\frac{\sqrt{7-3x}+x-5}{x} \geq -1.$$

Задача 10.2. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Нека M е средата на CD и E е пресечната точка на AC и BM. Ако $\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABD$, то да се докаже, че $AD = DE$.

Задача 10.3. Нека a и b са взаимнопрости естествени числа. Да се намери броят на естествените числа n, които не могат да се представят във вида $n = ua + vb$ със цели неотрицателни u и v.

Задача 10.4. В хотел с N стаи с по две легла има два вида настаняване: във всички стаи се настаняват двойки познати или във всички стаи се настаняват двойки непознати. В хотела пристигнала група от M туристи и се установило, че е невъзможно да се изберат $2N$ от тях, които да бъдат настанени в хотела. Впоследствие пристигнал още един човек и такова настаняване вече било възможно. Да се намери най-голямата възможна стойност на M (като функция на N).

Задача 11.1. Дадено е уравнението

$$a.2^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 2a + 1,$$

където a е реален параметър.

а) Да се докаже, че уравнението има решение при всяка стойност на параметъра a.

б) Да се намерят стойностите на a, за които уравнението има точно едно решение в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 11.2. Дадена е безкрайна редица $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ от реални числа, за която за всяко естествено число n е изпълнено равенството

$$a_{n+7} = a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+1} + a_n.$$

Да се докаже, че редицата с общ член $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, където

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

е сходяща.

Задача 11.3. Външно за $\triangle ABC$ са построени триъгълниците PAB и QAC така, че $AP = AB$, $AQ = AC$ и $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$. Отсечките BQ и

CP се пресичат в точка R. Ако O е центърът на описаната около $\triangle BCR$ окръжност, да се докаже, че правите AO и PQ са перпендикулярни.

Задача 11.4. За естествено число n с $D(n)$ означаваме множеството от всички положителни делители на n. Да се намерят всички естествени числа $m > 1$ със следното свойство:

За всяко естествено число n, за което m дели $|D(n)|$ множеството $D(n)$ може да се разбие на множества от по m елемента всяко така, че ако a и b са елементи на едно такова множество и $a < b$, то a дели b.

Задача 12.1. Нека $ABCD$ е четириъгълник, в който $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, H е петата на височината в $\triangle\ ABC$ през върха C и O е центърът на описаната около $\triangle\ ABD$ окръжност.Да се докаже, че ако правите AO и DH са перпендикулярни, то $AC = AD$.

Задача 12.2. Права през началото O на кооодинатната система пресича графиката на функцията $= x(x-1)(x+2)$ в още две различни точки A и B, като O е между A и B. Да се докаже, че $|AB| > \sqrt{5}$.

Задача 12.3. Виж Задача 11.4.

Задача 12.4. Допирните точки на вписаната окръжност в даден триъгълник и неговите върхове разделят периметъра му на шест отсечки. Избираме три от тях, които образуват триъгълник и за него повтаряме същото. Да се докаже, че след някоя операция триъгълникът има ъгъл 60° или ъгъл, по-малък от 1°.

Отговори, упътвания и решения

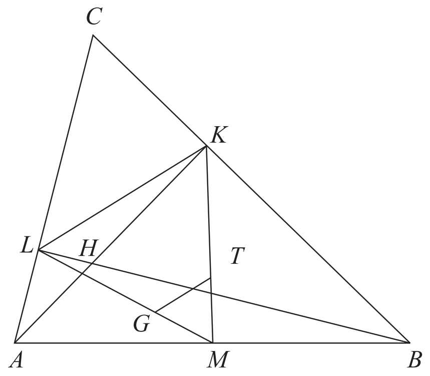
8.1. $M + N = a^4 - 6a^3 + a^2 + 24a + b^4 - 6b^3 + 24b + 32 =$

$$= (a^4 + 9a^2 + 16 - 6a^3 - 8a^2 + 24a) + (b^4 + 9b^2 + 16 - 6b^3 - 8b^2 + 24b) =$$

$$= (a^2 - 3a - 4)^2 + (b^2 - 3b - 4)^2 \geqq 0.$$

Равенство се достига при $a^2 - 3a - 4 = 0$ и $b^2 - 3b - 4 = 0$. Оттук $a = -1$ или $a = 4$, както и $b = -1$ или $b = 4$. Следователно равенство се достига в четири случая: $a = -1$, $b = -1$; $a = -1$, $b = 4$; $a = 4$, $b = -1$; $a = 4$, $b = 4$.

8.2. Нека H е пресечната точка на височините AK и BL (H се нарича ортоцентър на триъгълника). Тъй като в четириъгълника $LHKC$ два от ъглите са прави, то $\sphericalangle LHK$ не може да е остър. В противен случай ще излезе, че $\sphericalangle ACB = \gamma$, не е остър, т.е. че триъгълникът не е остроъгълен, което е противоречие. Сега заключаваме, че $\sphericalangle LHK = 120^\circ$ тогава и само тогава, когато $\gamma = 60^\circ$. Нека M е средата на страната AB. Тогава KM и LM са медиани съответно в правоъгълните триъгълници ABK и ABL, откъдето следва, че $KM = LM = \dfrac{1}{2}AB$, т.е. че $\triangle LKM$ е равнобедрен. От равнобедрените триъгълници ALM и BKM имаме съответно



$$\sphericalangle AML = 180^\circ - 2\sphericalangle MAL = 180^\circ - 2\alpha$$

и

$$\sphericalangle BMK = 180^\circ - 2\sphericalangle MBK = 180^\circ - 2\beta.$$

Тогава

$$\sphericalangle LMK = 180^\circ - (\sphericalangle AML + \sphericalangle BMK) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) =$$
$$= 2(\alpha + \beta) - 180^\circ.$$

Заключаваме, че $\sphericalangle LMK = 60^\circ$ тогава и само тогава, когато $\gamma = 60^\circ$. Но $\sphericalangle LMK = 60^\circ$ тогава и само тогава, когато равнобедреният $\triangle LKM$ е равностранен, т.е. тогава и само тогава, когато $LK = \dfrac{1}{2}AB$. Тъй като по условие G и T са медицентровете съответно на $\triangle ABL$ и $\triangle ABK$, то $MG = \dfrac{1}{3}LM$ и $MT = \dfrac{1}{3}KM$. От равенството $LM = KM$ следва, че $\triangle GTM$ е равностранен тогава и само тогава, когато $\triangle LKM$ е равностранен, т.е. тогава и само тогава, когато $GT = \dfrac{1}{3}LK = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{6}AB$.

8.3. а) Нека A_1 е произволна точка от дадените и A_2 е най-близката до нея. За най-близката точка A_3 до A_2 има 2 възможности: да съвпада с A_1 или да е различна от A_1. В първият случай точките A_1 и A_2 са краища само на отсечката A_1A_2 и приключваме с тях. Вземаме произволна друга точка от дадените и разсъждаваме за нея така, както за A_1. Във втория случай разсъждаваме за A_2 и A_3 така, както направихме за A_1 и A_2, т.е. разглеждаме най-близката точка A_4 до A_3 и двете възможности за нея:

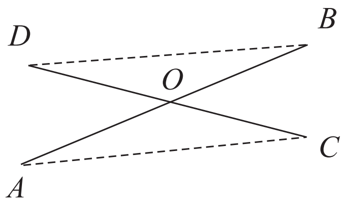
да съвпада с A_2 или да е различна от A_2. Следваме описаната организация на разглеждане на дадените точки до изчерпването им. Ясно е, че е възможно всеки път новоизбратана точка да съвпада с предишната и в този случай всичките 2016 точки се групират по двойки. Във всяка двойка единият край на свързващата ги отсечка има за най-близка точка вторият край на отсечката, а вторият край има за най-близка точка първия край на отсечката. Броят на елементите на M в този случай е 1008 и това е търсеният минимален брой. Възможно е обаче всеки път новоизбраната точка да е на по-малко разстояние и тогава всички точки се подреждат в редица $A_1A_2A_3\dots A_{2015}A_{2016}$, като за всеки две последователни двойки е изпълнено $A_iA_{i+1} > A_{i-1}A_{i-2}$ (i се изменя от 1 до 2014). Броят на елементите на M в този случай е 2015 е това е търсеният максимален брой.

б) Достатъчно е да забележим, че за всяка начупена линия $A_1A_2A_A\dots A_{k-1}A_k$ $(4 \geqq k \geqq 2016)$ е изпълнено $A_iA_{i-1} > A_{i+1}A_{i+2}$ (i се изменя от 1 до $k-2$). Не е възможно $A_1 \equiv A_k$, защото в противен случай трябва да е изпълнено $A_1A_2 > A_{k-1}A_k = A_{k-1}A_1$ и ще излезе, че A_{k-1} е по-близо до A_1, отколкото A_2. Това противоречи на избора на A_2. С това е доказана първата част на б). Да допуснем, че има две отсечки AB (B е най-близката до A) и CD (C е най-близката до D) от M, които се пресичат в точка O.

Имаме, че $AC > AB$, защото B е най-близката до A. Аналогично $DB > DC$, защото C е най-близката до D. Събираме двете неравенства:

$$AC + DB > AB + DC = AO + OB + DO + OC =$$

$$= (AO + OC) + (DO + OB) > AC + DB.$$



Последното неравенство е следствие от неравенството на триъгълника. Така получаваме, че $AC + DB > AC + DB$, което е противоречие.

8.4. Решение: За всяко n от 1 до 128 да номерираме с № n танцьорката, която е участвала точно в n танци. Нека оставащата танцьорка е с № 129. От условието, че № 128 е танцувала с точно 128 различни партньорки, следва, че тя е танцувала с всички останали, а следователно и с № 1. Но тогава № 1 не е танцувала с други, освен с № 128. За № 127 остава единствената възможност да е танцувала с номерата от 2 до 129 включително и разбира се не с № 127, т.е. не със себе си. Заключаваме, че № 2 е танцувала само с № 127 и с № 128. Продължавайки по същия начин, стигаме до № 65.

До този момент танцьорката с този номер е танцувала с номерата от 128 до 66 включително (общо 63 пъти) и остава единствената възможност да е танцувала с № 64 и № 129. Следващата танцьорка с № 64 е танцувала с номерата от 128 до 65 включително (общо 64 пъти) и следователно не е танцувала с № 129. Разглежданията спират дотук, защото условието за всяка танцьорка от № 1 до № 128 включително е изпълнено. Заключаваме, че № 129 е танцувала с 64 партньорки, т.е. точно с толкова, с колкото е танцувала и № 64.

9.1. а) При $p = 0$ уравнението няма решение. При $p \neq 0$ уравнението е квадратно:

$$2p^2x^2 - 2p^3x - \sqrt{2} = 0,$$

с дискриминанта $D' = p^6 + 2\sqrt{2}p^2 > 0$, така че има две реални решения.

б) От Формулите на Виет $x_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = -1/(p^2\sqrt{2})$, откъдето

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + \frac{\sqrt{2}}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 + 2\sqrt{2} + \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^4} =$$

$$= p^4 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{p^4} = (p^2 - \frac{1}{p^2})^2 + 2 + 2\sqrt{2}.$$

Най-малката стойност на $(p^2 - \frac{1}{p^2})^2$ е 0 (достига се за $p = \pm 1$). Следователно най-малката стойност на $x_1^4 + x_2^4$ е $2 + 2\sqrt{2}$ (тя се достига за споменатите p).

9.2. Понеже $ARQC$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $\sphericalangle QRC = 45^\circ$ и аналогично $\sphericalangle PRC = 45^\circ$. Нека S е втората пресечна точка на описаната около $\triangle PQR$ окръжност и правата CR. От $\sphericalangle QRC = \sphericalangle PRC = 45^\circ$ следва, че $SP = SQ$ и $\sphericalangle PSQ = 90^\circ$. Следователно S лежи на симетралата на отсечката PQ и $\sphericalangle PSQ = 90^\circ$. Ако O е центърът на описаната окръжност за $\triangle CPQ$, то O лежи на симетралата на отсечката PQ и $\sphericalangle POQ = 90^\circ$ като централен ъгъл. Следователно точките S и O съвпадат.

9.3. Нека има n локални летища и m ямболски линии. При $n \leq 45$ имаме $m \leq 5n \leq 225$, като можем да постигнем $m = 225$ при 45 локални летища, всяко свързани с петте други летища (които не са локални).

При $n = 45+k$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, от локалните летища излизат не повече от $5(45+k)$ ямболски линии, а от останалите – не повече от $(5-k)(45+k)$, като при това всяка ямболска линия е броена по два пъти. Следователно ямболските линии са не повече от

$$\frac{5(45+k) + (5-k)(45+k)}{2} = 225 - \frac{k^2 + 35k}{2} < 225.$$

9.4. Числата $a = (n-k)(n+k+1)$, $b = (n-k+1)(n+k)$ и $c = (n-k+1)(n+k+1)$, където k и n са естествени числа, са такива, че $c|ab$. Тъй като $n^2+n-k^2-k = a < b < c$, естествено е да изберем $n = k^2+k$ и да разгледаме неравенството $c \leq n^2+n+d\sqrt{n}$. Имаме последователно

$$c \leq n^2+n+d\sqrt{n} \iff k^2 \geq n - d\sqrt{n} + 1 \iff$$

$$d\sqrt{n} - 1 \geq k = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2} \iff 2d\sqrt{n} - 1 \geq \sqrt{4n+1}.$$

От последното след повдигане на квадрат получаваме

$$4d^2n - 4d\sqrt{n} + 1 \geq 4n+1, \quad \text{откъдето} \quad \sqrt{n} \geq \frac{d}{d^2-1}.$$

Ясно е, че за всяко $d > 1$ последното неравенство е изпълнено за всички достатъчно големи n.

10.1. Неравенството е дефинирано за всички $x \leq 7/3$, $x \neq 0$.

1) Нека $x > 0$. Освобождавайки се от знаменателя получаваме $\sqrt{7-3x} \geq 5-2x$. Тъй като дясната страна е положителна можем да повдигнем на квадрат, откъдето

$$4x^2 - 17x + 18 \leq 0.$$

Оттук получаваме $x \in [2, 9/4]$.

2) Нека $x < 0$. Сега имаме $\sqrt{7-3x} \leq 5-2x$ и $4x^2-17x+18 \geq 0$. Неравенството се удовлетворява за $x \in (-\infty, 2] \cup [9/4, +\infty)$, откъдето $x \in (-\infty, 0)$.

Окончателно получаваме $x \in (-\infty, 0) \cup [2, 9/4]$.

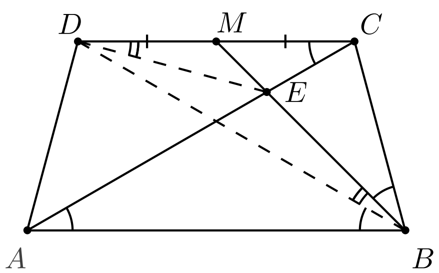
10.2. От условието имаме, че

$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$$

и следователно $\triangle MBC \sim \triangle MCE$. Тогава

$$MD^2 = MC^2 = ME.MB$$

и следователно $\triangle MBD \sim \triangle MDE$.



Така получаваме, че $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MDE$. Накрая

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle ACD + \sphericalangle MDE = \sphericalangle MBC + \sphericalangle MBD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$$

и следователно $\triangle AED$ е равнобедрен, с което доказателството е завършено.

10.3. Най-напред да забележим, че всяко естествено число n може да се представи по единствен начин във вида $n = ua+vb$, където $0 \leq u \leq b-1$. Ако n не може да се представи като $n = ua + vb$ с неотрицателни u и v, то $v \leq -1$ и $u \leq b - 1$, откъдето $n \leq ab - a - b$.

Да разгледаме числата $0 \leq m \leq ab - a - b$. Ако $m = u'a + v'b$, където $0 \leq u' \leq b - 1$, то

$$ab - a - b - m = (b - 1 - u')a + (1 - v')b,$$

като представянията на m и $ab - a - b - m$ са единствени. Сега от числата v' и $1 - v'$ точно едно е положително или нула и точно едно е отрицателно. Следователно точно половината от числата m, $0 \leq m \leq ab-a-b$, не могат да се представят в искания вид и търсеният брой е $(a - 1)(b - 1)/2$.

10.4. Ще докажем, че $M = 3N-2$. Наистина, ако имаме такава група, в която съществуват $2N - 1$ туриста, всеки двама от които се познават, а всички останали двойки са непознати, то настаняване е невъзможно.

Съществуването на настаняване за група от $3N-1$ туриста ще докажем по индукция. Базата на индукцията е очевидна. Да допуснем, че имаме $N - 1$ двойки познати, да речем X_iY_i, $i = 1, \ldots, N - 1$. Можем да премем, че всеки двама от останалите $N + 1$ туриста $Z_1, \ldots, Z_{N+1}$ са непознати (в противен случай задачата е решена). Освен това във всяка двойка X_iY_i поне един от туристите има най-много един познат измежду $Z_1, \ldots, Z_{N+1}$ (в противен случай отново можем да настаним N двойки познати). Но сега очевидно могат да се конструират N независими двойки непознати, за които настаняване е възможно.

11.1. а) При $x = \dfrac{\pi}{2}$ имаме $\sin x = 1$, $\cos x = 0$ и тогава

$$a.2^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 2a + 1.$$

б) Като използваме, че $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, след полагане $y = 2^{\sin^2 x}$ уравнението се свежда до $ay^3 - (2a+1)y^2 + 4 = 0$. Това уравнение може да се запише във вида $(y-2)(ay^2 - y - 2) = 0$. Тъй като при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имаме $\sin^2 x \in (0, 1)$, то $y \in (1, 2)$. Решението $y = 2$ не принадлежи на разглеждания интервал. Уравнението $f(y) = ay^2-y-2 = 0$ има единствено решенние в интервала $(1, 2)$ когато $D = 0$ и $\dfrac{1}{2a} \in (1, 2)$ или когато $f(1).f(2) < 0$. Първото условие не води до решение (защото $D = 0$ при $a = -\dfrac{1}{8}$ и тогава $\dfrac{1}{2a} \notin (1, 2)$), а второто дава $(a - 3)(a - 1) < 0$. Следователно $a \in (1, 3)$.

11.2. Като съберем почленно равенствата

$$a_{n+7} = a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+1} + a_n,$$

$$a_{n+8} = a_{n+7} - a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+2} + a_{n+1} \quad \text{и}$$

$$a_{n+9} = a_{n+8} - a_{n+6} + a_{n+5} - a_{n+3} + a_{n+2},$$

получаваме $a_{n+9} = a_n$. Това означава че редицата е периодична с период 9. При $n = 9k + l$ за $0 \le l < 9$ имаме

$$\frac{S_n}{n} = \frac{k.S_9 + S_l}{9k + l},$$

което означава, че границата на редицата е $\dfrac{S_9}{9}$.

11.3. Нека S е центърът на описаната окръжност около триъгълник ACQ, а M и N са среди съответно на CQ и CR. Точките S, M, N и C лежат на една окръжност. Имаме

$$\sphericalangle ASO = \sphericalangle QCP, \sphericalangle RSO = \sphericalangle BQC, \sphericalangle SOR = \sphericalangle CBQ.$$

Оттук следва, че $\triangle ORS \sim \triangle BCQ$, откъдето

$$\frac{SA}{CQ} = \frac{SR}{CQ} = \frac{SO}{QB} = \frac{SO}{PC}.$$

От горните равенства следва, че $\triangle AOS \sim \triangle QPC$ и понеже $OS \perp PC$ и $AS \perp QC$, получаваме, че $AO \perp QP$.

11.4. Да допуснем, че m не е просто число. Тогава $m = xy$, за естествени числа $x > 1$ и $y > 1$. При $n = 2^{x-1}.3^{y-1}$ имаме $|D(n)| = xy = m$ и тогава елементите на $D(n)$ са в едно множество. За всеки два делителя a и b, $a < b$ на n трябва да имаме, че a дели b. При $a = 2$ и $b = 3$ това не е вярно.

Ще докажем с индукция по броя на простите делители на n, че всяко просто число p има исканото свойство. Ако n има един прост делител, твърдението е очевидно. За да е вярно, че p дели $|D(n)|$ каноничното разлагане на n е от вида $n = q_1^{kp-1} q_2^{\alpha_2} \dots q_s^{\alpha_s}$ и да допуснем, че твърдението е вярно за всяко n с s прости делители. Ако за числото n множествата $A_1, A_2, \dots, A_l$ имат исканото свойство, то за число от вида $nq_{s+1}^{\alpha_{s+1}}$ търсените множества се получават от дадените като числата във всяко от тях умножим с $1, q_{s+1}, q_{s+1}^2, \dots, q_{s+1}^{s+1}$.

12.1. Имаме

$$90^\circ = \sphericalangle OAH + \sphericalangle AHD = 90^\circ - \sphericalangle ADB + \sphericalangle AHD.$$

Следователно $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AHD$ и $\triangle\ ABD \sim \triangle\ AHD$. Оттук

$$\frac{AD}{AH} = \frac{AB}{AD}$$

и получаваме $AD^2 = AH.AB = AC^2$, т.е. $AD = AC$.

12.2. Нека правата е $y = kx$, $A(x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$. Тогава x_1 и x_2 са различни ненулеви корени на уравнението $x^2 + x = k + 2$, откъдето $k > -9/4$, $k \neq -2$ и

$$|AB|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2(1 + k^2) = (1 + 2|k + 2| + 2k + 4)(1 + k^2).$$

При $k < -2$ очевидно $|AB| > \sqrt{5}$, а при $k > -2$ имаме, че

$$|AB|^2 - 5 = (4k + 9)(k^2 + 1) - 5 = (k + 2)(4k^2 + k + 2) > 0.$$

12.3. Виж Задача 11.4.

12.4. Да допуснем, че никога не се получава триъгълник с две равни страни. Нека страните на триъгълника Δ_n преди n-тата операция са $a_n < b_n < c_n$, $2p_n = a_n + b_n + c_n$ и $d_n = \dfrac{c_n - a_n}{p_n}$. Тогава Δ_{n+1} има страни $p_n - c_n < p_n - b_n < p_n - c_n$ и $d_{n+1} = 2d_n$. Следователно $0 < d_1 = \dfrac{d_n}{2^{n-1}} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ за всяко n, което е противоречие.

Значи преди някоя операция, която считаме за първа, се получава триъгълник с две равни страни. Да допуснем, че никога не се получава равностранен триъгълник. Тогава Δ_n има страни a_n, a_n, c_n, а страните на Δ_{n+1} са $p_n - a_n, p_n - a_n, p_n - c_n$ или $p_n - a_n, p_n - c_n, p_n - c_n$. Тогава $d_{n+1} > d_n$, като в първия случай $d_{n+1} = 2d_n$. Ако този случай се среща безбройно много пъти, стигаме да противоречие както по-горе.

И така, можем да считаме, че от самото начало сме във втория случай. Тогава за $q_n = \dfrac{a_n}{c_n}$ имаме, че $q_{n+1} = 2q_n - 1$, откъдето $q_n - 1 = 2^{n-1}(q_1 - 1)$. Значи $q_1 > 1$ и $q_n \to +\infty$. Това означава, че за ъгъла γ_n между бедрата на Δ_n имаме, че $\gamma_n \to 0$.

Задачите са предложени, както следва: 8.1 – Ирина Шаркова; 8.2 и 8.4 – Веселин Ненков и Сава Гроздев; 8.3 – Емил Карлов; 9.1, 9.3 – Ивайло Кортезов; 9.2 – Диана Данова; 9.4 – Петър Бойваленков; 10.1, 10.3, 10.4 – Иван Ланджев; 10.2 – Стоян Боев; 11.1 – Емил Колев; 11.2, 11.4(12.3) – Александър Иванов; 11.3 – Пламен Пенчев; 12.1 – Олег Мушкаров; 12.2, 12.4 – Николай Николов.

В СВЕТА НА ПРОСТИТЕ ЧИСЛА

Пенка Рангелова

Посвещавам на светлата памет
на доц. Руси Русев

Разлагането на естествените числа на прости множители показва, че всяко естествено число е или просто, или е произведение от поне две прости числа. Това показва, че простите числа са съставни елементи на естествените числа.

В началото припомняме някои факти, които ще използваме в нашите разглеждания:

1. Единственото просто четно число е 2.

2. Числото 1 не е нито просто, нито съставно.

3. Множеството на простите числа е безкрайно.

4. Ако $a = 2.3.5$, то броят на всички делители на a се получава, като се търсят възможностите за 2, 3 и 5 в това преброяване. За всяко едно от тях има по две възможности (да се брои като делител или да не се брои). Тогава всички делители на a са $2.2.2 = 8$ броя.

5. Ако $b = 3^2.7^3$, то делителите от 3^2 са $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, т.е. три. Делителите от 7^3 са $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$ и $7^3 = 343$, т.е. 4 възможности. Тогава всички делители на b са $3.4 = 12$ броя.

Задача 1. Да се намерят най-малкото и най-голямото естествени числа, произведението от цифрите на които е 12 600 и в чийто запис не участва цифрата 1.

Решение. Разлагаме 12 600 на прости множители и получаваме

$$12\ 600 = 2^3.3^2.5^2.7 = 2.2.2.3.3.5.5.7 = 8.9.5.5.7.$$

Следователно от търсените числа най-малкото е 55 789; а най-голямото е 75 533 222.

Задача 2. Да се намери просто число p така, че числото:
а) $A = 2.3.5.p$ да има 12 делителя и най-голямото число с това свойство;
б) $B = 2.3.5.7.p$ да има 32 делителя и най-малкото число с това свойство;
в) $C = 2^3.3^4.5^6.p$ да има 160 делителя.

Решение. а) От $12 = 2.2.3$ следва, че в разлагането на A на прости множители два от тях са от първа степен и третият е от втора степен. Трите множителя за A са 2, 3 и 5. За да бъде A най-голямото число с посочените свойства, трябва 5 да участва с втора степен. Следователно $A = 2.3.5^2$, откъдето $p = 5$;

б) От $32 = 2.2.2.2.2 = 2.2.2.4$ следва, че в разлагането на B на прости множители участват или 5 прости числа на първа степен, или три прости на първа степен и едно на трета степен. В първия случай B е най-малко при $p = 11$ и е $2.3.5.7.11 = 2310$. Във втория случай B е най-малко при $p = 2$ и е $2^3.3.5.7 = 840$. Следователно $p = 2$.
в) От $160 = 2.2.2.2.2.5 = 4.5.8$ следва, че множителите са три и участват със следните степени: 3, 4 и 7. От $C = 2^3.3^4.5^6.p$ следва, че $p = 5$ и $A = 2^3.3^4.5^7$.

Задача 3. Естественото число n е кратно на 18, а всичките делители на неговия квадрат са 35 на брой. Намерете колко различни естествени числа делят:

а) числото n; б) числото n^3; в) числото n^4.

Решение. Понеже простите числа 2 и 3 делят 18, а естественото число n се дели на 18, то n има поне два прости делителя p и q. Щом n^2 има по условие 35 делителя ($35 = 5.7$), то $n^2 = p^4q^6 = (p^2q^3)^2$, откъдето $n = p^2q^3$.

Тогава $n^3 = (p^2q^3)^3 = p^6q^9$, а $n^4 = (p^2q^3)^4 = p^8q^{12}$. От получените представяния следва, че n има $3.4 = 12$ делителя; n^3 има $7.10 = 70$ делителя; n^4 има $9.13 = 117$ делителя.

Задача 4. Намерете сбора на всички трицифрени числа, които са произведение от четири различни прости числа.

Решение. Понеже $2.3.5 = 30$; $2.3.7 = 42$ и $2.3.11 = 66$, то четвъртите множители към тези произведения са съответно едно от числата 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31; 11, 13, 17, 19, 23 и 13.

Сумата на получените произведения от четири прости числа е 8844.

От $2.3.13.17 > 1000$ следва, че няма друга четворка от прости числа с първи две числа 2 и 3.

С числата 2 и 5 получаваме две четворки – $2.5.7.11 = 770$ и $2.5.7.13 = 910$. Понеже $2.7.11.13$ и $3.5.7.11$ са четирицифрени числа, то други четворки, изпълняващи условието на задачата, няма.

Търсеният сбор е $8844 + 770 + 910 = 10\ 524$.

Задача 5. Намерете четири различни прости двуцифрени числа със сбор 244 така, че:

1. ако първото от търсените числа е $\overline{ab}$, то $\overline{ba}$ е квадрат на естествено число;

2. второто и третото число са от вида $\overline{cd}$ и $\overline{dc}$.

Решение. Числото $\overline{ba}$ е двуцифрен квадрат на естествено число, т.е. едно от числата 16, 25, 36, 49, 64 и 81. От условието, че $\overline{ab}$ е просто число намираме $\overline{ab} = 61$. Второто и третото число са измежду двойките (13; 31), (17; 71), (37; 73) и (79; 97). Тогава сборът на първите три числа може да е 155, 149, 171 или 237. За четвъртото събираемо получаваме $244 - 155 = 89$, $244 - 149 = 95$, $244 - 171 = 73$ или $244 - 237 = 7$. От тях прости двуцифрени числа са 89 и 73, но 73 вече участва в съответната четворка. Следователно търсената четворка числа е 61, 13, 31 и 89.

Задача 6. Съществуват ли три цифри, за които всички трицифрени числа, образувани от тях без повторение на цифрите, да са прости числа?

Решение. От цифрите 0, 1, 2, …, 9 само с цифрите 1, 3, 7 и 9 могат евентуално да се получат числа, отговарящи на условието на задачата. По тройки те са: 1, 3, 7; 1, 3, 9; 1, 7, 9 и 3, 7, 9. Понеже $371 = 53.7$, $391 = 23.17$, $791 = 113.7$ и $793 = 61.13$, то получаваме, че няма такива цифри.

Задача 7. Естествените числа n, m и k са такива, че $n+m$, $n+k$ и $m+k$ са прости числа. Докажете, че сред числата n, m и k има равни.

Решение. Понеже n, m и kса три естествени числа, то две от тях са с еднаква четност (и двете са четни или и двете са нечетни). Тогава сборът им е четно число. Нека това са числата n и m. Следователно $n+m$ е четно число, а по условие е и просто. Това показва, че единствената възможност е $n+m=2$, откъдето $m=n=1$.

Задача 8. Намерете всички прости огледални числа, които се записват с четен брой цифри.

Решение. Нека разгледаме едно огледално шестцифрено число $\overline{abccba}$. Понеже $a-b+c-c+b-a=0$, то това число се дели на 11 и трябва да е просто. Единственото число с това свойство е 11.

Задача 9. Намерете простите числа p, q и r, за които

$$pqr = 3(p+q+r).$$

Решение. От условието на задачата следва, че 3 дели pqr. Следователно едно от тези числа е 3. Нека $p=3$. Тогава даденото равенство приема вида

$$qr = 3+q+r \Leftrightarrow qr-q-r+1 = 4 \Leftrightarrow q(r-1)-(r-1) = 4 \Leftrightarrow (r-1)(q-1) = 4.$$

Възможни са два случая:

Случай 1. $\left|\begin{array}{l} r-1=1 \\ q-1=4 \end{array}\right.$, откъдето $r=2$, $q=5$.

Случай 2. $\left|\begin{array}{l} r-1=2 \\ q-1=2 \end{array}\right.$, откъдето $r=q=3$.

Търсените числа са $(3;3;3)$ или $(3;5;2)$.

Задача 10. Намерете всички прости числа p, за които $3.p+256$ е квадрат на естествено число.

Решение. От условието на задачата следва равенството $3p+256=n^2$, където n е някакво естествено число. Последното равенство записваме във вида

$3p = (n-16)(n+16)$, откъдето

$$\left| \begin{array}{l} n-16=3 \\ n+16=p \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} n-16=p \\ n+16=3 \end{array} \right. \text{ или }$$

$$\left| \begin{array}{l} n-16=1 \\ n+16=3p \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} n-16=3p \\ n+16=1 \end{array} \right. .$$

След решаване на системите получаваме, че само при $n = 17$ и $p = 11$ се изпълняват условията на задачата.

Задача 11. Намерете всички прости числа p и q такива, че $p^2 - 2q^2 = 1$.

Решение. Най-малката стойност за p и q е 2, откъдето $p^2 = 2q^2 + 1 \geq 9$, т.е. p е просто число, не по-малко от 3. Така стигаме до извода, че p е нечетно число. От равенството $q^2 = \dfrac{1}{2}(p-1)(p+1)$ и факта, че $p-1$ и $p+1$ са две последователни четни числа, следва, че q е четно. Единствената възможност за q е $q = 2$ и непосредствено се вижда, че се получава при $p = 3$.

Задача 12. Намерете всички прости числа, които могат да се получат за подходящо естествено число n от записа:
а) $n^2 + 4n - 5$;
б) $n^4 - 7n^3 + 12n^2 - 7n + 51$.

Решение. а) Разлагаме на множители дадения израз и получаваме

$$n^2 + 4n - 5 = n^2 + 5n - n - 5 = n(n-1) + 5(n-1) = (n-1)(n+5).$$

Тогава $(n-1)(n+5) = p$, където p е търсеното просто число. Понеже $n - 1 < n + 5$ за всяко n, то

$$\left| \begin{array}{l} n-1=1 \\ n+5=p \end{array} \right. .$$

Следователно при $n = 2$, $p = 7$, което е единствено решение на задачата.
б) От $n^4 - 7n^3 + 12n^2 - 7n + 51 = (n^2 + n + 3)(n^2 - 8n + 17)$ следва, че $(n^2 + n + 3)(n^2 - 8n + 17) = p$, където p е търсеното просто число. Понеже $n^2 - 8n + 17 < n^2 + n + 3$ за всяко $n \geq 2$, то са в сила равенствата

$$\left| \begin{array}{l} n^2-8n+17=1 \\ n^2+n+3=p \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (n-4)^2=0 \\ n^2+n+3=p \end{array} \right. .$$

При $n = 4$ от второто равенство намираме $p = 23$. Ако $n = 1$, от дадения запис получаваме $1^4 - 7.1^3 + 12.1^2 - 7.1 + 51 = 50$, което е съставно число.

Задача 13. Докажете, че не съществуват такива естествени числа a и b, за които при произволни различни прости числа p и q числото $ap+bq$ е просто.

Решение. Да предположим, че съществуват такива естествени числа a и b. Да изберем две прости числа p и q, които имат едни и същи остатъци при деление с $a+b$. Такива p и q има, защото простите числа са безкрайно много, а остатъците при деление с $a+b$ са точно $a+b$ на брой цели неотрицателни числа. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} p = l\,(a+b)+r \\ q = k\,(a+b)+r \end{array} \right. ,$$

откъдето $ap+bq=(a+b)(al+bk+r)$. Последното равенство показва, че $a+b$ дели $ap+bq$, т.е. $ap+bq$ е съставно число.

Задача 14. Докажете, че ако p и q са прости числа, по-големи от 3, то p^2-q^2 се дели на 24.

Решение. Имаме $p^2-q^2=(p-1)(p+1)-(q-1)(q+1)$. Понеже p и q са прости числа, по-големи от 3, то те са нечетни, а двойките $(p-1)$, $(p+1)$ и $(q-1)$, $(q+1)$ са последователни четни числа. Следователно всяко от произведенията $(p-1)(p+1)$ и $(q-1)(q+1)$ се дели на 8.

Знаем, че числото 3 дели произведението на всеки три последователни числа. Следователно 3 дели $(p-1).p.(p+1)$ и $(q-1).q.(q+1)$, но 3 не дели p, както и q. Следователно 3 дели $(p-1)(p+1)$ и $(q-1)(q+1)$. Получените изводи показват, че p^2-q^2 се дели на $3.8=24$.

Задача 15. Докажете, че квадратът на произволно просто число, което е по-голямо от 3, при деление с 24 дава остатък 1.

Решение. Нека $n>3$ е просто число. Тогава $n-1$ и $n+1$ са две последователни четни числа и тяхното произведение $(n-1)(n+1)=n^2-1$ е число, кратно на 24 (вж. задача 14). Тогава $n^2-1=24m$, където m е някакво естествено число, а $n^2=24m+1$, което показва, че при деление на n^2 с 24 се получава остатък 1.

Задача 16. Възстановете умножението, ако всяка звездичка е просто число.

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & * & * & * \\
 & & \cdot & & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
+ & * & * & * & * & \\
\hline
 & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Решение. Знаем, че от цифрите само 2, 3, 5 и 7 са прости числа. Само те могат да участват в този ребус. Ясно е, че нито една от цифрите на единиците на двата множителя не е 2, защото цифрата на единиците на първия междинен резултат ще е четна цифра, по-голяма от 2, т.е. съставно число. Не е възможно цифрите на единиците на двата множителя да са 7 и 3, защото произведението им ще завършва на 1, което не е просто число. Ребуса записваме във вида (различните букви не означават различни цифри).

$$\begin{array}{cccccc} & & & a & b & 5 \\ & & \cdot & & c & 3 \\ \cline{4-6} & & * & * & d & 5 \\ + & * & * & * & * & \\ \cline{2-6} & * & * & * & * & 5 \end{array}$$

Ясно е, че $b \neq 2$, защото първият междинен резултат е четирицифрено число и при $b = 2$ ще се получи четирицифрено число само при $a = 5$ или $a = 7$, но първите му две цифри ще са 15 или 21, а 1 не е просто число. Ако $b = 3$, то $d = 0$, а при $b = 5$ следва, че $d = 6$. Остава $b = 7$ и ребусът е

$$\begin{array}{cccccc} & & & a & 7 & 5 \\ & & \cdot & & c & 3 \\ \cline{4-6} & & * & * & 2 & 5 \\ + & * & * & * & * & \\ \cline{2-6} & * & * & * & * & 5 \end{array}$$

Сега искаме $3.a + 2$ да е двуцифрено число, което се записва с прости цифри. Това е възможно при $a = 7$. Така получаваме

$$\begin{array}{cccccc} & & & 7 & 7 & 5 \\ & & \cdot & & c & 3 \\ \cline{4-6} & & * & * & 2 & 5 \\ + & * & * & * & * & \\ \cline{2-6} & * & * & * & * & 5 \end{array}$$

Ако изберем $c = 3$, ребусът приема вида

$$
\begin{array}{r}
775 \\
\cdot \quad 33 \\
\hline
2325 \\
+\;2325 \\
\hline
25575
\end{array}
$$

С което условията на задачата са изпълнени. С проверка се отхвърлят $c = 2$, $c = 5$, $c = 7$.

Задача 17. В таблица от два реда и пет колони са записани числата от 0 до 9, всяко по веднъж. Пресметнати са сборовете по всеки ред и по всяка колона. Най-много колко от тези седем сбора могат да са прости числа?

Решение. Да предположим, че всичките седем сбора са прости числа. Сборовете по редове са нечетни и са по-големи от 5. Тогава общият сбор ще е четно число. Понеже $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$, което е нечетно число, то броят на сборовете, които са прости числа, трябва да е по-малък от 7.

Могат да се получат шест сбора да са прости числа. Ето един пример:

0	1	2	3	7
5	6	9	8	4

Литература

1. Агаханов, Н., О. Подлипский. Математические олимпиады Московской области. МФТИ, Москва, 2003. ISBN 5-81155-100-0.
2. Берлов, С., С. Иванов, К. Кохась. Петербургские математические олимпиады. Лань, Санкт Петербург, 2005. ISBN 5-8114-0083-7.
3. Вышенский, В. и др. Сборник задач киевских математических олимпиад. Виша школа, Киев, 1984.
4. Колев, Е. и др. Първи български фестивал на младите математици. Олимпмат ЕООД, София, 2011.

незабравими етюди

На 5 март 2016 година, след кратко боледуване на 63 годишна възраст почина доцент д-р Пламен Николов Сидеров – математик, преподавател и приятел. Забележителна личност и блестящ математик.

В тази кратка статия се срещат две негови чудесни качества: математически талант и лекота на писане.

Пламен измисли тази задача преди четири години, но едва миналата година написа решението ѝ. Изпрати ми я по електронната поща, с кратко писмо „ползвай я, както намериш за добре“. Тогава не знаех, как ще я ползвам.

Много ни липсваш, Пламъче.

Емил Карлов

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ЗАДАЧА НА ЕРДЬОШ

доц. Пламен Сидеров

През 1932 година световноизвестният математик Пол Ердьош предлага следната

Задача на Ердьош. Нека M е произволна вътрешна точка за $\triangle A_1A_2A_3$. Ако R_1, R_2, R_3 са разстоянията от точката M съответно до върховете A_1, A_2 и A_3 на триъгълника, а r_1, r_2, r_3 са разстоянията от точката M съответно до страните A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1 на триъгълника. Да се докаже неравенството

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3). \qquad (1)$$

Решението на тази задача може да намерите в сборника на И. Ф. Шаригин „Задачи по геометрии“ 1986 г., Москва, задача 379 б) или в статията от бр. 2. сп. „Математика“ 2015 г. „Скаларно произведение, ама мнимо“.

Тук ще предложим едно обобщение на задачата на Ердьош.

Задача на Пламен Сидеров. Четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност $K(O;R)$ с център O и радиус R и в него е вписана окръжност

$k(I;r)$ с център I и радиус r. Да означим с R_1, R_2, R_3, R_4 разстоянията от точката I съответно до върховете A_1, A_2, A_3, A_4 на четириъгълника, а с r_1, r_2, r_3, r_4 разстоянията от точката O съответно до страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 на четириъгълника. Да се докажат неравенствата

$$r \leq \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4} \leq R\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

$$R \geq \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{4} \geq r\sqrt{2} \tag{3}$$

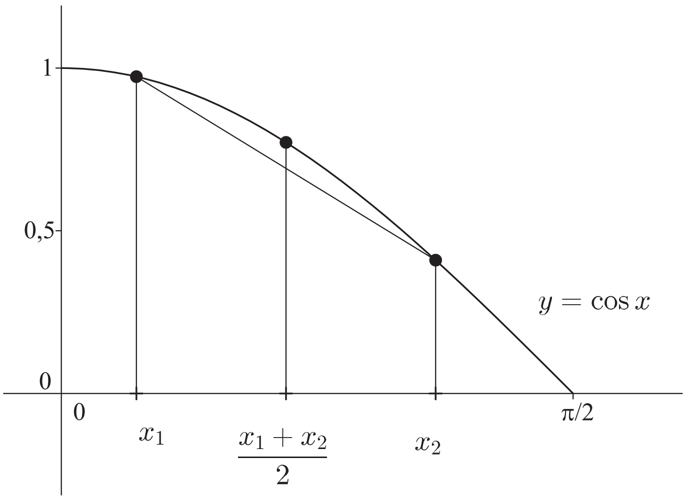
Решение. Нека центърът O е вътрешна точка за четириъгълника. За да докажем дясната част на неравенство (2)

$$\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4} \leq R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ще използваме познатото неравенство на Йенсен (Н. Седракян, А. Авоян „Неравенства. Методы доказательства“ 2002 г., Москва, стр. 156) за *вдлъбнатата* функция $y = \cos x$ при $\in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2}$$

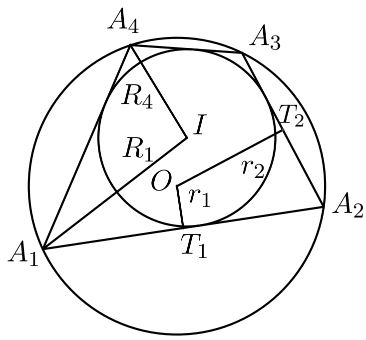
Стойността $\cos\frac{x_1+x_2}{2}$ вляво на неравенството е не по-малка от средната



отсечка на трапеца с основи, равни на $\cos x_1$ и $\cos x_2$ в дясната част на неравенството.

Да означим

$$\sphericalangle A_1OA_2 = 2\alpha_1, \quad \sphericalangle A_2OA_3 = 2\alpha_2, \quad \sphericalangle A_3OA_4 = 2\alpha_3, \quad \sphericalangle A_4OA_1 = 2\alpha_4.$$



Тогава

$$r_1 = R.\cos\alpha_1, \quad r_2 = R.\cos\alpha_2, \quad r_3 = R.\cos\alpha_3, \quad r_4 = R.\cos\alpha_4.$$

Оттук

$$\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4} = \frac{R\left(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4\right)}{4} \leq$$

$$\leq R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4} = R\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Да означим

$$A_1IA_2 = 2\beta_1, \quad \sphericalangle A_2IA_3 = 2\beta_2, \quad \sphericalangle A_3IA_4 = 2\beta_3, \quad \sphericalangle A_4IA_1 = 2\beta_4.$$

Тогава

$$R_1 = \frac{r}{\cos\beta_1}, \; R_2 = \frac{r}{\cos\beta_2}, \quad R_3 = \frac{r}{\cos\beta_3}, \quad R_4 = \frac{r}{\cos\beta_4}.$$

Този път ще използваме неравенството на Йенсен за *изпъкналата* функция $y = \dfrac{1}{\cos x}$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\left(\cos\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)^{-1} \leq \frac{(\cos\beta_1)^{-1}+(\cos\beta_2)^{-1}}{2}$$

Оттук

$$\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{4} = \frac{r\left(\dfrac{1}{\cos\beta_1}+\cdots+\dfrac{1}{\cos\beta_4}\right)}{4} \geq \frac{r}{\cos\frac{\pi}{4}} = r\sqrt{2}.$$

За да докажем лявата страна на неравенството (2) ще използваме познатото неравенство на Чебишов (Н. Седракян, А. Авоян, „Неравенства. Методы доказательства“ 2002 г., Москва, стр. 117 неравенство 8.7).

Дадени са неотрицателните реални числа a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4. Ако за всеки два индекса $i, j = 1, 2, 3, 4$ е изпълнено условието $a_i \geq a_j \Leftrightarrow b_i \leq b_j$, то

$$a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + a_4.b_4 \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4). \quad (4)$$

Да означим с a_1, a_2, a_3, a_4 дължините на страните на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$, а с P и S съответно периметъра и лицето му. Имаме

$$\begin{aligned} P.r &= 2S = 2(S_{OA_1A_2} + S_{OA_2A_3} + S_{OA_3A_4} + S_{OA_4A_1}) = \\ &= a_1.r_1 + a_2.r_2 + a_3.r_3 + a_4.r_4 \leq P \cdot \frac{(r_1 \ + \ r_2 \ + \ r_3 \ + \ r_4)}{4}. \end{aligned}$$

Тук трябва да отбележим очевидното, че по-дългите хорди са по-близо до центъра O на описаната окръжност или $a_i \geq a_j \Leftrightarrow r_i \leq r_j$ и това прави възможно прилагането на неравенството (4) на Чебишов. С това лявата част на неравенството (2) е доказана.

Да означим с T_1, T_2, T_3, T_4 допирните точки на страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 с вписаната в четириъгълника окръжност. Фигурата $A_1T_1IT_4$ е делтоид и лицето му е $S_{IT_4A_1T_1} = \dfrac{1}{2}R_1t_1$. Разбиваме четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ на делтоиди получаваме

$$2S = R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3 + R_4t_4.$$

Освен това $R_1 = \dfrac{r}{\sin\frac{\sphericalangle A_1}{2}}$ и $t_1 = 2r\cos\dfrac{\sphericalangle A_1}{2}$. От аналогичните изрази за R_2, R_3, R_4 и t_2, t_3, t_4 получаваме неравенствата

$$R_i \geq R_j \Leftrightarrow \frac{\sphericalangle A_i}{2} \ \leq \ \frac{\sphericalangle A_j}{2} \leftrightarrow t_i \geq t_j.$$

Тогава неравенството на Чебишов ще обърне посоката си, т.е. ако за всеки два индекса i, $j = 1, 2, 3, 4$ е изпълнено условието $a_i \geq a_j \Leftrightarrow b_i \geq b_j$, то

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \geq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4). \quad (5)$$

Прилагаме неравенството (5) за лицата на делтоидите

$$2S = R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3 + R_4t_4 \geq \ \frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\,(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)}{4}$$

или $\dfrac{2S}{(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)} \ \geq \ \dfrac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{4}$.

Остава да докажем, че $R \geq \dfrac{2S}{(t_1+t_2+t_3+t_4)}$.

Разглеждаме четириъгълника $OT_4A_1T_1$. Имаме $2S_{OT_4A_1T_1} \leq Rt_1$, откъдето $2S \leq R(t_1+t_2+t_3+t_4)$, т.е. $R \geq \dfrac{2S}{(t_1+t_2+t_3+t_4)}$.

С това задачата е решена. Не е трудно да се установи, че неравенствата (2) и (3) се обръщат в равенства, когато четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е квадрат.

Всеки лесно може да докаже следното твърдение.

Многоъгълникът $A_1A_2\ldots A_n$ е вписан в окръжност $K(O;R)$ с център O и радиус R и в него е вписана окръжност $k(I;r)$ с център I и радиус r. Да означим с R_1, R_2, $\ldots$, R_n разстоянията от точката I до върховете A_1, A_2, $\ldots$, A_n на многоъгълника, а с r_1, r_2,$\ldots$, r_n разстоянията от точката O до страните A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 на многоъгълника. Да се докажат неравенствата

$$r \leq \frac{r_1+r_2+\cdots+r_n}{n} \leq R.\cos\frac{\pi}{n} \tag{2'}$$

$$R \geq \frac{R_1+R_2+\cdots+R_n}{n} \geq \frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}} \tag{3'}$$

Ето още една подобна задача.

Нека диагоналите A_1A_3 и A_2A_4 на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ се пресичат в точката P, а r_1, r_2, r_3, r_4 да са разстоянията от точката P до страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 на четириъгълника. Да се докаже неравенството:

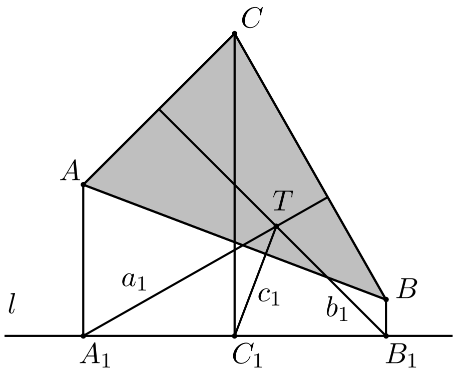
$$A_1A_3+A_2A_4 \geq \sqrt{2}(r_1+r_2+r_3+r_4) \tag{6}$$

Равенство се достига само когато четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е квадрат.

ОРТОПОЛЮС

Невена Събева

Да разгледаме триъгълник ABC и права l в равнината. Нека точките A_1, B_1 и C_1 са ортогоналните проекции на съответните върхове на триъгълника ABC върху l. През A_1 построяваме правата $a_1 \perp BC$, през B_1 – правата $b_1 \perp CA$ и през C_1 – правата $c_1 \perp AB$. Оказва се, че правите a_1, b_1 и c_1 се пресичат в една точка[1].



Пресечната точка T на a_1, b_1 и c_1 се нарича *ортополюс на правата l спрямо триъгълника ABC*. Преди да разгледаме някои интересни свойства и приложения на ортополюса, ще докажем неговото съществуване.

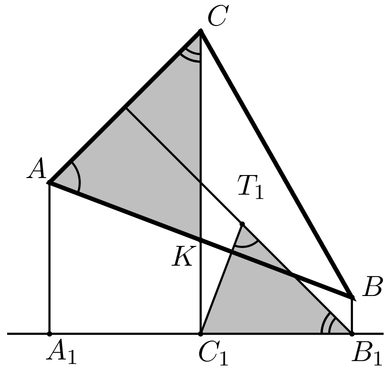
Теорема за ортополюса. За всеки триъгълник ABC и права l правите през ортогоналните проекции A_1, B_1 и C_1 на върховете A, B и C върху l, перпендикулярни съответно на BC, CA и AB, се пресичат в една точка.

Доказателство с подобни триъгълници. Нека $CC_1 \cap AB = K$. Ако разглежданите прави са a_1, b_1 и c_1, да означим $c_1 \cap b_1 = T_1$ и $c_1 \cap a_1 = T_2$. Триъгълниците AKC и $C_1B_1T_1$ са подобни, тъй като

$$\sphericalangle C_1B_1T_1 = \sphericalangle ACK \quad \text{и}$$

$$\sphericalangle C_1T_1B_1 = \sphericalangle CAK$$

(ъгли с взаимно перпендикулярни рамена). Оттук



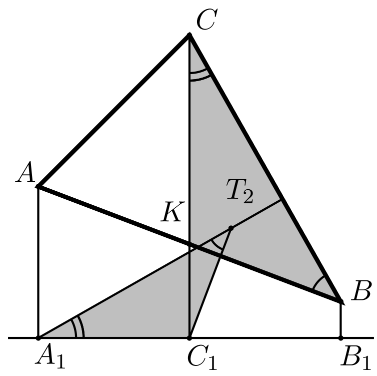
$$\frac{C_1T_1}{AK} = \frac{C_1B_1}{CK}. \tag{1}$$

[1] Приемаме, че успоредните прави се пресичат в безкрайната точка.

Аналогично от подобието $\triangle BKC \sim A_1C_1T_2$ имаме

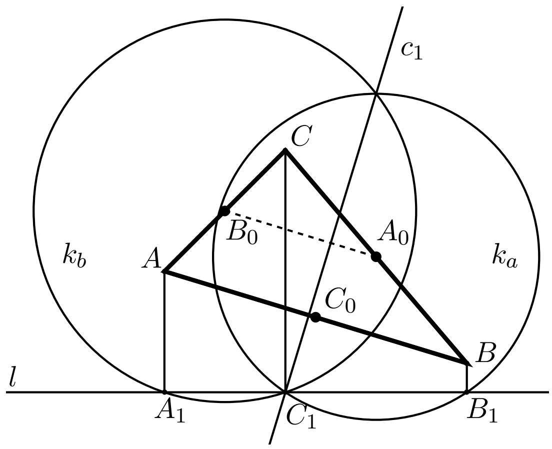
$$\frac{C_1T_2}{BK} = \frac{A_1C_1}{CK}. \tag{2}$$

Тъй като $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{A_1C_1}{C_1B_1}$ по теоремата на Талес, от (1) и (2) получаваме равенството $C_1T_1 = C_1T_2$. Това означава, че $T_1 \equiv T_2$, т.е. правите a_1, b_1 и c_1 се пресичат в една точка ([1], стр. 126).



Доказателство с радикални оси. Да означим с A_0, B_0, C_0 средите съответно на BC, CA, AB. Тъй като BB_1C_1C е правоъгълен трапец, то средната основа е симетрала на бедрото B_1C_1. Това означава, че средата A_0 на бедрото BC лежи на симетралата на B_1C_1, т.е. $A_0B_1 = A_0C_1 = r_a$. Затова окръжност k_a с център A_0 и радиус r_a минава през B_1 и C_1.

По същия начин построяваме окръжност k_b с център B_0 през A_1 и C_1 и окръжност k_c с център C_0 през A_1 и B_1.



Радикалната ос на окръжностите k_a и k_b минава през общата им точка C_1 и е перпендикулярна на централата им A_0B_0. Но A_0B_0 е средна отсечка в триъгълника ABC и е успоредна на AB. Следователно радикалната ос на окръжностите k_a и k_b е права през C_1, перпендикулярна на AB – това е точно правата c_1.

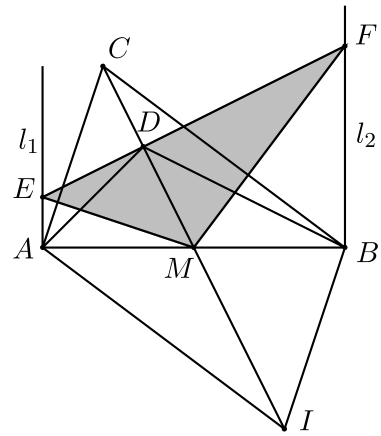
Аналогично радикалната ос на окръжностите k_b и k_c е правата a_1, а на k_c и k_a – правата b_1. Следователно трите радикални оси a_1, b_1 и c_1 се пресичат в една точка ([2], стр. 83).

Трето доказателство, което използва теоремата на Карно, може да се намери в [5]. В [6] теоремата е доказана с помощта на теоремата на Пап.

Теоремата за ортополюса стана изключително популярна, след като на JBMO 2015 беше предложена следната задача.

Задача 1. В остроъгълен триъгълник ABC през върховете A и B са построени съответно прави l_1 и l_2, перпендикулярни на AB. Перпендикулярът от средата M на AB към правата AC пресича l_1 в точката E, а перпендикулярът от M към BC пресича l_2 в точката F. Ако $EF \cap MC = D$, да се докаже, че $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EMF$.

Решение. Да удвоим медианата CM в $\triangle ABC$, т.е. да построим точка $I \in CM$ така, че M да е среда на CI. Получаваме успоредника $AIBC$.



Да разгледаме триъгълника EMF и правата AB. Върховете на EMF се проектират в точките A, M и B от правата AB. Правата през проекцията A на E, перпендикулярна на MF, е правата AI (успоредна на BC, а $BC \perp MF$). Правата през проекцията B на F, перпендикулярна на ME, е правата BI. Следователно I е ортополюсът на AB спрямо триъгълника EMF. Това означава, че правата MI е перпендикулярна на EF, т.е.

$$CM \perp EF.$$

Оттук лесно следва твърдението на задачата. Четириъгълниците $AMDE$ и $BMDF$ са вписани и имаме

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADB &= \sphericalangle ADM + \sphericalangle BDM = \sphericalangle AEM + \sphericalangle BFM = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle AME - \sphericalangle BMF = \sphericalangle EMF. \end{aligned}$$

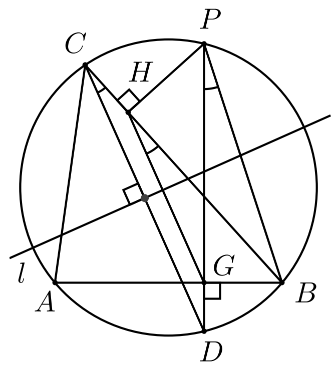
Следващата задача свързва ортополюса, правата на Симсън и окръжността на деветте точки.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с център O на описаната окръжност. Да се докаже, че ортополюсът на произволна права l през O спрямо ABC лежи на перпендикулярна на l права на Симсън и на окръжността на деветте точки на ABC.

Решение. За да построим правата на Симсън, перпендикулярна на l, ще използваме следната лема.

Лема. Дадени са триъгълник ABC и права l. Ако правата през C, перпендикулярна на l, пресича описаната около ABC окръжност k в точката D, а правата през D, перпендикулярна на AB, пресича k в точката P, то правата на Симсън на точката P спрямо ABC е перпендикулярна на l.

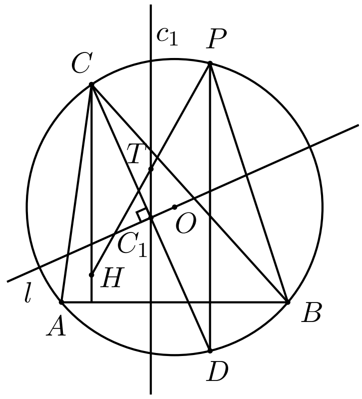
Доказателство. Нека $AB \cap DP = G$ и H е петата на перпендикуляра от P към CB. Тогава GH е правата на Симсън s_P на точката P.



От вписания четириъгълник $BPHG$ имаме $\sphericalangle GPB = \sphericalangle GHB$. Но $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DCB$, следователно $\sphericalangle DCB = \sphericalangle GHB$. Това означава, че правата $GH \equiv s_P$ е успоредна на CD, а следователно перпендикулярна на l.

Сега да се върнем към задачата. Нека правата l минава през центъра O на описаната около триъгълника ABC окръжност. За да построим ортополюса на l спрямо ABC, спускаме перпендикуляр от C към l; нека той пресича l в точката C_1, а k в точката D. След това през проекцията C_1 на върха C построяваме права c_1, перпендикулярна на AB. Ортополюсът на l спрямо ABC е пресечната точка на c_1 и аналогично дефинираните прави a_1 и b_1.

Нека H е ортоцентърът на ABC, а правата през D, перпендикулярна на AB, пресича k в точката P. Имаме три успоредни прави PD, c_1 и CH. Тъй като точката C_1 е среда на хордата CD, по теоремата на Талес следва, че правата c_1 разполовява и отсечката PH. Аналогично всяка от правите a_1 и b_1 минава през средата на PH. Това означава, че ортополюсът T на l спрямо ABC съвпада със средата на PH.



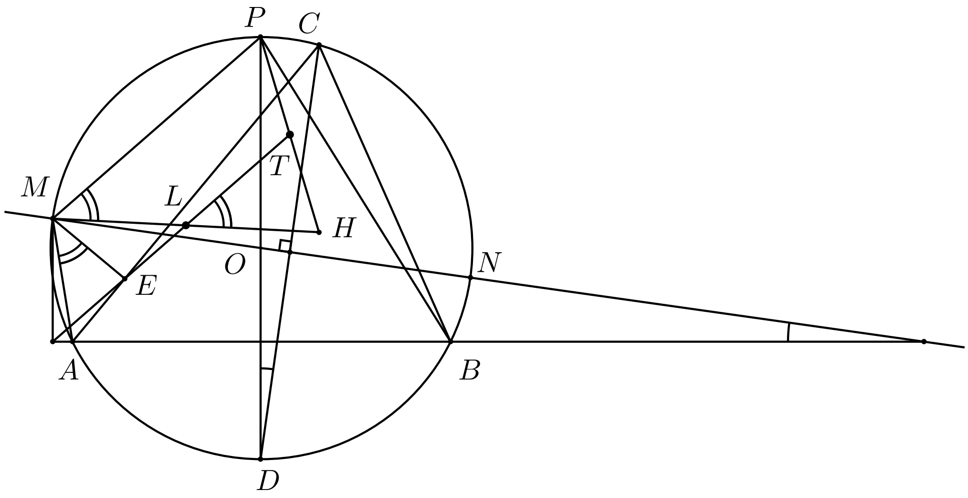
От друга страна, средата на PH лежи на окръжността на деветте точки на ABC ([3], стр. 235). През средата на PH минава и правата на Симсън s_P на точката P ([4], стр. 115), а от лемата следва, че $s_P \perp l$. Така доказахме, че ортополюсът на права l през O лежи на окръжността на деветте точки на ABC и на правата на Симсън, перпендикулярна на l.

Забележка. Не е трудно да се докаже, че ако правата l се транслира на разстояние d в перпендикулярно на l направление, ортополюсът на l спрямо дадения триъгълник се транслира на разстояние d в същото направление. От това наблюдение и задача 2 следва, че ортополюсът на всяка права l лежи на права на Симсън, перпендикулярна на l.

В хода на решението на задача 2 получихме алтернативен начин за построяване на ортополюс на права през центъра на описаната окръжност на дадения триъгълник, който начин ще използваме в следващата задача.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC. През центъра O на описаната около ABC окръжност k е построена права l, която пресича k в точките M и N. Да се докаже, че ортополюсът на правата l спрямо ABC съвпада с пресечната точка на правите на Симсън на точките M и N.

Решение. Да повторим конструкцията от задача 2. Правата през C, перпендикулярна на l, пресича k в точка D; правата през D, перпендикулярна на AB, пресича k в точката P. Ортополюсът T на l спрямо ABC е средата на отсечката PH, където H е ортоцентърът на ABC. Достатъчно е да докажем, че правата на Симсън s_M на точката M също минава през средата на отсечката PH.



На чертежа[2] точката E е проекцията на M върху AC. Имаме

$$\sphericalangle(s_M, AB) = \sphericalangle AME = 90^\circ - \sphericalangle MAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\,M\overset{\frown}{P}C\ .$$

От друга страна, s_M минава през средата L на MH. Отсечката TL е успоредна на MP (средна отсечка в триъгълника MPH), затова

$$\sphericalangle(LT, AB) = \sphericalangle(MP, AB) = \frac{1}{2}(P\overset{\frown}{N}B - \overset{\frown}{MA}).$$

Остава да забележим, че $\sphericalangle(AB, l) = \sphericalangle PDC$ (ъгли с взаимноперпендикулярни рамена), откъдето $\overset{\frown}{MA} - \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{PC}$ и

$$P\overset{\frown}{N}B - \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{PC} + \overset{\frown}{CN} + \overset{\frown}{NB} - \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{CN} = 180^\circ - M\overset{\frown}{P}C,$$

следователно $\sphericalangle(s_M, AB) = \sphericalangle(LT, AB)$. Тъй като $L \in s_M$, то и $T \in s_M$. По същия начин ортополюсът T лежи на правата на Симсън s_N на точката

[2] При различно разположение на правата l разсъжденията са аналогични.

N. Получихме, че ортополюсът на правата l спрямо ABC е общата точка на правите на Симсън на пресечните точки на l и описаната около ABC окръжност.

С ортополюса е свързано още едно интересно свойство.

Ако точката X се движи по фиксирана права l през центъра на описаната около триъгълника ABC окръжност, то описаната окръжност около педалния триъгълник на X спрямо ABC минава през постоянна точка от окръжността на деветте точки на ABC. Оказва се, че тази постоянна точка, наречена още *точка на Грифитс*, е ортополюсът на правата l спрямо ABC.

Литература

[1] R. Honsberger. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, vol.37 (2005).

[2] Моденов П. С., *Задачи по геометрии*, Москва, Наука, 1979.

[3] Х. Хитов. *Геометрия на триъгълника*, София, Нар. просвета, 1990.

[4] В. Прасолов. *Задачи по планиметрии*, Москва, МЦНМО, 2001.

[5] I. Patrascu. *The Dual of the Orthopole Theorem.*
http://rxiv.org/pdf/1404.0148v1.pdf.

[6] A. Dixit, D. Grinberg. *Orthopoles and the Pappus Theorem*, Forum Geometricorum, Vol. 4 (2004), 53–59.

Конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2015 г. и бр. 1, 2 от 2016 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2016 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

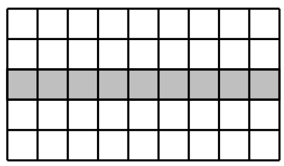
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН,
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. В полетата на таблица 5×9 се записани числа. Ако всяко ъгълче покрива три числа със сбор,



а) кратен на 3, докажете, че сборът на всички числа в таблицата се дели на 3;

б) равен на 3, намерете сбора на числата в оцветения ред на таблицата.

Задача 2. На изборите за цар животните гласували за лъва, за мечката и за слона. Броят на животните, които гласували за мечката, бил 2 пъти по-голям от резултата на слона в проценти. Броят на животните, които гласували за лъва, бил 4 пъти по-голям от резултата на мечката в проценти. Броят на животните, които гласували за слона, бил 8 пъти по-голям от резултата на лъва в проценти. Кой е спечелил изборите и колко животни са гласували за него?

Задача 3. В триъгълника ABC е построена ъглополовящата BL. На страната BC е отбелязана точка D така, че $AB = CD$. Правите AD и BL се пресичат в точката T. Да се докаже, че лицата на триъгълниците LTC и ADL са равни.

Срокът за представяне на решенията е 31.05.2016 г.

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 6/2015 г.

Задача 1. Хари Потър получил кутия с ментови жаби и изял третината от тях. След това Рон взел третината от останалите жаби и още две жаби. Останалите жаби взела Хърмаяни и се оказало, че ако даде четири от жабите си на Хари, ще има толкова жаби, колкото Рон. Колко ментови жаби е имало в кутията?

Решение. Щом Хърмаяни трябва да даде 4 жаби, за да има колкото Рон, то тя е взела с 4 жаби повече от Рон. От друга страна, след като Рон взел третината от останалите след Хари жаби и още две жаби, за Хърмаяни са останали с 2 жаби по-малко от две третини. Значи две третини без 2 жаби е колкото третина и $2+4=6$ жаби. Следователно третината от останалите след Хари жаби е $6+2=8$, т.е. след Хари са останали $3.8=24$ жаби. Оттук намираме, че Хари е изял $24:2=12$ жаби и в кутията е имало 36 жаби.

Задача 2. Когато Руси бил на възрастта на по-младия си приятел Петър, най-големият общ делител на годините им бил 14. В момента най-малкото общо кратно на годините им е 280. На колко години е Руси?

Решение. Нека Петър е на x години, а Руси е с y години по-голям, т.е. на $x+y$ години. Когато Руси е бил на възрастта на Петър, т.е. на x години, Петър е бил на $x-y$ години. Тъй като най-големият общ делител на x и $x-y$ е 14, то НОД$(x;\ y)=14$, а значи и

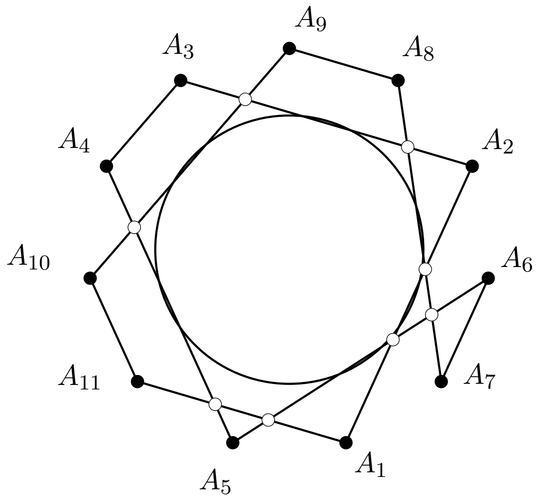
$$\text{НОД}(x;\ x+y)=14=2.7.$$

Освен това годините на Руси и Петър имат най-малко общо кратно 280, т.е.

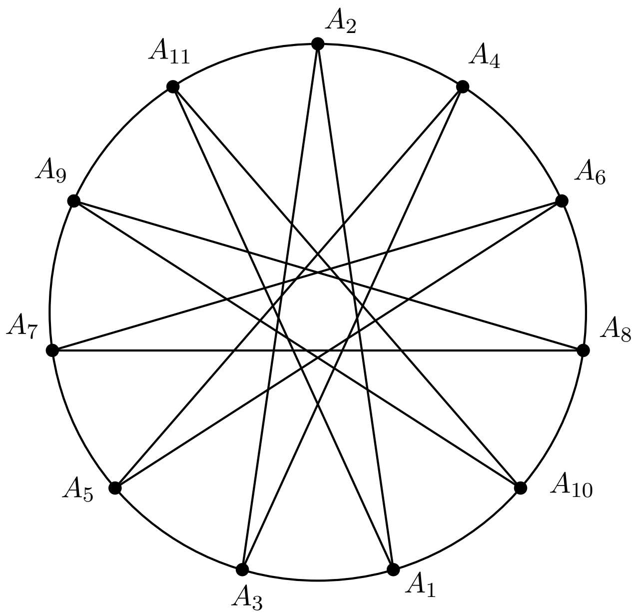
$$\text{НОК}(x;\ x+y)=280=2.2.2.5.7.$$

Следователно единият е на $2.2.2.7=56$ години, а другият е на $2.5.7=70$ години и това е Руси.

Задача 3. Иво отбелязал 11 точки по окръжност, означил ги с A_1, $A_2,\dots,A_{10}$, A_{11} в някакъв ред и построил 11 отсечки: A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4,\dots,A_{10}A_{11}$, $A_{11}A_1$. Най-много колко вътрешни пресечни точки може да имат отсечките, които е построил Иво? (В показания пример отсечките се пресичат само в 8 вътрешни точки.)



Решение. Всяка от единадесетте отсечки може да пресича във вътрешна точка най-много $11 - 3 = 8$ от останалите отсечки (без нея самата и без двете отсечки, с които има общ край). Тогава пресечните точки са най-много $(11.8) : 2 = 44$. Не е трудно да се построи пример с 44 вътрешни пресечни точки.



конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2015/16 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Симетралата на CD пресича AD в точка P и BD в точка Q. Да се докаже, че $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle PCB$.

Задача 2. Да се докаже, че за триъгълник със страни a, b, c и лице S е изпълнено неравенството:

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Задача 3. Върху окръжност са избрани 40 точки и са построени 5 триъгълника с върхове в тези точки. Триъгълниците нямат общи върхове и общи вътрешни точки. Да се докаже, че може да се построи още един триъгълник, който няма общи върхове и вътрешни точки с никой от построените 5.

Срокът за представяне на решенията е 31.05.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 6/2015 г.

Задача 1. Колко са десетцифрените числа, кратни на 99, всяко от които се записва с различни цифри?

Решение. Цифрите на десетцифрено число с различни цифри са 0, $1, \ldots, 9$. Техният сбор е равен на 45 и следователно всяко такова число се дели на 9. Условието числото $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ да се дели на 11 е разликата

$$a_2 + a_4 + \cdots a_{10} - (a_1 + a_3 + \cdots + a_9)$$

да се дели на 11. Ако

$$t = a_2 + a_4 + \cdots a_{10},$$

то

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = 45 - t$$

и тогава $2t - 45$ се дели на 11. Тъй като

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 \leqq t \leqq 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

лесно се проверява, че единствените възможнти стойности на t са $t = 17$ и $t = 28$. При $t = 28$ имаме $a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = 17$. Числото 17 може да се получи като сбор на 5 различни цифри по 11 начина:

$$\{0,1,2,5,9\} \quad \{0,1,2,6,8\} \quad \{0,1,3,4,9\} \quad \{0,1,3,5,8\}$$
$$\{0,1,3,6,7\} \quad \{0,1,4,5,7\} \quad \{0,2,3,4,8\} \quad \{0,2,3,5,7\}$$
$$\{0,2,4,5,6\} \quad \{1,2,3,4,7\} \quad \{1,2,3,5,6\}.$$

За позицията на цифрата 0 има 9 възможности. За избор на някое от горните множества има 11 възможности. За наредба на останалите 5 цифри от избраното множество има $4! = 24$ възможности и накрая, за наредба на останалите 5 цифри имаме $5! = 120$ възможности. Общо $9.11.24.120 = 285120$ числа с даденото свойство.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : R \to R$, които изпълняват условието

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy)$$

за всички $x,\ y \in R$.

Решение. Сменяме местата на x и y в горното равенство и получаваме:

$$f(f(yx)) = |y|f(x) + 3f(yx),$$

откъдето след изваждане с равенството от условието, получаваме

$$|x|f(y) = |y|f(x).$$

При $x = 1$ от това равенство намираме $f(y) = |y|f(1)$. Сега от равенството от условието следва

$$|xy||f(1)|f(1) = 4f(1)|xy|.$$

Оттук $f(1) = 0$ или $|f(1)| = 4$. Следователно търсените функции са:

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 4|x| \quad \text{и} \quad f(x) = -4|x|.$$

Задача 3. Нека R и r са съответно радиусът на описаната и вписаната окръжност на правоъгълен триъгълник. Да се докаже, че $R \geqq (1+\sqrt{2})r$.

Решение. Ако c е хипотенузата на триъгълника, то

$$R = \frac{c}{2}$$

и

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

След заместване получаваме, че неравенството от условието е еквивалентно на

$$c \geqq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Тъй като

$$c^2 = a^2 + b^2$$

и

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2,$$

то

$$c = \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

тест за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Мадлен Христова, ЦКОКУО

ПЪРВИ МОДУЛ
ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $14 - (6 + m)$ при $m = -7$ е:

А) 15

Б) 13

В) 7

Г) 1

2. Стойността на израза $46^2 - 2.46.54 + 54^2$ е равна на:

А) -64

Б) -16

В) 16

Г) 64

3. Ако $k + 3 = 4$, то $k^2 + 6k + 9$ е равно на:

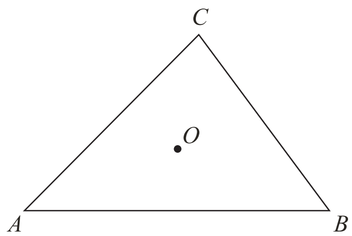
А) 4

Б) 8

В) 12

Г) 16

4. На чертежа точката O е вътрешна за разностранния $\triangle ABC$. Ако $AO = OB$, то O лежи на:



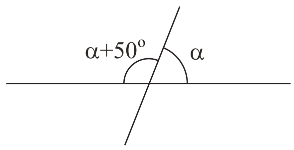
А) ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$

Б) височината през C към AB

В) симетралата на страната AB

Г) медианата през C към AB

5. Мярката на ъгъл α от чертежа е:



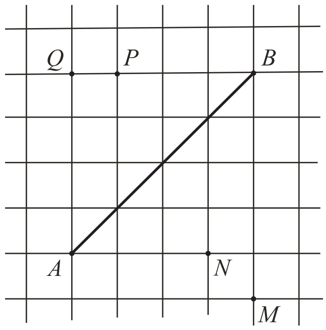
А) 75°

Б) 65°

В) 60°

Г) 50°

6. В квадратната мрежа е начертана отсечката AB. Коя точка е връх на правоъгълен триъгълник с хипотенуза AB?



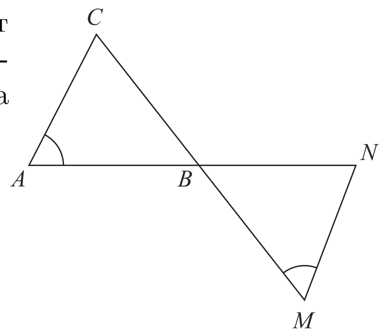
А) M

Б) N

В) P

Г) Q

7. На чертежа, отсечките AN и CM се пресичат в точка B и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BMN$. От кое равенство следва, че триъгълниците ABC и MBN са еднакви?



А) $CB = BM$

Б) $AB = BN$

В) $CB = MN$

Г) $AB = BM$

8. Таксата при продажба на жилище е 5% от стойността му. Таксата за жилище на стойност X лв. е:

А) $0{,}05.X$ лв.

Б) $0{,}05 + X$ лв.

В) $0{,}5.X$ лв.

Г) $0{,}5 + X$ лв.

9. Сборът на числата m и 4 разделили на 5. Получили 0,5. Кое е числото m?

А) $-1{,}5$

Б) $-0{,}5$

В) 0,5

Г) 1,5

10. Изразът $(a+1)^3 - (a+1)(a^2 - a + 1)$ е тъждествено равен на:

А) 0

Б) 2

В) $3a^2 + 3a$

Г) $3a^2 + 3a + 2$

11. Изразът $2a^2 - 2b^2 - a - b$ е тъждествено равен на:

А) $(a-b)(2a+2b-1)$

Б) $(a+b)(2a-2b-1)$

В) $2(a-b)(a+b-1)$

Г) $2(a+b)(a-b-1)$

12. Уравнението $x^2 = x\,(x-3)$ е еквивалентно на:

А) $x - 3 = x - 3$

Б) $-3x = 1$

В) $3x = 0$

Г) $0x = -3$

13. Решенията на неравенството $\dfrac{3-y}{4} \geq 2y$ са:

А) $y \geq \dfrac{1}{3}$

Б) $y \leq \dfrac{1}{3}$

В) $y \geq 6$

Г) $y \leq 6$

14. С колко най-малко километра в час трябва да се движи автомобил, за да измине поне 144 километра за час и половина?

А) 48 km/h

Б) 72 km/h

В) 90 km/h

Г) 96 km/h

15. За дължините a, b и c на страните на един триъгълник е изпълнено, че $a \neq b$ и $(a-c)(a-c+b) = 0$. Този триъгълник е:

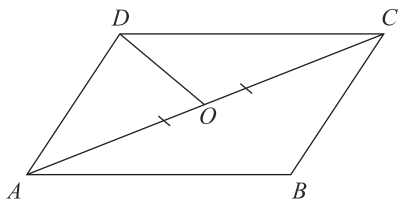
А) разностранен

Б) равнобедрен с основа a

В) равнобедрен с основа b

Г) равнобедрен с основа c

16. Точката O е средата на диагонала AC в успоредника $ABCD$. Ако периметърът на $\triangle ADO$ е 16 cm и $BC = 7$ cm, сборът на дължините на диагоналите на $ABCD$ е равен на:



А) 14 cm

Б) 16 cm

В) 18 cm

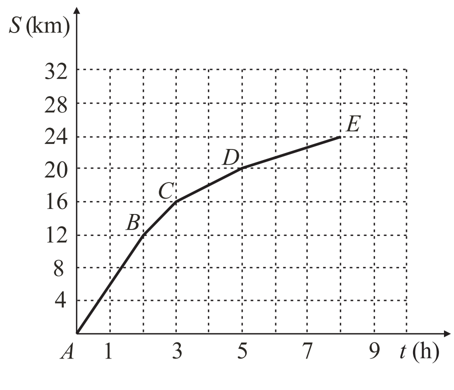
Г) 32 cm

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Напишете корена на уравнението

$$x^2 - 2(x-1) = x(x-1).$$

18. Туристи изминали разстоянието от пункт A до пункт E. На графиката е показана зависимостта на изминатия път S (km) от времето t (h).



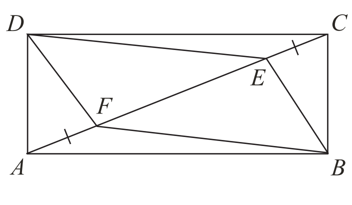
А) Колко километра е разстоянието от A до E?

Б) За колко часа е изминат участъкът BD?

В) Колко km/h е средната им скорост от A до B?

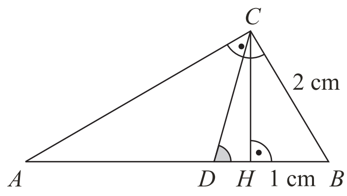
Г) Колко km/h е средната им скорост от A до E?

19. Върху диагонала AC на правоъгълник $ABCD$ са отбелязани точки F и E такива, че $AF = CE$.



Запишете три двойки еднакви триъгълници.

20. Триъгълникът ABC на чертежа е правоъгълен, CH е височината към хипотенузата AB, CD е ъглополовящата на правия му ъгъл и $BC = 2$ cm.
Запишете пропуснатия текст така, че всяко твърдение да отговаря на данните от чертежа.



А) Мярката на $\sphericalangle DBC$ е ...

Б) Дължината на отсечката AH е ... cm.

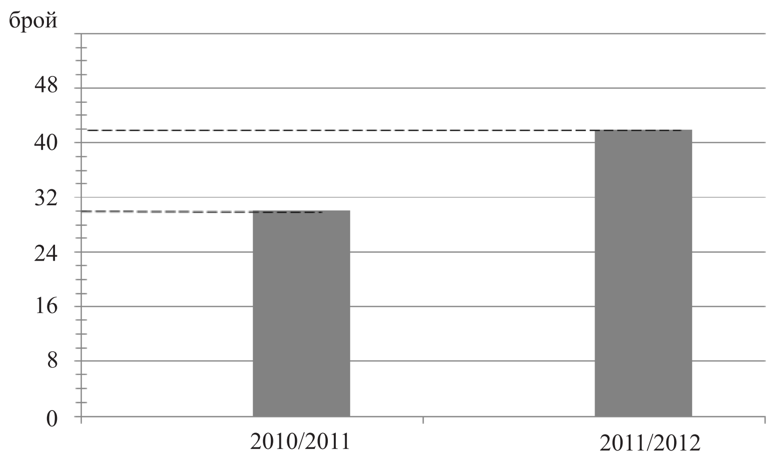
В) Мярката на $\sphericalangle CDB$ е ...

Г) Триъгълникът BCD според страните си е ...

ВТОРИ МОДУЛ

21. СТИПЕНДИИ

Диаграмата показва броя на учениците-стипендианти за учебните 2010/2011 и 2011/2012 години от едно училище.



А) Колко е отношението на броя на учениците, получили стипендии през 2010/2011 г. към този през 2011/2012 г.? Отговора запишете като несъкратима дроб.

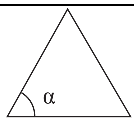
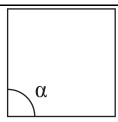
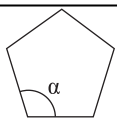
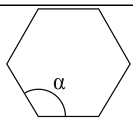
Б) Размерът на една месечна стипендия през 2010/2011 г. е бил 105 лева, а през 2011/2012 г. – 135 лева. Всеки стипендиант получава стипендия през 10 от месеците на учебната година. Колко лева са стипендиите общо за двете учебни години в училището?

Отговорете като препишете изреченията и попълните пропуснатия текст.

През 2010/2011 г. за всички стипендии е изплатено … лв., а за 2011/ 2012 г. сумата за стипендии е … лв. Общата сума за двете учебни години е … лв.

22. ПРАВИЛНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

Васко изучава свойствата на правилните многоъгълници и съставя таблица, за да може да намери зависимости между броя на страните и мерките на ъглите им.

Брой страни	Правилен многоъгълник	Сбор на вътрешните ъгли	Мярка на ъгъл α
$n = 3$		180°	60°
$n = 4$		…	…
$n = 5$		540°	…
$n = 6$		…	…

А) Изчислете мярката на ъгъл α при $n = 4$, $n = 5$ и $n = 6$.

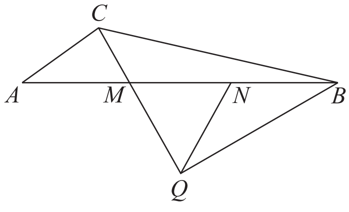
Б) На колко градуса е равен сборът на вътрешните ъгли при $n = 6$, $n = 8$ и $n = 10$?

В) При коя стойност на n мярката на ъгъл α в правилен многоъгълник с n страни е 150°?

Указание. **На задачи 23. и 24. напишете пълните решения с необходимите обосновки.**

23. Решете неравенството $\dfrac{x+1}{4} - \dfrac{1}{5}(x+5) \geqq \dfrac{9+20x}{20}$ и проверете дали числото $b = |-6{,}5| - 2^3$ е негово решение.

24. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB > 90^\circ$. Върху страната AB точките M и N са такива, че $AM = MN = NB$ и $\sphericalangle AMC = 60^\circ$. Точката Q от лъча $CM^{\rightarrow}$ е такава, че $CQ = QB$ и $QN = NB$. Докажете, че $QA = QB$ и намерете ъглите на $\triangle ABC$.



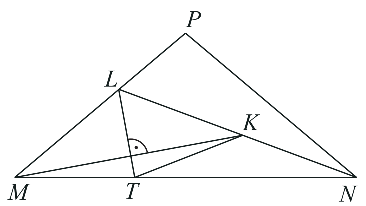
Отговори и решения на тест 1 от брой 1/2016

1. Б; **2.** В; **3.** В; **4.** А; **5.** А; **6.** Г; **7.** Б; **8.** Г; **9.** А; **10.** В; **11.** Г; **12.** А; **13.** Б; **14.** Б; **15.** Г; **16.** В; **17.** (1) 8; (2) 4, 5, 6 и 7 cm; **19.** $n^3 - 4n^2 + 3n - 1$; **20.** По редове: (1) – 200 и $\dfrac{1}{3}$ (2) – 350 и $\dfrac{7}{12}$ (3) – 50 и $\dfrac{1}{12}$ Сектор „жълти“ – $30°$. Сектор „червени“ (мярката на ъгъла на този сектор трябва да е $120°$). Сектор „бели“ (мярката на ъгъла на този сектор трябва да е $210°$); **21.** Б) 2,5.

23. *Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението.*

I етап – *1 точка.*

Начертаваме триъгълник MNP, построяваме отсечката MK, отговарящи на условията и установяване, че ъгълът при основата на $\triangle MNP$ е 4α.



II етап – *3 точки.*

От $\triangle MNL$ получаваме $\sphericalangle MLK = 180° - 6\alpha$.

Тогава $\sphericalangle MKL = 3\alpha$, т.е. $\triangle MKL$ е равнобедрен.

Начертаваме на симетралата на MK, която минава през точка L.

III етап – *4 точки.*

Триъгълниците NTL и NPL имат обща страна NL и равни ъгли при върха N. За да са еднакви, достатъчно е да поискаме равенство на ъглите NLT и NLP.

Тъй като $\triangle MKL$ е равнобедрен и $LT \perp MK$, то LT е ъглополовяща на $\triangle MLN$, т.е. $\sphericalangle NLT = 90° - 3\alpha$.

От друга страна, $\sphericalangle NLP = 180° - \sphericalangle MLN = 6\alpha$. Получаваме уравнението $90° - 3\alpha = 6\alpha$, т.е. $\alpha = 10°$.

IV етап – *2 точки.*

Понеже $\alpha = 0°$, то $\sphericalangle TKN = \sphericalangle MKN - \sphericalangle MKT = 150° - \sphericalangle MKT$. Но LT е симетрала на отсечката MK, следователно $\sphericalangle MKT = \sphericalangle TMK = \alpha = 10°$. Така получаваме, че $\sphericalangle TKN = 140°$.

Забележка. Всеки етап се оценява независимо от другите етапи. Ако търсените елементи (отсечки и ъгли) са означени на чертежа, но не е показано в решението тяхното получаване, то решението на **II етап** се оценява с 2 точки. Ако във **III етап** правилно са изразени чрез α двойката ъгли, необходима за доказването на еднаквостта, но не е намерена стойността на α, решението се оценява с 3 точки.

24. *Критерии за оценяване.*

1. Вярно за всяка стойност на n. Имаме

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{n+n+1+n+2}{3}=\frac{3(n+1)}{3}=n+1$$

(което е цяло число).

2. Вярно за някои стойности на n. Решаваме уравнението

$$n+(n+1)=n+2$$

и намираме $n=1$. Твърдението е вярно само за числата 1, 2 и 3.

3. Вярно за някои стойности на n. Тъй като

$$a+b+c=n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1),$$

то получаваме уравнението $3(n+1)=120$, което има единствен корен 39. (Числата са 39, 40 и 41).

4. Няма стойност на n, за която да е вярно. Преобразуваме

$$ab+bc-ac=n^2+n+n^2+3n+2-n^2-2n=n^2+2n+2=(n+1)^2+1.$$

Този израз достига най-малка си стойност при $n=1$ и тази стойност е 5 (а не 1).

5. Вярно за всяка стойност на n. Получаваме неравенството

$$(n+1)^2-n(n+2)=1.$$

ГЕОМЕТРИЧНИ МАГИИ

Забелязали ли сте, че трудни наглед проблеми понякога се решават с едно хрумване, почти на магия? В геометричните задачи това хрумване се нарича *допълнително построение*. Построяваме една отсечка – и задачата се разплита, а ние получаваме кратко и изящно решение.

С ъглополовящата е свързана една полезна *математическа магия*:

От подходяща точка на ъглополовящата спусни перпендикуляри към рамената на ъгъла!

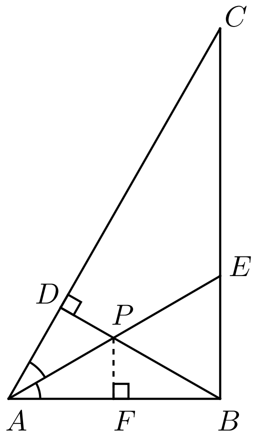
Тъй като всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл е на равни разстояния от рамената му, спускането на тези перпендикуляри „обогатява" чертежа с две равни отсечки – а това може да е полезно!

Ще се убедим в ползата от тази „магия", като решим една задача на Борислав Мирчев.

Задача 1. В триъгълника ABC височината BD и ъглополовящата AE се пресичат в точката P. Ако P е средата на ъглополовящата AE и $BP = 2.PD$, да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

Решение. Точката P лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$, затова P е на равни разстояния от AB и AC. Да спуснем перпендикуляр от P към AB, т.е. да построим отсечката $PF \perp AB$ ($F \in AB$). Тъй като разстоянието от P до AC е равно на отсечката PD, получаваме равенството

$$PD = PF.$$



Тогава $BP = 2.PD = 2.PF$, което означава, че в правоъгълния триъгълник BPF хипотенузата BP е 2 пъти по-голяма от катета PF. Следователно $\sphericalangle PBF = 30^\circ$.

Оттук в правоъгълния триъгълник ABD намираме $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Тогава $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAP = 30^\circ$.

Получихме, че ъглите при страната AB в $\triangle ABP$ са равни, следователно този триъгълник е равнобедрен и $AP = BP$. Оттук и от условието $AP = PE$ следва, че в триъгълника ABE медианата BP е равна на половината от страната AE. Това означава, че $\triangle ABE$ е правоъгълен и $\sphericalangle ABE = 90^\circ$.

Така в $\triangle ABC$ намерихме $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, а $\sphericalangle C = 30^\circ$.

Още една полезна „магия“ е свързана с равностранния триъгълник. Дори когато в условието на задачата не участва равностранен триъгълник, понякога е удобно да го построим. Ще разгледаме една задача, в която е подходящ съветът

Допълни до равностранен триъгълник!

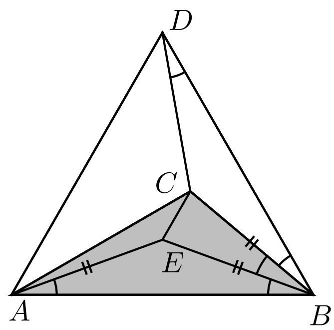
Задача 2. В триъгълника ABC е избрана вътрешна точка E така, че $AE = BE = BC$ и $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CBE = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BAC$.

Решение. Да построим равностранния триъгълник ABD.

От условието $AE = BE$ следва, че триъгълникът ABE е равнобедрен и оттук $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAE = 20^\circ$. Тъй като $\sphericalangle CBE = 20^\circ$, намираме

$$\sphericalangle CBD = 60^\circ - 2.20^\circ = 20^\circ.$$

Тогава триъгълниците ABE и BCD са еднакви по първи признак ($AB = BD$, $BE = BC$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$).



Следователно триъгълникът BCD е равнобедрен, т.е. точката C лежи на симетралата на отсечката BD. Но върхът A на равностранния триъгълник ABD също лежи на симетралата на BD. Това означава, че AC е симетралата на BD. Остава да отбележим, че симетралата на страната BD в равностранния триъгълник ABD съвпада с ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$, т.е. $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.

Накрая ви предлагаме две задачи, върху които самостоятелно да опитате силата на разгледаните геометрични „магии“.

Задача 3. В триъгълника ABC с $\sphericalangle C = 100^\circ$ е построена ъглополовящата BD. На страната AB е отбелязана точка E така, че $\sphericalangle BCE = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BDE$.

Задача 4. В триъгълника ABC е избрана вътрешна точка E така, че $AE = BE = AC$, $\sphericalangle ABE = 10^\circ$, $\sphericalangle CAE = 40^\circ$. Да се намери $\sphericalangle CBE$.

Продължението следва!

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Линка Мичева

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Стойността на израза $\dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3}$ е равна на:

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

В) $\dfrac{2}{3}$

Г) $\dfrac{1}{3}$

2. Ако $f(x) = x^2 - 2x + 3$, то $f(x+1)$ е равно на:

А) $f(x) = x^2 + 6$

Б) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

В) $f(x) = x^2 + 2$

Г) $f(x) = x^2 + 3$

3. Множеството от допустимите стойности на израза $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2-(3x+5)}}$ е:

А) $x \in \varnothing$

Б) $x \in (-\infty; -1)$

В) $x \in (-\infty; -1]$

Г) $x \in (-1; 0) \cup (0; \infty)$

4. Стойността на израза $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$ е:

А) $\dfrac{4}{3}$

Б) $-\dfrac{2}{3}$

В) $-\dfrac{8}{3}$

Г) $\dfrac{8}{3}$

5. Квадратно уравнение с корени $5+\sqrt{3}$ и $5-\sqrt{3}$, има вида:

А) $x^2+5\sqrt{3}x+3=0$

Б) $x^2-10x-22=0$

В) $x^2+5\sqrt{3}x-3=0$

Г) $x^2-10x+22=0$

6. Най-голямата стойност на функцията $f\left(x\right)=-x^2+4x+3$ в интервала $[-1;3]$ е:

А) 24

Б) 15

В) 7

Г) -2

7. Решенията на неравенството $\dfrac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\leq 0$ са:

А) $x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$

Б) $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$

В) $x\in(-\infty;-1)\cup[0;1)$

Г) $x\in(-\infty;-1]\cup[0;1]$

8. Ако $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{5}$, то $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ е равно на:

А) 5

Б) -5

В) 3

Г) -4

9. Стойността на израза $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}-\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{5}\right)^5}$ е равна на:

А) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

Б) $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$

В) $\sqrt{5}+\sqrt{3}-2$

Г) $\sqrt{5}-\sqrt{3}-2$

10. В окръжност с радиус 5 см са построени две успоредни хорди съответно с дължини 6 см и 8 см. Разстоянието между хордите е възможно да бъде:

А) 7 см

Б) 1 см

В) 5 см и 4 см

Г) 7 см и 1 см

11. Да се намери лицето на триъгълник ABC, ако $AB = 18\sqrt{2}$ см, $BC = 3$ см и $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

А) 32 см^2

Б) 27 см^2

В) 24 см^2

Г) 10 см^2

12. Ако корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 9x + q = 0$ удовлетворяват равенството $4x_1 + 3x_2 = 34$, то q е равно на:

А) 20

Б) 18

В) 14

Г) 12

13. Ако за числова редица е изпълнено $a_n = 6\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ и $a_n = \dfrac{32}{27}$, то n е равно на:

А) 3

Б) 4

В) 5

Г) 6

14. Сумата на първия и четвъртия член на аритметична прогресия е равна на 26. Вторият и член е с 6 по-голям от петия. Сумата на третия и петия член е равна на:

А) 24

Б) 21

В) 20

Г) 8

15. Общата външна допирателна на две допиращи се окръжности има дължина $\sqrt{17}$ см. Ако радиусите им се отнасят както 1:4, тогава по-големият от тях е равен на:

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ см

Б) $\sqrt{17}$ см

В) $\dfrac{1}{2}$ см

Г) $2\sqrt{2}$ см

16. Момичетата в един клас са 5 пъти по-малко от момчетата. На контролното по математика само един от учениците е изкарал отличен. Каква е вероятността това да в момиче?

А) $\dfrac{1}{5}$

Б) $\dfrac{1}{6}$

В) $\dfrac{4}{5}$

Г) $\dfrac{2}{3}$

17. Даден е триъгълник със страни 5 см, 8 см, 12 см. Медианата към най-голямата му страна има дължина:

А) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$ см

Б) $\dfrac{\sqrt{103}}{2}$ см

В) $\dfrac{\sqrt{391}}{2}$ см

Г) $\dfrac{\sqrt{274}}{2}$ см

18. Точката P е от страната AB на равнобедрения триъгълник ABC ($AC = AB$), като $CP = CB$. Да се намери дължината на страната BC, ако $AB = 12$ см и $PB = 8$ см.

А) $4\sqrt{3}$ см

Б) $4\sqrt{6}$ см

В) $2\sqrt{5}$ см

Г) 10 см

19. Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност дели хипотенузата на отсечки с дължини 4 см и 6 см. Радиусът на вписаната окръжност е равен на:

А) $(\sqrt{61}-5)$ см **Б)** $(\sqrt{61}+5)$ см **В)** 5 см **Г)** 2 см

20. В остроъгълния триъгълник ABC са построени височините AM и BN. Ако $AB = 17$ см и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, то дължината на отсечката MN е равна на:

А) 8,5 см

Б) $\dfrac{17}{6}$ см

В) 7,5 см

Г) $\dfrac{3}{2}$ см

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете решенията на уравнението $\left(x^2 - 9\right)\sqrt{2-x} = 0$.

22. Медианата на статистическия ред 9, 2, 1, a, 21, 1, 20, 1, 7, 18 е равна на 6. Намерете числото a.

23. Лицето на триъгълник със страни 6 см и 7 см е равно на $\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$ см^2. Намерете радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

24. Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър $AB = 5$ см. Намерете дължината на малката основа на трапеца, ако $CD + AD = 4{,}4$ см.

25. Намерете стойността на израза

$$\frac{\left(\sin\left(90^\circ - \alpha\right) + \cos\left(90^\circ - \alpha\right)\right)\left(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha\right)}{\left(1 + \sin\alpha\cos\alpha\right)}, \qquad \text{ако } \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Решете неравенството $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{6}{x-1} \leq -1$.

27. В торба има 7 червени, Х сини и 10 зелени топки. По случаен начин са извадени две. Вероятността те да са червени е $\dfrac{1}{11}$. Намерете броя на сините топки.

28. Точката M е от страната BC на остроъгълния триъгълник ABC и я дели в отношение $BM : MC = 1 : 2$. Отсечката AM пресича височината CH ($H \in AB$) в точка O. Ако $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$, намерете отношенията:

а) $AH : BH$ б) $CO : OH$

ОТГОВОРИ

1. А); **2.** В); **3.** Б); **4.** В); **5.** Г); **6.** В); **7.** В); **8.** Г); **9.** В); **10.** Г); **11.** Б);

12. В); **13.** В); **14.** В); **15.** Б); **16.** Б); **17.** А); **18.** Б); **19.** Г); **20.** А); **21.** $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; **22.** 5; **23.** $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ см, $2\sqrt{\frac{106}{15}}$ см; **24.** 1,4 см; **25.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **26.** $x \in (1; 2) \cup [3; 4]$; **27.** 5; **28.** а) $\operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \beta$; б) $\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Множеството от допустими стойности е $x \neq 2$ и $x \neq 1$. Преобразуваме даденото неравнство във вида $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ и следователно решението му е $x \in (1; 2) \cup [3; 4]$.

27. Броят на благоприятните възможностите т.е. да бъдат извадени две червени топки е $\frac{7.6}{2} = 21$, а на всички възможности за изваждане на две топки е $\frac{(17+x)(16+x)}{2}$. Тогава $\frac{21}{\frac{(17+x)(16+x)}{2}} = \frac{1}{11}$. Това уравнение е еквивалентно на уравнението $x^2 + 33x - 190 = 0$ и неговите решения са $x_1 = 5$, $x_2 = -38$. Но тъй като $x > 0$, то $x = 5$.

28. Да означим височината $CH = h$.

а) От правоъгълните триъгълници AHC и BHC получаваме $AH = h\operatorname{cotg} \alpha$ и $BH = h\operatorname{cotg} \beta$.

Следователно $AH : BH = h\operatorname{cotg} \alpha : h\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \beta$.

б) Нека точка N е от страната AB и MN е перпендикулярна на AB. Тогава CHе успоредна на MN и от теоремата на Талес следва, че $MN = \frac{1}{3}h$ и $HN = \frac{2}{3}HB = \frac{2}{3}h\operatorname{cotg} \beta$, а от $\triangle ANM$

$$\frac{OH}{NM} = \frac{AH}{AN} = \frac{h\operatorname{cotg} \alpha}{h\left(\operatorname{cotg} \alpha + \frac{2}{3}\operatorname{cotg} \beta\right)} = \frac{3\operatorname{cotg} \alpha}{3\operatorname{cotg} \alpha + 2\operatorname{cotg} \beta}.$$

Тогава $OH = \frac{3\operatorname{cotg} \alpha.}{3\operatorname{cotg} \alpha + 2\operatorname{cotg} \beta}.\frac{h}{3}$ и за $\frac{CH}{OH} = \frac{3\operatorname{cotg} \alpha + 2\operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha}$. Окончателно

$$\frac{CO}{OH} = \frac{CH}{OH} - 1 = \frac{3\operatorname{cotg} \alpha + 2\operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha} - 1 = \frac{2(\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)}{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

2 начин. Прилагаме теоремата на Менелай за $\triangle HBC$ и правата AOM. Тогава $\frac{AH}{AB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CO}{OH} = 1$ и като заместим $AH = h\operatorname{cotg} \alpha$ и $AB = h\operatorname{cotg} \alpha + h\operatorname{cotg} \beta$ се получава $\frac{h\operatorname{cotg} \alpha}{h\operatorname{cotg} \alpha + h\operatorname{cotg} \beta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CO}{OH} = 1 \Rightarrow \frac{CO}{OH} = \frac{2(\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)}{\operatorname{cotg} \alpha}$.

За по-малките задачи

Милена Аврамова

4. клас

16. Да се намерят x, y и z, ако

$$(x : 17 - 95).130 + 666 = 1316,$$

$$y = 1247.54 + 54.753 \quad \text{и} \quad z = (13.120 - 36) : 12 - 6.$$

17. Катя купила в книжарницата 9 молива и 12 тетрадки и заплатила 15 лв. и 66 ст. Цената на една тетрадка е 84 ст. Да се намери цената на бои за рисуване, ако те са 5 пъти по-скъпи от цената на 1 молив.

18. Ваня, Галя и Нина са ученички от 4а, 4б и 4в клас, като никои две не са в един и същ клас. От кой клас е всяка от тях, ако Ваня и ученичката от 4в не живеят на една и съща улица, а ученичката от 4б е роднина на Ваня, но дружи с Галя.

19. При строеж на ограда около правоъгълен участък били забити 128 стълба на разстояние 36 дм един от друг. Решили да заменят стълбовете с нови, които поставили на разстояние 32 дм един от друг. Колко стълба повече са използвани при замяната?

5. клас

20. В плувен басейн с размери 50 м и 20 м има 100 тона вода. Може ли в този басейн да се проведе състезание по плуване?

21. Равнобедрен трапец има обиколка в милиметри, равна на НОК(48, 80). Намерете бедрото на трапеца, ако той има лице 0,21 кв.дм и височината му, измерена в сантиметри, е равна на НОД(102, 285).

22. Да се намерят четири естествени числа, сумата и произведението на които е 8.

23. В плен на индианци попаднали трима мъдреци. Индианският вожд казал, че им дава възможност да спасят живота си, ако прочвят известна съобразителност.

Пленниците били вързани един зад друг на три стълба на „мъченията“ така, че третият можел да вижда втория и първия, втория – първия, а първия не виждал своите приятели. Вождът им показал 5 пера – 3 червени и 2 бели. После завързал очите на тримата и на челото на всеки поставили по едно червено перо, а белите пера скрили. След като развързали очите им, вождът обявил, че ще бъдат пощадени, ако един от тях отгатне цвета на перото на челото си.

Известно време и тримата мълчали, после един от тях заявил, че на челото му има червено перо. Кой е той и как е разсъждавал?

6. клас

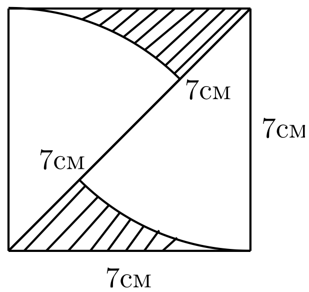
24. Да се опрости изразът $A = \dfrac{(-xy)^{-3}\,.\,(-5xy)^2}{(-2x)^2\,.5y^{-1}}$ и да се намери числената му стойност за

$$x = -3.\,|3 - 8 : (-2)| + |-11| \quad \text{и} \quad y = -2.\,(2 - (x-2)) + 3.\,(2 - 3.\,(x-1))\,.$$

25. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(0;-4)$, $B(3;-4)$, $C(3;0)$, $D(2;2)$ и $N(-1;4)$. Точката M е симетрична на D относно Oy. Да се намери лицето на триъгълника DMN и на $ABCD$, ако единичната отсечка е 1 см.

26. Правоъгълен триъгълник с катети 12 см и 16 см и хипотенуза 20 см е завъртян на 360 градуса около хипотенузата си. Да се намери околната повърхнина, пълната повърхнина и обема на полученото тяло.

27. Да се намери лицето на защрихованата част от дадения квадрат, ако страната му е 7 см.



7. клас

28. Ако $A = (x+3)^2 - (-x-2)^2 - 6$ и $B = (2-x)^2 - 3(1-x)(x+1)$, да се реши уравнението $A^2 = A - B$.

29. Даден е остроъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 60^\circ$). Точката O е среда на AB, а AQ и BP са височини. Да се докаже, че:

а) триъгълник POQ е равностранен;

б) $P_{ABC} = 2.P_{PQC}$

30. Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг за това време свършва 75% от нея. В началото работил само вторият, след което се включил и първият и за 6 дни работа заедно довършили работата. Колко дни е работил вторият?

за по-малките решения

на задачите от бр. 1/2016

Ваня Данова

1. Да се намери двуцифрено число, което като се раздели на сбора от цифрите си, се получава частно 4 и остатък 3.

Решение. Означаваме числото с $\overline{xy}$. Имаме

$$\overline{xy} : (x + y) = 4 \text{ (ост.3), т.е. } \overline{xy} = 4.(x + y) + 3$$

или $10.x + y = 4.x + 4.y + 3$. Оттук $2.x = y + 1$, като y е нечетно число и $x + y$ е по-голямо от 3. За y равно на 3, 5, 7 и 9 съответно получаваме, че числата 23, 35, 47 и 59 са решения на задачата.

2. Ерик представил числото 27 като сбор на четири естествени числа, по-големи от 3, като първото число е по-малко от второто, второто е по-малко от третото и третото е по-малко от четвъртото. Колко различни представяния на числото 27 е получил Ерик?

Решение. Ако първото събираемо е по-голямо от 5 и всяко следващо е по-голямо от него, то сборът им ще е повече от 30 и условието на задачата няма да е изпълнено. Следователно възможни са следните шест представяния на числото 27 като сбор на четири естествени числа:

$$27 = 4 + 5 + 6 + 12,\ 27 = 4 + 5 + 7 + 11,\ 27 = 4 + 5 + 8 + 10,$$

$$27 = 4 + 6 + 7 + 10,\ 27 = 4 + 6 + 8 + 9,\ 27 = 5 + 6 + 7 + 9.$$

3. Кристиян разполага с осемнадесет картички, на всяка от които е написано по едно от числата от 1 до 18. Той разделил тези картички на девет групи по две картички и намерил сбора на числата върху тях. Тогава с учудване забелязал, че и деветте сбора са равни на годините му, умножени два пъти или на годините на по-малкото му братче, също умножени два пъти. (Например $2.2 = 4$, $3.3 = 9$ и т.н.). На колко години е Кристиян и на колко години е по-малкото му братче?

Решение. Като използваме, че $3.3 = 9$, $4.4 = 16$ и $5.5 = 25$ съобразяваме, че

1 може да е в група с 3, 8 или 15	2 може да е в група със 7 или 14
3 може да е в група с 1, 6 или 13	4 може да е в група с 5 или 12
5 може да е в група с 4 или 11	6 може да е в група с 3 или 10

7 може да е в група с 2, 9 или 18
8 може да е в група с 1 или 17
9 може да е в група със 7 или 16
10 може да е в група с 6 или 15
11 може да е в група с 5 или 14
12 може да е в група с 4 или 13
13 може да е в група с 3 или 12
14 може да е в група с 2 или 11
15 може да е в група с 1 или 10
16 може да е в група с 9
17 може да е в група с 8
18 може да е в група със 7.

Така получаваме $1+15 = 2+14 = 3+13 = 4+12 = 5+11 = 6+10 = 16 = 4.4$ и $7+18 = 8+17 = 9+16 = 25 = 5.5$. Следователно Кристиян е на 5 години, а братчето му – на 4 години.

4. Сборът от годините на дядо, баща и син е 144. Възрастта на дядото е двуцифрено четно число. Ако се разменят цифрите на годината, показваща възрастта му, се получава възрастта на бащата. Възрастта на сина пък е равна на сбора от цифрите на годините на бащата. На колко години е дядото?

Решение. Ако означим възрастта на дядото с $\overline{ab}$, то възрастта на бащата ще е $\overline{ba}$ и от условието получаваме равенството

$$\overline{ab} + \overline{ba} + a + b = 144$$

или $10.a + b + 10.b + a + a + b = 144$ т.е. $a + b = 12$ и b е равно на 4, 6 или 8. Ако $b = 8$, ще получим, че бащата е по-голям от дядото, а при $b = 6$ – че дядото и бащата са на еднаква възраст. Следователно дядото е на 84 години, бащата – на 48, а синът – на 12.

5. Двуцифрено число, умножено по 4, е равно на сумата на цифрите му, умножена по 13. Ако пък към това число прибавим 36, ще получим число, записано със същите цифри в обратен ред. Намерете първоначалното число.

Решение. Според условието на задачата

$$\left| \begin{array}{l} 4.\overline{xy} = 13.(x+y) \\ \overline{xy} + 36 = \overline{yx} \end{array} \right. .$$

От първото равенство последователно получаваме $40.x + 4.y = 13.x + 13.y$ или $3.x = y$, а от второто имаме, че $10.x + y + 36 = 10.y + x$ или $x + 4 = y$.

Тогава като приравним левите страни на получените равенства намираме $x + 4 = 3.x$ т.е. $x = 2$ и $y = 6$. Търсеното число е 26.

6. Иво подреди числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в редица като спази следните условия:

1. Сумата на 1 и 2 и всички числа между тях е 9;
2. Сумата на 2 и 3 и всички числа между тях е 19;
3. Сумата на 3 и 4 и всички числа между тях е 45;
4. Сумата на 4 и 5 и всички числа между тях е 18.

Така Иво получи едно деветцифрено число. Кое е то?

Решение. Сумата на всички числа е 45 и следователно числата 3 и 4 са в края. Тъй като сумата на 1, 2 и числата между тях е 9, получаваме, че между 1 и 2 е числото 6. От четвъртото условие намираме, че между 4 и 5 стои числото 9. Така остава между 2 и 3 да са разположени 7, 1 и 6. Тогава числото на Иво е 371 628 594.

7. Даниела казала на майка си: „Ако разменя двете цифри на числото, показващо моята възраст, ще получа число, което е твоята възраст“. Майка ѝ отговорила: „Утре е моят рожден ден, но не е твоят и аз ще стана на два пъти повече години от твоите“. Намерете възрастта на Даниела.

Решение. Означаваме годините на Даниела с $\overline{ab}$, а на майка ѝ – с $\overline{ba}$. Тогава можем да съставим равенството

$$2.\overline{ab} = \overline{ba} + 1 \iff 20.a + 2.b = 10.b + a + 1,$$

т.е. $19.a = 8.b + 1$, където a е нечето число по-малко от 5.

Ако $a = 1$, то 8 не дели 18 и не е решение. Ако $a = 3$, то $b = 7$ и Даниела е на 37 години, майка ѝ на 73.

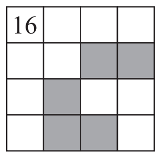
8. Намерете броя на всички правилни дроби, на които числителят и знаменателят са взаимно прости числа и имат сума 333.

Решение. Търсените дроби са $\dfrac{a}{b} < 1$, като $a < b$ и $a + b = 333$. Тъй като $333 = 2.166 + 1$, то има 166 правилни дроби от вида

$$\frac{1}{332}, \frac{2}{331}, \frac{3}{330}, \dots, \frac{166}{167}.$$

Сред тях обаче има и съкратими дроби, които трябва да се извадят от редицата. Тъй като $333 = 3^2.37$, простите делители на 333 са 3 и 37. Понеже $166 : 3 = 55$ (ост. 1), има 55 дроби, които могат да се съкратят с 3. От $166 : 37 = 4$ (ост. 18) следва, че 4 дроби могат да се съкратят на 37. Накрая, от $166 : (3.37) = 1$ (ост. 55) следва, че една дроб може да се съкрати и на 3, и на 37 и е броена два пъти. Търсеният брой е $166 - (55 + 4 - 1) = 108$.

9. Галина постави числото 16 в горното ляво квадратче на един по-голям квадрат 4×4. Останалите петнадесет квадратчета тя запълни с числата 1, 2, ..., 15 така, че сумата на четирите числа във всеки ред, всяка колона и всеки диагонал да е една и съща. (Квадрат с такова свойство се нарича магически квадрат.) После Галина намери сумата от числата в затъмнените квадратчета. Коя е тази сума?



Решение. Сборът на всички числа е $1+2+3+\dots+16 = (1+16).8 = 136$. Понеже квадратът е магически, сумата на четирите числа във всеки ред, всяка колона или всеки диагонал е $136 : 4 = 34$. Тогава намираме, че сборът на числата от горния ред, от лявата колона и диагонала, започващ с 16, е $34.3 - 2.16 = 70$, т.е. сумата на числата в шесте затъмнени квадратчета е $136 - 70 = 66$.

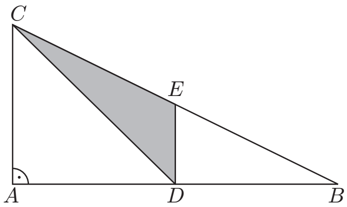
10. Намерете сбора от цифрите на числото $10^{2016} - 2016$.

Решение. Имаме

$$10^{2016} - 2016 = 1\underbrace{000\ldots0}_{2016} - 2016 = \underbrace{999\ldots9}_{2012}7984$$

и получаваме, че търсената сума от цифрите е $9.2012 + 7 + 9 + 8 + 4 = 18136$.

11. В ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ и $AC = 5$ см. Точките D и E са съответно среди на страните AB и BC, а лицето на ΔCDE е 10 см^2. Намерете дължината в сантиметри на отсечката BD.



Решение. Използваме, че всяка медиана разделя един триъгълник на два равнолицеви триъгълника. Точките E и D са среди на страните BC, AB на триъгълника ABC, т.е. DE и CD са медини съответно в триъгълниците DBC и ABC. Тогава $S_{DBC} = 2.S_{CDE} = 2.10 = 20$ см^2 и $S_{ABC} = 2.S_{DBC} = 40$ см^2. Тогава от $S_{ABC} = 0,5.AB.BC$ намираме $40 = 0,5.5.BC$, т.е. $BC = 16$ см и $BD = 8$ см.

12. Сумата на седем последователни числа е куб на естествено число, а сборът на трите средни числа е точен квадрат. Намерете възможно най-малката стойност на средното число.

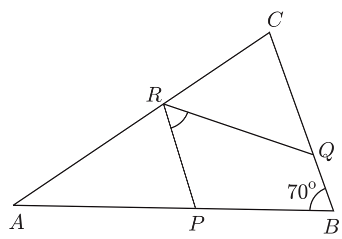
Решение. Означаваме средното число с x и от условието на задачата получаваме

$$x - 3 + x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = y^3 \quad \text{т.е.} \quad 7.x = y^3 \quad \text{и}$$

$$x - 1 + x + x + 1 = z^2, \quad \text{т.е.} \quad 3.x = z^2.$$

Тогава $x = 7^2.3^3.k$. Понеже търсим най-малкото число, то $k = 1$ и средното число $x = 1323$.

13. Точките P, Q и R са съответно върху страните AB, BC и CA на ΔABC, както е показано на чертежа. Освен това $AP = AR$ и $CQ = CR$. Ако е известно, че $\sphericalangle ABC = 70^\circ$, намерете мярката в градуси на $\sphericalangle PRQ$.



Решение. Означаваме $\sphericalangle BAC = x$ и от триъгълника ABC намираме $\sphericalangle ACB = 110^\circ - x$. Тъй като триъгълникът APR е равнобедрен, то

$$\sphericalangle APR = \sphericalangle ARP = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

Аналогично от равнобедрения триъгълник RQC намираме

$$\sphericalangle RCQ = \sphericalangle QCR = 35^\circ + \frac{x}{2}.$$

Тогава $\sphericalangle PRQ = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2} + 35^\circ + \frac{x}{2}\right) = 55^\circ$.

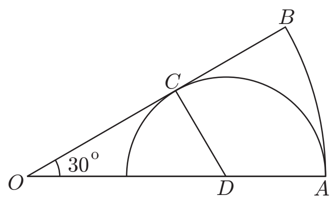
14. Един часовник показва времето от 00:00:00 до 23:59:59. Надежда погледнала часовника в 13:21:32 и забелязала, че първите три цифри са същите като последните три и то в същия ред. Тя помислила малко и съобразила, може би повече от 100 пъти това се случва за едно денонощие. Вярно ли е нейното предположение?

Решение. Нека показанията на часовника са $\overline{ab} : \overline{ca} : \overline{bc}$ като $a \leq 2$, $b \leq 5$ и $c \leq 5$. Ако $a = 0$, т.е. $\overline{0b} : \overline{c0} : \overline{bc}$, то възможностите за b и c са от 0 до 5 и имаме $6.6 = 36$ случая.

Ако $a = 1$, т.е. $\overline{1b} : \overline{c1} : \overline{bc}$, то възможностите за b и c са от 0 до 5 и имаме $6.6 = 36$ случая.

Накрая, ако $a = 2$, т.е. $\overline{2b} : \overline{c2} : \overline{bc}$, възможностите за b и c са съответно от 0 до 3 и от 0 до 5 или $4.6 = 24$ случая. Следователно на екрана на часовника първите три цифри са равни на последните три $36 + 36 + 24 = 96$ пъти и Надежда бърка.

15. Точките A и B върху окръжност с център точка O са такива, че $\sphericalangle AOB = 30^\circ$, както е показано на чертежа. Точка D е от радиуса OA и полукръгът с център D се допира до радиуса OB в точка C. Ако лицето на полукръга е 18π, намерете лицето на сектора OAB.



Решение. Лицето на полукръга е $18\pi = \frac{1}{2}\pi r^2$, откъдето или $r = 6$, т.е. $DA = DC = 6$. Тъй като полукръгът с център D се допира до OB в точка C, то триъгълникът OCD е правоъгълен с $\sphericalangle OCD = 90^\circ$. Освен това $\sphericalangle COD = 30^\circ$, следователно $OD = 2.DC = 12$, т.е. $OA = 18$. Търсеното лице е

$$\frac{30}{360}\pi .18^2 = 27\pi.$$

задачи на открито

МАТЕМАТИЧЕСКИ ЩАФЕТИ

Ивайло Кортезов

Едно от състезанията на математическите лагери, което винаги се очаква с радостно нетърпение от участниците и е източник на много емоции, е математическата щафета. Участниците в нея са подредени на постове, намиращи се на известно разстояние един от друг. Броят на постовете може да варира – те са минимум три, но историята помни и мега-щафети с девет поста. Все пак практиката е наложила числото 4 като оптимален брой на постовете, като за всеки от тях предварително се знае най-малко в кой клас трябва да са състезателите. На всеки пост може да има един или повече участници от всеки от отборите. В началото на състезанието учителят, който е отговорник за съответния пост, раздава на представителите на отборите на поста по една задача с числов отговор. Постовете след първия имат нужда от отговора на предишния пост, за да могат да решат докрай задачата си. Когато задачата е решена, тя се предава на отговорника на поста, а отговорът се записва на листче с инициалите на отбора и се предава максимално бързо на следващия пост. Впрочем, в повечето случаи участниците там е добре да се опитат да свършат по-голямата част от работата по задачата още преди да са получили това листче. Също така, участниците от следващите постове могат да върнат обратно листчето с отговора на предния пост за повторна проверка, ако намират числото на него за неприемливо за задачата си. Състезанието е за ограничено време, предварително фиксирано на 60 или 90 минути. Капитанът на отбора избира „режим на решаване“ А, Б или В, като динамично може да премине от един режим в следващия, но не и обратно. При режим А всеки пост работи самостоятелно и комуникира помежду си само с листчетата. При режим Б е разрешена свободна комуникация между участниците от постове с еднаква четност. При режим В е разрешена свободна комуникация в целия отбор. В края отборите се класират според броя последователно верни отговори, започващи от този на пост 1, след това по режима на работа (в реда А, Б, В), а при равенство - според времето на предаване.

Навсякъде в условията ЧППИ означава „числото, получено от предния играч“. Ако ЧППИ не подходжа на условието, предната задача трябва да се обмисли отново. Особено след по-трудните задачи често са поставени такива, които да могат да „поемат“ твърде малко отговори и така да сигнализират за грешка. Обаче не се изненадвайте и от следната, макар и рядко срещана, закачка: може да се окаже, че отговорът на новата задача не зависи от този на предишната!

Математически семинар „Черноризец Храбър“, 4. – 7. клас Банско, септември 2014

1. Том и Джери имали общо 192 монети. Първо Том дал на Джери толкова монети, колкото имал Джери. После Джери дал на Том 16 монети. След това Том дал на Джери толкова монети, колкото имал Джери. После Джери дал на Том 16 монети, при което двамата се оказали с равен брой монети. Колко монети е имал Том отначало?

2. Нека ЧППИ $= N$. Колко отбора трябва да изиграят всеки с всеки по два мача, за да са изиграни общо N мача?

3. Нека ЧППИ $= N$. Сборът на N различни естествени числа, най-малкото от които е a, е 2014. Коя е най-голямата възможна стойност на a?

4. Нека ЧППИ $= N$. Колко от числата $1, 2, 3, \ldots, N$ имат кратно, което се записва само с цифрата „2“?

Решения

1. *Отговор* 156. Накрая монетите на всеки са били $192 : 2 = 96$. Преди това Т$= 80$, Д $= 112$. Преди това Т $= 136$, Д$= 56$. Преди това Т $= 120$, Д $= 72$. Преди това Т $= 156$, Д $= 36$.

2. *Отговор* 13. Условието е спазено, ако има 13 отбора и всеки приеме на своя стадион всеки от останалите 12 отбора по веднъж (мачовете ще са общо $13.12 = 156$). Ако отборите са повече, мачовете – също. Ако отборите са по-малко, мачовете – също.

3. *Отговор* 148. Имаме $148 + 150 + 151 + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 + 157 + 158 + 159 + 160 + 161 = 2014$. Ако $a \geqq 149$, сборът е поне 2015.

4. *Отговор* 89. Понеже числата 2, 22 не се делят на 4, според признака за деление на 4 никое от числата $222\ldots22$ не се дели на 4. Тогава и числата от търсения вид не могат да са кратни на 4; също така, те не могат да се делят на 5. Всички останали числа са от вида 1 или 2, умножено по нечетно число n, завършващо на 1, 3, 7 или 9. Според известното следствие от Принципа на Дирихле, n има кратно от вида $111\ldots11$, така че n и $2n$ имат кратно от вида $222\ldots22$. И така, трябват ни числата, които не са кратни нито на

5, нито на 4. Кратните на 5 са $145 : 5 = 29$, тези на 4 са $148 : 4 = 37$, а кратните на 5 и 4 са $140 : 20 = 7$. Отговорът е $148 - 29 - 37 + 7 = 89$.

Летен математически лагер „Черноризец Храбър“, 4. – 7. клас Слънчев бряг, юни 2015

1. В редица са записани 13 двуцифрени числа. Сборът на всеки 4 съседни числа е 111. Колко най-много може да е сборът на първото, петото, деветото и тринадесетото число?

2. Нека ЧППИ $= N$. Квадрат е разделен на N еднакви квадратчета и те са оцветени шахматно. В колко най-малко от полетата трябва да се поставят топове, така че всяко **бяло** поле да е атакувано от топ? (Топът атакува полетата от реда и стълба, в които е поставен.)

3. Нека ЧППИ $= N$. Колко петцифрени числа имат произведение на цифрите $N + 3$?

4. Нека ЧППИ $= N$. За колко цели стойности на x изразът $\dfrac{x^3 + N}{x + 4}$ има целочислена стойност?

Решения

1. *Отговор* 324. Всяко от числата е поне 10, така че всяко число е най-много $111 - 3.10 = 81$. Така сборът на споменатите числа е най-много $4.81 = 324$. Това е така в редицата 81, 10, 10, 10, 81, 10, 10, 10, 81, 10, 10, 10, 81.

2. *Отговор* 9. Квадратът е с размери 18×18. Белите полета (1;1), (2;2), …, (18;18) могат да се застрашат най-много по две от топ, така че са нужни поне 9 топа. Това е възможно, ако топовете са в полета (1;2), (3;4), …, (17;18).

3. *Отговор* 70. Имаме $N + 3 = 12$. От 6.2.1.1.1 получаваме $5.4 = 20$ варианта. От 4.3.1.1.1 получаваме $5.4 = 20$ варианта. От 3.2.2.1.1 получаваме $5.4.3 : 2 = 30$ варианта.

4. *Отговор* 8. Имаме $\dfrac{x^3 + 70}{x + 4} = x^2 - 4x + 16 + \dfrac{6}{x + 4}$, така че $x + 4$ трябва да е някой от делителите на 6, чийто брой е 8 (те са ± 1, ± 2, ± 3, ± 6).

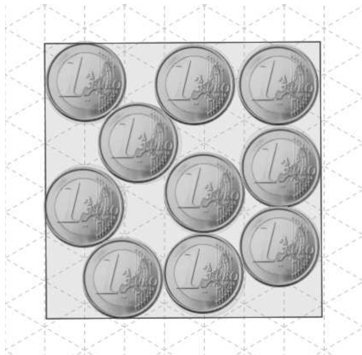
математическа ракла

В тази рубрика ще представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

ПАВИРАНЕ С КРЪГЛИ ПЛОЧКИ

Малко история. Такава е задачата за павирането с кръгли плочки. Тя принадлежи към клас оптимизационни задачи, в които се изисква опаковането на дадени обекти възможно най-плътно (в равнината или в пространството). Този тип задачи са били създадени в началото за развлечение, а днес намират приложение например при изучаване на кристалите.

Задачата за минималния квадрат, съдържащ 10 еднакви монети, е решена сравнително неотдавна (в 1990 г.) от френските математици Майар (Maillard) и Пайан (Payan). Доказателството е дадено от Де Круут (De Croot) същата година. Приблизително решение е показано на Фиг. 1.



Фиг. 1

Хвърляме ръкавицата. Ако имате квадрат със страна 10 единици, лесно може да разположите в него 100 кръгли плочки с диаметър единица. Ако използвате не квадратна, а шестоъгълна мрежа, може да подобрите този брой на 105. Това ли е рекордът?

Опитайте да комбинирате двата типа мрежи.

За загрявка. Запознайте се с ресурса от европейския проект Mascil *Настилка с кръгли плочки*:

`http://www.math.bas.bg/omi/mascil/task-CircularPavestones.html`

Може да използвайте за изследванията си следните дигитални ресурси от *Виртуалния училищен кабинет*, разработени от Тони Чехларова:

`http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d22117.html`, също `d22118.html`, `d22119.html`, `d22120.html` и `d22121.html`.

Използвани източници: Ivan Moscovich, Leonardo's Mirror & Other Puzzles. Sterling Publishing Co., Inc. New York, 2004.

ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

„Аз не съм голям математик, мразя да смятам…“ Приписват тази фраза на Мадона, но едва ли можем да я обвиняваме в невежество относно математиката, щом медиите редовно ни заливат с фрази от типа на „Той е голям математик, умножава 6-цифрени числа за 2 секунди.“ А че не знаел дали трябва да ги умножи или събере, е друг въпрос. От математическата колегия от близкото минало само един неин член се славеше със способността си да смята бързо и точно наум – наричахме го шеговито и с обич *Вандермонт*.

Ето една история, която се разказва за Кумер (1810–1893), известен германски алгебрист, който се слави и с разработките си върху *Великата теорема на Ферма*. Работел и като гимназиален учител в продължение на 10 години. И той (като Мадона) мразел сметките и винаги молел учениците си да му помагат при нужда. Веднъж му се наложило да сметне 7×9. „Ъ-ъ-ъ, това е … ъ-ъ-ъ, седем по девет … седем по девет …“

„Шейсет и едно!“ – отзовал се един ученик. Кумер записал числото на дъската. „Не, професоре, шейсет и седем е!“ – поправил го друг.

Тогава Кумер се възмутил: „Господа, съсредоточете се, не може и двете да са верни!“

ПП Толкова по-интересно е да видим как звучи една теорема на този „скаран със сметките“ математик, свързана със събирането. Теоремата на Кумер, която се оказала съществена при решаването на десетия проблем на Хилберт, гласи:

Ако $a \geqq b \geqq 0$*, а* p *е просто число, максималното число* k*, за което* p^k *дели* $\dbinom{a+b}{b}$*, е равно на броя на преносите при получаване на сбора* $a+b$ *при основа* p.

решения решения

на задачите от бр. 1/2016 г.

1. Да се докаже, че изразът

$$A = \left(\left(\frac{x^4 - xy^3}{x-y} + x^2y\right) : (x^2+xy) - y\right)^2 \cdot \frac{1}{4x^2} \text{ е равен на } \frac{1}{4}.$$

Решение. За $x \neq \pm y$ и $x \neq 0$ имаме

$$\frac{x^4 - xy^3}{x-y} + x^2y = x(x^2+xy+y^2) + x^2y = x(x+y)^2,$$

$$(x(x+y)^2) : (x(x+y)) - y = (x+y) - y = x,$$

$$x^2.\frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}, \text{ което трябваше да докажем.}$$

2. Да се реши уравнението

$$\frac{1}{x^2 - 12x + 36} + \frac{12}{36 - x^2} = \frac{1}{x+6}.$$

Решение. За $x \neq \pm 6$ имаме

$$\frac{1}{(x-6)^2} + \frac{12}{(6-x)(6+x)} = \frac{1}{x+6}$$

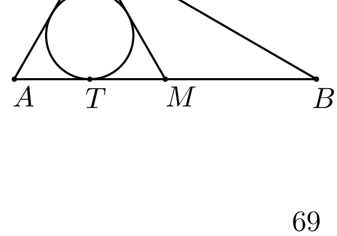
и като приведем към общ знаменател, получаваме

$$x + 6 + 12(6-x) = (x-6)^2 \iff x^2 - x - 42 = 0.$$

Решенията на последното квадратно уравнение са $x_1 = -6$ и $x_2 = 7$, от които само 7 е решение на даденото уравнение.

3. В правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$ медианата CM ($M \in AB$) е равна на 10. Окръжността, вписана в триъгълника AMC се допира до AB в точката T. Да се намерят $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$, ако $AT : TB = 1 : 3$.

Решение. Намираме $AB = 2CM = 20$ и $AT = \frac{1}{4}AB = 5$. Оттук $TM = AM - AT = 5$. Това означава, че вписаната в AMC окръжност се допира до страната A в средата и T, т.е. $AC = MC$. Но $AM = MC$, т.е. $\triangle AMC$ е равностранен. Тогава $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$.



4. За числата a и b е известно, че $a + b = -18$ и $ab = 3$. Да се намери стойността на израза $\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{|b|b^2}$.

Решение. От теоремата на Виет следва, че числата a и b са корени на квадратното уравнение $x^2+18x+3 = 0$. То има дискриминанта $D = 78 > 0$, т.е числата числата a и b са реални. Тъй като сборът им е отрицателен, а произведението — положително, a и b са отрицателни числа. Тогава

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{|b|b^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3+b^3}{(ab)^3} =$$

$$= \frac{(a+b)((a+b)^2 - 3ab)}{(ab)^3} = \frac{-18(18^2 - 3^2)}{3^3} = -210.$$

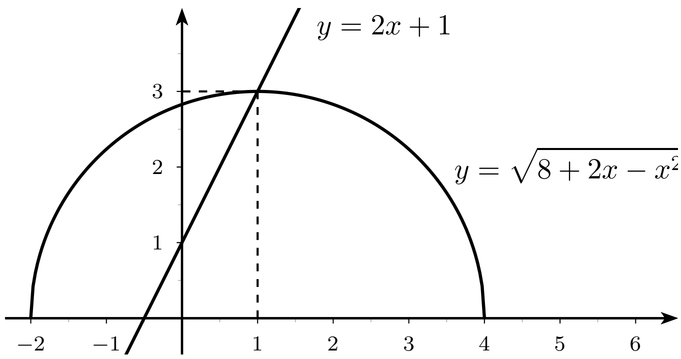
5. Да се реши неравенството $\sqrt{8 + 2x - x^2} \leq 2x + 1$.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} 8 + 2x - x^2 \geqq 0 \\ 2x + 1 \geqq 0 \\ 8 + 2x - x^2 \leq (2x+1)^2. \end{array} \right.$$

От първото неравенство $x \in [-2;\ 4]$; от второто $x \in [-0,5; \infty)$, а от третото $x \in (-\infty; -1,4] \cup [1; \infty)$. Решенията на системата са $x \in [1; 4]$.

Втори начин. Графично решение на системата получаваме, като построим графиките на $y = 2x + 1$ и $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$. Първата графика е права, а втората е частта от окръжността $y^2 + (x-1)^2 = 9$, която е над абсцисната ос. Очевидно точката $(1; 3)$ е обща за двете графики.



Графиката на $y = 2x+1$ е над графиката на $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ при $x \in [1; 4]$.

6. Петоъгълникът $ABCDE$ е вписан в окръжност. Допирната точка на Страната BC с окръжността е означена с P. Да се намери дължината на отсечката BP, ако е известно, че дължините на всички страни на петоъгълника са цели числа и $AB = 1$ и $CD = 3$.

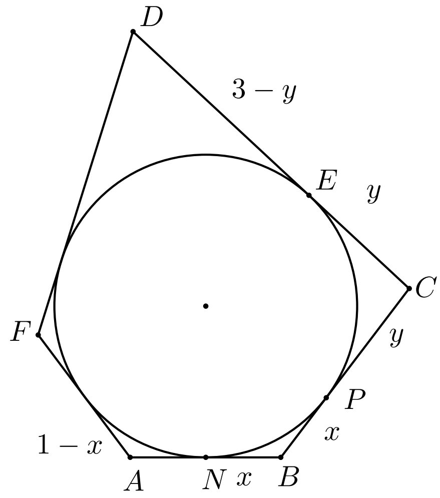
Решение. Означаваме $BP = x$, $PC = y$. Тогава $BC = x + y \in \mathbb{N}$. При означенията на чертежа имаме $BN = x$, $AN = 1 - x$, $CE = y$, $DE = 3 - y$. Разликата

$$DF - FA = DE - AN = 2 - y + x \in \mathbb{Z},$$

значи $x - y$ е цяло число. Тъй като $x + y$ е естествено число, то

$$(x - y) + (x + y) = 2x \in \mathbb{N}.$$

Освен това $x < 1$, значи $x = 0,5$.



7. Двама пешеходци тръгнали едновременно един срещу друг от градовете А и В и се срещнали след 50 минути, и без да спират продължили движенията си всеки в своята посока. За колко време всеки от пешеходците ще измине разстоянието между градовете А и В, ако е известно, че първият е изминал разстоянието от А до В за 4 часа по-малко от времето, за което вторият е изминал разстоянието от В до А.

Решение. Да означим с x ч. времето, за което първият е изминал разстоянието от А до В. Вторият изминал същото разстояние за $x + 4$ часа. За един час те изминават съответно $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+4}$ от цялото разстояние. След като са се срещанали след $\dfrac{5}{6}$ часа, то

$$\frac{5}{6}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = 1.$$

Оттук намираме $x = 1$, т.е. първият изминава разстоянието за 1 час, а вторият за 5 часа.

8. Да се реши уравнението $2^x.5^{\frac{x+2}{x}} = 100$.

Решение. Логаритмуваме двете страни на уравнението при основа 2 и получаваме

$$x + \frac{x+2}{x}\log_2 5 = 2 + 2\log_2 5 \iff (x-2)(x - \log_2 5) = 0.$$

Корените на уравнението са 2 и $\log_2 5$.

9. Да се реши неравенството $\dfrac{6}{|x|} \geqq 7 + x$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x \neq 0$.

При $x < 0$ получаваме

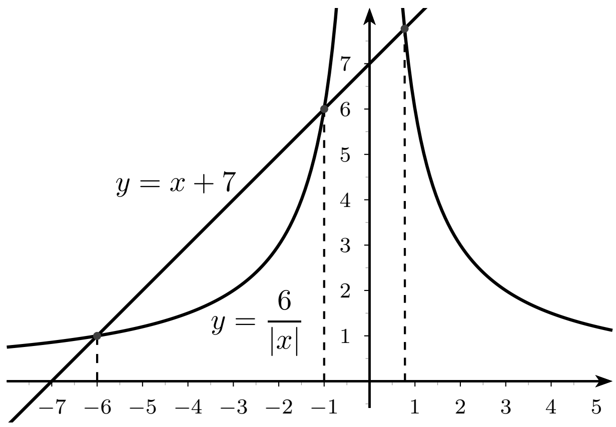
$$x^2 + 7x + 6 \geqq 0 \iff (x+1)(x+6) \geqq 0$$

и намираме $x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 0)$.

При $x > 0$ получаваме $x^2 + 7x - 6 \leqq 0$, откъдето $x \in \left(0; \dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right]$.

Решенията на неравенството са $x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right]$.

Неравенството може да се реши и графично, като се намерят пресечните точки на правата $y = 7 + x$ с двата хиперболични клона $y = \dfrac{6}{x},\ x > 0$ и $y = -\dfrac{6}{x},\ x < 0$.



10. Двама пешеходци тръгнали едновременно от градовете A и B един срещу друг и се срещнали след три часа. За колко време ще измине разстоянието AB пешеходецът от A, ако той изминал разстоянието от срещата до град B за 2,5 часа повече от времето за което пешеходецът от B е изминал разстоянието от срещата им до град A?

Решение. Да означим с x ч. времето което пешеходецът от A изминава разстоянието AB, а с y ч. времето, за което вторият пешеходец изминава това разстояние. За един час те изминават съответно $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ от цялото разстояние. След като са се срещанали след 3 часа, то

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1.$$

Пешеходецът от А изминал разстоянието от срещата до В за $\frac{3x}{y}$ часа, а пешеходецът от В изминал разстоянието от срещата до А за $\frac{3y}{x}$ часа. Имаме за

$$\frac{3x}{y} = 2,5 + \frac{3y}{x}.$$

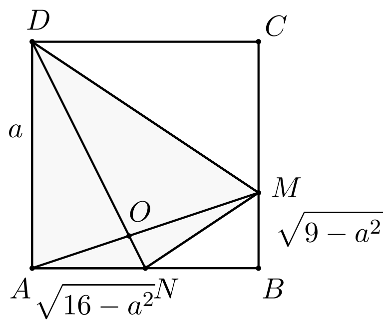
Оттук, ако $\frac{x}{y} = t$, получаваме $3t = 2,5 + \frac{3}{t}$. Положителният корен на това уравнение е $t = 1,5$, т.е. $x = 1,5y$. Като заместим в първото уравнение, получаваме $y = 5$ и намираме $x = 7,5$ часа.

11. Да се намери произведението на числата x и y, които удовлетворяват системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x+1}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+1}} = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right.$$

Решение. Ако $\sqrt{\dfrac{x+1}{y}} = t$, първото уравнение се записва във вида $t + \frac{1}{t} = 2$. Намираме $t = 1$, т.е. $x + 1 = y$. Като запишем това равенство във вида $x - y = 1$, вдигнем на квадрат $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ и вземем предвид второто равенство в системата, намираме $xy = (25 - 1)/2 = 12$.

12. В квадрата $ABCD$ точката M лежи на страната BC, а точката N – на страната AB. Отсечките AM и DN се пресичат в точката O. Да се намери лицето на квадрата, ако $DN = 4$, $AM = 3$ и синусът на $\sphericalangle DOA$ е равен на q.



Решение. Да означим страната на квадрата с a. Лицето на четириъгълника $ANMD$ е равно на $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot q = 6q$. От друга страна,

$$S_1 = S_{AMD} + S_{ANM} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}AN.BM = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{16-a^2}\sqrt{9-a^2}.$$

Получаваме

$$6q = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}.\sqrt{16-a^2}.\sqrt{9-a^2} \iff (12q-a^2)^2 = (16-a^2)(9-a^2),$$

откъдето намираме $a^2 = \dfrac{144(1-q^2)}{25-24q}$.

13. В два склада имало захар и сол. В първия склад захарта е 16 тона повече от солта. За един ден от първия склад взели $\dfrac{1}{m}$ част от захарта и $\dfrac{1}{3}$ част от солта, при това взетата захар е с 2 тона повече от солта. Във втория склад захарта е 4 тона по-малко от солта. За един ден от втория склад взели $\dfrac{1}{m}$ част от захарта и $\dfrac{1}{5}$ част от солта, при това взетата захар е с 3 тона повече от солта. Да се намери колко сол имало в първия и във втория склад, ако m е цяло число. За кои стойности на m задачата има решение?

Решение. Нека в първия и във втория склад е имало съответно x и y t сол. Тогава

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+16}{m} - \dfrac{x}{3} = 2 \\ \dfrac{y-4}{m} - \dfrac{y}{5} = 3. \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{6(8-m)}{m-3} \\ y = \dfrac{5(3m+4)}{5-m} \end{array}\right.$$

Тъй като $x > 0$ и $y > 0$, получаваме, че $3 < m < 5$ и тъй като m е цяло число, то $m = 4$. Оттук $x = 24$ и $y = 80$.

14. Да се намерят всички двойки цели числа (x, y), удовлетворяващи системата неравенства

$$\left|\begin{array}{l} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{array}\right.$$

Решение. Като умножим второто неравенство с -1 и го съберем с първото, получаваме $-4x^2 + 26x - 40 > 0$. Решенията на това неравенство са $x \in (2,5; 4)$ и тъй като x е цяло число, то $x = 3$.

При $x = 3$ системата е еквивалентна на $-1 < y^3?4y < 1$ и тъй като търсим цели решения, то $y^3 - 4y = 0$, т.е. $y = 0$ или ± 2.

15. Основата на пирамидата $SABC$ е правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle BCA = 60^\circ$, катет $AB = 3$ и $\sphericalangle B = 90^\circ$. Височината на пирамидата е CS и $\sphericalangle SBC = 30^\circ$. Да се намери обемът на пирамидата.

Решение. Търсеният обем е

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot CS = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 1/2016 г.

ТЕМА 1

1. Б); **2.** Г); **3.** В); **4.** А); **5.** Г); **6.** В); **7.** Б); **8.** А); **9.** А); **10.** В); **11.** Б); **12.** В); **13.** $A = 0,5 > B = 0$; **14.** 64π; **15.** $8\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$; **16.** 10 cm, 12 cm, $2\sqrt{291}$ cm; **17.** -24 и 4; **18.** 1 cm.

ТЕМА 2

1. Г); **2.** А); **3.** Б); **4.** В); **5.** Д); **6.** Д); **7.** В); **8.** Д); **9.** Б); **10.** Б); **11.** Б); **12.** Г); **13.** Г); **14.** А); **15.** В); **16.** Г); **17.** Д); **18.** В); **19.** А); **20.** Д); **21.** 2; **22.** $x \in (1/3;\ 1]$; **23.** $-\pi/4$; 0; **24.** $(-1+\sqrt{29})/2$; **25.** -1, $1/3$; **26.** 8; **27.** 0,25; **28.** $a \in (0;\ 0,25)$; **29.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; **30.** $64b^3\sqrt{\operatorname{cotg}^2\varphi - 1}$.

ТЕМА 3

1. В; **2.** Г; **3.** А; **4.** В; **5.** Б.

6. След полагането $3^x = y > 0$ получаваме

$$f(y) = (m^2-1)y^2 - (m^2+4m-1)y + 4m. \tag{7}$$

а) При $m = 3$ получаваме $y_1 = 1$, $y_2 = \dfrac{3}{2}$ и съответно $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - \log_3 2$.

б) $x > 0$.

в) Единият корен на уравнението е нула, а за другият, който е $\log_3 \dfrac{4m}{m^2-1}$ искаме за е по-голям от 1, което води до $m \in \left(-1, \dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right) \bigcup \left(1, \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$.

7. а) Лесно се вижда, че $S_{\triangle ACM} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1} = 2S_{\triangle AOM}$. Тъй като $\dfrac{S_{\triangle OPM}}{S_{\triangle OPA}} = \dfrac{PM}{AP} = \dfrac{k}{k+1}$, то непосредствено се получава исканото твърдение.

б) След стандартно изследване на функцията $y(k) = \dfrac{k}{(k+1)(2k+1)}$ в интервала $(0, +\infty)$ се получава, че най-голямата ѝ стойност се достига за $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, за която стойност е в сила и посоченото отношение.

в) При означението от а) и намерената в б) стойност на k с косинусова теорема за $\triangle OCM$ се получава $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, откъдето търсеният радиус е $\frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{2})}$.

8. а) $S_1 = a^2(2+\sqrt{2})$, тъй като околните стени са два по два еднакви правоъгълни триъгълници.

б) Ако $AF = CF = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ са перпендикулярни на BM, $F \in BM$, с косинусова теорема за $\triangle ACF$ се получава, че търсеният ъгъл $\sphericalangle AFC = 120^\circ$.

в) Нека AN е успоредна и равна на BD. Сега търсеният ъгъл е $\sphericalangle MAN$ и е 60°.

Ако G е медицентърът на $\triangle MAN$, то G е проекцията на точката D в равнината (AMN). Тогава DQ е успоредно и равно на $GP = \frac{1}{3}AN$ и следователно Q дели BD в отношение $2:1$.

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ТЕМИ . . . 3

ЗИМЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АТАНАС РАДЕВ“,
Петър Бойваленков, Емил Колев . . . 6

В СВЕТА НА ПРОСТИТЕ ЧИСЛА, *Пенка Рангелова* . . . 17

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ЗАДАЧАТА НА ЕРДЬОШ,
Пламен Сидеров . . . 24

ОРТОПОЛЮС, *Невена Събева* . . . 29

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 35

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ . . . 38

ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА СЕДМИ КЛАС,
ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ, *Мадлен Христова* . . . 41

ГЕОМЕТРИЧНИ МАГИИ . . . 49

ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ . . 51

ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 57

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 59

МАТЕМАТИЧЕСКИ ЩАФЕТИ, Ивайло Кортезов . . . 64

ПАВИРАНЕ С КРЪГЛИ ПЛОЧКИ . . . 67

ХА НА КУБ . . . 68

РЕШЕНИЯ . . . 79

РЕШЕНИЯ НА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИТЕ
ТЕМИ ОТ БР. 1/2016 Г. . . . 75

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 1.04.2016 г.
Печат „Силует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.