МАТЕМАТИКА

БРОЙ 1
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА НА ИМИ–БАН

Петър Бойваленков,
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

На 2–7.01.2018 г. в Института по математика и информатика на Българската академия на науките се проведе четвъртото издание на Седмицата на олимпийската математика (СОМ) на ИМИ–БАН. СОМ се организира от ИМИ със съдействието на Фондация Георги Чиликов и Американска Фондация за България.

Програмата на тазгодишната Седмица отново включваше четири тематични контролни, по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата. За участие бяха поканени 48 ученика от цялата страна съответно на резултатите им. Освен в контролните, учениците получиха възможност за изява и чрез изнасяне на доклади на олимпийска тематика, както и в новосформираната Висша математическа лига.

Предлагаме ви условията и решенията на задачите, както и резултатите.

Контролно по алгебра, 03.01.2018

A1. Нека $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е такава функция, че $f(i,1) = f(1,i) = i+1$ при $i \in \mathbb{N}$ и $f(i,j) = f(i-1,j) + j.f(i-1,j-1)$ при $i,j > 1$ Да се докаже, че $f(i,j) = f(j,i)$ при $i,j \in \mathbb{N}$.

A2. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i+1} < \frac{4}{5}.$$

A3. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е такава непрекъсната функция, че

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \quad \text{за произволни } x, y \in \mathbb{R}.$$

Да се докаже, че $f(x) \leq 0$ при $x \geq -1$.

Контролно по геометрия, 04.01.2018

G1. Даден е $\triangle ABC$. Нека A_1, B_1 и C_1 са средите на страните BC, CA и AB съответно. Описаната окръжност около $\triangle CA_1B_1$ пресича за втори път описаните окръжности около $\triangle CAC_1$ и $\triangle CBC_1$ в точките M и N съответно. Ако O е центърът на описаната окръжност около $\triangle ABC$, то да се докаже, че $OM = ON$.

G2. Диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка P. Означаваме с M и N средите на страните AD и BC съответно. Ако MN пресича диагоналите AC и BD в точките K и L съответно, а описаните окръжности около $\triangle APD$ и $\triangle BPC$ се пресичат за втори път в точка Q, то да се докаже, че MN разполовява $\sphericalangle PSQ$, където S е средата на KL.

G3. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека A_1 е средата на дъгата $\widehat{BC}$ от описаната окръжност около $\triangle ABC$, несъдържаща върха A, а A_2 е симетричната на A_1 относно BC. Аналогично дефинираме точките B_2 и C_2. Да се докаже, че описаната окръжност около $\triangle A_2B_2C_2$ минава през точката на Нагел за $\triangle ABC$.

Контролно по теория на числата, 06.01.2018

NT1. Нека a и b са естествени числа. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото $(a^2+b^2)^n$ може да се представи като сума от $n+1$ естествени числа, всяко от които е точен квадрат или удвоен точен квадрат.

NT2. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 2$, за които числото $(n^2)! - n^2$ може да се представи като произведение на две естествени числа a и b, за които $|a-b| < n$.

NT3. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществуват безбройно много естествени числа n, за които $n | 2^{n+k} - 1$.

Контролно по комбинаторика, 07.01.2018

C1. По колко начина числата $1, 2, \ldots, 2n$ могат да бъдат разположени в таблица $2 \times n$, така че числата във всеки ред (отляво надясно) и във всеки стълб (отгоре надолу) да са в нарастващ ред.

C2. В страна има n града, някои от които са съединени с директни пътища. Известно е, че:

1. Няма град свързан с всички останали градове.

2. За произволни градове A и B съществува единствен начин да се стигне от A до B, като се мине по не повече от два пътя.

Да се докаже, че $n-1$ е точен квадрат.

C3. В пространството са дадени 200 точки, всеки две от които са съединени с отсечка и k цвята. Двама играчи оцветяват точките и отсечките по следния начин. Първият играч оцветява всяка от отсечките в един от цветовете. След това вторият играч оцветява всяка от точките в един от цветовете. Ако след тези оцветявания има две точки оцветени в един и същи цвят и отсечката между тях е оцветена в същия цвят, печели първия играч. Да се докаже, че първият играч има печеливша стратегия при: а) $k=7$ б) $k=10$.

Темите бяха предложени както следва: проф. Петър Бойваленков и Александър Иванов – теория на числата, гл. ас. Стоян Боев – геометрия, проф. Николай Николов – алгебра, проф. Емил Колев и проф. Иван Ланджев – комбинаторика. Ето и решенията на задачите.

A1. Не е трудно да се докаже по индукция, че $f(i,j)$ е броят на елементите на множеството A_{ij} от неотрицателните цели числа $< (j+1)^i$, в чиито запис в $(j+1)$-ична бройна система всяка ненулева цифра се среща най-много веднъж. Ако $a_{k_1},\dots,a_{k_l}$ са ненулевите цифри на число от A_{ij} (то има i цифри с възможни нули отначало), разглеждаме число с j цифри, чиято a_{k_n}-та цифра е k_n при $n=1,\dots,l$, а останалите цифри са 0. По този начи намираме биекция между множествата A_{ij} и A_{ji}, т.е. $f(i,j)=f(j,i)$.

Забележка. Задачата може да се реши и с индукция.

A2. По индукция следва, че сумата не надминава $\dfrac{4}{5}-\dfrac{n+1}{(n+1)^2+2/7}$.

Забележка. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1}=0,7981...$

A3. Да допуснем, че $f(f(z))>0$ за някое z. Тогава от условието следва, че $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$; в частност $\lim\limits_{t\to+\infty}f(f(t))=+\infty$. Значи можем да изберем x така, че $f(f(x))>1$. При $y\geq\dfrac{x+1-f(x)}{f(f(x))-1}$ и $t=x+y$ имаме, че $f(t)\geq f(x)+yf(f(x))=t+1$. Увеличавайки евентуално x и y можем да считаме, че $t>-1$ и $f(f(t+1))\geq 0$. Тогава

$$f(f(t))\geq f(t+1)+(f(t)-t-1)f(f(t+1))\geq f(t+1)\geq f(t)+f(f(t)),$$

откъдето $f(t)\leq 0$ – противоречие.

И така, (*) $f(f(x))\leq 0$ за всяко x. При $y<0$ от условието следва, че f е намаляваща функция и $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$. Нека $a=\sup\{t: f(t)>0\}$. От (*) при $x=t<a$ и $y=f(t)-t$ следва, че $f(f(t))(1+t-f(t))\geq f(t)>0$ и значи $f(t)>1+t$. При $t\to a$ следва, че $a\leq -1$, което трябваше да докажем.

G1. Ще използваме стандартните означения за ъглите в триъгълник. От условието следва, че

$$\sphericalangle CMC_1=180^\circ-\alpha \text{ и } \sphericalangle CMA_1=\sphericalangle CB_1A_1=\alpha$$

откъдето заключаваме, че $M\in A_1C_1$. Аналогично $N\in B_1C_1$. От друга страна, $OA_1\perp BC$ и $B_1C_1\parallel BC$, т.е. $OA_1\perp B_1C_1$. Аналогично $OB_1\perp A_1C_1$ и следователно O е ортоцентър за $\triangle A_1B_1C_1$. Тогава

$$\sphericalangle A_1OB_1=180^\circ-\sphericalangle A_1C_1B_1=180^\circ-\gamma,$$

т.е. O лежи на описаната окръжност около $\triangle CA_1B_1$. В същото време,

$$\sphericalangle C_1A_1O = \sphericalangle C_1B_1O = 90^\circ - \gamma,$$

т.е. O е среда на $\overset{\frown}{MN}$ и $OM = ON$.

G2. (Е. Стоянов, С. Боев) От условието следва, че

$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PAE = \sphericalangle PDE = \sphericalangle PDB$ и $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PCE = \sphericalangle PBE = \sphericalangle PBD$,

т.е. $\triangle APC \sim \triangle DPB$. От друга страна,

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{AMN}}{S_{CNM}} = \frac{S_{DMN}}{S_{BNM}} = \frac{DL}{BL}.$$

Следователно точките K и L са съответни в подобните триъгълници, т.е. $\sphericalangle AKP = \sphericalangle DLP$ и четириъгълникът $KPLE$ е вписан. Нещо повече,

$$\frac{KP}{PL} = \frac{AK}{DL} = \frac{AK}{KE}.\frac{KE}{EL}.\frac{EL}{DL} = \frac{S_{AML}}{S_{MEL}}.\frac{KE}{EL}.\frac{S_{MEL}}{S_{DML}} = \frac{KE}{EL},$$

т.е. $KPLE$ е хармоничен четириъгълник. Остава да пресечем $ES^{\rightarrow}$ с описаната около $KPLE$ окръжност в точка T и да проверим, че $KP = LT$, т.е. $\sphericalangle ESK = \sphericalangle TSL = \sphericalangle PSK$.

G3. (С. Димитров) Нека H е ортоцентърът на $\triangle ABC$. Ще покажем, че точките A_2, B_2 и C_2 лежат на окръжност с диаметър NH, която е известна като окръжност на Фурман (Fuhrmann circle).

Лема 1. Даден е $\triangle ABC$ с точка на Нагел N и център I на вписаната в него окръжност. Нека M е среда на AB. Тогава $IM \parallel CN$ и $2IM = CN$.

Доказателство. Нека G е медицентърът на $\triangle ABC$. От правтаа на Нагел следва, че N, G и I лежат в този ред на една права и $NG = 2GI$. От друга страна $CG = 2MG$. Тогава $\dfrac{NG}{IG} = \dfrac{CG}{MG} = 2$ и $\sphericalangle NGC = \sphericalangle IGM$. Тогава $\triangle NGC \sim \triangle IGM$ с коефициент на подобие 2. Освен това $\sphericalangle GNC = \sphericalangle GIM$, което означава, че $IM \parallel CN$, а от коефициента на подобие следва $\dfrac{CN}{MI} = 2$, откъдето $CN = 2IM$ и лемата е доказана.

Лема 2. Даден е $\triangle ABC$ с точка на Нагел N и среда M на страната AB. Тогава симетричната точка на N относно M лежи на $\sphericalangle ACB$.

Доказателство. Нека P е пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл C и правата NM. Знаем, че $I \in CP$, където I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$. От Лема 1 знаем, че $MI || CN$ и $2MI = CN$. Тогава MI е средна отсечка в $\triangle CNP$, откъдето M е среда на NP и така P е симетричната на N относно M.

Лема 3. Даден е $\triangle ABC$ с точка на Нагел N. Ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича описаната около $\triangle ABC$ за вотри път в точка C_1. Точка Q е симетрична на N относно AB. Тогава $\sphericalangle QC_1A = \sphericalangle BAC$.

Доказателство. Нека P е симетричната на N относно средата на AB. От Лема 2 знаем, че CP е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ т.е. в случая C, P и C_1 са колинеарни. От друга страна $ANBP$ е успоредник. Тогава $AN = BP$ и $\sphericalangle NAB = \sphericalangle PBA$. От симетрията спрямо AB имаме $AN = AQ$ и $\sphericalangle NAB = \sphericalangle QAB$. Така получихме, че $AQ = BP$ и $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PBA$. Понеже C_1 е среда на дъга, то $AC_1 = BC_1$ и $\sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle BAC_1$. Тогава $\sphericalangle QAC_1 = \sphericalangle PBC_1$, $AC_1 = BC_1$ и $AQ = BP$, откъдето следва, че $\triangle AQC_1 \cong \triangle BPC_1$ и тогава $\sphericalangle QC_1A = \sphericalangle PC_1B$ като съответни елементи в тези еднакви триъгълници. Но $\sphericalangle PC_1B = \sphericalangle CAB$ като вписани в описаната около $\triangle ABC$ окръжност, което означава, че $\sphericalangle QC_1A = \sphericalangle BAC$ и лемата е доказана.

NT1. Да разгледаме тъждеството

$$\frac{(a^2+b^2)^n - b^{2n}}{a^2} = (a^2+b^2)^{n-1} + (a^2+b^2)^{n-2}b^2 + \cdots + (b^2)^{n-1}.$$

Преобразуваме дясната страна така: ако $n-i$ е четно, съответното събираемо е точен квадрат и не го променяме; ако $n-i = 2k+1$ е четно, записваме $(a^2+b^2)^{2k+1} = a^2(a^2+b^2)^{2k} + b^2(a^2+b^2)^{2k}$ и лесно се вижда, че групирането на равните събираеми води до искания резултат. Накрая изразяваме $(a^2+b^2)^n$.

NT2. Да допуснем, че $(n^2)! - n^2 = a(a+x)$, където $x < n$ е естествено число, и да представим това равенство във вида

$$(n^2)! - (n^2 - x^2) = a^2 + ax + x^2.$$

Нека $n \geq 3$. Тогава измежду множителите в $(n^2)!$ има кратен на 3, който е различен от $n^2 - x^2$ и нашето равенство може да се запише във вида $(n^2 - x^2)(3k-1) = a^2 + ax + x^2$, където k е естествено число. Тогава лявата страна има прост делител p от вида $3s-1$, докато за дясната страна това е възможно само при $p|a$ и $p|x$ (защото $a^2 + ax + x^2 \equiv 0 \pmod p$ дава $a^3 \equiv x^3 \pmod p$, откъдето при $(a,p) = (x,p) = 1$ следва, че показателят на ax^{-1} по модул p дели $(3, p-1) = 1$, т.е $a \equiv x \pmod p$ и значи $p|3a^2$, противоречие).

Може да изберем простото число p от по-горе така, че степента му в каноничното разлагане на $3k-1$ да е нечетна. Сега е ясно, че степента на p в каноничното разлагане отдясно е четна, а отляво е нечетна в $3k-1$ и значи е нечетна и в $n^2 - x^2$. Последното обаче е възможно само когато въпросната степен е по-голяма от тази в x, което води до противоречие (степента на p отдясно е по-малка).

Следователно $n = 2$ и равенството $(4!)^2 - 2^2 = 20 = 4.5$ показва, че това е решение.

NT3. Да отбележим първо, че за всяко k съществува n, за което $n|2^{n+k}-1$ и $k + n \geq 7$. Наистина, при $k \geq 6$ работа върши тривиалното $n = 1$, а при $k \leq 5$ ще посочим двойките

$$(k, n) = (1, 15), (2, 7), (3, 5), (4, 31), (5, 3).$$

Нека k е фиксирано и $n \in \mathbb{N}$ е такова, че $n + k \geq 7$ и $n|2^{n+k} - 1$. Ще конструираме $n_1 > n$, което дели $2^{n_1+k} - 1$.

От теоремата на Жигмонди следва, че съществува просто число p, което дели $2^{n+k} - 1$, но не дели никое от числата $2^i - 1$ за $i < n + k$. Това означава, че показателят на 2 по модул p е равен на $n + k$, откъдето $n + k|p - 1$. Тогава

$$pn + k = (p - 1)n + n + k$$

се дели на $n + k$ и имаме $2^{n+k} - 1|2^{pn+k} - 1$. Оттук p и n делят $2^{n+k} - 1$ и са взаимнопрости, защото $p > n + k > n$. Следователно $pn|2^{pn+k} - 1$, т.е. $n_1 = pn > n$ има исканото свойство.

C1. Да подредим числата в редица и под всяко число да запишем 1, ако то е в първия ред и 0, ако е във втория. Лесно се вижда, че ако под числата $1, 2, \ldots, k$ нулите са повече (можем да считаме, че под k е записана нула), то числото над k е по-голямо от k. Вярно е и обратното: ако в $1, 2, \ldots, k$ единиците са поне колкото нулите, то числото над k е по-малко от k.

Следователно редицата от 0 и 1 е с дължина $2n$ и изпълнява следното свойство: Във всяка частична редица $1, 2, \ldots, k$ броя на единиците е не по-малък от броя на нулите. Известно е, че броят на тези редици е числото на Каталан

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

C2. Да разгледаме графа G, образуван от градовете и пътищата между тях. От условие 2. следва, че в него няма цикли с дължина 3 и 4.

Да изберем произволен връх на графа v и нека $v_1, v_2, \ldots, v_k$ да са свързаните с него върхове на G. От условие 1. следва, че множеството $G_2 = G \backslash \{v, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ не е празно. От условие 2. следва, че няма ребра $v_i v_j$.

Ако съществува връх v_i, който не е свързан с нито един връх от G_2, то условие 2. не е изпълнено за v_i и произволен връх от G_2.

Също така не е възможно да има ребра $v_i A$ и $v_j A$ за $A \in G_2$, защото тогава има цикъл с дължина 4. Освен това произволен връх A от G_2 трябва да е свързан с връх v_i за някое i, защото в противен случай условие 2. не е изпълнено за v и A.

От горното следва, че G_2 се разбива на непресичащи се множества $T_1, T_2, \dots, T_k$, като v_i е свъран с всички върхове от T_i. Да изберем произволен връх w от T_1. Ако от w няма ребро към връх от T_2, условие 2. не е изпълнено за w и v_2. Ако от w има две ребра към T_2 ще имаме цикъл с дължина 4, противоречие.

Следователно от всеки връх от T_i излиза точно по едно ребро към всяко T_j, $j \neq i$. От тук следва, че ребрата между T_i и T_j са $|T_i|$ (като броим ребрата от върховете в T_i) и $|T_j|$ (като броим ребрата от върховете в T_j), т.е. $|T_1| = |T_2| = \cdots = |T_s| = m$. Следователно степента на всеки от върховете $v_1, v_2, \dots, v_k$ е $m + 1$.

Степента на всеки връх w от T_i е k защото от него излиза по едно ребро към всяко от множествата T_j, $j \neq i$) и едно ребро към v_i. Степента на v също е k, т.е. степените на v и върховете от G_2 са равни.

Като повторим горните разсъждения за върха v_1, получаваме, че v_1 и всеки от върховете от $T_2, \dots, T_k$ имат равни степени. Следователно $m+1 = k$ и тогава $n = k(k-1) + k + 1 = k^2 + 1$.

С3. а) Ще докажем, че ако има k цвята и броят на точките е по-голям от 2^k, то първият има печеливша стратегия. При $k = 1$ твърдението е очевидно. Нека твърдението е вярно за някое k. Да разгледаме оцветяване с $k+1$ цвята и множество с 2^{k+1} точки. Разделяме това множество на две с по 2^k точки и оцветяваме отсечките на всяко от тях съгласно индуктивната хипотеза в цветове $1, 2, \dots, k$. Всички отсечки между двете множества оцетямваме в цвят $k+1$. Ако вторият оцвети два върха от различни множества в цвят $k+1$, печели първият, а ако в някое от множествата не се среща цвят $k+1$, твърдението следва от индукционното допускане.

б) Ще докажем, че твърдението е вярно за 121 точки. Да означим точките с двойки (a, b) за $1 \leq a, b \leq 11$. За две точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) съществува не повече от едно k, за което $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1)$ се дели на 11 (следва лесно с допускане на противното и използване, че 11 е просто число). При $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ оцветяваме съответната отсечка цвят $k+1$.

Лесно се вижда, че ако отсечките AB и AC са от един цвят, то и BC е от същия цвят. Следователно точките се разделят на групи, като във всяка група всички отсечки са от един цвят. От друга страна за произволна точка (a_1, b_1) и произволно b_2 съществува точно едно a_2, за което отсечката свързваща точките (a_1, b_1) и (a_2, b_2) е в даден цвят.

Следователно за всеки цвят точките се разбиват на 11 множества с по 11 точки във всяко, като във всяко множество всички отсечки са в този цвят. При всяко оцветяване на точките в 10 цвята ще има 12 точки от един и същи цвят. Разглеждаме 11-те множества, съответстващи на този цвят. Някои две от тези 12 точки ще попаднат в едно множество и тогава първият печели.

Резултатите по задачи са в следващата таблица.

Име	Град, клас	NT1-3	G1-3	A1-3	C1-3	100
Калоян Алексиев	София, 12	8	21	12	19	60
Кристиян Василев	София, 11	12	21	14	11	58
Константин Гаров	Бургас, 12	8	16	14	17	55
Кирил Бангачев	София, 12	9	21	7	15	52
Атанас Динев	Бургас, 12	9	19	6	17	51
Борислав Антов	София, 11	7	15	12	14	48
Евгени Кайряков	София, 10	7	18	7	15	47
Иван-Александър Мавров	София, 11	7	14	7	17	4
5 Борис Барбов	София, 11	7	8	14	14	43
Борислав Кирилов	София, 8	8	7	10	15	40
До Кьонг	София, 9	7	8	6	15	36
Никола Стайков	София, 9	8	7	5	12	32
Пламен Иванов	София, 11	7	8	7	10	32
Димитър Опърлаков	Варна, 10	5	11	6	9	31
Илия Божинов	София, 12	0	7	14	10	31
Орлин Кучумбов	Бургас, 11	7	9	7	7	30
Михаела Гледачева	София, 9	7	7	8	7	29
Мартин Стефанов	София, 9	7	7	7	5	26
Иван Георгиев	София, 9	7	9	3	7	26
Добрин Бараков	Плевен, 10	7	7	8	3	25
Петър Лангов	София, 10	7	11	0	7	25
Кристиан Минчев	Бургас, 10	7	11	3	3	24
Диян Димитров	София, 9	7	7	4	6	24
Стефан Хаджистойков	София, 9	6	10	4	3	23
Георги Александров	София, 12	7	8	7	0	22
Светлин Лалов	София, 9	8	0	7	7	22
Валери Ванков	София, 9	0	11	6	4	21
Александър Ангелов	София, 12	7	7	3	0	17
Алек Димитров	София, 10	0	8	5	4	17
Кирил Трифонов	София, 11	0	13	3	0	16
Асел Исмолдаева	Варна, 12	8	2	3	3	16
Георги Златинов	София, 8	7	0	4	5	16
Димитър Любенов	София, 12	7	3	5	0	15
Галин Тотев	Бургас, 9	0	7	0	8	15
Матей Петков	Варна, 10	0	7	3	4	14
Димитър Чакъров	Пловдив, 10	0	7	6	0	13
Марк Киричев	Варна, 9	7	2	3	0	12
Мартин Василев	София, 9	1	7	2	1	11
Александър Недков	София, 9	1	0	2	7	10
Анна Михалкова	София, 9	0	0	0	7	7
Спасиян Тодоров	София, 10	0	2	1	4	7

По време на СОМ2018 беше учредена и **Висша математическа лига** (ВМЛ). Висшата математическа лига е вдъхновена от международния фестивал на младите математици, сравнително нов за България тип състезание по математика, който се провежда ежегодно в Созопол от 2010 г.

Основни цели на ВМЛ са да създаде и утвърди:

– условия за развитие на математическите таланти на учениците в среда, включваща както водещи състезатели в класическата олимпийска математика, така и ученици, които са по-силни в работата в по-спокойна обстановка.

– навици за екипна работа в отбори, в които всеки си знае силните и слабите страни и отговорностите се разпределят според това.

– умения за представяне на получените резултати и следене с разбиране на представяне на опонент.

– най-добри практики за научаване на нови и класически математически факти и начини за тяхното представяне чрез контакт с академичното жури по време на състезанието и след него.

– атмосфера на коректност и прозрачност в ситуация на съперничество между колективи (отборите) при наличие на авторитетен коректив (журито).

– популяризиране на математиката.

Състезанието се състои в провеждане на математически боеве между предварително определени отбори в течение на учебната година по определена програма. Учебното съдържание е по конспектите за олимпийска математика на Института по математика и информатика на БАН (ИМИ–БАН), актуализирани за съответната година. Правилата на боевете са същите, както на фестивала на младите математици.

През сезона 2017-2018 ВМЛ ще включва 6 отбора, които бяха избрани от техните капитани, както следва:

Отбор С1. Кирил Бангачев (капитан), Илия Божинов, Галин Тотев, Стефан Хаджистойков, Калоян Алексиев, Александър Ангелов, Марк Киричев, Мартин Василев.

Отбор С2. Константин Гаров (капитан), Орлин Кучумбов, Димитър Опърлаков, До Виет Кънг, Александър Недков, Валери Ванков, Георги Златинов, Анна Михалкова.

Отбор С3. Атанас Динев (капитан), Кристиан Минчев, Димитър Любенов, Добрин Бараков, Иво Петров, Спасиян Тодоров, Матей Петков.

Отбор С4. Борислав Антов (капитан), Борис Барбов, Светлин Лалов, Георги Александров, Кирил Трифонов, Диян Димитров, Мартин Копчев, Васил Йорданов.

Отбор С5. Кристиян Василев (капитан), Евгени Кайряков, Никола Стайков, Петър Лангов, Алек Димитров, Михаела Гледачева, Мартин Стефанов.

Отбор С6. Иван-Александър Мавров (капитан), Пламен Иванов, Димитър Чакъров, Борислав Кирилов, Асел Исмолдаева, Иван Георгиев, Чавдар Лалов.

В първия кръг на ВМЛ на 05.01.2018 се състояха три срещи: С1-С2 34:58, С3-С4 15:52 и С5-С6 35:33. Вторият кръг ще се проведе на 17.02.2018 отново в ИМИ–БАН.

Предлагаме ви задачите от първия кръг на ВМЛ.

Висша Математическа Лига
Първи кръг, 05.01.2018 г.

1. Да се докаже, че уравнението $x^2y^2 = z^2(z^2 - x^2 - y^2)$ няма решение в естествени числа.

2. В равнината са дадени три неколинеарни точки O, I и H. Колко най-много триъгълника съществуват, за които O е център на описаната, I – на вписаната окръжност, а H е ортоцентър?

3. Нека p е нечетно просто число. За всеки прост делител q на $p - 1$ означаваме с $k(q)$ показателя на q по модул p. Възможно ли е най-големият общ делител на всички числа $k(q)$ да е 1?

4. Дадено е цяло число $k \neq 0$. Да се докаже, че уравнението

$$\frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y} = k$$

има нечетен брой решения в цели числа тогава и само тогава, когато $7|k$.

5. Даден е $\triangle ABC$, в който $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ и $C_1 \in AB$ са петите на височините му. Точките P и Q са съответно от правите CA и CB, като $\sphericalangle B_1C_1P = \sphericalangle A_1C_1Q = 90^\circ$. Да се докаже, че правата през C, перпендикулярна на A_1B_1, разполовява PQ.

6. Нека $f(x)$ е полином с реални коефициенти и старши коефициент 1. Да се докаже, че множеството от реални числа $\{x : |f(x)| < 2\}$ е обединение на краен брой непресичащи се отворени интервали, сумата от дължините на които не надминава 4.

7. Дадено е естествено число $n \geq 3$. По колко начина числата $1, 2, \ldots, n$ могат да се запишат по окръжност в последователност $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по посока на часовниковата стрелка, така, че

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_n - a_1| = 2n - 2\,?$$

8. Дадена е отсечка AB с дължина 1. В даден момент няколко елементарни частици (точки) започват да се движат по отсечката от A към B, всяка с постоянна скорост. В момента, когато частица достигне точката B, тя се отблъсква от нея и започва да се движи към A без да си променя скоростта, после се отблъсква от A и т.н.

Да се намерят всички рационални числа r със следното свойство: за всяко естествено число n, ако $n + 1$ частици се движат по описания по-горе начин със скорости $1, r, r^2, \ldots, r^n$, то ще настъпи момент (различен от началния), в който всички частици ще попаднат в една и съща вътрешна точка от отсечката AB.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Стойността на израза $\dfrac{\cos 70^\circ + \sin 70^\circ}{\sqrt{2}\cos 25^\circ}$ е:

А) -1 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 2. (1 т.) Решенията на неравенството $\sqrt[x+1]{0.125^x} > \sqrt[x+2]{4^x}$ са:

А) $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$ **Б)** $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

В) $(-2, -\dfrac{8}{5}) \cup (-1, 0)$ **Г)** $(-\dfrac{8}{5}, -1) \cup (-1, 0)$

Задача 3. (1 т.) Допирателната към графиката на функцията

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{\pi} + \pi$$

в точката $x = 0$ сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, равен на:

А) 60° **Б)** 45° **В)** 135° **Г)** 120°

Задача 4. (1 т.) В триъгълник ABC $BC = 3, AC = 5, \sphericalangle ACB = 120^\circ$, а O е пресечна точка на ъглополовящите му. Радиусът на описаната около $\triangle ABO$ окръжност е:

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** $7\sqrt{3}$

Задача 5. (1 т.) Основата на права призма $ABCA_1B_1C_1$ е равнобедреният правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB = 4$. Околният ръб е 2. Ъгълът между равнините ABC и ABC_1 е:

А) 30° **Б)** 45° **В)** 90° **Г)** 120°

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$\sqrt{x} = ax - 2$$

където a е параметър.

а) (3 т.) Да се реши уравнението за $a = 1$.

б) (2 т.) За кои стойности на параметъра a уравнението има точно едно решение?

Задача 7. (5 т.) Даден е правоъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 4$ и $AD = 2$. Нека точката M е среда на CD, а точката N дели BC в отношение $k \geq 0$.

а) (2 т.) При какво положение на точката N върху BC произведението от лицата на триъгълниците ABN и CMN е най-голямо?

б) (1.5 т.) Да се докаже, че $\operatorname{tg} \sphericalangle MAN = \dfrac{k+2}{3k+2}$.

в) (1.5 т.) Да се докаже, че $\sphericalangle MAN > 15^\circ$. За коя стойност на k този ъгъл е 30°?

Задача 8. (5 т.) В четириъгълната пирамида $ABCDE$ основата $ABCD$ е квадрат със страна $2m$. Околният ръб DE е перпендикулярен на основата и е равен на $4m$. Точките M и K са среди съответно на ръбовете BC и DE.

а) (2 т.) Да се докаже, че тангенсът на ъгъла между равнините $ABCD$ и AMK е равен на $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

б) (2 т.) Да се намери лицето на сечението на пирамидата $ABCDE$ с равнината AMK.

в) (1 т.) Да се намери разстоянието между правите AM и DE.

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

Петър Бойваленков,
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

От 18 до 20 ноември 2017 г. в София се проведе XI Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“.

Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Европейската олимпиада за момичета и Всерусийската олимпиада. Резултатите на всички участници са на сайта на турнира `https://sites.google.com/site/esenenmt/`.

Ето и имената на наградените:

8. клас. *Първа награда.* Борислав Кирилов (ПЧМГ), Милко Бакалов (СМГ), Мартин Копчев (ПМГ, Габрово). *Втора награда.* Константин Каменов (СМГ), Десислава Николова (СМГ), Ангел Райчев (125 СУ), Калина Николова (СМГ), Любослав Стефанов (ПЧМГ). *Трета награда.* Веселина Иванова (ППМГ, Бургас), Георги Златинов (СМГ), Мартин Давидов (СМГ), Андон Тодоров (СМГ), Атанас Илиев (АК), Мартин Димитров (125 СУ), Георги Динков (СМГ), Стефанка Манахова (СМГ).

9. клас. *Първа награда.* Галин Тотев (ППМГ, Бургас), Светлин Лалов (СМГ), Стефан Хаджистойков (СМГ), Кьонг Виет До (СМГ), Никола Стайков (СМГ), Анна Михалкова (СМГ), Валери Ванков (СМГ), Иван Георгиев (СМГ), Маргарита Стефанова (СМГ), Мартин Стефанов (СМГ). *Втора награда.* Михаела Гледачева (ПЧМГ). *Трета награда.* Марина Бояджиева (ППМГ, Бургас).

10. клас. *Първа награда.* Виктор Балтин (ППМГ, Бургас), Димитър Опърлаков (МГ, Варна), Евгени Кайряков (СМГ), Кристиан Минчев (ППМГ, Бургас). *Втора награда.* Добрин Бараков (МГ, Плевен), Спасиян Тодоров (ПЧМГ). *Трета награда.* Деница Павлова (СМГ), Петър Лангов (СМГ), Ралица Андреева (МГ Варна).

11. клас. *Първа награда.* Иван-Александър Мавров (СМГ). *Втора награда.* Борислав Антов (СМГ). *Трета награда.* Борис Барбов (СМГ), Кристиян Василев (ПЧМГ).

12. клас. *Първа награда.* Атанас Динев (ППМГ, Бургас), Константин Гаров (ППМГ, Бургас), Кирил Бангачев (СМГ). *Втора награда.* Димитър Любенов (СМГ), Калоян Алексиев (СМГ). *Трета награда.* Радостин Петров (ППМГ, Бургас), Александър Ангелов (СМГ), Илия Божинов (СМГ), Стефан Рачков (СМГ).

Предлагаме ви състезателните задачи и техните решения.

Задача 8.1. Нека G е медицентър на $\triangle ABC$ и точка D е симетричната на G относно средата на страната AB. Нека правата през D, успоредна на AB, пресича правата BC в точка M, правата през D успоредна на BC, пресича правата AC в точка N и правата през D, успоредна на AC, пресича правата AB в точка P. Да се докаже, че точките M, N и P лежат на една права.

Решение. Построяваме $M_1 = AC \cap DM$ и $N_1 = BC \cap DP$. Тъй като G е среда на CD, то правата през G, успоредна на AB, съдържа средната отсечка в триъгълника M_1MC, а отсечката AB е средна за трапеца с основи гореспоменатата средна отсечка и M_1M. Понеже CD е медиана, следва че D е средата на M_1M, а значи и N_1 е средата на CM и N е средата на M_1C (средни отсечки в $\triangle M_1MC$). Следователно NN_1 е средна отсечка в $\triangle M_1MC$ и е успоредна и равна на половинката на основата MM_1. Тогава $NN_1 = \dfrac{1}{2}MM_1 = DM$, DMN_1N е успоредник и диагоналите му MN и DN_1 се разполовяват. Но точка P е среда на DN_1, защото BP е средна отсечка в $\triangle DMN_1$. Следователно точките M, N и P лежат на една права.

Задача 8.2. Нека $a > 0$ и $|b - c| > 4a$. Да се докаже, че е в сила поне едно от неравенствата $b^2 \geq 4ac$ или $c^2 \geq 4ab$.

Решение. Допускаме противното, т.е. че едновременно са изпълнени неравенствата $b^2 < 4ac$ и $c^2 < 4ab$. Тогава $b^2 + c^2 < 4ac + 4bc$, което е еквивалентно на $(b - 2a)^2 + (c - 2a)^2 < 8a^2$. Оттук и от условието следва, че

$$16a^2 < |b - c|^2 = |(b - 2a) - (c - 2a)|^2 \leq 2\left((b - 2a)^2 + (c - 2a)^2\right) < 16a^2,$$

което е противоречие.

Задача 8.3. а) Съществуват ли естествени числа n, x и y, за които е изпълнено равенството $86^n = x^2 + y^2$?

б) Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа x, y и z, такива, че $86^n = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. а) Отговор – не съществува такова n. Да допуснем, че n, x и y имат исканото свойство. Тъй като простото число $43 = 4.10 + 3$ дели 86, то дели и $x^2 + y^2$. Тогава $43|x$ и $43|y$, което веднага дава $43^2|x$ и $43^2|y$ и можем да съкратим на 43^2. Тази процедура може да продължи докато лявата страна се дели на 43 (в частност n е четно).

Нека $n = 2n_1$ и $4^{n_1} = x_1^2 + y_1^2$, $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Оттук по модул 4 лесно следва, че $2|x_1$ и $2|y_1$ и можем, както и по-горе, да съкратим и да продължим. В крайна сметка достигаме до уравнението $1 = x_2^2 + y_2^2$, което няма решение в естествени числа, противоречие.

б) При $n = 1$ имаме $86^1 = 81 + 4 + 9 = 9^2 + 2^2 + 1^2$, а при $n = 2$ –

$$86^2 = 84^2 + 2.170 = 84^2 + 4.85 = 84^2 + 4(81+4) = 84^2 + 18^2 + 4^2.$$

Нека $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. n е нечетно число. Тогава

$$86^n = 86\left(86^k\right)^2 = \left(9^2 + 2^2 + 1^2\right)\left(86^k\right)^2 = \left(9 \cdot 86^k\right)^2 + \left(2 \cdot 86^k\right)^2 + \left(86^k\right)^2$$

е сбор на 3 квадрата.

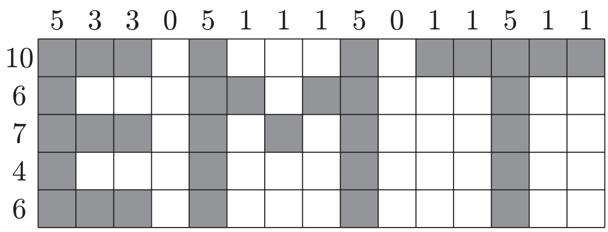
Нека $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. n е четно число. Тогава

$$86^n = 86^2\left(86^{k-1}\right)^2 = \left(84^2 + 18^2 + 4^2\right)\left(86^{k-1}\right)^2$$

е сбор на 3 квадрата.

Задача 8.4. Разглеждаме таблици с 5 реда и 15 стълба, в които някои от клетките са черни. Преди всеки ред и над всеки стълб е записан броят на черните клетки в този ред или стълб. Оказало се, че записаните числа са: 10, 6, 7, 4, 6 за редовете отгоре-надолу, и 5, 3, 3, 0, 5, 1, 1, 1, 5, 0, 1, 1, 5, 1, 1 за стълбовете отляво надясно (един пример е показан по-долу).

Две таблици се считат различни, ако поне една клетка е бяла в едната, а черна в другата таблица. Да се намери броят на различните таблици от този вид.



Решение. Ще наричаме таблиците от разглеждания вид *томограми.*

Зададената томограма е с размери 5×15. Шест от стълбовете обаче са еднозначно определени – съдържат или максимален (5) или минимален (0) брой черни квадратчета. Премахването им не се отразява на броя на различните решения, така че можем работим с опростена томограма, съдържаща $15 - 6 = 9$ стълба. Броят на черните квадратчета по редове се редуцира с 4, тъй като сме премахнали 4 максимални стълба. Модифицираната 5×9 томограма съдържа празен ред, който също може да бъде премахнат, така че началната задача е еквивалентна (след пренареждане на редове и стълбове) на намирането на всички решения на томограмата

	3	3	1	1	1	1	1	1	1
6									
3									
2									
2									

Лема. Нека е дадена $m \times n$ томограма, всички стълбове на която съдържат точно едно черно квадратче. Ако означим броят на черните квадратчета в i-тия ред с r_i, то $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ и броят на различните решения е

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}.$$

Доказателство. Първата част на твърдението е тривиална и следва директно от сравняването на броя на всички черни квадратчета, сумирани веднъж по редове и веднъж по стълбове. Можем да запълним първия ред по $\binom{n}{r_1}$ различни начина. При всеки от тях оставаме с $(m-1) \times (n-r_1)$ единична томограма за запълване. По индукция заключаваме, че броят на различните решения е

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{r_m}{r_m},$$

което след опростяване съответства на израза в лемата.

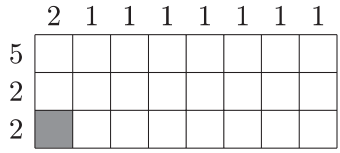
Ще решим задачата, прилагайки няколко пъти горната лема. Разглеждаме защрихования 2×2 квадрат на опростената томограма. Във всеки от стълбовете си той съдържа поне едно черно квадратче, съгласно принципа на Дирихле. Следователно имаме 3 различни случая:

Първи случай. Защрихованият квадрат съдържа четири черни квадратчета. Тогава задачата се свежда до намиране броят различни решения на единичната 2×9 томограма

	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6									
3									

Съгласно лемата, той е $\dfrac{9!}{6!3!} = 84$.

Втори случай. Защрихованият квадрат съдържа три черни квадратчета. Възможни са 4 различни конфигурации, при които това е изпълнено, като разглеждането на всяка от тях е напълно аналогично. Без ограничение на общността, нека само горното дясно квадратче на червения квадрат е бяло. Тогава вторият стълб на томограмата е напълно определен, както и четвъртият ред. Можем да ги премахнем и задачата се свежда до намиране на броя различни решения на 3×8 томограмата



които имат черно квадратче долу вляво, отговарящо на горното ляво черно квадратче в защрихования квадрат. Задачата е еквивалентна на намиране на броя различни решения на $(5, 2, 1)$-единична томограма с бяло квадратче долу вляво. Последните можем лесно да преброим, като използваме два пъти лемата и от броя на всички решения извадим тези, с черно квадратче на уреченото място:

$$\frac{(5+2+1)!}{5!2!1!} - \frac{(5+2)!}{5!2!} = 7\frac{7!}{5!2!} = 147.$$

Тъй като имаме 4 различни възможни конфигурации за червения квадрат, то общо от този случай получаваме $4 \cdot 147 = 588$ различни решения.

Трети случай. Защрихованият квадрат съдържа две черни квадратчета. Тъй като всеки от стълбовете му съдържа поне едно, то са възможни четири различни конфигурации – две с шахматно оцветяване и две с изцяло оцветен ред. При първите две първите два стълба са еднозначно определени и задачата се свежда до намиране броя различни решения за $(4, 1, 1, 1)$-единична томограма, които съгласно лемата са:

$$\frac{7!}{4!1!1!1!} = 210.$$

При другите две аналогично достигаме до $(4, 2, 1)$-единична томограма, водеща до

$$\frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

Общо от този случай получаваме $2 \cdot 210 + 2 \cdot 105 = 630$ различни решения.

Окончателно, зададената томограма има $84 + 588 + 630 = \mathbf{1302}$ различни решения.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + 2ax + (a-1)^2 = 0$ има два реални корена x_1 и x_2, които удовлетворяват равенството:

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} + \frac{x_2+1}{x_2-1} = 1.$$

Решение. Дискриминантата на квадратното уравнение е $D = 4(2a - 1)$. Следователно корените на уравнението са реални, точно когато $a \geq 1/2$. Преобразувайки дадения израз, получаваме

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} + \frac{x_2+1}{x_2-1} = \frac{2(x_1x_2-1)}{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1}.$$

От формулите на Виет имаме $x_1x_2 = (a-1)^2$ и $x_1 + x_2 = -2a$. Така получаваме уравнението

$$\frac{2((a-1)^2-1)}{(a-1)^2+2a+1} = 1,$$

което е еквивалентно на $a^2 - 4a - 2 = 0$, т.е. решенията са $a = 2 \pm \sqrt{6}$. Тъй като $a \geq 1/2$, единствената възможна стойност е $a = 2 + \sqrt{6}$.

Задача 9.2. Да се намерят всички точки E от вътрешността на квадрат $ABCD$ със следното свойство: за всеки две взаимно перпендикулярни прави през E, които пресичат и четирите страни на квадрата във вътрешни точки, три от тези четири пресечни точки са върхове на равностранен триъгълник.

Решение. Нека E е точка с исканото свойство. Да разгледаме двете взаимно перпендикулярни прави MN и KL през нея, така че $MN \parallel BC$. Тогава две съседни страни на четириъгълника $KMLN$ са равни, което означава, че E разполовява или MN или KL. Ако това е KL, тогава очевидно E не може да разполовява MN и нека $EN < EM$. В този случай $\sphericalangle KNL$ е тъп и равностранният триъгълник е $\triangle KML$. Тъй като $AB = KL = MN$, триъгълниците MLN и MKN са равнобедрени с ъгъл при основата 75°, и следователно $\sphericalangle KLN = \sphericalangle LKN = 15^\circ$. Лесно се доказва, че $\triangle KLN \equiv \triangle CDE$, с което заключаваме, че E е върха на равнобедрен триъгълник с основа CD и ъгъл при основата 15°.

От това разсъждение следва, че само E и трите върха на аналогични триъгълници при другите три страни на квадрата могат да имат исканото свойство.

Нека сега E е една от тези четири точки, например върха на равнобедрен триъгълник с основа CD и ъгъл при основата 15°. Нека $PQ \perp RS$, като точките P, R, Q и S са вътрешни съответно за страните AB, BC, CD и DA на квадрата. Тъй като четириъгълникът $PBRE$ е вписан, имаме $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PBE = 60^\circ$. Аналогично $\sphericalangle PSR = 60^\circ$ и следователно $\triangle PRS$ е равностранен.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото двуцифрено просто число r, за което съществуват прости числа p и q, за които числото $p^2 + pqr + q^2$ е точен квадрат на естествено число.

Решение. Отговор: 11. Ще направим пълен анализ на случая $r = 11$. Нека $p^2 + pqr + q^2 = x^2$, където x е естествено число. Тогава

$$(r-2)pq = x^2 - (p+q)^2 = (x-p-q)(x+p+q),$$

откъдето следва, че числото $x+p+q$ е делител на $(r-2)pq$. Да отбележим, че $x + p + q > \max\{p, q\}$.

При $r = 11$ имаме възможностите $x + p + q = 3p$, $3q$, $9p$, $9q$, pq, $3pq$ и $9pq$, като съответно $x - p - q = 3q$, $3p$, q, p, 9, 3 и 1. Първите два случая водят веднага до $p = 5q$ и $q = 5p$, което е невъзможно за прости p и q.

Ако $x + p + q = pq$ и $x - p - q = 9$, елиминирането на x води до уравнението

$$pq - 9 = 2(p + q) \iff (p - 2)(q - 2) = 13.$$

Лесно се вижда, че последното е невъзможно за прости p и q.

Аналогично, при $x+p+q = 3pq$ и $x-p-q = 3$, и при $x+p+q = 9pq$ и $x-p-q = 1$, получаваме съответно $(3p-2)(3q-2) = 13$ и $(3p-2)(3q-2) = 5$, които също водят веднага до противоречие (очевидно левите страни са по-големи от десните за $p \geq 2$ и $q \geq 2$).

При $x + p + q = 9p$ и $x - p - q = q$ получаваме $7p = 3q$, откъдето $(p, q) = (3, 7)$. Поради симетрията имаме и решението $(p, q) = (7, 3)$.

Задача 9.4. В някои от клетките на квадратна таблица 2017×2017 е поставен знак "О", като във всяка двойка ред и стълб има поне един и не повече от два знака. Да се намери най-малкото естествено число k, за което е сигурно, че във всяка подтаблица с размери $k \times k$ на дадената таблица има поне един знак "О".

Решение. Отговор $k = 1009$. Първо ще покажем, че $k = 1008$ не е достатъчно, построявайки пример. Номерираме редовете и стълбовете с $1 \leq i \leq 2017$ и поставяме знака "О" в клетките с координати (i, i) за $1 \leq i \leq 2017$. Тогава квадратът с размери 1008×1008 в долния ляв ъгъл на таблицата няма да съдържа клетка със знака "О".

Нека сега допуснем, че за $k = 1009$ съществува квадрат $k \times k$, който не съдържа "О". С разместване на редовете и стълбовете можем да считаме, че това е квадратът в долния ляв ъгъл на таблицата. Разглеждаме правоъгълника над него, който има 1008 реда и 1009 стълба. Във всеки ред имаме най-много един знак (иначе лесно получаваме противоречие), т.е. максимум 1008 знака. Но имаме 1009 стълба и следователно има стълб който не съдържа знака "О". Аналогично получаваме ред, който не съдържа знака "О" и това е противоречие с нашето допускане.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2a - 1)(2 - \sqrt{3})^x = a - 3$$

има единствено решение.

Решение. Записваме уравнението във вида

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2a - 1)\frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} - (a - 3) = 0$$

откъдето

$$(2+\sqrt{3})^{2x}-(a-3)(2+\sqrt{3})^{x}+2a-1=0.$$

Да положим $(2+\sqrt{3})^{x}=u$. Получаваме

$$(*)\qquad u^2-(a-3)u+2a-1=0.$$

Сега задачата се свежда до намиране на онези стойности на a, за които (*) има точно едно положително решение.

(1) Нека (*) има единствено решение. Тогава $(a-3)^2-4(2a-1)=0$, т.е. $a^2-14a+13-0$ и $a=1$ или 13. Непосредствено се проверява, че при $a=1$ коренът на (*) е $u=-1$, а при $a=13$ той е $u=5$.

(2) Нека (*) има два реални корена. Лесно се проверява, че ако единият от корените е 0 (т.е. $a=1/2$), то другият корен е отрицателен. Така остава да разгледаме случая, когато единият корен на (*) е положителен, а другият – отрицателен. Това се случва точно когато

$$\left|\begin{array}{l}(a-3)^2-4(2a-1)>0\\ 2a-1<0\end{array}\right. .$$

Получаваме системата от неравенства

$$\left|\begin{array}{l}a^2-14a+13>0\\ 2a-1<0\end{array}\right. ,$$

откъдето $a\in(-\infty,1/2)$. Окончателно $a\in(-\infty,1/2)\cup\{13\}$.

Задача 10.2. В окръжност k е вписан остроъгълен триъгълник ABC. Точка M е среда на AB. Допирателната към k в точка A пресича правата през M, перпендикулярна на AC, в точка D. Допирателната към k в точка B пресича правата пресича правата през M, перпендикулярна на BC, в точка E. Известно е, че правата DE разделя $\triangle ABC$ на части с лица 1 и 3. Да се намери мярката на ъгъл C.

Решение. Нека височините на $\triangle ABC$ са AA', BB', а ъглите му са означени както обикновено с α, β, γ. Точките A, B, A', B' лежат на окръжност с център M. Имаме $AM=MA'$, така че $\sphericalangle MA'A=\sphericalangle MAA'=90\circ-\beta=\sphericalangle ADM$, понеже $\sphericalangle DAC=\beta$ като периферен. Тогава точката A' лежи на описаната окръжност около $\triangle AMD$. Имаме $\sphericalangle MA'D=180\circ-\sphericalangle BAD=\gamma$ и $\sphericalangle MA'B'=180\circ-\sphericalangle MA'B-\sphericalangle B'A'C=180\circ-\beta-\alpha=\gamma$, така че D лежи на правата $A'B'$. Аналогично и E лежи на тази права. Имаме $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C$, така че

$$\sin\gamma=\frac{CA'}{CA}=\sqrt{\frac{S_{A'B'C}}{S_{ABC}}}=\frac{1}{2}\text{ или }\frac{\sqrt{3}}{2}$$

в зависимост от това, коя част има по-голямо лице. Така получаваме $\gamma = 30\circ$ ili $\gamma = 60\circ$.

Задача 10.3. Да се намери остатъка, който дава сумата

$$S = 1 - 63 + 63^2 - 63^3 + \ldots - 63^{399} + 63^{400}$$

пи делене на 2017.

Решение. Лесно се проверява, че $2^{11} - 2^5 + 1 \equiv 0 \pmod{2017}$, откъдето $2^5(-63) \equiv 1 \pmod{2017}$. Оттук $-63 \equiv 2^{-5} \pmod{2017}$ (под $a^{-1} \pmod{m}$, където $(a, m) = 1$, разбираме единственият остатък a' по модул m, за който $aa' \equiv 1 \pmod{m}$) и замествайки в сумата S получаваме

$$S \equiv 1 + 2^{-5} + 2^{-10} + \ldots 2^{-2000}.$$

Като използваме факта, че 2017 е просто число, както и малката теорема на Ферма, стигаме до сравнението

$$(2^{-5} - 1)S \equiv 2^{-2005} - 1 \equiv 2^{11} - 1 \equiv 2^5 - 2 \pmod{2017}.$$

Оттук $(-2^6 S \equiv 2^5 - 2 \pmod{2017}$ и $S \equiv 2^{-5} - 2^{-1} \pmod{2017}$. Окончателно $S \equiv (-63)(1009) \equiv 945 \pmod{2017}$.

Задача 10.4. В множеството от точки с целочислени координати $\mathcal{P} = \{(a, b) \mid 1 \leq a, b \leq 2017, a, b \in \mathbb{Z}\}$ е избрана точка $X = (x, y)$, която трябва да отгатнем. За тази цел задаваме въпроси от вида:

„В колко координати точката $Q_i = (x_i, y_i)$ се различава от X?“

за N различни точки $Q_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Всички въпроси се задават предварително и наведнъж. Да се намери минималният брой въпроси, с които може да се определи точката X.

Решение. Ще разгледаме задачата в общия случай, когато

$$\mathcal{P} = \{(a, b) \mid 1 \leq a, b \leq 3k + 1\}.$$

Лесно се проверява, че за $k = 1$ търсеният минимален брой въпроси е 4.

Дефинираме разстояние между две точки $A(\alpha, \beta)$ и $B(\gamma, \delta)$ като броя на позициите, в които се различават двойките (α, β) и (γ, δ):

$$d(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{ако } \alpha = \gamma, \beta = \delta, \\ 1 & \text{ако } \alpha = \gamma, \beta \neq \delta, \text{ или } \alpha \neq \gamma, \beta = \delta, \\ 2 & \text{ако } \alpha \neq \gamma, \beta \neq \delta. \end{cases}$$

Ако въпросите, които са зададени, използват точките Q_i, $i = 1, \ldots, N$, то точката X може да бъде еднозначно определена точно когато N-орките

$$(d(Q_1, X), d(Q_2, X), \ldots, d(Q_N, X))$$

са различни за различни $X \in \mathcal{P}$.

Следните няколко наблюдения са очевидни. Ако $\mathcal{Q}$ е множество от точки (въпроси), с които можем да определим произволно избрана точка X, то:

– не съществуват два празни (т.е. без точки от $\mathcal{Q}$) реда (стълба);

– ако съществуват празен ред и празен стълб, то не съществува точка $P \in \mathcal{Q}$, която е единствена в своя ред и стълб;

– не съществуват две точки от $\mathcal{Q}$, които са единствени в своя ред и стълб.

Ще докажем, че ако $\mathcal{Q}$ е множество от точки (въпроси), с които можем да определим X, и ако в него съществуват две точки $U, V \in \mathcal{Q}$ в една линия, то съществува множество от точки $\mathcal{Q}^*$, $|\mathcal{Q}^*| \leq |\mathcal{Q}|$, такова че U и V са единствените точки от $\mathcal{Q}^*$, които се намират в линиите, съдържащи U и V.

Без ограничение на общността нека U и V са в един и същи ред. Най-напред разглеждаме случая, когато $W \in \mathcal{Q}$ е в един ред с U и V. Ако всички точки в стълба на W са от $\mathcal{Q}$, то можем да премахнем W от $\mathcal{Q}$. Ако в този стълб има точка W', която не е от $\mathcal{Q}$, то можем да разменим W с W'. По същия начин разглеждаме случая, когато W е от стълба на U (или V).

Да означим с $\beta(m,n)$ минималната мощност на множество от точки от $\mathcal{P} = \{(a,b) \mid 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n\}$, с които можем да определим произволна точка X в $\mathcal{P}$. От горното наблюдение получаваме

$$b(n,n) \geq 2 + \beta(n-1,n-2) \geq 4 + \beta(n-3,n-3).$$

Комбинирайки това с $\beta(4,4) = 4$, получаваме $\beta(n,n) \geq 4k$. Лесно се доказва по индукция, че в това неравенство се достига равенство като построим по индукция множество $\mathcal{Q}'$ за квадрат $(n+3) \times (n+3)$, позволяващо определянето на произволно избрана точка X. Започваме с такова множество $\mathcal{Q}$ за квадрат $n \times n$ и добавяме към него по очевиден начин нови четири точки, намиращи се в новите три реда и три стълба. Така за $n = 2017$ получаваме $N = 2688$.

Забележка. По подобен начин можем да докажем, че ако точката X е избрана в квадрат $n \times n$, то търсеният брой е

$$\beta(n,n) \geq \begin{cases} 4k-1 & \text{за } n = 3k; \\ 4k & \text{за } n = 3k+1; \\ 4k+2 & \text{за } n = 3k+2. \end{cases}$$

По-общо, за правоъгълник $m \times n$ търсеният брой е

$$\beta(m,n) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{2(m+n-1)}{3} \right\rfloor & \text{ако } m < 2n-1; \\ 2n-1 & \text{ако } m \geq 2n-1. \end{cases}$$

Задача 11.1. Дадени са естествени числа q и d. Геометрична прогресия с първи член q има частно q. Аритметична прогресия с първи член 169, последен член 2017 и разлика d има q члена. Ако сборът от членовете на геометричната прогресия е равен на сбора от членовете на аритметичната прогресия, да се намери d.

Решение. Тъй като $2017 = 169 + (q-1)d$, то $1848 = (q-1).d$ и следователно $q-1$ дели 1848. Условието двете прогресии да имат равни сборове е еквивалентно на

$$\frac{169+2017}{2}.q = q + q^2 + \cdots + d^{n-1} \iff 1092 = q + q^2 + \cdots + q^{n-2}.$$

Следователно q дели $1092 = 2^2.3.7.13$. Ако $n = 3$ получаваме $q = 1092$ и $q - 1 = 1091$ не дели 1848.

При $n = 4$ получаваме квадратното уравнение $q^2 + q - 1092 = 0$, което няма цели корени. При $n \geq 5$ получаваме $1092 = q+q^2+\cdots+q^{n-2} \geq q+q^2+q^3$, което при $q \geq 10$ не е изпълнено. Директна проверка с делителите на 1092, които са по-малки от 10 (това са 2, 3, 4, 6 и 7) показва, че единственото решение е $q = 3$ и $n = 7$. Сега от $1848 = (q-1).d = 2d$ пресмятаме $d = 924$.

Задача 11.2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до страните му AC, BC и AB съответно в точки M, N и P. Точките X и Y са съответно от отсечките AM и BN, като XY е успоредна на AB и пресича MP и NP съответно в точки K и L. Правата ML пресича k в точка D, а правата YD пресича k в точка Q. Да се докаже, че точките K, L, P и Q лежат на една окръжност.

Решение. От $YL \parallel PB$ следва, че $\triangle LYN \sim \triangle PBN$, откъдето получаваме $YL = YN$. Освен това $YN^2 = YD.YQ$, т.е. $YL^2 = YD.YQ$. Това равенство, заедно с $\sphericalangle DYL = \sphericalangle LYQ$ означава, че $\sphericalangle YDL \sim \triangle YLQ$. Следователно

$$\sphericalangle QLK = \sphericalangle QDL = \sphericalangle QDM = \sphericalangle QPK,$$

което означава, че точките K, L, P и Q лежат на една окръжност.

Задача 11.3. Върху окръжност са избрани $2n+1$ точки. Всяка от съединяващите ги отсечки е оцветена в бяло, зелено или червено, като червените отсечки са точно n. Да се намерят всички стойности на n, за които при всяко такова оцветяване или съществуват три точки, всеки две от които са съединени с бяла отсечка или съществуват 4 точки, всеки две от които са съединени със зелена отсечка.

Решение. Ще докажем, че съществуват $n+1$ точки между които няма червена отсечка. За целта да изберем множество A с възможно най-голям брой точки между които няма червена отсечка и да допуснем, че $|A| \leq n$. Следователно точките извън A са поне $n+1$. От всяка от тези точки трябва да излиза поне червена отсечка към точка от A (в противен случай A няма да е с най-голям брой точки). Следователно червените отсечки са поне $n+1$, противоречие.

Ако $n+1 \geq 9$, т.е. $n \geq 8$ получаваме пълен граф с 9 върха и два цвята – бял и червен. Известно е, че в такъв граф или има бял триъгълник или има червен четириъгълник (тъй като числото на Рамзи $R(3,4) = 9$). Когато имаме 8 точки съществува оцветяване при което не съществува бял триъгълник или червен четириъгълник. Например, оцветяваме страните и главните диагонали на правилен осмоъгълник в бяло, а останалите отсечки в червено.

При $n = 7$ (тогава точките са 15) разглеждаме следното оцветяване. Построяваме 7 червени отсечки без общи върхове, като остава една точка. Разглеждаме всяка червена отсечка като обобщена точка и получаваме общо 8 точки. Оцветяваме както в дадения по-горе пример.

Задача 11.4. Дадено е нечетно естествено число m. Редицата a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е дефинирана по следния начин: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = (m+1)a_n + [\sqrt{m^2+1}a_n]$ при $n \geq 1$. Да се намери най-голямата степен на числото 2, която дели a_{2017}.

Решение. От неравенствата

$$a_{n+1} < (m+1)a_n + \sqrt{m^2+1}a_n < a_{n+1} + 1$$

получаваме

$$a_{n+1}(m+1-\sqrt{m^2+1}) < 2ma_n < (a_{n+1}+1)(m+1-\sqrt{m^2+1}),$$

откъдето

$$(m+1)a_{n+1} - 2ma_n < a_{n+1}\sqrt{m^2+1} < (m+1)a_{n+1} - 2ma_n + m + 1 - \sqrt{m^2+1}.$$

Тъй като $0 < m+1-\sqrt{m^2+1} < 1$, последните неравенства показват, че

$$[a_{n+1}\sqrt{m^2+1}] = (m+1)a_{n+1} - 2ma_n.$$

Като използваме, че $[a_{n+1}\sqrt{m^2+1}] = a_{n+2} - (m+1)a_{n+1}$, получаваме

$$a_{n+1} = 2(m+1)a_{n+1} - 2ma_n$$

при $a_1 = 1$ и $a_2 = 2m + 1$.

По индукция директно следва, че ако $2^\alpha \parallel a_n$ и $2^\alpha \parallel a_{n+1}$, то $2^{\alpha+1} \parallel a_{n+2}$ и $2^{\alpha+1} \parallel a_{n+3}$ при $n \geq 1$.

Следователно търсената стойност е 2^{1008}.

Задача 12.1. Да се докаже, че в безкрайната сума $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots$ можем да сменим безбройно много плюсове с минуси така, че плюсовете да останат безбройно много и новата сума да е равна на $\frac{1}{3}$. $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

Решение. Понеже

$$\sum_{i=k}^{l} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{k}^{l} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{l+1}, \tag{1}$$

имаме да намерим безкрайна редица от естествени числа $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ така, че

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i+1}}\right) = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Един такъв пример е $n_i = 2^i : S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} = \frac{1}{3}$ (сума на безкрайна геометрична прогресия).

Задача 12.2. Нека $ABCD$ и $DEFG$ са такива успоредници, че D и E лежат на отсечките AG и CD ($E \neq C$). Да се докаже, че правите AC, BF и EG се пресичат в една точка тогава и само тогава, когато $AC||DF$.

Решение. Ще използваме косоъгълна координатна система с оси DE и DG. Нека координатите на B и F са (c, a) и (e, g). Правите AC и EG имат уравнения $\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$ и $\frac{x}{e} + \frac{y}{g} = 1$. Като решим тази система от уравнения, намираме, че координатите на точката $H = AC \cap EG$ са $x_0 = \frac{ce(a-g)}{\Delta}$ и $y_0 = \frac{ag(e-c)}{\Delta}$, където $\Delta = ae - cg$. Тази точка лежи на правата BF тогава и само тогава, когато $\frac{x_0 - c}{e - c} = \frac{y_0 - a}{g - a}$. След заместване на x_0 и y_0 последното се преобразува до $\frac{c}{a} = -\frac{e}{g}$, което означава, че $AC||DF$.

Задача 12.3. Да се намери най-голямото естествено число n, за което 3^n дели $1 + [(3+\sqrt{6})^{69}]$ ($[x]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо x).

Решение. Нека $x_1 = 3 + \sqrt{6}$, $x_2 = 3 - \sqrt{6}$ и $y_k = x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1}$. Тогава

$$y_{k+1} = (x_1^2 + x_2^2)y_k - (x_1x_2)^2 y_{k-1} = 30y_k - 9y_{k-1}.$$

Понеже $y_1 = 6$ и $y_2 = 162$, по индукция следва, че $y_k = 3^k z_k$, където $z_1 = 2$, $z_2 = 18$ и $z_{k+1} = 10z_k - z_{k-1}$. Остатъците на последната редица по модул 27 образуват редица с период 18: 2, 18, 16, 7, 0, 20, 11, 9, 25, 25, 9, 11, 20, 0, 7, 16, 18, 2, ... Следователно $z_{35} \equiv 18(27)$, т.е. $y_{35} \equiv 2.3^{37}(3^{38})$. Тъй като $x_2 \in (0,1)$, то $y_k = 1+[(3+\sqrt{6})^{2k-1}]$ и значи отговорът на задачата е $n = 37$.

Задача 12.4. За дадено естествено число n да се намери най-малкото реално число c_n със следното свойство: за произволни ненулеви рационални числа $a_1, \dots, a_n$ и произволни реални числа $b_1, \dots, b_n$ съществува реално число x така, че $\{a_i x + b_i\} \leq c_n$ за всяко $i = 1, \dots, n$ ($\{y\} = y - [y]$).

Решение. Ако q е НОК на знаменателите на $a_1, \dots, a_n$, след смяната на x с qx можем да считаме, че $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Множеството $A_i = \{x \in (0,1) : \{a_i x+b_i\} > 1-1/n\}$ е крайно обединение на непресичащи се отворени интервали с обща дължина $1/n$. Тогава $A = \cup_{i=1}^n A_i$ е крайно обединение на отворени интервали с обща дължина най-много 1. Оттук лесно следва, че $A \subsetneq (0,1)$ и значи $c_n \leq 1 - 1/n$. От друга страна, ако $a_1 = \cdots = a_n$ и $\{b_1\}, \dots, \{b_n\}$ образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия с разлика $1/n$, то $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \max\limits_{1\leq i\leq n} \{a_i x + b_i\} = 1 - 1/n$ (обратното също е вярно). Следователно $c_n = 1 - 1/n$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.2, 8.3 – Иван Тонов; 8.4 – Станислав Харизанов; 9.1, 9.4 – Драгомир Драгнев; 9.2 – Кристиян Янков; 9.3 – Петър Бойваленков; 10.1, 10.3, 10.4 – Иван Ланждев; 10.2 – Ивайло Кортезов; 11.1 – Емил Колев; 11.2, 11.3, 11.4 – Александър Иванов; 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 – Николай Николов.

ЗА И ОКОЛО ФОРМУЛАТА НА ПИК

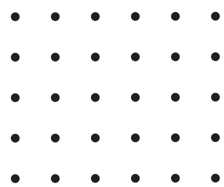
Борислав Лазаров,
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Пролог

Георг Александър Пик е евреин, роден през 1859 г. във Виена, живял и работил в Прага. Умира в немски концлагер през 1942 г.[1] Формулата, за която ще стане въпрос в тази статия, Пик публикува през 1899 г.[2]

Уговорки

Квадратна мрежа образуват точките с целочислени координати в равнината. Тях ще наричаме *възли*.



Отсечка с краища във възли и успоредна на някоя координатна ос ще наричаме *линия*. Дължината на най-къса линия е единица.

Многоъгълниците, които ще разглеждаме по-нататък, ще бъдат с върхове във възлите. За многоъгълника F въвеждаме числото

$$S(F) = n + \frac{m}{2} - 1,$$

където n е броят на вътрешните възли и m е броят на контурните възли за F.[3] Равенството $S_F = S(F)$ се нарича формула на Пик и нашата цел в статията ще бъде да установим верността на това равенство за произволен многоъгълник.

Подкрепящи примери

Пример 1. Да пресметнем числото $S(F)$, когато F е:
а) квадрат, чиято страна е линия с дължина 3;
б) правоъгълник, чиито страни са линии с дължини 3 и 4.

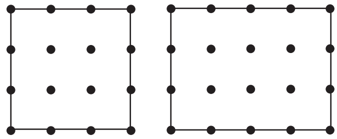
[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Georg\_Alexander\_Pick` (активен януари 2018)

[2] Pick, Georg (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre. Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines für Böhmen 'Lotos' in Prag.

[3] Понятията *вътрешна точка* и *контурна точка* ще бъдат уточнени в допълнението, част I, в края на статията.

Решение. а) Преброяваме $n = 4$, $m = 12$; пресмятаме

$$S(F) = 4 + \frac{12}{2} - 1 = 9.$$



б) Преброяваме $n = 6$, $m = 14$; пресмятаме $S(F) = 6 + \dfrac{14}{2} - 1 = 12.$

В двата случая на пример 1 имаме съвпадение на стойността на $S(F)$ и лицето на многоъгълника. Това наблюдение лесно се обобщава в следната

Лема 1. *За правоъгълник F, чиито страни са линии, числото $S(F)$ е равно на лицето S_F.*

Доказателство. Нека едната страна на F е a (има дължина a), другата – b. Тогава броят на възлите върху a е $a+1$, броят на възлите върху b е $b+1$. Като отчетем, че върховете броим заедно с всяка от страните, на която са край, за броя на контурните възли на F намираме

$$m = 2(a+1) + 2(b+1) - 4 = 2(a+b).$$

Броят на линиите, свързващи възли от a и срещуположната ѝ страна, е $a-1$; броят на линиите, свързващи възли от b и срещуположната ѝ страна, е $b-1$. Следователно броят на възлите, които са пресечни точки на такива линии, е $(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$. Това са всъщност вътрешните възли за F, т.е.

$$n = ab - a - b + 1.$$

Така намираме

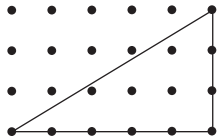
$$S(F) = ab - a - b + 1 + \frac{2(a+b)}{2} - 1 = ab = S_F,$$

с което лема 1 е доказана.

Пример 2. Да пресметнем числото $S(T)$, когато T е правоъгълен триъгълник, чиито катети са линии с дължини 3 и 5.

Решение. Преброяваме $n = 4$, $m = 9$; пресмятаме

$$S(T) = 4 + \frac{9}{2} - 1 = 7,5.$$



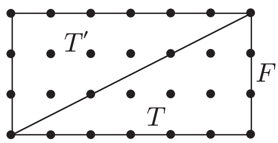
Забелязваме, че и сега $S(T) = S_T$. Това наблюдение може да се обобщи в следната

Лема 2. *За правоъгълен триъгълник T, чиито катети са линии, числото $S(T)$ е равно на лицето S_T.*

Доказателство. Нека единият катет на T има дължина a, другият – b. Да означим броя на вътрешните възли на T с c и броя на възлите по хипотенузата без краищата ѝ с d. Броят на контурните възли на T е $a + b + d + 1$. Следователно

$$S(T) = c + \frac{a + b + d + 1}{2} - 1 = \frac{a + b + 2c + d - 1}{2}.$$

Да опаковаме T в правоъгълник F. Това означава да допълним T със също такъв правоъгълен триъгълник T', получен при завъртане на T на 180° около средата на хипотенузата. От съображения за симетрия заключаваме, че броят на вътрешните възли на T' е c.



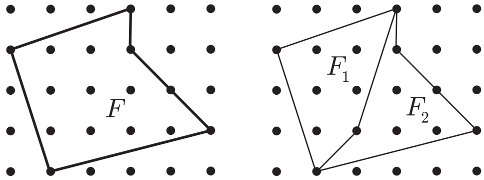
Страните на опаковката са катетите a и b. От една страна, броят на вътрешните за F възли е $2c + d$, тъй като това са вътрешните възли за T и T', заедно с тези по хипотенузата без краищата ѝ. От друга страна, вътрешните възли може да преброим, както сторихме в лема 1, и тогава броят им ще излезе $ab - a - b + 1$. Така намираме, че $2c + d = ab - a - b + 1$. Заместваме $2c + d$ с $ab - a - b + 1$ във формулата за $S(T)$ и получаваме

$$S(T) = \frac{a + b + 2c + d - 1}{2} = \frac{a + b + (ab - a - b + 1) - 1}{2} = \frac{ab}{2} = S_T,$$

с което лема 2 е доказана.

Разбиване и адитивност

Казваме, че многоъгълникът F е разбит на многоъгълниците F_1 и F_2 (или все едно $\{F_1,\ F_2\}$ е разбиване на F), ако $F_1 \cap F_2$ няма вътрешни точки и $F_1 \cup F_2 = F$. Доколкото в разглежданията се ограничаваме до многоъгълници, чиито върхове са възли, за нас интерес ще представлява само разбиване по начупена линия, чиито върхове са възли от F, при това начупената линия не се самопресича. В такъв случай говорим за разбиване по начупената линия.



Разбиването може да става последователно на по-голям брой многоъгълници, като на всяка следваща стъпка разбиваме многоъгълник, участващ в предното разбиване. Например, ако F_2 е разбит на $F_{2,1}$ и $F_{2,2}$, то $\{\ F_1,\ F_{2,1},\ F_{2,2}\}$ е разбиване на F.

От определението на понятието *лице* следва, че когато многоъгълникът F е разбит на многоъгълниците F_1 и F_2, то за лицата е в сила $S_F = S_{F_1} + S_{F_2}$ (адитивност). Сега ще установим, че адитивността е присъща и на $S(F)$.

Лема 3. *Ако* $\{F_1,\ F_2\}$ *е разбиване на* F*, то* $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

Доказателство. Да означим броя на вътрешните възли на F, F_1 и F_2 съответно с n, n_1 и n_2, на контурните възли съответно с m, m_1 и m_2; нека още c е броят на възлите по разбиващата начупена линия без краищата ѝ. Тогава

$$n = n_1 + n_2 + c, \quad m = m_1 + m_2 - 2c - 2.$$

Сега

$$\begin{aligned} S(F) &= n + \frac{m}{2} - 1 = n_1 + n_2 + c + \frac{m_1 + m_2 - 2c - 2}{2} - 1 \\ &= n_1 + \frac{m_1}{2} - 1 + n_2 + \frac{m_2}{2} - 1 = S(F_1) + S(F_2), \end{aligned}$$

с което лема 3 е доказана.

От лема 3 непосредствено следва

Лема 4. *Ако в равенството* $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ *две от участващите числа са равни на съответните лица на многоъгълниците, то третото число също е равно на съответното лице.*

Например, ако $S(F) = S_F$ и $S(F_1) = S_{F_1}$, то $S(F_2) = S_{F_2}$.

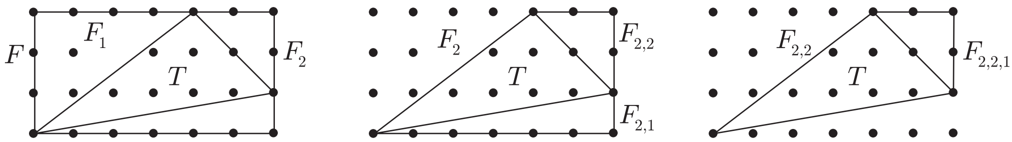
Формула на Пик за триъгълник

В лема 2 установихме, че за правоъгълен триъгълник $S(T) = S_T$.

Теорема 1. *За произволен триъгълник T числото $S(T)$ е равно на лицето S_T.*

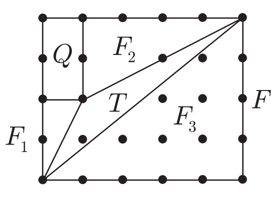
Доказателство. Нека триъгълникът T е опакован в правоъгълника F. Възможните картинки са два типа.

1) Върховете на T са по контура на F. В този случай последователно ще се отървем от излишните правоъгълни триъгълници.



При конфигурацията на чертежа отляво правоъгълникът F се разбива на правоъгълния триъгълник F_1 и четириъгълник F_2, съдържащ T. Съгласно с лема 1 имаме $S(F) = S_F$. Съгласно с лема 2 имаме $S(F_1) = S_{F_1}$. Съгласно с лема 4 имаме $S(F_2) = S_{F_2}$.
При конфигурацията на чертежа в средата четириъгълникът F_2 се разбива на правоъгълния триъгълник $F_{2,1}$ и четириъгълник $F_{2,2}$, съдържащ T. Понеже $S(F_2) = S_{F_2}$ и $S(F_{2,1}) = S_{F_{2,1}}$, съгласно с лема 4 имаме $S(F_{2,2}) = S_{F_{2,2}}$.
При конфигурацията на чертежа отдясно четириъгълникът $F_{2,2}$ се разбива на правоъгълния триъгълник $F_{2,2,1}$ и триъгълника T. Понеже $S(F_{2,2}) = S_{F_{2,2}}$ и $S(F_{2,2,1}) = S_{F_{2,2,1}}$, съгласно с лема 4 имаме $S(T) = S_T$, с което лема 5 е доказана.

2) Връх на T е вътрешен за F. *Идея*: разглеждаме конфигурацията на чертежа отдолу. В този случай първо ще изрежем правоъгълника Q, после и излишните правоъгълни триъгълници F_1, F_2, F_3, позовавайки се на леми 1, 2 и 4. На всяка стъпка ще установяваме равенството $S(X) = S_X$.



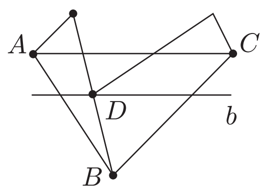
С това теорема 1 ще бъде доказана.

Триангулация на многоъгълник

Триъгълникът се приема за най-простата геометрична фигура, характерна за равнината (двумерен симплекс). Разбиването на един многоъгълник на триъгълници се нарича *триангулация* на многоъгълника. Ясно е, че прекарвайки всички диагонали в *изпъкнал* многоъгълник F, получаваме триангулация с триъгълници, за които $S(T) = S_T$ според теорема 1. Сега, прилагайки лема 4, може да твърдим, че е вярна формулата на Пик $S(F) = S_F$. Този резултат се разпространява и за вдлъбнати многоъгълници.

Лема 5. *За всеки многоъгълник съществува вътрешен диагонал.*

Доказателство. Да вземем три последователни върха A, B, C на многоъгълника F. Ако AC е от F, то това е желаният диагонал. Иначе, нека D е връхът на F в $\triangle ABC$, най-отдалечен от страната AC. Тогава диагоналът BD е изцяло в F. Наистина, нека b е правата през D, успоредна на AC. В частта от $\triangle ABC$, отсечена от полуравнината с контур b и съдържаща B, няма връх на F (освен B), а значи няма и страни на F, които да пресичат BD.



Теорема 2. *За всеки многоъгълник съществува триангулация, при която върховете на всеки участващ триъгълник са върхове на многоъгълника.*

Доказателство. За триъгълник твърдението е вярно, приемайки че триангулацията е самият триъгълник ($\{\Delta; \emptyset\}$ е разбиването на Δ). Да допуснем, че има n-ъгълници, за които не съществува триангулация от желания вид. Ясно е, че $n > 3$. Нека l-ъгълникът F е такъв, при това с възможно най-малко l, т.е. при $3 \leq m < l$ всеки m-ъгълнник има триангулация, при която върховете на всеки участващ триъгълник са върхове на многоъгълника. Съгласно с лема 5 съществува вътрешен диагонал на F. Този диагонал разбива F на два многоъгълника, всеки с по-малко от l върха, значи те имат триангулация от указания вид. Но тогава, обединявайки двете триангулации, получаваме триангулация на F с желаното свойство – противоречие. Теоремата е доказана.

От теорема 1, теорема 2 и лема 4 следва

Теорема 3. *За произволен многоъгълник F числото $S(F)$ е равно на лицето S_F.*

Така формулата на Пик е доказана за произволен многоъгълник.

Приложения

Пример 3. Ще докажем, че ако $\triangle ABC$ съдържа единствен възел G, който е вътрешна точка, и никакви контурни точки освен върховете си, то G е медицентърът на $\triangle ABC$.[4]

Решение. Всеки от триъгълниците ABG, BCG, CAG има по три контурни и нула вътрешни възела. Съгласно с формулата на Пик,

$$S(ABG) = S(BCG) = S(CAG) = \frac{1}{2}.$$

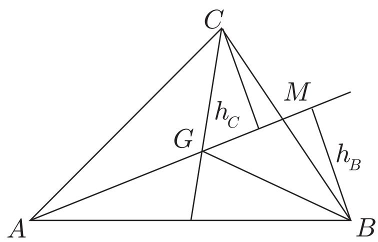
Означава ме разстоянията от B и C до правата AG съответно с h_B и h_C. Тогава

$$\frac{1}{2}GM \cdot h_B = S_{BMG} = S_{CMG} = \frac{1}{2}GM \cdot h_C.$$

Оттук следва, че $h_B = h_C$. Нека $M = AG \times BC$ и g е разстоянието от G до BC. Тогава

$$\frac{1}{2}BM \cdot g = S_{BMG} = S_{CMG} = \frac{1}{2}CM \cdot g.$$

Следователно $BM = CM$, т.е. M е средата на BC, а тогава G е от медианата през A. Аналогично се доказва, че G е от медианата през C.



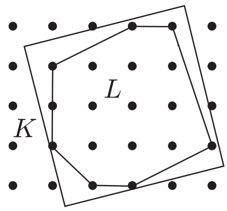
Пример 4. Произволно разположен квадрат със страна k може да покрие най-много $(k+1)^2$ възли от мрежата.[5]

Решение. Нека K е квадрат със страна k, произволно разположен в равнината (не непременно с върхове във възлите на квадратната мрежа). Нека L е изпъкналата обвивка на възлите, покрити от K. Периметърът на L не надвишава този на K. (По-подробно тези въпроси са разгледани в

[4] В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии, Часть II. Москва, Наука, 1986, с. 165, 23.6

[5] R.Honsberger. Mathematical Morsels. MAA, 1978, 19-21.

допълнението, част II.) Нека n и m са възлите, съответно вътрешни и по контура за L. Това всъщност са всички възли, които покрива K и само те. Трябва да установим, че $n + m \leq (k+1)^2$.



От формулата на Пик следва, че

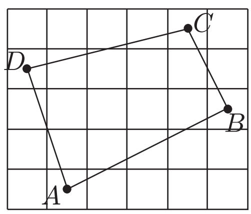
$$n + \frac{m}{2} - 1 = S(L) = S_L \leq S_K = k^2,$$

откъдето $n + \dfrac{m}{2} \leq k^2 + 1$. Възлите по периметъра на L са на разстояние най-малко 1, което означава, че m не надвишава периметъра на L. Понеже периметърът на L не надвишава този на K, имаме $m \leq 4k$, значи $\dfrac{m}{2} \leq 2k$. Накрая

$$n + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \leq k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2.$$

Предизвикателства

Въпрос 1. Точките A, B, C и D са центрове на клетки от мрежата. На колко е равно лицето на $ABCD$?[6]



Въпрос 2. Колко възли лежат на хипотенузата, когато катетите са линии с дължини k и l?

Въпрос 3. Каква е връзката между числото $S(F)$ и лицето S_F, когато най-къса линия има дължина k, например при $k = 2$?

Въпрос 4. Какво число ще е равно на лицето на фигура F, получена от многоъгълник F' с вътрешни и контурни точки съответно n' и m',

[6]Състезателна тема за 5–6 клас, 2017 г. на турнира „Черноризец Храбър“

от който е изрязан съдържащ се в него многоъгълник F'' с вътрешни и контурни точки съответно n'' и m''?

Въпрос 5. Прегледайте клипа `https://www.vbox7.com/play:450bc934f0` (активен януари 2018). Какво философско и емоционално внушение постигат чрез триангулацията създателите на този клип?

Въпрос 6. Един важен резултат в математиката е *лемата на Шпернер*, отнасяща се за специално оцветяване при триангулация. Запознайте се с лемата и едно много нагледно доказателство, а също с интересното „житейско“ приложение в клипа `https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME` (активен януари 2018).

Допълнение

I. Точка е *вътрешна* за фигура в равнината, когато съществува кръг с център тази точка, всички точки на който принадлежат на фигурата.

Точка е *контурна* за фигура в равнината, когато всеки кръг с център тази точка съдържа както точки, принадлежащи на фигурата, така и точки, непринадлежащи на нея. За многоъгълник една точка е контурна, когато лежи на страна на многоъгълника.

Критерий за разпознаване при многоъгълник: когато точка не лежи на страна на многоъгълника, разглеждаме лъч с начало точката, който не минава през връх на многоъгълника; *точката е вътрешна, точно когато лъчът пресича нечетен брой страни на многоъгълника.*

Задача. Докажете, че когато точка не е контурна за многоъгълник, то:

а) съществува кръг с център точката, на който или всички точки са от многоъгълника, или всичките не принадлежат на многоъгълника;

б) съществува лъч с начало точката, който не минава през връх на многоъгълника;

в) лъч, отговарящ на предното условие, съдържа само краен брой контурни точки.

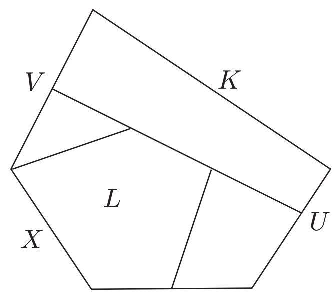
Упътване. а) Разгледайте разстоянието от точката до най-близка страна на многоъгълника.
б) Забележете, че само краен брой лъчи с начало точката минават през връх на многоъгълника.
в) Възможно ли е лъч да съдържа страна на многоъгълника и да не минава през връх?

II. Фигурата F е *изпъкнала,* когато заедно с всеки две свои точки съдържа и отсечката с краища тези точки; *изпъкнала обвивка* на фигура в равнината е сечението на всички полуравнини, съдържащи фигурата. Изпъкналият многоъгълник е сечение на полуравнините, които го съдържат и имат контур правите, съдържащи страните на многоъгълника. Изпъкналата обвивка за случая от пример 4 може да онагледим така: Във всеки възел от K забождаме карфица, а около K разпъваме ластик. Пускаме ластика и той се опъва върху карфиците, образувайки изпъкнал многоъгълник L , който е изпъкналата обвивка на множеството от възлите в K, включая контурните.

Теорема 4. *Нека L е изпъкнал многоъгълник. Периметърът на всеки изпъкнал многоъгълник K, съдържащ L, е не по-малък от този на L, т.е. ако K и L са изпъкнали и $L \subset K$, то $P_L \leq P_K$.*

Доказателство.[7] Да наречем страна на L, която не лежи на страна на K, *вътрешна* спрямо K. Ако L няма вътрешни страни, всяка стана на L не надвишава страната на K, на която лежи, и тогава $P_L \leq P_K$ – твърдението е вярно.

Да допуснем, че твърдението е вярно за всеки изпъкнал многоъгълник X, съдържащ L, такъв че броят на вътрешните страни на L спрямо X е n, $n \geq 0$. Нека $L \subset K$ и L има $n+1$ вътрешни страни спрямо K. Да продължим някоя от тях до пресичането ѝ с контура на K, както на чертежа. Правата UV отсича от K изпъкнал многоъгълник X, съдържащ L, като вътрешните страни на L спрямо X са n на брой. Съгласно с допускането, $P_L \leq P_X$. От неравенството на триъгълника следва, че $P_X < P_K$. Тогава $P_L \leq P_X < P_K$ – теоремата е доказана.



[7] Доказателството следва https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/PerimetersOfTwoConvexPolygons.shtml (активен януари 2018 г.)

МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ, 2017–2018

Любомир Любенов

Приключи есенният кръг на петото издание на турнира „Математика без граници“, организирано от Педагогическа асоциация „Образование без граници“ (България) и Научно – образователен център Innovation (Казахстан).

В него участваха почти 16 100 ученици от 21 страни (Австралия, Азербайджан, Афганистан, България, Венецуела, Виетнам, Иран, Казахстан, Киргистан, Македония, Малта, Мексико, Нигерия, Румъния, Русия, Словения, Туркменистан, Турция, Узбекистан, Швейцария, Филипините). За първи път в турнира участваха и ученици от Венецуела, Виетнам, Иран, Нигерия и Словения.

Състезанието се проведе върху 20 задачи за всеки от класовете от 2. до 8., и за групата 9. – 12. клас. Десет от задачите бяха с избираем отговор, а 10 – със свободен.

Всички участници получиха сертификат за участие, а победителите – 20 % от всички участници, съгласно регламента на турнира, получиха медали и сертификати към тях.

Петото издание се запомня не само с рекордния брой участници – 16 100 от 23 страни, но и със забележителното постижение на 10 годишния австралиец Леви Песин от Аделаида, който спечели златни медали за групата на 4 клас и на 9 клас. Повече за него разбрахме от публикации в медиите в Аделаида.

„Той е израснал с числа ... и много обичаше Судоку“ – казва майка му д-р Песина, цитирана от местния вестник.

За неговото израстване се грижи доцент Владимир Ежов, който твърди че Леви Песин само за две години ще завърши следването си по висша математика. „Аз съм много впечатлен от него – той има възможностите да направи много по математика и да бъде запомнен“, казва доц. Ежов.

Самият Леви е обучаван и от китайския математик Тао, който така го вдъхновява, че е част от мечтите му. „Искам да бъда като Тао и математика Григори (Перелман)“, казва той.

През 2018 г. Леви Песин ще дойде в България за финала на „Математика без граници“. Безспорно Леви ще има за световна математическа кариера, но пътят му ще мине през Несебър, където вероятно ще бъде новата звезда на турнира.

Ето и избрани задачи от есенния кръг.

Задачи за 4 клас

1. Намерете сбора на всички нечетни числа, по-големи от 1 и по-малки от 21.

A) 99 **B)** 101 **C)** 110

2. Колко са възможните цифри, които можем да поставим вместо @, така че четирицифреното число 20@0 да е по-малко от 2018?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3

3. При игра на криеница едно от децата търси останалите, които са се скрили. Броят на откритите деца е три пъти по-голям от броя на тези, които са останали скрити. Кое от посочените числа НЕ може да бъде броя на децата, които играят криеница?

A) 5 **B)** 22 **C)** 45

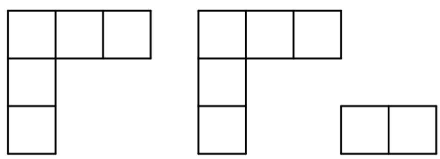
4. Разстоянието от до е с 2 дм по-голямо от разстоянието от до . Колко дециметра е разстоянието от до , ако разстоянието от до е 1 м?

A) 1 **B)** 4 **C)** 6

5. Четири катерички изяли общо 25 ореха, като всяка изяла поне един орех. Първата изяла повече от всяка от останалите, а втората и третата изяли общо 14 ореха. Колко ореха е изяла четвъртата катеричка?

A) 4 **B)** 5 **C)** 3

6. Фигурите на чертежа се състоят от квадратчета със страна 1 см. От тях е сглобен правоъгълник. Колко сантиметра е обиколката му?



A) 7 **B)** 10 **C)** 14

7. В кошница има ябълки. Техният брой е по-малък от 60. Тези ябълки може да разделим поравно между 2, 3 или 4 деца. Не може да ги разделим поравно между 7 деца, защото не достигат 6 ябълки. Колко може да са ябълките в кошницата?

8. От един клас 12 ученици са синеоки, 16 ученици са русокоси, 5 ученици са и синеоки, и русокоси, а 5 ученици не са нито синеоки, нито руси. Колко са учениците в този клас?

9. Записани са числата от 9 999 до 10 013. Кое е числото по средата?

10. След 8 години, Клеър ще бъде 3 пъти по-голяма, отколкото е сега. След колко години Клеър ще бъде на 20 години?

Задачи за 5 клас

1. Стойността на израза $2017 \times 4 - 201 \times 4 - 20 \times 4 - 7180$ е:

A) 0 **B)** 4 **C)** 8 **D)** друг отговор

2. В две кутии има общо 120 монети. От първата кутия били преместени във втората 10 монети. В резултат на това във втората кутия се оказали два пъти повече монети, отколкото в първата. Колко монети е имало първоначално в първата кутия?

A) 90 **B)** 80 **C)** 50 **D)** 40

3. Магическият квадрат е съставен от 9 последователни числа. Сборът на числата, скрити под емотиконите, може да е:

А) 8 **Б)** 9

В) 10 **Г)** 11

☺		
	5	
		☹

4. Четири катерички изяли общо 70 ореха, като всяка изяла поне един орех. Първата изяла повече от всяка от останалите, а втората и третата изяли общо 45 ореха.Колко ореха е изяла четвъртата катеричка?

A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 11

5. Известно е, че сборовете на всеки две от четири числа са 3, 5, 6, 8, 9 и 11. Колко е сборът на четирите числа?

6. В 27 кутии е разсипана сол по 3 кг, 4 кг или 5 кг, общо 84 кг сол. Колко са кутиите, в които има 4 кг или 5 кг сол?

7. В четвъртия финал на турнира „*Математика без граници*" участваха 1201 индивидуални участници на възраст от 8 до 19 години. Колко наймного са със сигурност участниците на една и съща възраст?

8. Три от неделите на един месец били четни числа от календара. Кой ден от седмицата е 20-ят ден от този месец?

9. Колко е сборът на цифрите на числото

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{2017} - 2017\ ?$$

10. Колко най-малко естествени числа от 1 до 100 включително трябва да избера, за да съм сигурен че сред тях има поне две, кратни на 3?

Задачи за 6 клас

1. Колко е сборът на целите числа, които може да поставим в квадратчетата, така че да са изпълнени неравенствата

$$\frac{1}{4} < \frac{\square}{12} \leqq \frac{1}{3} < \frac{\square}{12} < \frac{1}{2}?$$

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12

2. Кое е числото x, за което $\dfrac{11}{3} = 3 + \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

3. Пълен съд с вода тежи 3 кг, а ако са пълни $\dfrac{2}{7}$ от съда, той тежи 1 кг. Колко килограма тежи този съд, ако е празен?

A) 0,1 **B)** 0,2 **C)** 0,3 **D)** 0,4

4. Коя от посочените цифри не може да е цифра на единиците на триъгълно число?

A) 0 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7

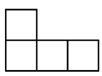
Упътване. Триъгълните числа са

$$1;\quad 3\ = 1+2 = \frac{2\times 3}{2};\ \ 6\ = 1+2+3 = \frac{3\times 4}{2};\ldots;1+2+\ldots+n = \frac{n\times(n+1)}{2}.$$

5. Алекс намалил с % числото 100 и получил 80. Клеър увеличила числото 80 с %. Кое число е получила Клеър?

6. Три от неделите на един месец били нечетни числа. В кой ден от седмицата е започнал този месец?

7. Ако p и q са прости числа, такива че $p + 17 \times q = 529$, да се пресметне $17 \times p + q$.

8. С колко най-малко фигури от вида  може да се сглоби квадрат?

9. При делението на две естествени числа се получава частно 20 и остатък 17. Кое е най-малкото възможно четирицифрено делимо?

10. Намерете цифрата на единиците на числото, което се получава след пресмятането на

$$\underbrace{7\times 17\times 2017\times 7\times 17\times 2017\times \ldots.\times 7\times 17\times 2017\times 7\times 17\times 2017}_{\text{2016 множителя}}.$$

Задачи за 7. клас

1. Кое от посочените числа НЕ е точен квадрат?

A) 196 **B)** 225 **C)** 10000 **D)** 100000

2. Сборът на ординатите на точките $A(-4;1)$, $B(2;y)$ и $(x;-3)$ е равен на сбора на абсцисите. Колко е $x-y$?

A) -2 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 2

3. Кое е естественото число N, за което най-големият общ делител на числата $2^4\times 3^2\times 5^N$ и $2^3\times 3\times 5^2$ е 120?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3

4. Най-голямото от естествените числа A, B, C и D е A. Ако $A+D=14$ и $B+\ C=23$, кое е числото A?

5. В 27 кутии от по 0,7 или по 0,9 литра има общо 20,5 литра сок. Колко са кутиите, в които има 0,7 литра сок?

6. Кое е двуцифрено число $\overline{ab}$, такова че $\overline{ab}=a+b^2$?

7. Победих в 6 от 17 мача, след което победих в още x мача. Колко е x, ако спечелените мачове са 45 % от всички изиграни?

8. Определете всички естествени числа x, за които сборът на цифрите на числото $10^x-\ 2017$ е 9.

9. Колко е броят на естествените числа от 1 до 101 включително, които се делят или на 3, или на 5, или на 7?

10. На дъската са записани числата 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12 и 36. Георги и Петър изтриват по четири числа. Остава едно число. Кое е то, ако сборът от изтритите от Георги числа е 3 пъти по-голям от сбора на изтритите от Петър числа?

Задачи за 8. клас

1. Нека $y=x^2-11x+29$. Тогава $(x-5)\times(x-4)\times(x-6)\times(x-7)$ е равно на:

A) y^2-y+1 **B)** y^2-1 **C)** y^2+y+1 **D)** y^2+1

2. Означаваме с $[N]$ най-голямото цяло число, което е не по-голямо от N, а $\{N\}=N-[N]$. Ако

$$X<0,\quad Y>0;\quad \{Y\}+[X]=-2{,}8\qquad \text{и}\qquad \{X\}+[Y]=3{,}1,$$

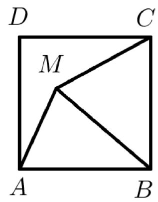
колко е $X-Y$?

A) 0,3 **B)** 6,1 **C)** 0,3 **D)** $-5{,}2$

3. Многоъгълник има повече от 120 диагонала. Тогава броят на страните му е най-малко:

A) 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20

4. Във вътрешността на квадрат $ABCD$ е взета точка така, че



$$\sphericalangle MAD : \sphericalangle MBA : \sphericalangle MCD = 2 : 4 : 7.$$

Мярката на $\sphericalangle BMC$ е:

A) 55° **B)** 45° **C)** 60° **D)** друг отговор

5. С цифрите 2, 3, 5 и 8 е съставено четирицифрено число, което се дели на $5^x \times 3^y$, където и yса естествени числа. Коя е най-голямата стойност на $x + y$?

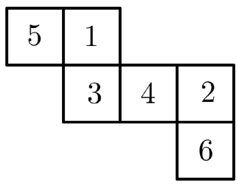
6. За целите числа x, y и z са изпълнени равенствата:

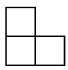
$$x \times y = -2; \quad y \times z = -6; \quad z \times x = 3.$$

Колко е $|x + y + z|$?

7. Колко най-много числа можем да изберем сред числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, така че сред тях да няма две числа, едното от които е два пъти по-голямо от другото?

8. Показаната фигура е развивка на куб, стените на който са номерирани с числата от 1 до 6. Колко е най-големия сбор на числата, записани върху три стени с общ връх?



9. С колко най-малко фигури от вида  може да се сглоби квадрат?

10. Ако естественото число x е по-голямо от 3, изразете чрез сбора на цифрите на числото равно на $10^x - 2017$.

Отговори

4. клас. 1. A; **2.** B; **3.** B; **4.** C; **5.** C; **6.** C; **7.** 36; **8.** 28; **9.** 10006; **10.** 16.
5. клас. 1. B; **2.** C; **3.** C; **4.** A; **5.** 14; **6.** 2; **7.** 101; **8.** Четвъртък; **9.**18 144; **10.** 69.
6. клас. 1. C; **2.** A; **3.** B; **4.** D; **5.** 96; **6.** петък/неделя; **7.** 65; **8.** 4; **9.** 1017; **10.** 1.
7. клас 1. D; **2.** C; **3.** B; **4.** 13; **5.** 19; **6.** 89; **7.** 3; **8.** 1 или 3; **9.** 55; **10.** 2.
8. клас. 1. B; **2.** B; **3.** B; **4.** A; **5.** 5; **6.** 2; **7.** 6; **8.** 14; **9.** 12; **10.** $9x - 9$.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2017 г. и бр. 1, 2 от 2018 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

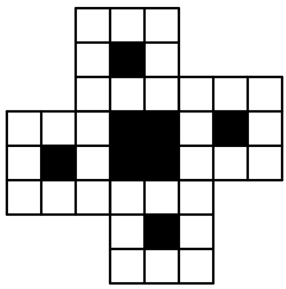
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. По колко различни начина белите квадратчета на фигурата могат да се покрият с 16 плочки домино?



Задача 2. В омагьосано езеро растат 20 лилии, подредени в редица и номерирани отляво надясно с числата от 1 до 20. На първата лилия има жабок. Той може да скочи на някоя от трите лилии вдясно и да продължи по същия начин: от лилия номер n на лилия номер $n+1$, $n+2$ или $n+3$. Жабокът знае, че има отрова на всяка лилия с номер просто число. По колко различни маршрута жабокът може да стигне до 20-тата лилия, като избегне отровните?

Задача 3. Отбелязах 12 сини точки, които са върхове на правилен дванадесетоъгълник. Един квадрат наричам *специален*, ако два или повече от върховете му са измежду сините точки. Колко са различните специални квадрати?

Срокът за представяне на решенията е 15.03.2017 г.

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 5/2017 г.

Задача 1. Аладин намерил 60 стари лампи, някои от които медни, а останалите – бронзови. Местният магьосник разменял 5 стари медни лампи за една нова бронзова лампа или 10 стари бронзови лампи за една нова медна лампа. Аладин започнал да разменя старите лампи за нови. Получените нови лампи, щом остарееели, участвали в следващите размени. Накрая при Аладин останала само една лампа и тя била вълшебната медна лампа. Колко медни лампи намерил Аладин?

Решение. При размяна на 5 стари медни лампи за една нова бронзова, броят на лампите намалява с 4, а при размяна на 10 стари бронзови за една нова медна лампа, броят на лампите намалява с 9. Общо лампите са намалели с $60 - 1 = 59$ и ако размените от първия вид са x, а от втория са y, получаваме

$$4x + 9y = 59.$$

Решенията на това диофантово уравнение са само $x = 8$ и $y = 3$ (проверете!). Това означава, че в процеса на размяната Аладин получил 3 нови медни лампи и предал $8.5 = 40$ медни лампи. Тъй като една е останала, в началото медните лампи са били $40 - 3 + 1 = 38$.

Задачата е решена от **Златимир Петров** (5. клас, ППМГ, Монтана), **Христо Георгиев** (5. клас, ППМГ, Стара Загора), **Тимон Трифонов** (5. клас, ППМГ, Враца), **Александър Мургин** (5. клас, ППМГ, Видин), **Александра Ветова** (6. клас, МГ, Плевен), **Любен Карбанов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Михаил Михов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Станислав Матев** (7. клас, МГ, Плевен), **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ).

Задача 2. Джак Фароу раздал на девет от своите пирати златни монети така, че всеки двама получили различен брой монети. Те започнали да спорят дали мометите са разпределени справедливо, на което Джак отговорил по следния начин: *Ако изхвърля когото и от вас зад борда, ще мога да раздам неговите монети на останалите така, че те да имат по равен брой монети. Това ли искате да направя?*

Мъдрите думи на капитана не вразумили пиратите и се наложило той да отправи по-сериозна заплаха: *Ако изхвърля произволни двама от вас зад борда, ще мога да раздам техните монети на останалите така, че те да имат по равен брой монети.*

Няма сведения как е завършила тази история, но ако приемем, че Джак Фароу е казвал истината, най-малко колко монети е раздал той? (Посочете примерно разпределение на монетите.)

Решение. Да означим броя монети на пиратите с

$$a < b < c < d < e < f < g < h < l.$$

Ако Джак отстрани пирата с a монети и изравни монетите на останалите, този с h монети ще получи поне една монета, следващият – поне две и т.н., този с b монети – поне 7 монети. Следователно

$$a \geqq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Оттук общият брой на монетите е поне

$$a + b + \cdots + h + l \geqq 28 + 29 + \cdots + 35 + 36 = 288.$$

От друга страна, броят на монетите се дели и на 8, и на 7, т.е. на НОК $(7; 8) = 56$. Най-малкото число след 288, което се дели на 56, е 336.

Пример с 336 монети може да се конструира, като например, се раздадат на пиратите съответно 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42 монети.

Задачата е решена от **Александър Мургин** (5. клас, ППМГ, Видин), **Александра Ветова** (6. клас, МГ, Плевен), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Станислав Матев** (7. клас, МГ, Плевен) **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ).

Задача 3. В турнир по футбол всеки отбор изиграл по един мач с всеки от останалите отбори. Оказало се, че в крайното класиране няма отбори с равен брой точки. Последният отбор в класирането спечелил поне 25% от своите срещи, а отборът на второ място спечелил не повече от 40% от изиграните мачове. Най-много колко отбора са участвали в турнира?

(При победа отборът получава 2 точки, при равен мач всеки отбор получава по една точка, а при загуба – 0 точки.)

Решение. Нека отборите са n на брой. Общо те са изиграли $\dfrac{n(n-1)}{2}$ мача и са раздадени по две точки на мач, т.е. общо $n(n-1)$ точки.

Последният в класирането е спечелил поне $25\%(n-1)$ мача, т.е. има поне $0,5(n-1)$ точки. Тогава предпоследният отбор има поне $0,5(n-1)+1$ точки и т.н., а първият има поне $0,5(n-1)+n-1$ точки. Общо получаваме поне

$$0,5n(n-1) + (1 + 2 + \cdots + n - 1) = (n-1)n$$

точки, а те са точно толкова. Това означава, че последният е спечелил точно $25\%(n-1)$ точки, а всеки следващ има с по една точка повече от предишния; в частност вторият в класирането е спечелил точно $0,5(n-1)+n-2$ точки.

Тъй като $25\%(n-1)$ е цяло число, то $n-1$ се дели на 4. Освен това отборът на второ място спечелил не повече от 40% от изиграните мачове, т.е.

$$0,5(n-1)+n-2 \leqq 2.40\%(n-1)+1.60\%(n-1).$$

Оттук получаваме $1,5n-2,5 \leqq 1,4n-1,4$, т.е. $n \leqq 11$. Следователно отбрите са най-много 9 и това е възможно, както показва примерът:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9	
1.	–	1	0	1	2	2	2	2	2	12
2.	1	–	1	1	1	1	2	2	2	11
3.	2	1	–	0	0	1	2	2	2	10
4.	1	1	2	–	0	1	0	2	2	9
5.	0	1	2	2	–	0	0	1	2	8
6.	0	1	1	1	2	–	0	0	2	7
7.	0	0	0	2	2	2	–	0	0	6
8.	0	0	0	0	1	2	2	–	0	5
9.	0	0	0	0	0	0	2	2	–	4

Задачата е решена от **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Станислав Матев** (7. клас, МГ, Плевен), **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ).

ГЛАВОБЛЪСКАНИЦА С ВЛАКОВЕ

Два влака имат по 15 еднакви вагони и се движат един срещу друг. Точно 28 секунди след срещата на първите им вагони, Емил, който пътувал във вагон номер 3 на единия влак, се изравнил със Сашо, който пътувал в гругия влак. След още 32 секунди последните вагони на влаковете напълно се разминали. В кой вагон е пътувал Сашо?

(Задачата е от темата за 11. клас на заключителния кръг на математическата олимпиада *Ломоносов*, 2011 г., но е подходяща за остроумни ученици от всякаква възраст, които знаят таблицата за умножение.)

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

Очакваме Вашите решения, най-хубавите от които ще публикуваме в брой 3/2018.

* * *

Задача 1. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са естествени числа с произведение P и n е нечетно число, докажете, че

$$\gcd(a_1^n + P, a_2^n + P, \ldots, a_n^n + P) \leqq 2\gcd(a_1, \ldots, a_n)^n.$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с ортоцентър H. Точката M е средата на страната BC, а P и Q са точки от окръжността с диаметър AH, различни от A, като M лежи на правата PQ. Докажете, че ортоцентърът на $\triangle APQ$ лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 3. Дадени са две различни естествени числа m и n. Фигура се движи по точките с целочислени координати в равнината, като от точка с координати (x, y) може да се премести в точка от вида $(x \pm m, y \pm n)$ или $(x \pm n, y \pm m)$. Определете за кои двойки $\{m, n\}$ фигурата може да се придвижи от точката $(0, 0)$ до $(1, 0)$ и за тези $\{m, n\}$ намерете най-малкия възможен брой ходове на фигурата от $(0, 0)$ до $(1, 0)$.

Срокът за представяне на решенията е 15.03.2018 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 5/2017 г.

Задача 1. Даден е вписан в окръжност шестоъгълник $ABCDEF$ и точките $P = AE \cap BD$, $Q = AC \cap FD$, $R = FB \cap EC$. Да се докаже, че точките $X = PQ \cap AD$, $Y = QR \cap FC$, $Z = PR \cap EB$ са колинеарни.

Решение на Кирил Бангачев. Задачата е еквивалентна на това да докажем, че триъгълниците XYZ и PQR са перспективни. Нека $AA \cap BB = A_1, BB \cap CC = B_1$ и т.н. От теорема на Паскал за изродения шестоъгълник $AAEBBD$ следва, че точките P, A_1 и X са колинеарни. Но теорема на Паскал за изродения шестоъгълник $EEABBD$ показва, че P, D_1 и X са колинеарни. Тогава правите PX и D_1A_1 съвпадат. Аналогичен резултат следва и за двойките прави RZ и B_1E_1, и за C_1F_1 и QY. Но от теорема на Брианшон за описания шестоъгълник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ следва, че правите $A1D_1 \equiv PX$, $B_1E_1 \equiv RZ$ и $C_1F_1 \equiv QY$ се пресичат в една точка. Следователно от теорема на Дезарг триъгълниците XYZ и PQR са перспективни, с което задачата е решена.

Решение на Кристиян Василев. Да означим окръжността с ω и $AD \cap BE = K$, $AD \cap CF = M$, $BE \cap CF = N$.

Ако точките P, Q, R лежат на една права, то на същата права ще лежат и точките X, Y, Z и задачата е решена.

Нека P, Q, R са върхове на неизроден триъгълник. Ако точките K, M, N съвпадат, от теорема на Брокар за $AEDB$ следва, че P лежи на полярата на точка K относно ω. Аналогично и точките Q и R лежат на тази поляра. Следователно P, Q, R са на една права, което не е този случай. Значи K, M, N са върхове на неизроден триъгълник и може да приложим теоремата на Дезарг за $\triangle KMN$ и $\triangle PQR$. Оттук следва, че задачата е еквивалентна на условието правите PK, QM, RN да се пресичат в една точка.

Ако $AB \cap DE = S$, $BC \cap EF = T$, $CD \cap FA = U$, от теорема на Паскал за шестоъгълника $ABCDEF$ следва, че S, T, U са колинеарни.

Да разгледаме полярно съответствие относно ω. Сведохме задачата до условието полюсите на PK, QM, RN да лежат на една права. От теорема на Брокар за четириъгълниците $AEDB$, $ACDF$ и $BCEF$ следва, че тези полюси са точно S, T, U и както видяхме, те лежат на една права. Така задачата е решена.

Решение на Калин Върбанов. Разглеждаме $\triangle DPQ$. В него изразяваме отношението

$$PX : XQ = S_{DAP} : S_{DAQ}.$$

По аналогичен начин определяме отношенията $RZ : ZP = S_{EBR} : S_{EBP}$ и $QY : YR = S_{FCQ} : S_{FCR}$.

От подобията $\triangle ADP \sim \triangle EBP$, $\triangle EBR \sim \triangle FCR$, $\triangle ADQ \sim \triangle FCQ$ и теоремата на Менелай следва, че

$$\frac{RZ \cdot PX \cdot QY}{ZP \cdot XQ \cdot YR} = \frac{S_{DAP} \cdot S_{EBR} \cdot S_{FCQ}}{S_{ADQ} \cdot S_{EBP} \cdot S_{FCR}} = \frac{AD^2}{EB^2} \cdot \frac{EB^2}{FC^2} \cdot \frac{FC^2}{AD^2} = 1,$$

значи X, Y и Z са колинеарни.

Задачата е решена и от **Валери Ванков** и **Евгени Кайряков**.

Задача 2. Нека с $\varphi(n)$ означаваме броя на числата, по-малки от n и взаимнопрости с n. Да се докаже, че съществува функция $f : N \to N$, за която за всяка двойка есетвени числа n и k, е изпълнено, че

$$\varphi(n)/f(k)(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{\varphi(n)}^k),$$

където естесвените числа $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$ са числата, по-малки от n и взаимнопрости с n.

Решение на Кирил Бангачев. Ще започнем със следната лема.

Лема. За всяко неотрицателно цяло число k съществува полином с рационални коефициенти P_k, такъв че $P_k(0) = 0$, $P_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ за всяко естествено n и $deg(P_k) = k + 1$.

Ще докажем лемата по индукция по k.

1) База $k = 0$. Имаме $P_0(x) = x$.

2) Допускаме, че твърдението е вярно за всяко неотрицателно цяло $k \leq t$.

3) Ще докажем твърдението за $k = t + 1$. Да разгледаме равенството

$$(1 + x)^{t+2} = \sum_{a=0}^{t+2} \binom{t+2}{a} x^a.$$

Като сумираме тези равенства за всяко $1 \leq x \leq n$, получаваме:

$$2^{t+2} + 3^{t+2} + \cdots + (n+1)^{t+2} = \sum_{a=0}^{t+2} \binom{t+2}{a} (1^a + 2^a + \cdots + n^a) =$$

$$= \sum_{a=0}^{t} \binom{t+2}{a} P_a(n) + (t+1)(1^{t+1} + 2^{t+1} + \cdots + n^{t+1}) + (1^{t+2} + 2^{t+2} + \cdots + n^{t+2}).$$

Изваждайки повтарящите се членове от двете страни получаваме:

$$(n+1)^{t+2} - 1 - \sum_{a=0}^{t} \binom{t+2}{a} P_a(n) = (t+1)(1^{t+1} + \cdots + n^{t+1}).$$

Очевидно твърдението на лемата следва, ако положим

$$P_{t+1}(n) = \frac{(n+1)^{t+2} - 1 - \sum_{a=0}^{t} \binom{t+2}{a} P_a(n)}{t+1}.$$

Да се върнем на задачата. Нека

$$P_k(x) = \sum_{a=1}^{k+1} \alpha_{k+1-a} x^a$$

(няма нулева степен заради вида на полинома). Ще докажем, че ако изберем $f(k)$ така, че $f(k)\alpha_i$ да е цяло за всяко $0 \le i \le k$, условието ще бъде изпълнено.

Нека каноничният запис на n е $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$. Ако $gcd(n, x) > 1$ за някое x, съществува просто число p, такова че $p/gcd(n, x)$. Имайки това предвид, ще смятаме по принципа на включването и изключването върху множеството от прости делители на $gcd(x, n)$. Но знаем, че сумата на k-тите степени, по-малки от n, които се делят на Q, където $Q/p_1p_2 \dots p_r$, е $(Q^k + (2Q)^k + \dots + (n)^k) = Q^k P_k(\frac{n}{Q})$. Сега по принципа на включването и изключването имаме

$$f(k)(a_1^k + a_2^k + \dots + a_{\varphi(n)}^k) = f(k)(\sum_{Q/p_1p_2...p_r} Q^k P_k(\frac{n}{Q})\mu(Q)) =$$

$$= f(k)(\sum_{Q/p_1p_2...p_r} (\sum_{a=1}^{k+1} \alpha_{k+1-a} n^a Q^{k-a} \mu(Q)) = A.$$

Лесно се вижда, че

$$\sum_{Q/p_1p_2...p_r} Q^x \mu(Q) = (1-p_1^x)(1-p_2^x)\dots(1-p_r^x). \text{ Тоест}$$

$$A = \sum_{a=1}^{k+1} f(k)\alpha_{k+1-a} n^a (1-p_1^{k-a})(1-p_2^{k-a})\dots(1-p_r^{k-a}).$$

Тъй като при $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ имаме $\varphi(n) = n(1-p_1^{-1})(1-p_2^{-1})\dots(1-p_r^{-1}) =$

$$= (p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_r^{\alpha_r-1}/(1-p_1^{a-1})(1-p_2^{a-1})\dots(1-p_r^{a-1})n,$$

а всички коефициенти в новополучения израз са цели, резултатът следва.

Забележка. Когато Q е свободно от квадрати, $\mu(Q) = 1$,ако Q има нечетен брой прости делители; иначе $\mu(Q) = -1$.

Задачата е решена и от **Валери Ванков** и **Кристиян Василев**.

Задача 3. Даден е прост (без двойни ребра и примки) граф G с n върха, в който всички върхове са с нечетна степен. Върховете са разделени на две множества A и B. Да се докаже, че четността на ребрата (a, b), за които $a \in A, b \in B$, зависи само от четността на $|A|.|B|$.

Решение на Кирил Бангачев. Първо ще отбележим, че от условието за нечетни степени следва, че върховете на G са четен брой. Тоест $|A| \equiv |B| \pmod 2$. Да добавим още един връх u и да го свържем със всички върхове от G. В новия граф G_1 всички върхове са от четна степен, което значи, че има Ойлеров цикъл. Нека добавим u към A и получим $G_1 = A_1 \cup B$. Но от съществуването на Ойлеров цикъл следва, че ребрата между A_1 и B са четен брой (колкото пъти влезем, толкова трябва и да излезем от A_1). Но тогава ребрата между A и B в G са с четността на B (махаме ребра с брой $|B|$ от G_1). Тоест ребрата между A и B са с четността на $|A|.|B|$.

Решение на Борислав Кирилов. Тъй като всеки връх на графа G е от нечетна степен, то $|G|$ е четно число. Следователно $|A|$ и $|B|$ са от една и съща четност, т.е. в условието на задачата можем да заместим $|A|.|B|$ с $|A|$. Да сумираме степените на върховете от A. Тъй като от всеки връх излизат нечетен брой ребра, то тази сума има четността на $|A|$. При това сумиране сме преброили всяко ребро с два върха от множеството A два пъти и по веднъж ребрата с по един връх в множествата A и B. Следователно тази сума има четността на броя на ребрата с по един връх в множествата A и B. Оттук следва, че четността на броя на тези ребра има четността на $|A|$, т.е. на $|A|.|B|$.

Задачата е решена и от **Валери Ванков**, **Калин Върбанов**, **Кристиян Василев** и **Евгени Кайряков**.

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Боянка Савова

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $(-2)^3 : 0,4 + 8.(-0.5)^2$ е равна на:

А) -21 **Б)** 22 **В)** -13 **Г)** -18

2. Числената стойност на израза $b^2 + 8b + 16 - 2b^2 (b + 3)$ за $b = -4$ е равна на:

А) -224 **Б)** 96 **В)** 32 **Г)** 0

3. Нормалният вид на многочлена $M = (2x-1)^3 - 3(x-2)^2 - 1,5(2x+6)^2$ е:

А) $8x^3 - 6x^2 - 43$ **Б)** $8x^3 - 21x^2 - 18x - 67$

В) $8x^3 - 15x^2 - 12x - 67$ **Г)** $4x^3 - 15x^2 - 6x - 43$

4. Уравнението $2x^2 = 1 - x(1 - 2x)$ е еквивалентно на:

А) $3x + 3 = 0$ **Б)** $\dfrac{x}{0,5} = 2$

В) $1 + x = 2 - 2x$ **Г)** $x^2 = 1$

5. В равностранния триъгълник ABC точките Mи N са средите съответно на страните AB и AC. Ако сборът на периметрите на AMN и на четириъгълника $BCNM$ е 56 cm, то дължината на страната BC е равна на:

А) 7 cm **Б)** 16 cm **В)** 14 cm **Г)** 21 cm

6. Кое от следните неравенства няма решение?

А) $4(x+2) - 3x > 2 - (1 - x)$ **Б)** $\dfrac{14 - x}{2} < 6 - x$

В) $(3x - 1)(3x + 1) > x(9x - 1)$ **Г)** $\dfrac{2 - x}{2} + 3 < x - \dfrac{6x + 4}{4}$

7. Дължините на страните на един разностранен триъгълник, измерени в сантиметри, са цели числа. Ако периметърът на триъгълника е 9 cm, то дължината на най-голямата му страна е:

А) 4 cm **Б)** 5 cm **В)** 6 cm **Г)** 7 cm

8. Изразът $x - 2y + 4y^2 - x^2$ е тъждествено равен на:

А) $(x-2y)(1+2y+x)$ **Б)** $(x-2y)(1-2y+x)$

В) $(2y-x)(2y+x+1)$ **Г)** $(x+2y-1)(2y-x)$

9. В правоъгълния триъгълник ABC е построена височината CH към хипотенузата AB ($H \in AB$). Ако $AC = 2CH$, то $AH : BH$ е равно на:

А) 4 : 1 **Б)** 3 : 2 **В)** 2 : 1 **Г)** 3 : 1

10. В един сборник по математика има два вида задачи: за доказателство и за изчисление. Задачите за доказателство са 35% от всички задачи в сборника и са с 258 по-малко от изчислителните. Колко задачи има в сборника?

А) 1000 **Б)** 860 **В)** 900 **Г)** 645

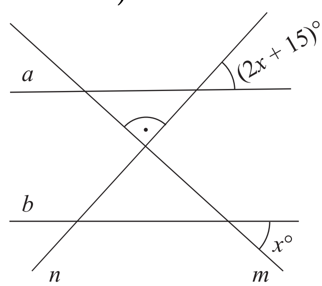
11. Точка M върху страната AC на $\triangle ABC$ е такава, че $MA = MB$ и $MC = BC$. Ако $\sphericalangle ACB = 20^\circ$, то $\sphericalangle CAB$ е равен на:

А) 30° **Б)** 40° **В)** 60° **Г)** 80°

12. На чертежа перпендикулярните прави m и n пресичат успоредните прави a и b. Числото x е равно на:

А) 30 **Б)** 55

В) 35 **Г)** 25



13. На колко градуса е равен ъгъл, който е 44% от съседния си ъгъл?

А) 55° **Б)** 36° **В)** 44° **Г)** 66°

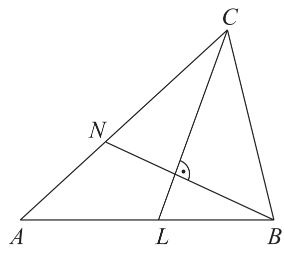
14. В $\triangle ABC$ медианата BN ($N \in AC$) и ъглополовящата CL ($L \in AB$) са взаимно перпендикулярни. Колко от следните твърдения ВИНАГИ са верни?

1) $AC = 2BC$; 2) $\sphericalangle BAC = 30^\circ$;

3) $BL = LN$; 4) $\triangle BCL \cong \triangle NCL$.

А) 1 **Б)** 2

В) 3 **Г)** 4



15. Цената на една стока била увеличена с 25%, а след намалението ѝ с x%, цената станала два пъти по-малка от първоначалната. Числото x е равно на:

А) 50 **Б)** 60 **В)** 75 **Г)** 80

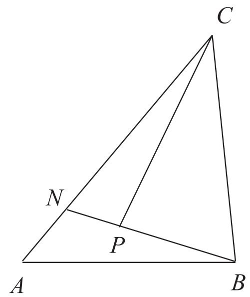
16. Една автобусна линия има 12 спирки. На първата спирка се качват в автобуса 15 пътници, а на всяка следваща, с изключение на последната, се качват n $(3 < n \leq 13)$ и слизат трима. На последната спирка слизат всички пътници, които са:

А) $10n + 45$ **Б)** $11n - 18$ **В)** $10n - 15$ **Г)** $12n - 21$

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Намерете сбора на всички цели отрицателни числа, които са решения на неравенството

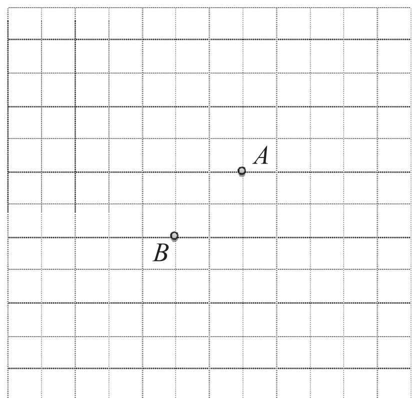
$$3x + \frac{2x-1}{(-0{,}2)} \leqq 47.$$



18. На чертежа точките N и P са съответно върху страната AC на $\triangle ABC$ и върху отсечката BN, като $\sphericalangle CBN = \sphericalangle ACP + \sphericalangle BNC$. Докажете, че $BC < AC$.

Попълнете пропуснатия текст в решението на задачата на местата, означени от (1) до (7).
$\sphericalangle BPC = \sphericalangle NCP + \sphericalangle PNC$, тъй като $\sphericalangle BPC$ е … (1) … ъгъл за $\triangle PCN$. $\sphericalangle NCP = \sphericalangle ACP$ и $\sphericalangle BNC = \sphericalangle PNC$, т.е. $\sphericalangle BPC = \sphericalangle CBM$ от което следва, че $\triangle BCP$ е … (2) … и $CP =$ … (3) … .
Тогава $\sphericalangle BPC <$ … (4) … $^\circ$ и $\sphericalangle NPC >$ … (5) … $^\circ$, (съседен ъгъл на $\sphericalangle BPC$). Следователно $\triangle NPC$ е … (6) … и $NC >$ … (7) … . Тъй като $NC < AC$, $CP < NC$ и $CP = BC$, то $BC < AC$.

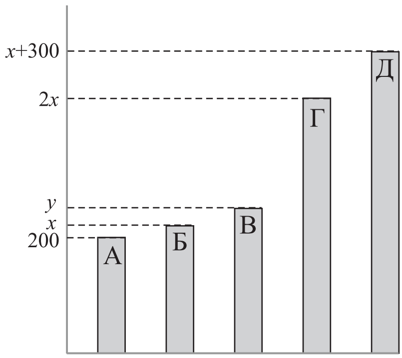
19. В квадратната мрежа са дадени точките A и B. Отбележете на чертежа точка C, която да е в някой от върховете на квадратчетата от мрежата и такава, че $\triangle ABC$ да е правоъгълен с катет AB и единият от катетите на $\triangle ABC$ да е два пъти по-голям от другия му катет. Намерете всички възможни решения на задачата и номерирайте построените точки – C_1, C_2 и т.н.

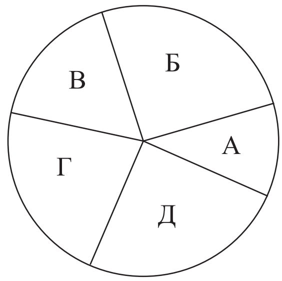


20. Най-малко колко грама злато трябва да се добавят към 32 грама сплав от злато и сребро, в която среброто е 47,5%, за да се получи нова сплав с поне 62% злато?

ВТОРИ МОДУЛ

21. В един магазин се продават столове произведени от 5 фирми: А, Б, В, Г и Д. Количествата столове от петте фирми, продадени за една година, са представени в две диаграми. Съпоставете дадените диаграми и намерете стойностите на x, y и z, като ъглите в кръговата диаграма за фирмите А, В и Д са съответно 40°, 60° и z°.





22. Влог от 10 000 лева при годишна лихва $p\%$ $(p > 0)$, за две години се увеличил с $401.p^2$ лева. Намерете числото p.

ЗАДАЧИ, ЗА КОИТО ТРЯБВА ДА СЕ ПРЕДСТАВЯТ ОБОСНОВАНИ РЕШЕНИЯ

23. Двама велосипедисти пътували с постоянни скорости по един и същ път от град A до град B. Първият тръгнал от A в 8 часа́ и изминал разстоянието до B за 4 ча́са. Вторият велосипедист тръгнал от град A половин час след първия и пристигнал в град B в 11 часа́.

а) Ако скоростта на първия велосипедист е била a km/h, изразете чрез a скоростта на втория велосипедист.

б) В колко часа́ вторият велосипедист е настигнал първия?

24. В равнобедрения триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 100^\circ$ е построена точка D върху лъча $BC^{\rightarrow}$ така, че $BD = AB$. Точката M е вътрешна за $\triangle ABC$, като $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Правите BM и AD се пресичат в точка P. Докажете, че:

а) точката C е вътрешна за отсечката BD;

б) $AP = DP$;

в) триъгълникът AMD е равностранен;

г) $\sphericalangle CMD = 10^\circ$.

Отговори и решения

1. Г; **2.** В; **3.** Б; **4.** Б; **5.** В; **6.** Г; **7.** А; **8.** Г; **9.** Г; **10.** Б; **11.** Б; **12.** Г; **13.** А; **14.** В; **15.** Б; **16.** В; **17.** -21. **18.** 1) външен; 2) равнобедрен; 3) CB; 4) 90; 5) 90; 6) тъпоъгълен; 7) CP. **19.** 8 решения. **20.** Поне 8 грама. **21.** $x = 250, y = 300, z = 110$. **22.** $p = 0,5$.

23. а) Първият велосипедист е изминал от град А до град В $4a$ километра. Тъй като вторият велосипедист е изминал същото разстояние за $2\frac{1}{2}$ ча́са, то неговата скорост е била $4a : \frac{5}{2} = \frac{8a}{5}$ km/h.

б) Да предположим, че за x ча́са вторият велосипедист е настигнал първия. До настигането двамата са изминали едно и също разстояние, т.е.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)a = x\cdot\frac{8a}{5} \Leftrightarrow ax+\frac{a}{2} = \frac{8ax}{5} \Leftrightarrow 10ax+5a = 16ax \Leftrightarrow 5a = 6ax \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$$

Следователно вторият велосипедист е настигнал първия за $\frac{5}{6}$ ча́са $= 50$ минути, т.е. в 9 ч. и 20 мин.

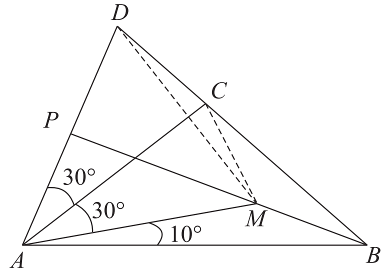
24. От условието следва, че в равнобедрения $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle ACB = 100^\circ$, $CA = CB$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$.

а) От неравенството за страни и ъгли в $\triangle ABC$ получаваме, че $AB > BC$ и тъй като $BD = AB$, то точка C е вътрешна за отсечката BD.

б) В равнобедрения $\triangle ABD$ с основа AD, отсечката BP е ъглополовяща. Следователно правата BP е симетрала на страната AD , т.е. $AP = DP$ и $BP \perp AD$.

в) От б) следва, че $MA = MD$ ($M \in S_{AD}$). Освен това $\sphericalangle AMP = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ$, защото $\sphericalangle AMP$ е външен ъгъл за $\triangle ABM$. В правоъгълния $\triangle AMP$ $\sphericalangle APM = 90^\circ$, $\sphericalangle AMP = 30^\circ$ и $\sphericalangle PAM = 60^\circ$. Получаваме, че $\triangle AMD$ е равнобедрен и $\sphericalangle MAD = 60^\circ$. Следователно $\triangle AMD$ е равностранен.

г) От а) следва, че в равнобедрения $\triangle ABD$ имаме $\sphericalangle ABD = 40^\circ$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Следователно $\sphericalangle MAC = \sphericalangle DAC = 30^\circ$ и тъй като във в) е доказано, че $\triangle ADM$ е равностранен, то лъчът $AC^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle MAD$, а правата AC е симетрала на страната DM. От $CM = CD$ ($C \in S_{DM}$) следва, че $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CMD$. Освен това, $\sphericalangle CDM = \sphericalangle BDA - \sphericalangle ADM = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$, с което е доказано, че $\sphericalangle CMD = 10^\circ$.



ЗАДАЧИ ЗА ДВИЖЕНИЕ

Иванка Зангочева

1. Движение един след друг

Задача 1. В 12 ч от хижа A по туристическа пътека към хижа B тръгнала Таня със скорост 6 км/ч, в 13 часа след нея тръгнал Оги със скорост 8 км/ч, а в 14 часа – Соня на велосипед. С каква скорост трябва да кара Соня, за да ги настигне точно тогава, когато Оги настигне Таня?

Решение. Оги е тръгнал 1 час по-късно от Таня, т.е. той се е движил 1 час по-малко от нея, а Соня – 2 часа по-малко от Таня.

Нека Таня е пътувала x часа до настигането. Имаме

	S	V	t
Таня	$6x$	6	x
Оги	$8(x-1)$	8	$x-1$

Оги и Таня се настигат, следователно те са изминали един и същ път:

$$6x = 8(x-1),$$

откъдето $x = 4$. Таня се е движила 4 часа и е изминала $6.4 = 24$ км. Соня се е движила 2 часа и е изминала 24 км. Нейната скорост е $24 : 2 = 12$ км/ч.

2. Движение един срещу друг

Задача 2. Иван се подготвя за състезание по колоездене и прави ежедневни тренировки.

А) Един ден за 5 часа Иван изминал 156 км, като първоначално се движил с 30 км/ч, а след това увеличил скоростта си с 3 км/ч. Колко време Иван се е движил със скорост 30 км/ч?

Б) На другия ден Иван решил да кара до град A, който се намира на 90 км от базата му, и да се върне. Той тръгнал в 8 часа, а един час по-късно от A към базата тръгнал друг колоездач със скорост, с 5 км/ч по-малка от скоростта на Иван. Двамата се срещнали в 11 часа. В колко часа Иван се е върнал в базата, ако е почивал 30 минути в град А?

Решение. А) Означаваме с x времето, през което Иван се е движил със скорост 30 км/ч.

	S	V	t
S_1	$30x$	30	x
S_2	$33(5-x)$	$30+3=33$	$5-x$

Общо изминатият път за деня е 156 км. Имаме

$$30x + 33(5-x) = 156,$$

откъдето намираме $x = 3$ ча̀са.

Б) Двамата колоездачи се срещнали в 11 часа, т.е. Иван е пътувал $11 - 8 = 3$ часа до срещата, а другият колоездач – 2 часа. Нека скоростта на Иван е x км/ч.

До срещата	S	V	t
Иван	$3x$	x	3
колоездач	$2(x-5)$	$(x-5)$	2

Сборът от пътищата им до срещата е 90 км, т.е.

$$3x + 2(x-5) = 90.$$

Оттук намираме $x = 20$ км/ч. Иван е изминал $3.20 = 60$ км до срещата.

На отиване и връщане Иван изминава $2.90 = 180$ км със скорост 20 км/ч. Той пътува $\dfrac{180}{20} = 9$ часа. Тръгнал е в 8 часа̀, 9 часа е пътувал и 30 минути е почивал, следователно се върнал в базата 17:30 часа̀.

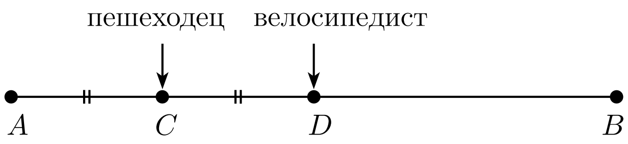
Задача 3. В 10 часа от А и В тръгват един срещу друг пешеходец и велосипедист. След 1 час пешеходецът е по средата между велосипедиста и А, а след още 1 час и двамата са на равни разстояния от А.

А) Колко пъти велосипедистът е по-бърз от пешеходеца?

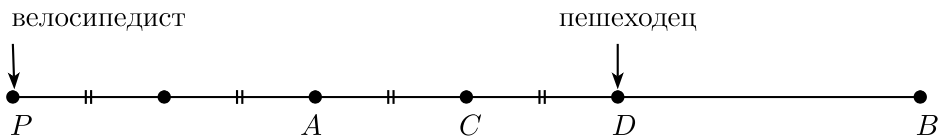
Б) В колко часа велосипедистът е преминал през А?

В) В колко часа са се срещнали?

Решение. А) Да използваме отсечки, за да начертаем местоположението на пешеходеца (C) и велосипедистта (D) един час след тръгването. Имаме $AC = CD$.



След още един час, пешеходецът е изминал разстоянието CD, а велосипедистът DP, като $AP = AD$.



Следователно $DP = 4CD$, т.е. за един час велосипедистът изминава 4 пъти по-дълъг път. Това означава, че скоростта на велосипедиста е 4 пъти по-голяма от скоростта на пешеходеца.

Б) За един час велосипедистът изминава $DP = 2DA$, а разстоянието DA – за 30 мин. Той е бил в A в 11:30 часа.

В) За 1 час пешеходецът изминава x km, а велосипедистът $4x$ km. Общо те изминават $5x$ km за 1 час. В 11 часа дистанцията между тях е $CD = x$ km, които те заедно ще изминат за $\frac{1}{5}$ часа, т.е. за 12 мин. Срещата им е в 11:12 часа.

3. Движение отиване – връщане

Задача 4. От град А към град В тръгнал пешеходец със скорост 5 км/ч, а 15 минути по-късно от В към А тръгнал велосипедист със скорост 20 км/ч. Велосипедистът срещнал пешеходеца, пристигнал в А и след 9 минути престой тръгнал обратно към В, като настигнал пешеходеца на 4 км преди В. Намерете на колко километра от А е станала срещата.

Решение. Нека разстоянието от А до В е x km. От тръгването си до настигането на пешеходеца на 4 км преди В, велосипедистът изминал $(2x - 4)$ km. Пешеходецът изминал $(x - 4)$ km.

До настигането	S	V	t
Пешеходец	$x - 4$	5	$\frac{x-4}{5}$
Велосипедист	$2x - 4$	20	$\frac{x-4}{20}$

От тръгването си до настигането, пешеходецът се движил $15 + 9 = 24$ минути, т.е. $\frac{2}{5}$ часа повече от велосипедиста:

$$\frac{2x-4}{20} + \frac{2}{5} = \frac{x-4}{5}.$$

Оттук намираме $x = 10$ km.

Ако пешеходецът е изминал y km до срещата с велосипедиста, велосипедистът е изминал $(10 - y)$ km.

До срещата	S	V	t
Пешеходец	y	5	$\frac{y}{5}$
Велосипедист	$10 - y$	20	$\frac{10-y}{20}$

От тръгването си до срещата, пешеходецът се движил 15 минути, т.е. $\frac{1}{4}$ часа повече от велосипедиста. Имаме

$$\frac{10-y}{20} + \frac{1}{4} = \frac{y}{5},$$

откъдето намираме $y = 3$ km. Срещата е била на 3 km от А.

4. Движение по въздух и вода

Задача 5. Разстоянието между две речни пристанища А и В е 240 км. От пристанище В срещу течението тръгнал катер, а един час след него от пристанище А по течението тръгнала моторна лодка. Двете превозни средства се срещнали 4 часа след тръгването на лодката. Скоростта на течението на реката е 3 км/ч. Да се намерят скоростите на лодката и катера в спокойна вода, ако те са равни.

Решение. Да означим $V_к = V_л = x$ км/ч и да разгледаме движението от тръгването на катера до срещата с лодката.

	S	V	t
лодка по течението	$4(x+3)$	$x+3$	4
катер срещу течението	$5(x-3)$	$x-3$	5

До срещата те изминали общо 240 км, т.е.

$$4(x+3) + 5(x-3) = 240.$$

Оттук $x = 27$ км/ч.

Задача 6. Катер се движи срещу течението по една голяма река. Точно в 9 часа от катера спуснали сал. В 9:20 часа катерът обърнал посоката на движение и тръгнал по течението на реката. Приблизително в колко часа катерът е настигнал сала, ако скоростта на катера в спокойна вода е 24 км/ч, а скоростта на течението е 3 км/ч?

Решение. Салът се движи със скоростта на течението $V_c = 3$ км/ч.

Катерът се движи по течението със скорост $24 + 3 = 27$ км/ч, а срещу течението с $24 - 3 = 21$ км/ч. За 20 минути срещу течението той изминал $21.\frac{1}{3} = 7$ км. За това време салът изминал $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ км. Така разстоянието между катера и сала в 9:20 е равно на $7 + 1 = 8$ км.

Нека от 9:20 до настигането са изминали x часа.

По течението	S	V	t
Сал	$3x$	3	x
Катер	$27x$	27	x

От обръщането до настигането на сала, катерът е изминал 8 км повече от сала, т.е.

$$27x = 3x + 8.$$

Оттук намираме $x = \frac{1}{3}$ часа, т.е. 20 мин. Това означава, че в 9:40 часа катерът е настигнал сала.

Задача за самостоятелна работа

Задача 7. Тошо и Гошо живеят в един и същи блок и учат в съседното училище. Тошо изминава половината от пътя до училището със скорост 5км/ч, а другата половина – със скорост 4 км/ч. Гошо се движи половината от времето със скорост 5км/ч, а другата половина – със скорост 4км/ч. Ако единият от тях се е движил 3 секунди повече от другия, намерете разстоянието от блока до училището.

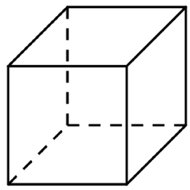
Отговор. 300 метра.

ДА ПОИГРАЕМ С КУБЧЕТА В КУХНЯТА

ЕМИЛ КАРЛОВ

„Кухнята е най-хубавата стая.“
Пл. Сидеров

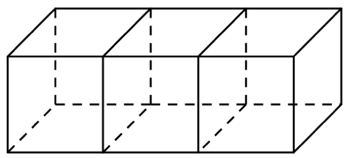
Кухнята в апартамента ни е куб (черт. 1) с четири стени, под и таван (общо 6 стени), четири ъгъла на пода и четири ъгъла на тавана (общо 8 върха), четири ръба на пода, четири ръба на тавана и четири ръба в ъглите от тавана до пода (общо 12 ръба).



Черт. 1

Не е нужно на дете, което е играло с дървени кубчета, хвърляло е зарчета в играта „Не се сърди човече“ и знае да реди кубче на Рубик, да се обяснява що е куб, затова нека решим няколко интересни задачи, в които има много кубчета.

Задача 1. Куб $3\times3\times3$ е разделен на 27 единични кубчета $1\times1\times1$. Оцветете всяко от кубчетата в един от цветовете син, червен и жълт така, че трите кубчета от всяка „греда“ (черт. 2) да са оцветени в трите цвята: син, червен и жълт.



Черт. 2

Решение. Ще покажем оцветяване на кубчето “по етажи“.

с	ч	ж
ч	ж	с
ж	с	ч

1етаж

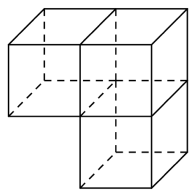
ч	ж	с
ж	с	ч
с	ч	ж

2 етаж

ж	с	ч
с	ч	ж
ч	ж	с

3 етаж

Задача 2. Дадени са 9 елемента, всеки от които е от три слепени под прав ъгъл единични кубчета (черт. 3). Можете ли от тях да се сглоби куб $3 \times 3 \times 3$?



Черт. 3

Решение. Номерираме дадените 9 елементи с числата от 1 до 9. Отново показваме тяхното разположение в куба по етажи.

1	1	3
1	2	4
2	2	5

1 етаж

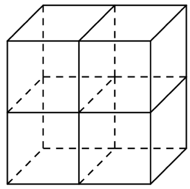
6	3	3
7	4	4
7	5	5

2 етаж

6	8	8
6	8	9
7	9	9

3 етаж

Задача 3. Разполагате с празна кутия без капак от кубче на Рубик с размери $3\times3\times3$ см. Може ли в кутията да се поместят шест „тухли четворки“ $1 \times 1 \times 4$ см (черт. 4.)?



Черт. 4

Решение. Номерираме „тухлите“ с числата от 1 до 6 и ще покажем тяхното разположение по „етажи“.

1	1	3
1	1	3
	2	2

1 етаж

4	4	3
5		3
5	2	2

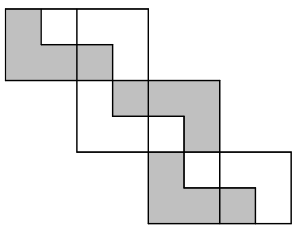
2 етаж

4	4	
5	6	6
5	6	6

3 етаж

Задача 4. Може ли цялата повърхнина на куб да се покрие с шест еднакви шестоъгълника, които не се припокриват?

Решение. Представете си, че кубът е направен от картон, разрязали сме го по някои от ръбовете, след което сме го разгърнали в равнината (черт. 5).

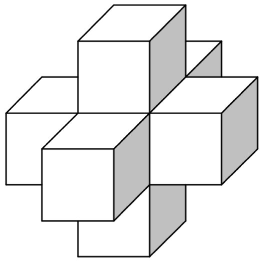


Черт. 5

Всеки две квадратчета в трите реда могат да се разрежат на два еднакви шестоъгълника по показания начин.

Задача 5. Всички стени на куба са квадрати. Има ли тяло, различно от куб, на което всички стени също са квадрати?

Решение. Многостенът на черт. 6 отговаря на условието на задачата. Той е сглобен от три „греди“ от три единични кубчета.



Черт. 6

Задача 6. Жилищен блок във формата на куб $3 \times 3 \times 3$ има 27 апартаменти – единични кубчета $1 \times 1 \times 1$. Апартаментите са разположени на три етажа с по девет апартамента на етаж. Всеки апартамент включва парното си (и не го изключва повече), ако поне два от съседните му по стена апартаменти са включили парното си предния ден. Възможно ли е да включим парното в 5 апартамента така, че след няколко дни всички апартаменти в блока да се отопляват?

Решение. Петте апартамента, в които включваме парното, означаваме с буква О. Отново по етажи означаваме с цифра 1 апартаментите, които ще се включат на първия ден, с цифра 2 апартаментите, които ще се включат на втория ден и т.н.

О	1	2
1	О	1
2	1	О

1 етаж

1	2	3
О	1	2
1	2	3

2 етаж

2	3	4
1	2	3
О	3	4

3 етаж

На четвъртия ден парното ще работи във всички апартаменти.

Задача 7. Купих кутия с бучки захар. Всяка бучка е единично кубче $1 \times 1 \times 1$. Първия ден децата изядоха всички бучки от най-горния етаж на кутията и това бяха 77 единични кубчета. На втория ден децата изядоха всички бучки от най-задната стена в кутията и това бяха 55 единични кубчета. На третия ден децата изядоха всички бучки от крайната дясна стена на кутията. Колко единични кубчета захар са изяли децата на третия ден?

Решение. Трябва да определим размерите на кутията, в която са сложени бучките захар.

Дъното на кутията има размер 7×11, защото бучките от най-горния етаж (който има размерите на дъното на кутията) са 77.

Задната стена на кутията има размер 6×11, защото при един ред изядени захарни кубчета остават 55 бучки захар.

Следователно дясната стена на кутията има размер 6×7, но два реда от този правоъгълник са изядени първия и втория ден, така остават $5.6 = 30$ бучки захар за третия ден.

Задача 8. Жилищен блок във формата на куб $4 \times 4 \times 4$ см е разделен на 64 апартамента, които са единични кубчета $1 \times 1 \times 1$ см. На всеки етаж апартаментите са означени като на шахматна дъска: стълбовете с буквите A, B, C и D, а редовете с числата 1, 2, 3 и 4. На четвъртия етаж в апартамент B3 има болен от грип. На следващия ден съседите от във всеки съседен на B3 по стена апартамент се разболяват. В колко апартамента ще има болни от грип след четири дни?

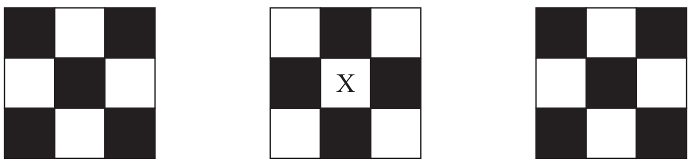
Решение. След четвъртия ден на четвъртия етаж само апартамент D1 остава незасегнат от грипа. На третия етаж остават незасегнати апартаментите A1, C1, D1, D2, D4.

След четвъртия ден на втория етаж боледуват апартаментите A3 B2, B3, B4 и C3, а на първия етаж са болни само в един апартамент B3.

Така общия брой апартаменти, в които има грип след четвъртия ден, е 32 апартамента (половината от апартаментите в целия блок).

Задача 9. Куб с ръб 3 см е разделен на 27 единични кубчета и централното му кубче е отстранено. Могат ли останалите 26 кубчета да се обходят последователно без повторение, като преминаваме от кубче в кубче само, ако двете кубчета имат обща стена?

Решение. Оцветяваме шахматно единичните кубчета в куба. Ето оцветяването по етажи.



1етаж 2 етаж 3 етаж

Да допуснем, че сме обходили всичките 26 единични кубчета. По пътя след бяло кубче следва черно, след което бяло и т.н. Белите и черните кубчета се редуват и тъй като са общо 26, трябва да има 13 черни и 13 бели кубчета.

Но оцветяването показва, че белите кубчета са 12, а черните кубчета са 14 (проверете!). Следователно обхождането им е невъзможно.

Задача 10. Боядисан в червено голям дървен куб е нарязан на единични кубчета $1 \times 1 \times 1$ см. Намерете дължината на ръба на куба, ако броят на кубчетата с една червена стена е равен на броя на неоцветените кубчетата.

Отговор. Кубът е с ръб 8 см. На всяка негова стена има по $6.6 = 36$ кубчета с една оцветена стена, т.е. те са общо $6.36 = 216$. Неоцветените (вътрешни) кубчета образуват куб $6 \times 6 \times 6$ и са $6.6.6 = 216$.

Задача 11. Планета във формата на куб е населена от шест държави, като на всяка стена има по една държава. Всяка държава си има цар и този цар или винаги лъже, или винаги казва истината. Един ден и шестимата царе заявили: „,Повечето от съседите ни са лъжци“. Колко царе от планетата казват истината и колко царе лъжат?

Отговор. Царете от „пода“ и „тавана“ на куба говорят истината, а царете по четирите стени на куба лъжат.

Задача 12. От 64 единични кубчета $1 \times 1 \times 1$ см трябва да слепим куб с ръб 4 см. Две стени на единични кубчета слепваме, като капнем капчица лепило. Колко капки лепило са ни нужни, за да получим големия куб?

Решение. Кубчетата имат общо $64.6 = 384$ стени. От тези стени точно $16.6 = 96$ са по повърхността на куба с ръб 4 см. Слепените стени са $384 - 96 = 288$. Тъй като за слепването на две стени е нужна една капчица лепило, са нужни $288 : 2 = 144$ капки лепило.

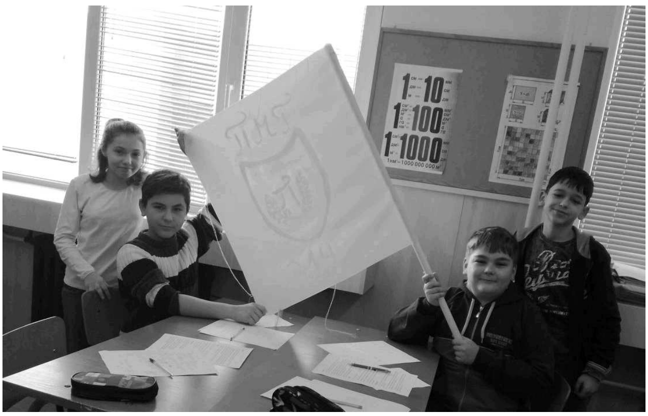
КОЛЕДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ КВАДРАТ

Милена Аврамова

Последният ден преди Коледната ваканция беше особено оживен и в ПМГ „Иван Вазов“, Добрич. Математическата компонента на това оживление беше състезанието *Математически квадрат*, което заедно с Жанета Нейчева проведохме в часовете по математика на 5., 6. и 7. клас[8].

Учениците се разделиха на отбори и получиха по три задачи от три теми. Всеки отбор записваше получените отговори в квадратна таблица 3×3, чиито стълбове съответстваха на темите. Верният отговор на задача от първия ред носеше една точка, от втория ред – две точки, а от третия ред – три точки. Точките на всеки отбор (но не и отговорите!) се записваха в отделна таблица на дъската, а всяка линия от верни отговори (ред, стълб или диагонал) носеше премия в размер една трета от сбора на точките по тази линия.

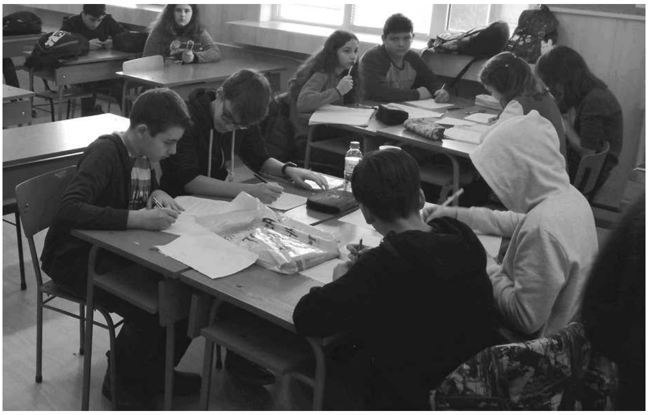
Предизвикателството на отборната игра ентусиазира децата. Изборът на задачи се оказа подходящ за учениците и всеки решаваше задачи според вкуса и уменията си. В оспорвана, но честна битка бяха излъчени победителите от всеки клас.



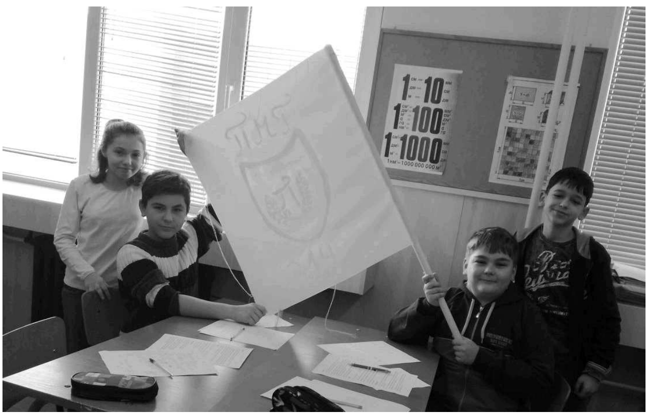
Победителите от 5. клас: Преслав, Мартин, Никола и Михаела

[8]За едноименното състезание от летния лагер в Пампорово разказахме в бр. 5/2017 г. – бел. ред.

Победителите от 6. клас: Теодор, Добромир, Емил и Илиан



На преден план е отборът на победителите в 7а клас: Божидар, Делян, Александър и Димитър



Победителите от 7б клас: Дарина, Селин, Живко и Християна

Предлагаме Ви задачите от състезанието и техните отговори.

Задачи за 5. клас

Тема 1. Делимост

Задача 1. Нека A е най-малкото число със сбор на цифрите 30, а B е най-малкото число с произведение на цифрите 1080. Намерете разликата на A и B.

Задача 2. За предстоящия бал децата от три класа приготвили комплекти от лакомства, като всеки комплект съдържал един и същ брой лакомства. Децата от първия клас направили и комплектовали 693 ореховки, от втория клас – 756 меденки, а от третия клас – 784 масленки. Всеки присъстващ на бала получил по един комплект лакомства (ореховки, меденки или масленки) и така комплектите свършили. Като знаете, че броят на сладките в комплект е възможно най-големият, намерете колко са всички присъстващи на бала.

Задача 3. Намерете най-голямото петцифрено число, кратно на 9, ако първата му цифра е 3 и всички цифри са различни.

Тема 2. Дроби

Задача 1. Пресметнете дробта $\left[\frac{1}{5}.\left(\frac{15}{33}+\frac{35}{49}\right)-\frac{5}{77}\right]:\frac{13}{77}$

Задача 2. Учител по математика съставил тест, в който $\frac{3}{5}$ от въпросите са с избираем отговор, $\frac{2}{7}$ от въпросите са с отворен отговор и 4 въпроса, на които трябва да се опише решението. Колко въпроса е имало в теста?

Задача 3. Дадени са квадрат с лице 81 cm^2 и правоъгълник с дължина и широчина, съответно равни на $\frac{5}{6}$ и $\frac{16}{27}$ от страната на квадрата. Намерете обиколката и лицето на правоъгълника.

Тема 3. Текстови задачи

Задача 1. На състезание един отбор завоювал 96 медала. Златните и сребърните медали били общо 61. Златните и бронзовите медали – общо 65. Колко били златните медали?

Задача 2. Една краставица тежи колкото четири домата. Два домата и краставица тежат колкото три патладжана. Един пъпеш и краставицата тежат колкото пет патладжана. Колко домата тежат колкото пъпеша?

Задача 3. В една кофа има 10 литра мляко. Баба Цоцолана има още една празна кофа и кана от 1 литър. Колко пъти тя трябва да прелее мляко с каната, за да отмери на бай Слави 8 литра?

Задачи за 6. клас

Тема 1. Рационални числа

Задача 1. Пресметнете стойността на израза

$$\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(-1\frac{2}{9}\right).$$

Задача 2. Намерете сбора на реципрочното число на сбора $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ и абсолютната стойност на разликата $-(1,2-2,3)-3,4$.

Задача 3. Всеки час числото 5,44 се умножава по (-5). Кое число се получава след 3 часа?

Тема 2. Геометрия

Задача 1. Равностранен триъгълник има обиколка 126 mm. Външно върху трите му страни са построени съответно правилен петоъгълник, правилен шестоъгълник и правилен десетоъгълник. Намерете обиколката на получената фигура.

Задача 2. Две окръжности имат общ център, а образуваният кръгов венец има лице 88 cm^2. Намерете радиуса на по-малката окръжност, ако той е 75% от радиуса на голямата.

Задача 3. Две еднакви правилни триъгълни пирамиди са долепени в основите си. Основният ръб на пирамидите е 4,5 dm, а апотемата на пирамидите е с 20% по-дълга от основния ръб. Намерете повърхнината на полученото тяло.

Тема 3. Текстови задачи

Задача 1. Средната възраст на тримата най-големи братя в едно семейство е 15 години, а на двамата най-малки братя е 10 години. Каква е средната възраст на петимата братя?

Задача 2. В съд има 26 литра вода, а в друг има 7 литра вода. Към всеки съд долели едно и също количество вода, след което се оказало, че в единия има три пъти повече вода. По колко литра вода са долели във всеки съд?

Задача 3. Автомобил изминал разстояние от 200 km, като първите 120 km се движил със скорост 80 km/h, а останалите 80 km се движил със скорост 120 km/h. Приблизително с каква средна скорост е изминато цялото разстояние?

Задачи за 7. клас

Тема 1. Алгебра

Задача 1. Намерете сбора от корените на уравнението $(2-1)^2-9=0$.

Задача 2. Намерете произведението от корените на уравнението $||+5=5(+2)$.

Задача 3. Намерете стойността на израза B$=(3-2)^3-3\,(3+1)\,(3-1)-(+3)(-2)$, ако x$=\dfrac{37^2-35^2}{20^2-16^2}$.

Тема 2. Геометрия

Задача 1. В триъгълник ABC $\alpha:\beta:\gamma=5:6:7$ и L е ъглополовяща. Ако $LQ||AB(Q\in AC)$, намерете ъглите на триъгълник ALQ.

Задача 2. Намерете мярката на ъгъл, който е 7 пъти по-голям от сбора на двата си съседни ъгъла.

Задача 3. В $\triangle$ ъглополовящите на $\sphericalangle$ и $\sphericalangle$ се пресичат в точка . Ако $\sphericalangle=\sphericalangle+30^\circ$, намерете големината на $\sphericalangle$.

Тема 3. Текстови задачи (вж тема 3. за 6. клас)

Отговори

5. клас	Тема 1	Тема 2	Тема 3
Задача 1	410	1	30
Задача 2	319	35	6
Задача 3	39870	$P=25\frac{2}{3}$, $S=40$	2
6. клас	Тема 1	Тема 2	Тема 3
Задача 1	1	756 мм	13
Задача 2	$3\frac{31}{70}$	6 см	2,5
Задача 3	-680	72,9 кв.дм	$92\frac{4}{13}$
7. клас	Тема 1	Тема 2	
Задача 1	1	25°, 25°, 130°	
Задача 2	-100	168°	
Задача 3	-19	120°	

за по-малките  задачи

4. клас

1. Ели дала половината от бонбоните си и още 5 бонбона на сестра си. След това Бонбонената фея удвоила броя на останалите бонбони. Ели изяла 6 бонбона и половината от останалите. Последните два бонбона дала на сестра си. Колко бонбона имала Ели отначало?

2. Десет ученици получили петици и шестици на тест. Общият сбор на получените оценки е 53. Колко от учениците са получили шестици?

3. От 101 далматинци 60 имат черно петно на лявото ухо, 50 имат черно петно на дясното ухо, а 20 имат бели уши. Колко от кучетата имат черни петна и на двете си уши?

4. В книгата на професор Дъмбълдор са номерирани всички нечетни страници: $1, 3, 5, \ldots$ За номерация са използвани 128 цифри. Коя е последната номерирана страница? Колко страници има книгата?

5. клас

5. Квадрат и правоъгълник имат равни лица. Обиколката на квадрата е 2,4 дм. Дължината на квадрата е с 3 см по-голяма от страната на квадрата. Намерете широчината на правоъгълника и неговата обиколка.

6. Турист изминал маршрут от 30 км за три дни. Първия ден изминал 32% от маршрута си, а през втория ден – 45% от оставалия път. Колко километра е изминал туристът през третия ден?

7. От 20 далматинци 9 имат черно петно на лявото ухо, 12 имат черно петно на дясното ухо, а 3 имат бели уши. Колко процента от далматинците имат черни петна и на двете си уши?

8. Двама братя спестили 56 лв. Колко лева има всеки от тях, ако $\frac{1}{3}$ от парите на по-големия са колкото $\frac{1}{4}$ от парите на по-малкия?

6. клас

9. Конус от сладолед има радиус 2 cm и височина 8 cm. Колко е радиусът на сладоледено кълбо със същия обем?

10. Намерете апотемата на правилна четириъгълна пирамида с височина 3 cm, лице на околната повърхнина 80 cm^2 и обем 64 cm^3.

11. Ако $3,2 + x = -\dfrac{3}{2}$, а $(2 - y) : |-10| = x$, пресметнете $x + y$.

12. Сборът на целите числа, по-големи от -10 и по-малки от 5, е равен на сбора на целите числа, по-големи от -19 и по-малки от X. Намерете X.

7. клас

13. За коя стойност на параметъра a коефициентите пред x и x^2 в нормалния вид на многочлена

$$(2x + a)(x - 3) - (x - 2)^3$$

са равни?

14. Даден е триъгълникът ABC, в който $\sphericalangle C = 60^\circ$. Ъглополовящите AD и BE се пресичат в точката I. Точката F от страната AB е такава, че $BD = BF$.

а) Намерете $\sphericalangle AIB$.

б) Докажете, че $\triangle BDI \cong \triangle BFI$ и намерете $\sphericalangle AIF$.

в) Докажете, че $\triangle AEI \cong \triangle AFI$ и $AE + BD = AB$.

15. Ученик планира да реши определен брой задачи, като 10 дни решава по x задачи на ден. Два дни той решавал планираните задачи, след което започнал да решава с по 2 задачи на ден повече от предвиденото. Затова решил всички задачи един ден по-рано от поставения срок. Намерете x и определете общо колко задачи е решил ученикът.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по . . .

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 07.02.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.