

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

6

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Чл.-кор. проф. дмн Петър Бойваленков – главен редактор

НЕВЕНА СЪБЕВА – зам. главен редактор

Чл.-кор. проф. дмн Генчо СКОРДЕВ

Чл.-кор. проф. дмн Николай НИКОЛОВ

Проф. дмн Емил КОЛЕВ

Проф. д-р Иван ТОНОВ

Проф. д-р Станислав ХАРИЗАНОВ

Доц. д-р ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА

Доц. д-р ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

Емил КАРЛОВ

ТАТЯНА ПАРХОМЕНКО – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Стартира абонаментната кампания на списание „Математика“ за 2025 година. И през следващата година списанието ще се стреми да запази своята актуалност, събирайки на страниците си всичко в областта на училищната математика, което представлява съществен интерес за ученици, преподаватели, родители и любители.

Списанието се фокусира върху:

- подготовката на учениците от 4. – 12. клас за участие в математически състезания;
- подготовката на учениците от 4. клас за приемни изпити;
- подготовката на учениците от 7. и 10. клас за Национално външно оценяване;
- подготовката на учениците от 12. клас за матура и кандидат-студентски изпити.

Списанието публикува информация (задачи, решения, победители) за най-важните национални и международни математически състезания.

Цената на годишния абонамент е 36,00 лв. Възможни са следните отстъпки при групов абонамент:

- За 15 абонамента цената е $15 \times 28 = 420$ лв.
- За $15 + N$ абонамента цената е $420 + N \times 24$ лв., т.е. за всеки абонамент над 15-ия плащате по 24 лв.
- Извън горните бройки можете да абонирате членове на Съюза на математиците в България на цена 25 лв. за абонамент. При използване на тази опция молим да ни пращате списък с имената на съответните абонати и секцията на СМБ, в която членуват.

Събраната сума за абонамента можете да преведете на:

ТБ Алианс България АД, София,

IBAN BG36BUIN95611000003610

BICBUINBGSF – „Списание Математика“ ЕООД.

Молим на вносната бележка да е ясно записано колко бройки и на какъв адрес (добавете и телефон) да се изпраща списанието.

Срокът за груповите абонаменти е 17 февруари 2025 г.

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024 – II част

СТОЯН БОЕВ, Американски университет Благоевград
ДРАГОМИР ГРОЗЕВ,
Институт по математика и информатика – БАН

Преди и след състезанието

В брой 4 на списанието коментирахме подробно селекцията, подготовката и представянето на нашия отбор на MOM 2024. Тук ще повторим накратко фактите.

Тазгодишната Международна олимпиада по математика (MOM 2024) се проведе в град Бат (Bath), Великобритания. България беше представена от **Марин Христов** (12. клас, СМГ, гр. София), **Ангел Христов** (11. клас, ППМГ „Акад. Никола Обрешков“ гр. Бургас), **Биляна Димитрова** (12. клас, СМГ, гр. София), **Веселин Маркович** (11. клас, МГ „д-р. Петър Берон“, гр. Варна), **Борис Гачевски** (12. клас, СМГ, гр. София) и **Виктор Костадинов** (12. клас, ПЧМГ, гр. София). Ръководители на отбора бяха проф. д-р Станислав Харизанов (ИИКТ и ИМИ–БАН) и гл. ас. д-р Стоян Боев (АУБ и ЧСУНД). Научен консултант на отбора беше Драгомир Грозев (ИМИ–БАН).

Българският отбор бе сформиран, съгласно приетия от МОН регламент за определяне на националните отбори за участие в MOM. Най-предно класираните се 15 състезатели от проведената Национална олимпиада по математика (13 – 14 април с домакин НПМГ, гр. София) бяха поканени да участват в контролно за определяне на националния отбор за MOM 2024 (28 – 29 май с домакин ИМИ–БАН). Сумарните резулти на шестимата, които оформиха българския отбор, бяха както следва: Марин (68 точки от 84 възможни), Ангел (66 точки), Биляна (59 точки), Борис (55 точки), Веселин (54 точки) и Виктор (49 точки). Като първа резерва остана Илия Василев (11. клас, ПЧМГ, гр. София) с 47 точки.

Подготовката и участието в MOM бяха подпомогнати от Министерството на образованието и науката, Съюза на математиците в България, Американска Фондация за България и Сдружението на олимпийските отбори по природни науки. Резултатите на българския отбор в MOM по участници и медали са следните:

	1	2	3	4	5	6	Общо	
Марин Христов	7	7	2	7	1	1	25	сребърен медал
Ангел Христов	7	2	0	7	7	1	24	сребърен медал
Билиана Димитрова	7	2	1	7	7	0	24	сребърен медал
Веселин Маркович	7	2	1	7	3	0	20	бронзов медал
Борис Гачевски	7	2	0	7	1	1	18	бронзов медал
Виктор Костадинов	7	0	0	7	1	0	15	почетна грамота
Общо	42	15	4	42	20	3	126	

Поздравления на учениците за този успех! В отборното класиране България зае 27-мо място в света и 11-то в Европа със 126 точки. Победител е отборът на САЩ със 192 точки, следван от Китай (190 точки) и Южна Корея (168 точки).



Българският отбор след церемонията по награждаването
(от ляво на дясно – Ангел, Марин, Веселин, Виктор, Билиана и Борис)

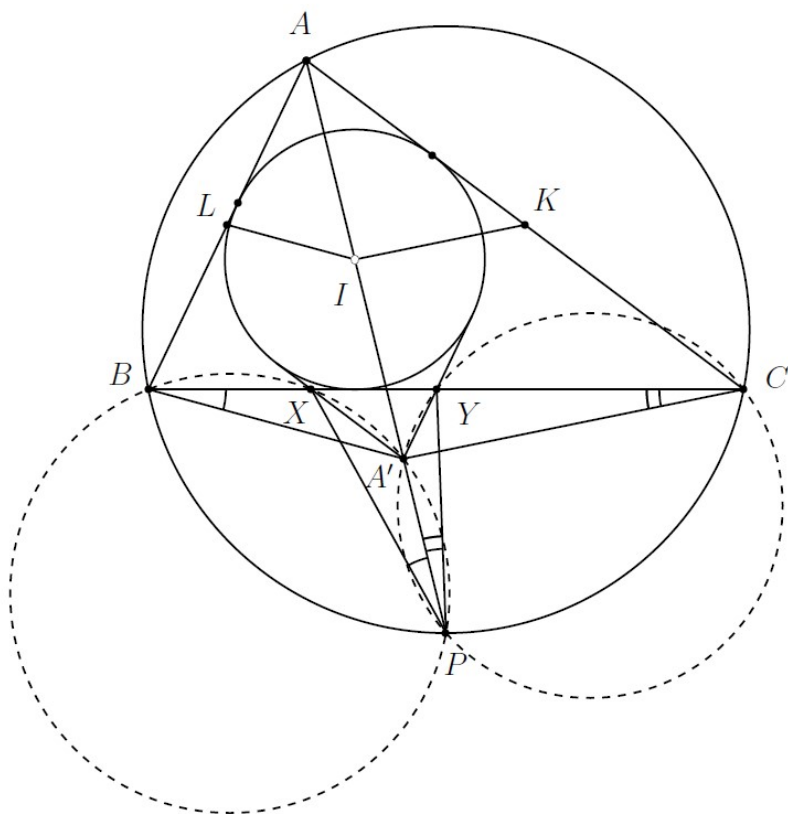
Задачите

В брой 4 на списанието може да намерите задачите от първия ден на състезанието с решения и коментари, а тук продължаваме със задачите от втория състезателен ден.

Задача 4. (Полша) Даден е $\triangle ABC$, в който $AB < AC < BC$. Да означим с ω вписаната в него окръжност, а с I – нейния център.

Нека X е точката върху правата BC , различна от C и такава, че правата през X , успоредна на AC , се допира до ω . Аналогично, нека Y е точката върху правата BC , различна от B , и такава, че правата през Y , успоредна на AB , се допира до ω . Нека правата AI пресича за втори път описаната около триъгълник ABC окръжност в точка $P \neq A$. Нека K и L са среди съответно на отсечките AC и AB . Да се докаже, че $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Решение. Ако разгледаме централна симетрия с център I , то допирателните от точките X и Y към ω са симетрични на правите AC и AB съответно, т.е. се пресичат в симетричния образ A' на A относно I , който лежи на ъглополовящата AP . Както е добре известно, $PB = PC = PI$ и тъй като $\angle BAP = \angle PAC > 30^\circ$ (по условие BC е най-голямата страна), то $PB = PC > R$, където R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Следователно $PI > R > \frac{1}{2}AP$, т.е. $PI > AI$ и A' е вътрешна за отсечката AP .



От условието следва, че $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'XC$, т.е. четириъгълникът $BPA'X$ е вписан и аналогично $CYA'P$ е вписан. При хомотетия с център A и коефициент 2 точките K, I и L се изобразяват в C, A' и B съответно, т.е. $\sphericalangle KIL = \sphericalangle CA'B$. Остава да съобразим, че от описаните окръжности около $BPA'X$ и $CYA'P$ имаме равенствата $\sphericalangle APX = \sphericalangle A'BC$ и $\sphericalangle YPA = \sphericalangle BCA'$, т.е.

$$\begin{aligned}\sphericalangle KIL + \sphericalangle YPX &= \sphericalangle CA'B + (\sphericalangle YPA + \sphericalangle APX) = \\ &= \sphericalangle CA'B + \sphericalangle BCA' + \sphericalangle A'BC = 180^\circ.\end{aligned}$$

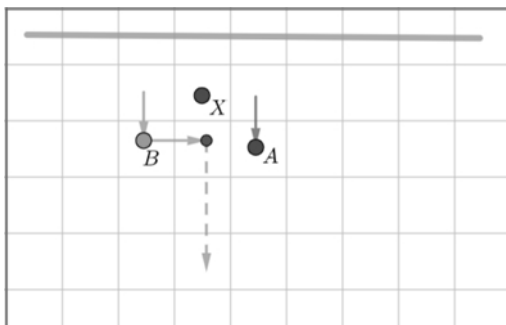
Коментар. Това беше една от лесните задачи в темата, решена от близо две трети от участниците. Нашият отбор очаквано постигна максимален резултат от 42 точки. Бяха предложени 8 синтетични решения от програмния комитет и координаторите на олимпиадата, включващи разнообразни подходи. Някои от тях водят до разкриване на конфигурацията и отразяват факта, че точките X и Y са допирни точки на две от полувписаните окръжности за $\triangle ABC$ със страната BC . Задачата предполага, разбира се, и аналитични подходи.

Задача 5. (*Cheuk Hei Chu, Хонг Конг*) Охлювът Турбо играе игра върху дъска с 2024 реда и 2023 стълба. В 2022 от клетките на дъската има скрити чудовища. Първоначално, Турбо не знае къде се намира нито едно от чудовищата, но той знае, че има точно едно чудовище във всеки ред с изключение на първия и последния, и че има най-много едно чудовище във всеки стълб.

Турбо прави поредица от опити да стигне от първия ред до последния ред. При всеки опит той избира клетка върху първия ред, от която да стартира и след това, на всеки ход, последователно се придвижва от текущата клетка към съседна на нея клетка с обща страна. (Позволено му е да се връща в клетка, в която вече е бил.) Ако стигне до клетка, в която има чудовище, неговият опит приключва и той се транспортира обратно до първия ред, където започва нов опит. Чудовищата не се движат и Турбо помни дали в клетките, които вече е посещавал, има или няма чудовища. Ако той достигне коя да е клетка от последния ред, опитът му приключва успешно и той печели играта.

Да се определи минималното n , такова че, охлювът Турбо има стратегия, гарантираща му достигане до последния ред за най-много n опита, независимо от разположението на чудовищата.

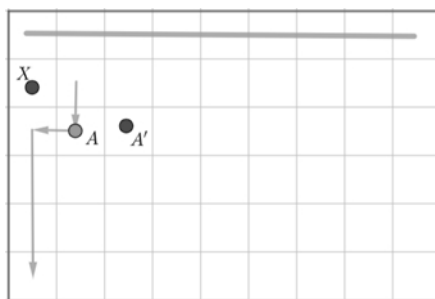
Решение. Отговор: $n = 3$. Ще покажем, че за три опита може да се достигне до последния ред. Лесно се вижда, че това не може да се гарантира с два опита. Идеята е първо да претърсим втория ред за чудовища – там има точно едно такова. В първия ред гарантирано няма чудовища – хоризонталната линия на фиг. 1. Да предположим, че чудовището от втория ред не се намира нито в първата нито в последната колона, и е в клетка X (фиг. 1). Турбо губи един опит, но



Фиг. 1

вече спокойно достъпва двете съседни отляво и отдясно на X клетки. Той опитва да заобиколи чудовището в X от едната или от другата му страна и да допуснем, че пробва първо дали клетката A е свободна. Ако това е така, Турбо се добира до клетката точно под X и по тази колона надолу отива без проблем до последния ред. Ако в A има чудовище, то в B вече няма такова и през тази клетка Турбо отива под X на третия си опит. Дотук се убедихме, че три опита са достатъчни в случай, че чудовището на първия ред не е в двете крайни клетки.

Да разгледаме сега случая, когато чудовището X от втория ред се намира например в първата колона – виж фиг. 2. Да пробваме пак със същата идея да го заобиколим. Проверяваме клетка A (фиг. 2)



Фиг. 2

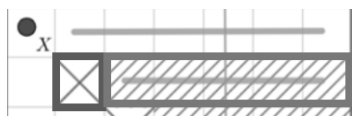
The diagram shows a coordinate system with a vertical wire and a horizontal wire. A particle is located at a point labeled A'' . A vertical wire is positioned to the left of the particle, and a horizontal wire is positioned above it. A point X is marked on the vertical wire, and a point X' is marked on the horizontal wire. A vertical arrow points downwards from the horizontal wire, and a horizontal arrow points to the right from the vertical wire, intersecting at the particle's position.

има чудовище, охлювът достига последния ред на третия си опит (пътят е показан на фиг. 3.) Ако в A'' няма чудовище, Турбо претърсва клетките надясно от A'' и т.н.

8

колона на втория ред, той не пипа диагонала, който започва от X – фиг. 4. Вместо това, охлювът последователно претърсва зацрихованите клетки отгоре надолу. Ако намери някъде там чудовище X' , Турбо използва своя трети опит да стигне последния ред, както е показано на фигура 4. Ако в зацрихованите клетки няма чудовище, той ще достигне до последния ред на втория си опит.

Коментар. Решение на този „пъзел“ се намира лесно, ако знаете отговора. Даже ако знаете, че броят опити е константа, не зависеща от n . Има много вариации, но стратегията се намира чрез проба – грешка. Защото ако знаеш, че имаш право само на 3 опита, веднага забелязваш дали си на грешен път. Например лесно се вижда, че да претърсвате надолу някоя колона не е добра идея. Тогава претърсваме първия ред. Ако чудовището не е в крайните колони е по-лесно. Остава въпроса какво правим, ако е в краищата. Решението по-горе е от [1] и е подобно на това на Ангел Христов. Идеята е, че чудовището се намира или в зацрихования правоъгълник отдясно, или в маркираната клетка отляво – фиг. 5.



Фиг. 5

Помислете сега, коя от двете области да претърсим първа? Две опции с различни последствия. Ако Турбо провери първо зацрихования правоъгълник и намери там чудовище, той губи един живот. Но за сметка на това той вече знае как да победи при следващия опит. Другата опция – Турбо проверява маркираната клетка отляво на правоъгълника. Там се крие чудовище, Турбо приключва, но няма никаква идея какво да прави при следващия опит. Изборът е прост.

Интересно наблюдение е дължината на условието. То беше значително по-кратко в шортлиста. След дълги заседания на журито се добавиха нови и нови уточнения. Накрая се получи условие, в което, като стигне до края, човек е забравил началото.

Авторът на задачата сподели, че идеята му е хрумнала, когато е бил ученик. По време на урок по английски е трябвало да се опише игра в лабиринт, начертан върху дъска 6×6 . В някои от квадратчетата на лабиринта има скрити чудовища и играчът печели, ако избраният от него път не среща такова. Няколко години по-късно, той предлага задачата в този вид на контролните на Хонг Конг за избор на отбор

за МОМ 2024. Ръководителят на отбора я харесва и вместо да бъде дадена на контролните, я предлагат за самата международна олимпиада. Както споменахме и в първата част на статията, имаше доста дискусии в журито, дали задачата да бъде избрана. Китай и редица други държави бяха против, с аргументи, че това не е математика, а по-скоро решаване на пъзел. Все пак, повечето страни я харесаха. Интересното е, че отборът на Хонг Конг се представи зле на тази задача с общо 9 точки и само едно (почти) пълно решение. Нашият отбор има общо 20 точки на нея с две пълни решения – на Ангел и Биляна. Веско беше направил по-трудния случай, но имаше пропуск в по-лесния.

Задача 6. (*Япония*) Нека $\mathbb{Q}$ е множеството от рационалните числа. Една функция $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ще наричаме *чиста*, ако е изпълнено следното свойство: за всеки $x, y \in \mathbb{Q}$ е в сила поне едно от следните равенства

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \text{ или } f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Да се докаже, че съществува цяло число c такова, че за всяка *чиста* функция f , когато r пробягва рационалните числа, съществуват най-много c различни рационални числа от вида $f(r) + f(-r)$. Да се намери най-малката възможна стойност на c .

Предлагаме ви решение, в което ударението е върху мотивацията и анализа на стъпките, които правим. Официалното решение може да прочетете на сайта на МОМ.

Решение. Отговор: $c = 2$. Всъщност, търси се максималната стойност на $c := \#\{f(r) + f(-r) : r \in \mathbb{Q}\}$, когато f пробягва всевъзможните *чисти* функции. Първо ще докажем, че $c \leq 2$. По-точно, ще установим, че $f(x) + f(-x)$ може да приема най-много една ненулева стойност.

За кои да е $x, y \in \mathbb{Q}$, записваме, че x и y са в релация xRy , ако е изпълнено $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Тогава, условието на задачата придобива вида: за всеки две $x, y \in \mathbb{Q}$, xRy или yRx . Ясно е също, че $xRx, \forall x \in \mathbb{Q}$ (използва се на няколко места по-долу). Да предположим сега, че за някои $x, y \in \mathbb{Q}$ е изпълнено xRy . Да разгледаме числата $x' := x + f(y), y' := -y$. За тях е изпълнено условието на задачата, т.е. $x'Ry'$ или $y'Rx'$. Като направим преобразуванията, получаваме:

$$(1) \quad x'Ry' \iff f(x + f(y) + f(-y)) = f(x)$$

$$(2) \quad y'Rx' \iff f(f(x)) = x + f(y) + f(-y)$$

Нека допуснем, че $f(y) + f(-y) \neq 0$ и да се фокусираме върху (1) в горните две условия. Ако (чисто хипотетично) знаем, че f е инекция, то (1) няма как да е изпълнено. При тази хипотеза трябва да е изпълнено (2), т.е.

$$f(f(x)) = x + f(y) + f(-y) \quad (2)$$

Да забележим сега, че (2) не може да е изпълнено за две двойки (x, y_1) и (x, y_2) , за които

$$f(y_1) + f(-y_1) \neq f(y_2) + f(-y_2).$$

Това ни навежда на мисълта (при всичките условности, които предположихме), че $f(y) + f(-y)$ може да приема най-много една ненулева стойност. И така, за да докажем последното трябва да изпълним следния план:

1. Да докажем, че f е инекция.
2. Да допуснем, че има такива y_1, y_2 , за които $f(y_i) + f(-y_i), i = 1, 2$, са различни **ненулеви** числа. (забележете, че $f(y_i) + f(-y_i) \neq 0$ е необходимо, за да отхвърлим (1) като възможност).
3. Да намерим $x \in \mathbb{Q}$ такова, че xRy_1 и xRy_2
4. Тогава (2) ще е изпълнено за (x, y_1) и (x, y_2) , противоречие.

Да започнем да го изпълняваме.

1. стъпка. f е инекция. Да допуснем, че има $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{Q}$ с $f(x_1) = f(x_2) = a$. Достатъчно е да намерим число $x \in \mathbb{Q}$, за което xRx_1 и xRx_2 . Наистина, в този случай имаме

$$f(x + a) = x_i + f(x), i = 1, 2,$$

което е противоречие с $x_1 \neq x_2$. Тъй като или x_1Rx_2 , или x_2Rx_1 , то една от двете стойности на $x, x = x_1$ или $x = x_2$ ще свърши работа.

2. стъпка. Допускаме, че има $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ такива, че $f(y_i) + f(-y_i), i = 1, 2$, са различни ненулеви числа. Забележете, че $y_1 \neq y_2$.

3. стъпка. Трябва да намерим $x \in \mathbb{Q}$ такава, че xRy_1 и xRy_2 . Подобна идея, като в стъпка 1. Тъй като, или y_1Ry_2 или y_2Ry_1 , то поне едно от двете числа: $x = y_1$ или $x = y_2$ ще ни свърши работа.

4. стъпка. И така, (2) е изпълнено за двете двойки (x, y_1) и (x, y_2) , което е търсеното противоречие.

И така, $f(x) + f(-x)$ може да приема не повече от една ненулева стойност, с което доказахме

$$\#\{f(x) + f(-x) : x \in \mathbb{Q}\} \leq 2,$$

т.е. $c \leq 2$. Остава да намерим *чиста* функция f , за която $c = 2$.

Да разгледаме следната функция: $f(x) = \lfloor x \rfloor - \{x\}$. Да забележим, че $f(r) + f(-r) = 0$ когато r е цяло, и $f(r) = -2$ в противен случай. Остава да проверим, че f е *чиста*. Нека x, y са рационални. Да допуснем, без ограничение на общността, че $\{x\} \geq \{y\}$. Тогава цялата част на $x + f(y) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} - \{y\}$ е равна на $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. От друга страна, дробната част на същия израз е равна на $\{x\} - \{y\}$. Следователно,

$$f(x + f(y)) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - \{y\} + \{x\} = f(x) + y.$$

Това доказва, че f е *чиста*.

Коментар. По формулировката на задачата има лека неяснота относно какво е това c , което търсим. И тази неяснота не е от българския превод. И в английския е така. В шортлиста (авторовата формулировка) въпросът беше: “Determine the maximum possible number of elements of $\{f(x) + f(-x) : x \in \mathbb{Q}\}$ ”. Просто и ясно. Е, някой ще каже – какво правим, ако има f , за което това множество е безкрайно. Ами тогава отговорът ще бъде, че съответния брой елементи е безкраен. Явно в някои страни, които са по-назад в класирането, имат проблем с формалния математически запис, което доведе до утежняване на формулировката.

Този вариант на решение е представен в [2] и ни се струва поестествен от официално предложените в шортлиста. Тук се опитахме в по-голяма степен да мотивираме решението. Съществена и далеч не тривиална е субституцията $(x, y) \rightarrow (x + f(y), -y)$, но при функционални уравнения е така – има доза заместване на разни „измислени“ стойности. Все пак, има известна логика да търсим нещо, в което присъства $f(y) + f(-y)$.

Малко „от въздуха“ идва втората част, т.е. конструирането на подходяща *чиста* функция f , за която

$$\#\{f(x) + f(-x) : x \in \mathbb{Q}\} = 2.$$

Авторът на горното решение казва, че е виждал подобни функционални уравнения, които се удовлетворяват от функцията *цяла част от x* . Това го е мотивирало да търси подобна конструкция за f . Поне единият от авторите на тази статия със сигурност не е виждал подобни неща.

Имаше мнения, че това е по-трудната част от задачата. В маркетинг схемата обаче за конструкцията се даваха само две точки, а за доказване на $c \leq 2$ без примера – останалите пет точки. Нашият отбор постигна скромнен резултат от общо 3 точки – трима от състезателите ни имаха по 1 точка. Максимален брой точки по тази задача получиха само 5 ученици, което може би я прави най-трудната задача в темата. Интересното е, че и петимата са представители на различни държави.

Как охлювът Турбо промени класирането

Както споменахме, победител е отборът на САЩ със 192 точки, следван от Китай (190 точки) и Южна Корея (168 точки). В последните 4 години Китай неизменно беше на първо място с около 20 точки разлика пред САЩ или Южна Корея. Анализът показва, че след първия състезателен ден Китай пак излезе напред и щеше да запази лидерската позиция, ако не беше ... *Охлювът Турбо*, т.е. задача 5. В табличката по-долу са извадени резултатите на първите три отбора само по задачи 3., 5. и 6. САЩ и Китай имат разлика от ± 1 точка по останалите три задачи.

Страна/Задача	3.	5.	6.	Общо точки	Класиране
САЩ	19	35	15	192	първо място
Китай	31	22	13	190	второ място
Южна Корея	18	7	22	168	трето място
България	4	20	3	126	27-мо място

На задача 5. китайският отбор има общо 22 точки ($7 + 7 + 0 + 1 + 7 + 0$), резултат съизмерим с резултата на Българския отбор по тази задача – 20 точки ($1 + 7 + 7 + 3 + 1 + 1$). САЩ обаче имат 35 точки и пет пълни решения по нея ($7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 0$), което доведе до заслуженото им първо място в отборното класиране, само с две точки пред китайския отбор. От друга страна, Южна Корея се представи катастрофално на задача 5. – само 7 точки ($7 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$). Лидерът на техния отбор сподели след състезанието, че състезателите му са търсили оценка от порядъка на $\log n$, заблуда сполетяла не само техния отбор. Може би за това е „помогнала“ и задача 5 от МОМ 2023

(*ниндџа път в японския триъгълник*). Това е едно от интересните на математиката – понякога има изненади. Като знаем резултатите, нека се пренесем обратно на заседанието на журито по време на обсъждането на задача 5. Защо имаше толкова противоречиви мнения по нея, защо лидери на Китай и азиатски страни в региона даже я обявиха за нематематическа? Отговорът е, че това е задача, за която не се изисква никаква подготовка. И петокласник би могъл да я реши, като някои от тях ще го направят, особено ако им кажеш отговора. Петокласниците не са предубедени, не са виждали *ниндџа път в японски триъгълник* и не знаят логаритми, поне повечето от тях. И така, ако си инвестирал толкова много труд в подготовката на един отбор, логично е да желаеш задачи, в които има повече техника.

Един такъв пример е задача 3. Много красиво твърдение, което също доведе до спорове. Има мнения, че темата дадена на МОМ 2024 не е балансирана. Само една геометрия. Биха могли да са две, но тогава нямаше да го има това хубаво бижу – задача 3. Журито прегледа шортлиста и направи избора си чрез гласуване. Може би е време и ние да си направим изводи каква е тенденцията. Да се върнем пак на класирането.

Тази година максимален резултат от 42 т. постигна единствено Наоџиа Ши, представител на Китай. Златният му медал беше връчен от проф. Терънс Тао, Филдсов медалист от 2006 г. и участник в 3 международни олимпиади по математика (МОМ'1986, МОМ'1987, МОМ'1988). Той държи и рекорда за най-млад участник (на 10 години) и най-млад златен медалист (на 13 години).

Препратки

1. A Point of View (Math blog), <https://dgrozev.wordpress.com>
2. AoPS, <https://artofproblemsolving.com/community/c6h3359771p31223178>

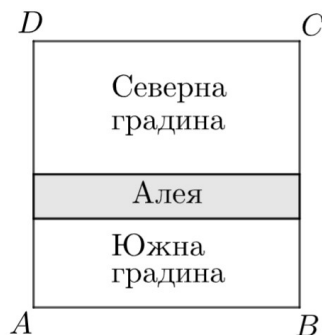
ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ, НЕВЕНА СЪБЕВА,
Институт по математика и информатика – БАН

От 15 до 17 ноември 2024 г. в София се проведе най-важното математическо състезание в сечението на настоящата учебна и календарна години – Есенният математически турнир „Академик Стефан Додунеков“, валиден за селекцията на националните отбори на България за БОМ и МлБОМ. Тук прилагаме условията, решенията, някои коментари и критериите за оценяване.

Тема за 5. клас

Задача 1. През квадратна градина $ABCD$ прекарали алея, както е показано на чертежа. Алеята разделила $ABCD$ на две правоъгълни градини. Страните на градините, измерени в метри, са естествени числа. Площта на северната градина е с 507 кв.м по-голяма от площта на южната.



Третината от северната градина и половината от южната градина засадили с пипер, а останалата част от градините – с домати. Оказало се, че с пипер са засадили общо 559 кв.м.

- Колко квадратни метра общо са засадили с домати?
- Колко квадратни метра е площта на алеята?

Задача 2. От началото на числовия лъч тръгнали две феи – червена и жълта. Те се разхождали по числовия лъч, като червената фея стъпвала през 12 единици (в 0, 12, 24 и т.н.), а жълтата фея стъпвала през 21 единици (в 0, 21, 42 и т.н.).

Всяка точка, в която стъпи фея, се оцветява в цвета на феята. Ако в някоя точка стъпят и двете феи, цветовете се сливат и точката става оранжева (например, точката 0 е оранжева).

Всяка фея стъпила в точно 101 точки на числовия лъч и отлетяла.

- Колко точки от числовия лъч са оцветили двете феи?
- Точката X от числовия лъч е оцветена и броят на оцветените точки наляво от нея е равен на броя на оцветените точки надясно от нея по лъча. Определете на кое число от числовия лъч съответства точката X и в какъв цвят е оцветена тя.

Задача 3. Райна написала на един лист 16 ЕСЕНЕН ТУРНИР

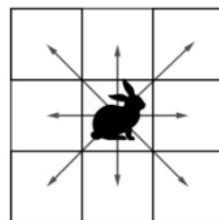
След това всяка буква скрила с цифра – еднаквите букви с еднакви цифри, а различните с различни цифри. Тъй като 1 и 6 вече били на листа, Райна не ги използвала.

Оказало се, че числото, което скрило думата ЕСЕНЕН, има точно девет общи делители с 2025, а числото, което скрило ТУРНИР, има точно два общи делители с 2025.

Какъв цифров код се е получил на листа, ако числото, скрило думата ТУРНИР, е възможно най-голямо?

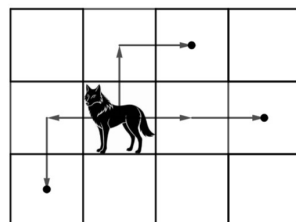
Задача 4. Кумчо Вълчо и Зайо Байо попадат случайно в две различни квадратчета на квадратна дъска. Те правят ходове, като се редуват. Кумчо Вълчо хваща Зайо Байо, ако попадне в квадратчето му.

Играта започва Зайо, който при всеки ход се мести в квадратче, което има поне един общ връх с неговото. (Възможните ходове на Зайо са показани на чертежа.)



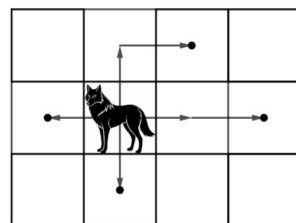
а) Кумчо Вълчо при всеки свой ход се мести **два пъти последователно** от едно квадратче в съседно на него по страна.

(На чертежа са показани три възможни хода на Кумчо Вълчо.)



Докажете, че както и да застанат в началото върху дъска 2024×2024 , Зайо Байо винаги може да избяга от Кумчо Вълчо, без да напусне дъската.

б) При всеки свой ход Кумчо Вълчо се мести **един или два пъти** от едно квадратче в съседно на него по страна. (На чертежа са показани четири възможни хода на Кумчо Вълчо.)



Докажете, че ако дъската е безкрайна, Зайо Байо винаги може да избяга от Кумчо Вълчо.

Тема за 6. клас

Задача 1. В аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед имало определено количество вода. При почистване източили 40% от водата. След това добавили филтрирана вода, при което увеличили с 40% количеството вода, останало след източването. Накрая в аквариума имало 2,1 литра вода.

а) Колко литра вода имало в аквариума отначало?

б) Широчината на дъното на аквариума е 20 см и е с 20% по-малка от неговата дължина. Околната повърхнина на аквариума е $7,2 \text{ dm}^2$. Колко процента от обема на аквариума са били запълнени с вода отначало?

Задача 2. За дадени числа a, b, c, d означаваме

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$.

а) Пресметнете сбора

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 43 & -44 \\ -46 & 45 \end{vmatrix}$$

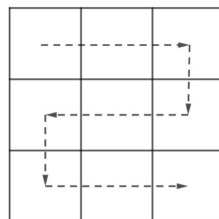
б) Намерете числото X в равенството

$$\begin{vmatrix} X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{24} & 22 \end{vmatrix} = \frac{11}{12}.$$

Задача 3. Даден е триъгълник ABC . На страната AB е отбелязана точка M така, че $AM = \frac{1}{2}AB$; на страната AC е отбелязана точка K така, че $AK = \frac{1}{3}AC$; на страната BC е отбелязана точка L така, че $BL = \frac{1}{4}BC$. Отсечките KL и CM се пресичат в точка O и лицето на четириъгълника $AMOK$ е 36 cm^2 .

Намерете лицето на триъгълника COL и лицето на триъгълника ABC .

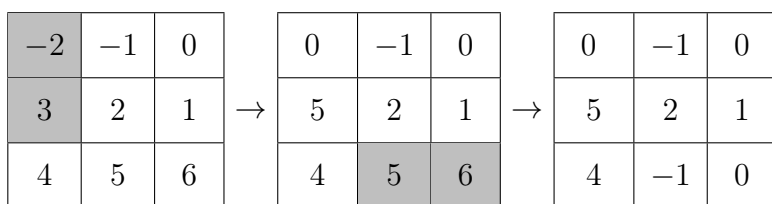
Задача 4. Серпентина ще наричаме квадратна таблица $n \times n$, в която са записани последователни цели числа по следния начин: най-малкото от числата е в горния ляв ъгъл; в първия ред числата нарастват отляво надясно; в последното поле от реда се прави завой към полето под него; във втория ред числата нарастват отдясно наляво и т.н.



Фиг. 1

(Стрелките на фиг. 1 показват реда на попълване на последователните числа в серпентина 3×3 .)

При всеки ход се избират две съседни полета в таблицата (т.е. полета с обща страна) и към числата в тях се прибавя едно и също число. На фиг. 2 са показани два поредни хода в таблица 3×3 : при първия ход към числата в сивите квадратчета се прибавя 2, а при втория ход към избраните квадратчета се прибавя (-6) .



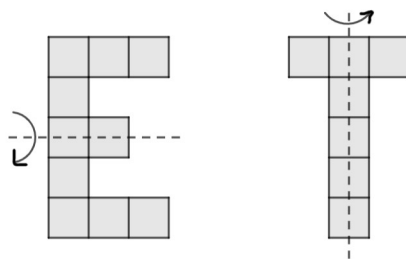
Фиг. 2

Една серпентина наричаме **особена**, ако след няколко хода от нея може да се получи таблица, във всички полета на която е записана 0.

- Намерете всички особени серпентини при $n = 5$.
- Съществува ли особена серпентина при $n = 10$?

Тема за 7. клас

Задача 1. Фигурите **Е** и **Т** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 см. Всяка от тях се завърта на 360° около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела P_E и P_T .



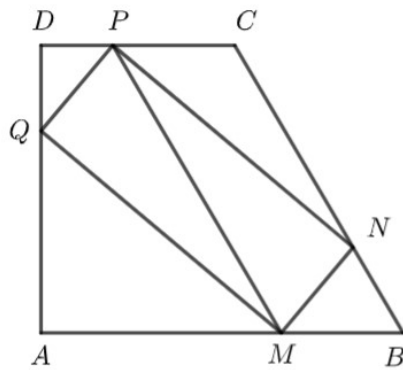
- Намерете отношението на лицата на повърхнините на P_E и P_T .

б) Машинни детайли с формата и размерите на P_E и P_T се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че 1 cm^3 от сплавта тежи 7 g и $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа $(p; q)$, за които $p^2 - q^2 = M$, където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

Задача 3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB и CD и прав ъгъл при върха A . В четириъгълника е вписан правоъгълник $MNPQ$, така че M, N, P, Q лежат съответно на страните AB, BC, CD, DA и



$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналят MP е успореден на BC .

а) Намерете отношението $DP : PC$.

б) Върху отсечката AM е избрана точка X така, че отсечката AX е равна на 37% от MB . Пресечната точка на отсечките PN и MC е означена с E , а пресечната точка на PX и MQ с F . Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$

Задача 4. За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

Действие X: две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,
 $1010 \xrightarrow{X} 1100$.

Действие Y: две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,
 $1010 \xrightarrow{Y} 11100$.

а) Започваме от редица A , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие X :

$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2$ и т.н., докато е възможно.

Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие X ? При коя начална редица A се получава това?

б) Започваме от редица B , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие Y :

$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2$ и т.н., докато е възможно.

Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?

Тема за 8. клас

Задача 1. Дадени са изразите $A = x^3 + 2x^2y + 2xy + 4y^2$ и $B = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2y^3$.

а) Да се разложи на два неконстантни множителя с рационални коефициенти всеки от изразите A , B и $A + 4B$.

б) Ако $x + 2y = 5$ и $y + 2x^2 = 7$, то намерете най-големия прост делител на цялото число $A + 4B$.

Задача 2. На лист хартия е начертан правоъгълен триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Известно е, че могат да се начертаят два кръга с радиус 1 cm върху листа така, че всяка точка от вътрешността или обиколката на триъгълника ABC да лежи във вътрешността или обиколката на поне един от кръговете.

а) Покажете един възможен начин за това при $BC = 3$ cm.

б) Докажете, че $BC \leq 3$ cm.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n , такива че

$$a + b + c \text{ дели } a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - n(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

за всеки три различни естествени числа a , b и c .

Задача 4. Дадено е естествено число n . Равностранен триъгълник със страна n е разделен на равностранни триъгълничета със страна 1; техните върхове ще наричаме *възли*. Равностранен триъгълник с върхове три от възлите (и страни не непременно успоредни на страните на началния) ще наричаме *важен*. Означаваме с p_k броя ненаредени двойки различни възли, които са върхове на точно k важни триъгълника. Запишете като многочлен на променливата n в нормален вид изразите:

а) $p_0 + p_1 + p_2$;

б) $p_1 + 2p_2$.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се реши в реални числа системата

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{cases}$$

Задача 2. Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC с височини AE и BD . Върху правата AC са взети точки G и M , такива че $AE = AG = AM$ и C, G, A, M лежат в този ред. Върху правата BC са взети точки F и L , такива че $BD = BF = BL$ и C, F, B, L лежат в този ред. Нека P е средата на DE . Да се докаже, че перпендикулярът от P към AB и правите EM и DL се пресичат в една точка.

Задача 3. Едно естествено число наричаме *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на никое просто число.

За естествено число a разглеждаме числото $f(a) = a^{a+1} + 1$. Докажете, че:

- а) ако a е четно, то $f(a)$ не е свободно от квадрати.
- б) съществуват безбройно много нечетни a , за които $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Задача 4. *Обобщен $2n$ -успoredник* ще наричаме изпъкнал многоъгълник с $2n$ страни, така че, обхождани последователно, k -тата страна е успoredна и равна на $(n + k)$ -тата страна за $k = 1, 2, \dots, n$.

В правоъгълна координатна система е даден обобщен успoredник с 50 върха, всеки с целочислени координати. Да се докаже, че лицето му е поне 300.

Забележка. Формулата за лице на обобщения успoredник няма нужда от целочисленост на координатите. Формулата на Пик може да се използва свободно без доказателство, както и общата формула за лице на изпъкнал многоъгълник чрез декартовите координати на страните му. Доказаната граница е класическа, но не е много точна. Има различни други граници свързани със задачата за минимално лице на многоъгълници с целочислени координати, както и редица отворени проблеми.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се намерят всички двойки реални числа $(x; y)$, които са решения на системата

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}.$$

Задача 2. Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC , в който AL ($L \in BC$) е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и M е средата на BC . Нека ъглополовящите на $\sphericalangle AMB$ и $\sphericalangle CMA$ пресичат AB и AC съответно в точките P и Q . Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника APQ се допира до BC тогава и само тогава, когато минава през L .

Задача 3. Да се намерят всички полиноми P с цели коефициенти, за които съществува естествено число N , такова че за всяко $n \geq N$, всеки прост делител на $n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ е делител и на $P(n)$. (Тук $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, по-малко или равно на реалното число x .)

Задача 4. Дадени са пълен ориентиран граф G с 2024 върха и естествено число $k \leq 10^5$. Ангел и Борис играят следната игра: Ангел оцветява k от ребрата на G в червено и поставя пул в един от върховете на G . След това двамата правят ходове, редувайки се; Ангел започва. На всеки свой ход той премества пула в съседен връх, след което Борис променя ориентацията на някое от ребрата, което не е червено. Ако в някакъв момент Ангел не може да премести пула, то той губи и победител е Борис. Да се определи в зависимост от G и k дали Борис има печеливша стратегия.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички реални числа a , за които уравнението

$$x^3 - (a + 2)x^2 - (a - 2)x + 2a - 1 = 0$$

има три различни корена x_1 , x_2 и x_3 , и тези корени заедно с числото a в някакъв ред образуват аритметична прогресия.

Задача 2. Ъглите при върховете A , B и C на триъгълник ABC са съответно първи, втори и трети член на намаляваща аритметична прогресия. Намерете ъглите на триъгълника, ако $\sphericalangle BHI = 60^\circ$,

където H и I са съответно ортоцентърът и центърът на вписаната окръжност на триъгълника.

Задача 3. Кристи иска да раздаде бонбони на $n \geq 3$ свои съученици. Той разполага всеки от тях върху точка в двора на училището. Точките са в една равнина, като никои три от тях не лежат на една права. За всеки изпъкнал многоъгълник P с върхове сред тези точки, Кристи прави следното. Преброява учениците, които се намират вътре в P или на страните му, нека техният брой е S_P . Той раздава по S_P бонбона на всеки от тези S_P ученици. Ученик, получил най-малко бонбони след всички раздавания, наричаме *нещастен* (нещастните ученици могат да са един или повече). Определете максималното количество бонбони, които може да получи нещастен ученик.

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число n , за което съществуват n две по две различни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, такива че стойността на израза

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

е естествено (т.е. цяло положително) число.

Тема за 12. клас

Задача 1. Редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез

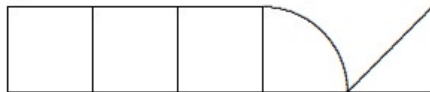
$$\begin{aligned} a_0 &= c, \\ a_{n+1} &= a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \text{ за } n \geq 0, \end{aligned}$$

където $c > 0$ е реален параметър. Да се намерят всички стойности на c , за които редицата (a_n) е сходяща и при тези стойности да се определи нейната граница.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ и точка X е във вътрешността му. Нека точките S_A, S_B и S_C са средите на дъгите $\widehat{BXC}$, $\widehat{AXC}$ и $\widehat{AXB}$ в окръжностите, описани съответно около $\triangle BXC$, $\triangle AXC$ и $\triangle AXB$. Да се докаже, че точките S_A, S_B, S_C и X лежат на една окръжност.

Задача 3. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Ако $m \in \mathbb{N}$ е такова, че делителите на m могат да се разбият на n непресичащи се множества, така че сумата от числата във всяко множество е една и съща, то да се докаже, че $m \geq 2^{n+1} - 2$.

Задача 4. Нека L е фигурата, съставена от 3 единични квадрата, четвърт кръг с радиус 1 и правоъгълен равнобедрен триъгълник с катет 1, скачени така:



Да се докаже, че всеки 18 точки в равнината могат да се покрият с копия на L , които не се припокриват в свои вътрешни точки. (Копията на L могат да бъдат ротирани и обръщани.)

Отговори и решения

5.1. Нека третината от северната градина има площ x кв.м, а половината от южната градина има площ y кв.м. С пипер са засадили общо $x + y = 559$ кв.м. Площта на северната градина е $3x$ кв.м, а на южната градина е $2y$ кв.м. Тогава $3x - 2y = 507$. Като удвоим първото равенство и съберем с второто, получваме, че $5x = 1625$, т.е. $x = 325$. Следователно $y = 559 - 325 = 234$. Площта на северната градина е $3 \cdot 325 = 975$, а площта на южната градина е $2 \cdot 234 = 468$; общо $975 + 468 = 1443$ кв.м.

а) С домати са засадили $1443 - 559 = 884$ кв.м.

б) Страната на квадрата е общ делител на площта на северната градина и площта на южната градина. Тъй като $\text{НОД}(975, 468) = 3 \cdot 13 = 39$, страната на квадрата е делител на 39. От друга страна, площта на квадрата е по-голяма от общата площ на двете градини $975 + 468 = 1443$ кв.м. Тъй като $37 \cdot 37 = 1369 < 1443$, то страната на квадрата е по-голяма от 37.

Така получаваме, че страната на квадрата е 39 м. Площта на алеята е $39 \cdot 39 - 1443 = 78$ кв.м.

5.2. Червената фея е стъпила в $0, 12, 24, \dots, 1200$, а жълтата – в $0, 21, 42, \dots, 2100$. Червената и жълтата едновременно са стъпили в началото и в кратните на $\text{НОК}(12, 21) = 84$, които не надхвърлят 1200. Това са оранжевите точки $0, 84, \dots, 14 \cdot 84 = 1176$ и са 15 на брой.

а) Общо оцветените точки са $2 \cdot 101 - 15 = 187$.

б) Точката X е $(187 + 1) : 2 = 94$ -тата оцветена точка.

От 1 до 84 включително има $84 : 12 + 84 : 21 - 1 = 10$ оцветени точки; толкова са оцветените точки от 85 до 168 и т.н. Така от 1 до $84 \cdot 9 = 756$ включително (което е по-малко от 1200) има $10 \cdot 9 = 90$

оцветени точки; заедно с оцветеното начало на лъча, стават 91 точки. Остава да отброим още $94 - 91 = 3$ оцветени точки.

След тръгването на феите, първите оцветени точки са 12 (червена), 21 (жълта), 24 (червена) и т.н. Следователно 94-тата оцветена точка е $756 + 24 = 780$ и е червена.

5.3. Най-големият общ делител на ЕСЕНЕН и 2025 има девет делители. Числата с 9 делители се разлагат на прости множители като p^8 или $p^2 \cdot q^2$, където p и q са различни прости числа. Тъй като $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, единственият му делител, който има 9 делители, е $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25$.

Следователно 9 и 25 делят ЕСЕНЕН. От признака за делимост на 25 следва, че ЕН е 00, 25, 50 или 75.

При ЕН = 00 получаваме $E = H = 0$, противоречие.

При ЕН = 25, т.е. $E = 2$, $H = 5$, от признака за делимост на 9 за 2С2525 получаваме $C = 2 = E$, противоречие.

При ЕН = 50, т.е. $E = 5$, $H = 0$, от признака за делимост на 9 за числото 5С5050 получаваме $C = 3$.

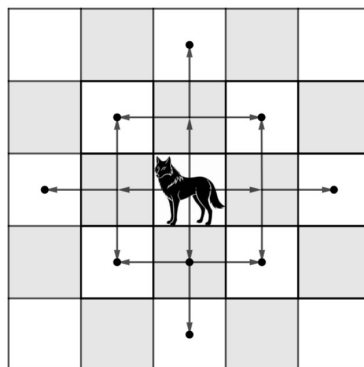
При ЕН = 75, т.е. $E = 7$, $H = 5$, от признака за делимост на 9 за числото 7С7575 получаваме $C = 5 = H$, противоречие. Получихме ЕСЕНЕН = 535050.

ТУРНИР има два общи делители с 2025. Единият е 1, а другият е 3 или 5. Но $E = 5$ и $H = 0$, следователно Р не е нито 5, нито 0, т.е. ТУРНИР не се дели на 5. Следователно вторият общ делител е 3. Следователно ТУРНИР се дели на 3 и не се дели на 9.

За буквите на ТУРНИР остават цифрите 2, 4, 7, 8 и 9. Тъй като ТУРНИР трябва да е възможно най-голямо, $T = 9$, $U = 8$, $R = 7$. Получаваме 9870И7 и от признака за делимост на 3 следва, че $I = 2, 5$ или 8; тъй като $E = 5$, $U = 8$, то $I = 2$.

Търсеният код за ЕСЕНЕН ТУРНИР е 16 535050 987027.

5.4. а) Да оцветим дъската шахматно. Можем да забележим, че при всеки свой ход, състоящ се от две премествания в съседно по страна квадратче, Кумчо Вълчо отива в квадратче с един и същ цвят.



Зайо Байо обаче може да смени цвета на квадратчето, в което е (с преместване нагоре, надолу, наляво или надясно) или да не го променя (с преместване по диагонал). Зайо постъпва по следния начин:

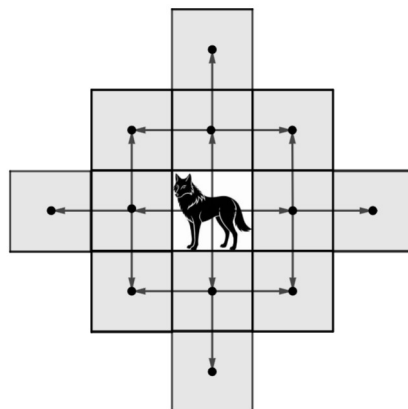
- ако в началото цветът на квадратчето му е като този на Кумчо Вълчо, той сменя цвета при първия си ход и след това да се движи само по диагонал;

- ако в началото цветът на квадратчето му е различен от този на Кумчо Вълчо, се движи само по диагонал.

Така и в двата случая след всеки ход Зайо Байо и Кумчо Вълчо ще са в квадратчета с различен цвят, следователно Зайо никога няма да бъде хванат.

б) Ще наричаме *опасна територия* ромба, състоящ се от квадратчетата, в които Кумчо Вълчо може да попадне при следващия си ход. На чертежа тя е оцветена в сиво.

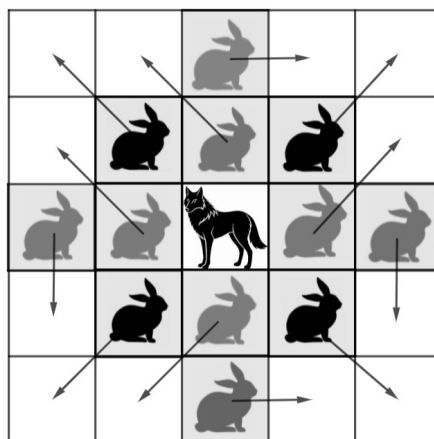
Ако заекът се намира в опасната територия, с един ход по диагонал той може да излезе от нея. Така вълкът на следващия си ход не може да го хване.



Ако заекът се намира извън опасната територия, винаги може да направи такъв ход, че да не влезе в нея (дъската е безкрайна).

Така вълкът на следващия си ход не може да го хване и заекът може да бяга безкрайно.

Вдясно е показана една примерна стратегия на заека. След всеки ход на вълка опасната територия се променя и заекът трябва да действа според посочената стратегия.



6.1. а) Нека отначало в аквариума е имало x литра вода. След източването са останали $60\%x$ литра, а след доливането на филтрираната

вода, в аквариума имало $140\%.60\%x = 84\%x$ литра вода. От равенството $84\%x = 2,1$ намираме $x = 2,5$ литра.

б) Широчината на дъното $a = 20$ см е равна на $80\%b$. От равенството $20 = 80\%b$ намираме $b = 25$ см. Обиколката на дъното е $P = 90$ см и тъй като $S = 7,2 \text{ dm}^2 = 720 \text{ cm}^2$, височината на аквариума е $c = S : P = 720 : 90 = 8$ см.

Обемът на аквариума е $V = 20 \cdot 25 \cdot 8 = 4000 \text{ cm}^3 = 4 \text{ m}^3$. Водата отначало е $\frac{2,5}{4} = 62,5\%$ от обема на аквариума.

6.2. а) Забелязваме, че

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - (-b) \cdot (-c) = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} S &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 43 & 44 \\ 46 & 45 \end{vmatrix} = \\ &= (0 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + \cdots + (43 \cdot 45 - 44 \cdot 46) = \\ &= 0 - 44 \cdot 46 = -2024, \end{aligned}$$

тъй като в получения сбор събираемите, без първото и последното, се разделят на двойки противоположни със сбор 0.

б) Даденото равенство се записва във вида

$$-X - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2X - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 3X - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 22X - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} = \frac{11}{12}.$$

Имаме $-X + 2X - 3X + 4X + \cdots + 22X = 11X$, тъй като $-1 + 2 = -3 + 4 = \cdots = -21 + 22 = 1$. От друга страна, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} =$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{23} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{11}{24}.$$

Получаваме $11X - \frac{11}{24} = \frac{11}{12}$, откъдето намираме $X = \frac{1}{8}$.

6.3. Имаме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ALC}} = \frac{CK}{AC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{CL}{BC} = \frac{3}{4}$$

и като умножим тези равенства, получаваме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Значи лицето на $\triangle CKL$ е равно на половината от лицето на $\triangle ABC$. От друга страна,

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_C}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2},$$

т.е. лицето на $\triangle AMC$ е равно на половината от лицето на $\triangle ABC$. Следователно $S_{AMC} = S_{CKL}$, т.е.

$$S_{AMOK} + S_{KOC} = S_{KOC} + S_{COL} \iff S_{AMOK} = S_{COL}.$$

Така получихме, че $S_{COL} = 36 \text{ cm}^2$. От $\frac{S_{COB}}{S_{COL}} = \frac{BC}{LC} = \frac{4}{3}$ следва, че $S_{COB} = \frac{4}{3}S_{COL} = 48 \text{ cm}^2$.

Тъй като CM е медиана в $\triangle ABC$, то $S_{AMC} = S_{BMC}$. Освен това, OM е медиана в $\triangle ABO$ и $S_{AMO} = S_{BMO}$. Като извадим почленно двете равенства, получаваме

$$S_{AOC} = S_{COB}, \text{ т.е. } S_{AOC} = 48 \text{ cm}^2.$$

Но $\frac{S_{AOK}}{S_{AOC}} = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$, значи $S_{AOK} = \frac{1}{3}S_{AOC} = 16 \text{ cm}^2$.

Тогава $S_{AOM} = S_{AMOK} - S_{AOK} = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2$, откъдето и $S_{BMO} = 20 \text{ cm}^2$ и $S_{ABC} = 2 \cdot (20 + 48) = 136 \text{ cm}^2$.

6.4. Ако оцветим таблицата шахматно, при всеки ход едно бяло и едно черно поле се увеличават или намаляват с едно и също число. Това означава, че разликата между сбора на числата в белите полета и сбора на числата в черните полета се запазва.

а) Общият вид на серпентина 5×5 е следният:

$a - 12$	$a - 11$	$a - 10$	$a - 9$	$a - 8$
$a - 3$	$a - 4$	$a - 5$	$a - 6$	$a - 7$
$a - 2$	$a - 1$	a	$a + 1$	$a + 2$
$a + 7$	$a + 6$	$a + 5$	$a + 4$	$a + 3$
$a + 8$	$a + 9$	$a + 10$	$a + 11$	$a + 12$

Сборът на числата в черните полета е $S_b = 13a$, а сборът на числата в белите полета е $S_w = 12a$. След всеки ход се запазва разликата между сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета, който отначало е $S_b - S_w = a$.

Следователно ако серпентината 5×5 е особена, то $a = 0$.

Остава да покажем, че при $a = 0$ с няколко хода може да се получи таблица само с 0. В таблицата

-12	-11	-10	-9	-8
-3	-4	-5	-6	-7
-2	-1	0	1	2
7	6	5	4	3
8	9	10	11	12

разделяме полетата по двойки и след 10 хода

$$\begin{aligned}
 &(-12; -11) \rightarrow (0; 1), (-10; -9) \rightarrow (1; 2), (-8; -7) \rightarrow (2; 3), \\
 &(-6; -5) \rightarrow (3; 4), (-4; -3) \rightarrow (4; 5), (-2; -1) \rightarrow (5; 6), \\
 &(7; 8) \rightarrow (0; 1), (9; 10) \rightarrow (1; 2), (5; 4) \rightarrow (2; 1), (3; 12) \rightarrow (2; 11)
 \end{aligned}$$

стигаме до таблица, в която има 11 двойки съседни полета, във всяка от които са записани равни числа:

0	1	1	2	2
5	4	4	3	3
5	6	0	1	2
0	6	2	1	2
1	1	2	11	11

От тук с 11 хода получаваме таблица само с 0.

б) В серпентина 10×10 са записани 100 числа; ако в горния ляв ъгъл е числото $a - 50$, най-голямото число в таблицата $a + 49$ ще е записано в долния ляв ъгъл. Сборът на всички числа в таблицата е $100a - 50$.

Ако оцветим таблицата шахматно така, че $a - 50$ да е в черно поле, сборът на числата в черните полета ще е

$$\begin{aligned}
 S_b &= (a - 50) + (a - 48) + \dots + (a - 2) + a + (a + 2) + \dots + (a + 48) = \\
 &= 50a - 50,
 \end{aligned}$$

а сборът на числата в белите полета ще е

$$S_w = (100a - 50) - (50a - 50) = 50a,$$

което означава, че $S_w - S_b = 50$ след всеки ход. Това означава, че не съществува особена серпентина 10×10 .

Забележка. По същия начин може да се докаже, че особена серпентина съществува само за нечетно n .

7.1. а) Повърхнината на P_E се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm; кръг с $r = 5$ cm; кръг с $r = 1$ cm и два кръгови венеца, които общо съставят кръг с $r = 5$ cm. Следователно $S_E = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2\pi \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 138\pi$ cm².

Повърхнината на P_T се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm; кръг с $r = 3$ cm; кръг с $r = 1$ cm и кръгов венец, които общо съставят кръг с $r = 3$ cm. Следователно $S_T = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1 \cdot 8 + 2\pi \cdot 3^2 = 46\pi$ cm².

Намираме $S : S_T = 138\pi : 46\pi = 3 : 1$.

б) Обемът на P_E се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm и се извади обемът на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm, т.е. $V_E = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 + \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 116\pi$ cm³. Тогава масата на P_E е приблизително $116 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 = 2552$ g.

Обемът на P_T се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm, т.е. $V_T = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2 \cdot 8 = 26\pi$ cm³. Тогава масата на P_T е приблизително $26 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 = 572$ g.

7.2. Ако означим $p - 2q = n$, имаме

$$\begin{aligned} M &= \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}} = \frac{12^n \cdot 75^{6-3n}}{18^{2n-3} \cdot 15^{11-6n}} = \\ &= \frac{(2^{2n} \cdot 3^n) \cdot (3^{6-3n} \cdot 5^{2(6-3n)})}{(2^{2n-3} \cdot 3^{2(2n-3)}) \cdot (3^{11-6n} \cdot 5^{11-6n})} = \frac{2^{2n} \cdot 3^{6-2n} \cdot 5^{12-6n}}{2^{2n-3} \cdot 3^{5-2n} \cdot 5^{11-6n}} = \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

Тогава $p^2 - q^2 = 120 \iff (p - q)(p + q) = 120$. Множителите $p - q$ и $p + q$ са с еднаква четност, като $p - q < p + q$. Тъй като произведението е четно, то $p - q$ и $p + q$ са четни числа. Числото 120 може да се представи като произведение на две четни числа по четири начина ($2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$) и получаваме следните възможности:

1. случай. $p - q = 2$ и $p + q = 60$, откъдето $p = 31$ и $q = 29$ са решение;

2. случай. $p - q = 4$ и $p + q = 30$, откъдето $p = 17$ и $q = 13$ са решение;

3. случай. $p - q = 6$ и $p + q = 20$, откъдето $p = 13$ и $q = 7$ са решение;

4. случай. $p - q = 10$ и $p + q = 12$, откъдето $p = 11$ и $q = 1$ са решение.

7.3. От $PD = 3k$, $DQ = 4k$ по Питагорова теорема за триъгълника DPQ получаваме $QP^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, т.е. $QP = 5k$. Аналогично, от $QA = 3n$, $AM = 4n$ намираме $QM = 5n$. Тъй като $DQ : QA = 3 : 4$, то

$$\frac{4k}{3n} = \frac{3}{4} \iff k : n = 9 : 16.$$

Изразяваме $S_{MNPQ} = 25kn$ и $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPQ} = \frac{25}{2}kn$.

Тъй като PM е успоредна на BC и AB е успоредна на CD , то $MBCP$ е успоредник. Тогава

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot h_{MP} = \frac{1}{2} \cdot S_{MBCP}$$

и получаваме, че $S_{MBCP} = 2S_{MNP} = 25kn$.

От друга страна, $S_{MBCP} = PC \cdot AD$ и тъй като

$$AD = 4k + 3n = 4 \cdot \frac{9}{16}n + 3n = \frac{21}{4}n,$$

от равенството $25kn = PC \cdot \frac{21}{4}n$ намираме $PC = \frac{100}{21}k$. Тогава

$$DP : PC = 3 : \frac{100}{21} = 63 : 100.$$

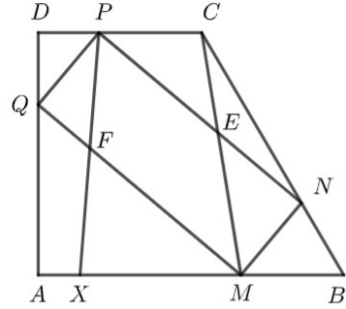
б) Имаме $AX = 37\%MB = 37\%PC = 37\% \cdot \frac{100}{21}k = \frac{37}{21}k$. Равенството

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}$$

е еквивалентно на

$$S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$$

(получава се, като се прибави към двете страни на равенството $S_{FPQ} + S_{MNE}$). Но



$$\begin{aligned} S_{AXPD} + S_{MBC} &= \frac{AX + DP}{2} \cdot AD + \frac{MB}{2} \cdot AD = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{37}{21}k + 3k + \frac{100}{21}k \right) \cdot \frac{21}{4}n = 25kn = S_{MNPQ}, \end{aligned}$$

което искахме да докажем.

7.4. а) Нека в редицата A има a цифри 0 и $20 - a$ цифри 1.

Към всяка двойка 0 и 1 в A действието X може да се приложи най-много веднъж (защото след това тази нула минава вдясно от единицата). Двойките 0 и 1 в редицата A са $a(20 - a)$ на брой. Следователно действието X може да се приложи най-много $a(20 - a)$ пъти. Тази стойност се реализира при $A = \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{20-a}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{20-a} &\xrightarrow{X} \underbrace{0 \dots 0}_{a-1} \underbrace{10 \dots 1}_{19-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0 \dots 0}_{a-2} \underbrace{100 \dots 1}_{19-a} \xrightarrow{X} \dots \\ 1 \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{19-a} &\xrightarrow{X} \dots 11 \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{18-a} \xrightarrow{X} \dots \underbrace{1 \dots 1}_{20-a} \underbrace{0 \dots 0}_a. \end{aligned}$$

Броят на действията X в редица с a цифри 0 и $20 - a$ цифри 1 е най-много

$$a(20 - a) = 100 - (a - 10)^2 \leq 100,$$

т.е. е най-много 100, като тази стойност се достига при $a = 10$ и $A = \underbrace{0 \dots 0}_{10} \underbrace{1 \dots 1}_{10}$.

б) Нека вляво от дадена цифра 1 има k цифри 0. Това поражда следните последователни действия Y :

$$\underbrace{0 \dots 0}_k 1 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 110 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} 11010 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} 111100 \xrightarrow{Y}$$

$$\begin{array}{c}
\underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 11011100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 111101100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 1111110100 \\
\xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} \underbrace{11111111}_{2^3} 000 \xrightarrow{Y} \dots \xrightarrow{Y} \underbrace{1 \dots 1}_{2^k} \underbrace{0 \dots 0}_k
\end{array}$$

Ако в редицата има b цифри 0 и $c = 20 - b$ цифри 1, най-дългата възможна редица е с дължина $c \cdot 2^b + b$. Ако увеличим броя на единиците до $c + 1$ и нулите станат $b - 1$, получаваме максимална дължина $(c + 1) \cdot 2^{b-1} + b - 1$. Тъй като

$$c \cdot 2^b + b = 2c \cdot 2^{b-1} + b > (c + 1) \cdot 2^{b-1} + b - 1,$$

следва, че с увеличаване на броя на единиците, максималната дължина на редиците намалява. Следователно най-дълга редица се получава, когато $c = 1$ и $b = 19$.

Получихме, че с действие Y може да се получи редица с най-много $2^{19} + 19$ цифри.

8.1. а) $A = x^2(x + 2y) + 2y(x + 2y) = (x^2 + 2y)(x + 2y)$.

$$B = x^3 + 2x^2y + x^2y + 2xy^2 + xy^2 + 2y^3 = x^2(x + 2y) + xy(x + 2y) + y^2(x + 2y) = (x^2 + xy + y^2)(x + 2y).$$

$$A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 2y + 4x^2 + 4xy + 4y^2) = (x + 2y)(5x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y).$$

$$\text{б) } A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y + 4x^2) =$$

$$= (x + 2y)((x + 2y)^2 + 2(y + 2x^2)) = 5(5^2 + 2 \cdot 7) = 195, \text{ чийто най-голям прост делител е } 13.$$

8.2. а) Нека средата на AB е M и симетралата на AB пресича BC в T . Тогава $\sphericalangle TAB = \sphericalangle TBA = 30^\circ$ и $\sphericalangle CAT = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAT = 30^\circ$, значи $CT = \frac{AT}{2} = \frac{BT}{2}$, съответно $AT = BT = \frac{2BC}{3} = 2$ cm и $CT = 1$ cm. Сега ако K и L са средите на AT и BT , то от съображения за медиана към хипотенуза следва $AK = KC = KM = KT = 1$ cm и $BL = LM = LT = 1$ cm. Следователно кръговете с центрове K и L и радиус 1 cm покриват ABC .

б) Нека допуснем обратното. Както в а) въвеждаме T и получаваме $AT = BT = \frac{2BC}{3} > 2$ cm, а също $AB > BC > 2$ cm. Така A , B , T са три точки, никои две от които не лежат в кръг с радиус 1 cm (диаметър 2 cm) и значи няма как ABC да е покрит от два кръга.

Коментар. Може да се докаже, че измежду всички правоъгълни триъгълници, които могат да се покрият от два кръга с радиус 1 cm,

с максимално лице е именно този с катет 3 см и прилежащ към него ъгъл 30° .

8.3. Да изберем $b = 2$, $c = 1$ и нека $a \geq 3$ е произволно – тогава $a + 3$ дели $a^{2n} + 2^{2n} + 1 - n(5a^2 + 4)$. Да положим $d = a + 3$ – значи d дели $(d-3)^{2n} + 2^{2n} + 1 - n(5(d-3)^2 + 4)$ и значи дели и $(-3)^{2n} + 2^{2n} + 1 - 49n = 9^n + 4^n - 49n + 1$. Така числото $9^n + 4^n - 49n + 1$ има безбройно много естествени делители и трябва непременно да е равно на 0. Директно се проверява, че това не е така за $n = 1$, а при $n \geq 3$ индуктивно имаме $9^n > 49n$, понеже $9^3 = 729 > 441 = 49 \cdot 9$ и (при индукционното предположение) $9^{n+1} = 9 \cdot 9^n > 9 \cdot 49n = 441n > 49n + 49 = 49(n+1)$. Остава $n = 2$, което е решение за всякакви a, b, c , понеже $a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = (a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$. (Алтернативно, $c \equiv -a-b \pmod{a+b+c}$ и значи $a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \equiv a^4 + b^4 + (-a-b)^4 - 2(a^2b^2 + b^2(-a-b)^2 + (-a-b)^2a^2) \pmod{a+b+c}$, а след разкриване на скобите се вижда, че последното е тъждествено равно на 0.)

8.4. а) Броят на възлите е $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Всяка двойка възли участва в 0, 1 или 2 специални триъгълника, така че $p_0 + p_1 + p_2$ е всъщност броят на всички ненаредени двойки възли:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{2}((n+1)(n+2) - 1) = \\ &= \frac{1}{8}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n). \end{aligned}$$

б) Имаме $p_1 + 2p_2 = 3S$, където S е броят важни триъгълници, понеже всеки триъгълник е броен по веднъж откъм трите си страни, така че ще търсим S . Ще казваме, че важният триъгълник τ е *базов*, ако страните му са успоредни на тези на триъгълника със страна n и е със същата ориентация. Всеки важен триъгълник τ може да се потопи в единствен базов триъгълник $f(\tau)$, чиито страни минават през върховете на τ . Ако страната на базов триъгълник е равна на $k \in \{1, \dots, n\}$ (броят на тези базови триъгълници е $1 + 2 + \dots + (n+1-k) = \binom{n+2-k}{2}$), то той е равен на $f(\tau)$ за k различни τ (по един за всеки от възлите в основата на $f(\tau)$ без най-десния). Следователно

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{4}.$$

Можем да се уверим в последното равенство така: $\binom{n+3}{4}$ е броят на всички думи с 4 „А“ и $n-1$ „Б“. Ако между крайните „А“ има $n+2-k$ букви ($k \in \{1; \dots; n\}$), то за местата на крайните „А“ има k варианта, при всеки от които за местата на средните „А“ има $\binom{n+2-k}{2}$ варианта.

(Алтернативно, използвайте без доказателство известните формули $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. При използването на други формули за суми следва те да бъдат доказвани.) Окончателно

$$p_1 + 2p_2 = 3S = 3\binom{n+3}{4} = \frac{1}{8}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n).$$

Коментар. От а) и б) следва $p_2 - p_0 = (p_1 + 2p_2) - (p_0 + p_1 + p_2) = 0$, т.е. $p_0 = p_2$. Не ни е известно директно комбинаторно доказателство (напр. със съответствие между двойките от единия тип и двойките от другия) на този факт.

9.1. Всички решения на системата са

$$(x; y) = (1; 1), (-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}).$$

9.2. Използваме стандартните означения α, β, γ за ъглите на ABC . Нека означим $R = DF \cap GE$ и $S = ME \cap DL$. Можем да намерим, че $\sphericalangle DEG = \sphericalangle AEG - \sphericalangle AED = 45 + \frac{\gamma}{2} - (90 - \alpha) = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 45$ и $\sphericalangle EDF = \beta + \frac{\gamma}{2} - 45$, откъдето $\sphericalangle DRE = 90$. С подобно изразяване намираме

$$\sphericalangle SDE = \sphericalangle SDB + \sphericalangle BDE = 45 - \frac{\gamma}{2} + 90 - \beta = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle DEG,$$

$$\sphericalangle SED = 135 - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle BDF \text{ и } \sphericalangle DSE = 90.$$

Оттук лесно получаваме, че $\sphericalangle SDR = \sphericalangle SER = 90$, следователно $DRES$ е правоъгълник и значи P лежи на отсечката RS . Накрая ако означим с K пресечната точка на AB и RS , то с изразяване на ъгли в четириъгълника $BKRE$ намираме

$$\sphericalangle KRE + \sphericalangle REB + \sphericalangle EBK = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} + (45 + \frac{\gamma}{2} + 90) + \beta = 270,$$

следователно $\sphericalangle RKB = 90$ и значи $RS \perp AB$. Тогава перпендикулярът от P към AB съвпада с правата RS , с което завършваме доказателството.

9.3. а) Нека p е просто число, което дели $a+1$ (такова има, тъй като $a+1 > 1$). Понеже $a+1$ е нечетно, то можем да разложим

$$a^{a+1} + 1 = (a+1)(a^a - a^{a-1} + \dots - a + 1).$$

Сега е ясно, че $a^a - a^{a-1} + \dots - a + 1 \equiv (-1)^a - (-1)^{a-1} + \dots - (-1) + 1 \equiv a+1 \equiv 0 \pmod{p}$ и значи $p^2 \mid a^{a+1} + 1$.

б) *Първи начин.* Да забележим, че ако $p \mid a^{a+1} + 1 = (a^{\frac{a+1}{2}})^2 + 1$, то $p \equiv 1 \pmod{4}$. При фиксиран избор на такова p ще построим нечетно a , за което $p^2 \mid a^{a+1} + 1$. Понеже простите числа от вида $4k+1$ са безбройно много и всяко число $a^{a+1} + 1$ има краен брой прости делители, това е достатъчно, за да докажем твърдението.

И така, нека $p \equiv 1 \pmod{4}$ е фиксирано. Ако намерим a , за което $p^2 \mid a^2 + 1$ и $a \equiv 1 \pmod{4}$, то a ще е нечетно и

$$p^2 \mid a^2 + 1 \mid (a^2)^{\frac{a+1}{2}} + 1 = a^{a+1} + 1.$$

За целта първо намираме естествено число x , за което $p \mid x^2 + 1$ (например $x = (\frac{p-1}{2})!$). След това разглеждаме числата

$$x^2 + 1, (x+p)^2 + 1, (x+2p)^2 + 1, \dots, (x+(p-1)p)^2 + 1, \quad (*)$$

всяко от които се дели на p . Ако допуснем, че за някои $k, \ell \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ с $k \neq \ell$ е изпълнено

$$(x+kp)^2 + 1 \equiv (x+\ell p)^2 + 1 \pmod{p^2}$$

ще получим

$$2xkp \equiv 2x\ell p \pmod{p^2}$$

и съответно $k \equiv \ell \pmod{p}$, което е невъзможно.

Това означава, че числата в $(*)$ са сравними в някакъв ред с $p, 2p, 3p, \dots, (p-1)p, p^2$ при деление на p^2 , в частност някое от тях се дели на p^2 и нека го означим с $y^2 + 1$. Накрая нека z е числото измежду $y, y+p^2, y+2p^2, y+3p^2$, което изпълнява $z \equiv 1 \pmod{4}$. Ясно е, че $z^2 + 1 \equiv y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, с което доказателството е завършено.

Втори начин. (Мирослав Маринов, Божидар Димитров) Достатъчно е да докажем, че за безбройно много нечетни a числото

$a^{a+1} + 1$ се дели на 25. Да забележим, че ако a_0 върши работа, то $100k + a_0$ също върши работа за всяко цяло неотрицателно k , понеже $(100k + a_0)^{100k+a_0+1} + 1 \equiv a_0^{100k+a_0+1} + 1 \equiv a_0^{a_0+1} + 1 \pmod{25}$ от теоремата на Ойлер.

И така, задачата се свежда до това да намерим някое нечетно a_0 , за което $25 \mid a_0^{a_0+1} + 1$.

Еквивалентно, $25 \mid a_0^{a_0+1} - 49 = (a_0^{\frac{a_0+1}{2}} + 7)(a_0^{\frac{a_0+1}{2}} - 7)$. Взимайки предвид $7^4 \equiv 1 \pmod{25}$, сега е достатъчно да изберем например $a_0 \equiv 7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2} \equiv 1 \pmod{4}$, т.е. $a_0 = 57$. (Друга възможност е $a_0 \equiv -7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2} \equiv 3 \pmod{4}$, т.е. $a_0 = 93$.)

Задача 9.4. Ще докажем по индукция, че лицето на един обобщен успоредник $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ е равно на сумата от лицата на всички успоредници от вида $MNOP$, където $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ и $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{A_j A_{j+1}}$ за $1 \leq i < j \leq n$.

Базовата стъпка се проверява лесно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички обобщени $(2n-2)$ -успоредници и нека разгледаме един обобщен $2n$ -успоредник $A_1 A_2 \dots A_{2n}$.

Имаме $\overrightarrow{A_{2n-1} A_{2n}} = -\overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \vec{v}$.

Да транслираме точките $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{2n-1}$ с $\vec{v}$. Получаваме нови точки $A'_n, A'_{n+1}, \dots, A'_{2n-1}$, за които $A'_n = A_{n-1}$ и $A'_{2n-1} = A_{2n}$. Ясно е, че фигурата $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A'_{n+1} \dots A'_{2n-1}$ е обобщен $(2n-2)$ -успоредник и за него е изпълнена индукционната хипотеза. Останалата част от първоначалния $2n$ -успоредник $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ е съставена точно от успоредниците $A_{n+k} A_{n+k+1} A'_{n+k+1} A'_{n+k}$ за $0 \leq k \leq n-2$, всеки от които има страна $A_{n+k} A'_{n+k}$, успоредна на $A_{n-1} A_n$. Тогава общият брой успоредници, съставляващи $A_1 A_2 \dots A_{2n}$, е точно $\binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n}{2}$, с което индукционната стъпка е завършена.

Накрая да забележим, че лицето на успоредник, чиито върхове имат целочислени координати, е поне 1 (например чрез формулата на Пик). Понеже лицето на обобщен $2n$ -успоредник е равно на сбора от лицата на $\binom{n}{2}$ успоредници, които го съставят, то неговото лице е поне $\binom{n}{2}$. За $n = 25$ имаме $\binom{25}{2} = 300$, с което задачата е решена.

Коментар. Формулата за лице на обобщения успоредник няма

нужда от целочисленост на координатите. Формулата на Пик може да се използва свободно без доказателство, както и общата формула за лице на изпъкнал многоъгълник чрез декартовите координати на страните му. Доказаната граница е класическа, но не е много точна. Има различни други граници свързани със задачата за минимално лице на многоъгълници с целочислени координати, както и редица отворени проблеми.

10.1. Четирите решения на задачата са

$$(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1, \sqrt{7} \mp 1); (x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \mp 1).$$

10.2. От свойството на ъглополовящата и факта, че $BM = MC$, получаваме

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC}$$

и от теоремата на Талес $PQ \parallel BC$. Следователно $\sphericalangle BLP = \sphericalangle LPQ = \varphi$. Нека ω е описаната окръжност около триъгълника APQ . Нека ω се допира до BC в точка L' . Тогава

$$\sphericalangle L'QP = \sphericalangle BL'P = \sphericalangle L'PQ,$$

т.е. L' е средата на дъгата $\widehat{PQ}$ от ω . Следователно AL' е ъглополовящата на $\sphericalangle PAQ$, т.е. $L' \equiv L$.

Нека $L \in \omega$. Тогава понеже AL е ъглополовяща на $\sphericalangle PAQ$, то $PL = LQ$, откъдето

$$\sphericalangle PQL = \sphericalangle LPQ = \sphericalangle BLP = \varphi.$$

Последното означава, че ω се допира до BC .

10.3. Очевидно $P \equiv 0$ върши работа. Ще покажем, че други P няма. Да забележим, че $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ за всеки две естествени n и k , за които $n \in [k^2, k^2 + 2k]$. Да фиксираме естествено число $m \geq N$ и просто число p . Да положим в горното $k = p - 1 + m$ и да разгледаме интервала $[k^2, k^2 + 2k]$. Той има дължина $2k > p$, следователно в него съществува естествено число $n \equiv -2^m \pmod{p}$. Тогава от теоремата на Ферма получаваме

$$n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = n + 2^k \equiv -2^m + 2^{p-1+m} \equiv 0 \pmod{p}$$

Следователно $p \mid P(n)$. Понеже P е полином с цели коефициенти,

$$P(-2^m) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod{p}$$

Така $p \mid P(-2^m)$ за всяко просто число p . Следователно $P(-2^m) = 0$ за всяко естествено число $m \geq N$. Това значи, че $P \equiv 0$, с което решението е завършено.

10.4. Ще докажем, че Борис има печеливша стратегия при $k \leq 2$ и всякакъв граф G , както и при $k \geq 3$, когато в G няма цикли.

Ще започнем решението със следните две лема.

Лема 1. Нека G е ориентиран граф с n върха, в който няма цикли. Тогава можем да номерираме върховете му с естествените числа от 1 до n така, че ако за някои два върха x и y с номера i и j съответно има ребро $x \rightarrow y$, то непременно $i < j$.

Ще използваме индукция по n . При $n = 2$ твърдението е тривиално. Нека сега исканото е в сила за всеки граф с по-малко от n върха. Ако допуснем, че от всеки връх в G излиза поне по едно ребро, то бихме получили цикъл, което е противоречие. Значи съществува връх v , от който не излизат ребра. Номерираме него с n , а останалите върхове номерираме съгласно индуктивната хипотеза за графа $G_1 := G \setminus \{v\}$ (понеже в G няма цикли, то и в G_1 няма). Това гарантира, че условието за ребрата в G_1 се изпълнява. Останалите ребра са от вида $u \rightarrow v$, но номерът на v е най-големият възможен (n), значи и за тях исканото е в сила. С това лемата е доказана.

Лема 2. Нека G е пълен ориентиран граф с n върха, в който има поне един цикъл. Тогава в G има цикъл с дължина 3.

Да допуснем противното и да разгледаме цикъл $v_1 v_2 \dots v_k v_1$ с минимална дължина $k \geq 4$. Ако има ребро $v_3 \rightarrow v_1$, то $v_1 v_2 v_3 v_1$ е цикъл с дължина $3 < k$, което е противоречие. Значи имаме реброто $v_1 \rightarrow v_3$; сега обаче $v_1 v_3 \dots v_k v_1$ е цикъл с дължина $k - 1 < k$, което отново е противоречие. Следователно в G има цикъл с дължина 3, с което лемата е доказана.

Сега да пристъпим към решението. Ако $k \geq 3$ и в G има цикъл, то съгласно Лема 2 в G има цикъл C с дължина 3. Значи Ангел може да оцвети C и още произволни $k - 3$ ребра в червено и да постави пула в един от върховете на C . Понеже Борис не може да промени ориентацията на ребрата на този цикъл, то Ангел може да направи неограничен брой ходове, което го прави победител.

Нека сега е вярно, че в G или няма цикъл, или $k \leq 2$. Ще докажем, че и в двата случая Борис може след краен брой промени (възможно нула) да приведе G в граф, който може да бъде номериран със свойството в Лема 1. В първия случай това следва директно от лемата, остава да го проверим за $k \leq 2$. Да разгледаме червените

ребра, които Ангел оцветява. Понеже те двете не образуват цикъл, то можем да номерираме участващите в тях върхове по желания начин. Останалите върхове в G номерираме по произволен начин и докато има ребра от вида $i \rightarrow j$, където $i > j$, Борис променя тяхната ориентация. Така получихме пълен ориентиран граф H с върхове числата от 1 до 2024 и ребра $i \rightarrow j$ за всеки $1 \leq i < j \leq 2024$. Нека след преместването от страна на Ангел пулът се намира във връх n . Разделяме върховете на H на 2 групи по следния начин:

$$A = \{1, 2, \dots, 1000\}; \quad B = \{1001, 1002, \dots, 2024\}.$$

Да забележим, че ако ребрата, излизащи от върха, в който се намира пулът (в случая се намира в n) преди хода на Ангел, са само към такива с по-голям номер, то непременно върхът, в който пулът бива преместен, има по-голям номер. Остава да покажем, че Борис може да поддържа това свойство в сила.

Ребрата между двойка върхове от една и съща група са повече от 10^5 и за двете групи, следователно и в двете групи има поне по едно ребро, което не е червено – нека това са $a = a_1 \rightarrow a_2$ (респективно от върхове в A) и $b = b_1 \rightarrow b_2$ (респективно от върхове в B). Действаме по следния начин:

- ако пулът е във връх от A , променяме b ;
- ако пулът е във връх от $B \setminus \{b_2\}$, променяме a ;
- ако пулът е във b_2 и имаме реброто $b_1 \rightarrow b_2$, променяме a ;
- ако пулът е във b_2 и имаме реброто $b_2 \rightarrow b_1$, променяме b .

Лесно се съобразява, че исканото се изпълнява при тази стратегия.

11.1. Тъй като

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = (x-1)(x^2 - (a+1)x - 2a + 1),$$

то $x_1 = 1$, а x_2 и x_3 са корени на $f(x) = x^2 - (a+1)x - 2a + 1 = 0$. Тъй като $x_2 + x_3 = a + 1$, то за дадената аритметична прогресия, с точност до симетрия, има две възможности – $x_2, 1, a, x_3$ или $1, x_2, x_3, a$.

В първия случай $x_2 = 2 - a$ и след заместване в уравнението получаваме

$$f(2-a) = 0 \iff 2a^2 - 7a + 3 = 0$$

с корени $a = 3$ и $a = \frac{1}{2}$.

Във втория случай $d = x_2 - 1$, като $x_2 = \frac{a+2}{3}$ и получаваме

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right) = 0 \iff 2a^2 + 23a - 7 = 0,$$

с корени $a = \frac{-23 + \sqrt{585}}{4}$ и $a = \frac{-23 - \sqrt{585}}{4}$.

11.2. Първи начин. От условието следва, че $\sphericalangle B = 60^\circ$. Тогава $\sphericalangle AIC = 120^\circ$ и ако P е симетричната на I спрямо AC , то $\sphericalangle APC = 120^\circ$. Това означава, че P е върху описаната около ABC окръжност. Тъй като симетричната на H спрямо AC също лежи на описаната окръжност (означаваме тази точка с Q), то $QHPI$ е равнобедрен трапец. Следователно $\sphericalangle PQH = \sphericalangle IHQ = 120^\circ$.

Четириъгълникът $QBCP$ е вписан в окръжност, откъдето получаваме $\sphericalangle PCB = 180^\circ - \sphericalangle BQP = 60^\circ$. Понеже $\sphericalangle BCI = \sphericalangle ICA = \sphericalangle ACP$, получаваме $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 80^\circ$.

Втори начин. (Б. Димитров) Ще използваме стандартно означение за ъглите на триъгълника ABC . Тогава от даденото условие получаваме $2\beta = \alpha + \gamma$, т.е. $\beta = 60^\circ$. Ще решим задачата за остроъгълен триъгълник (когато $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, разсъжденията са аналогични). Имаме $\sphericalangle ANC = \sphericalangle AIC = 120^\circ$, откъдето четириъгълникът $ANIC$ е вписан. Сега

$$\begin{aligned} 180 - \alpha &= \sphericalangle BNC = \sphericalangle BHI + \sphericalangle INC = \\ &= 60^\circ + \sphericalangle IAC = 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 80^\circ \end{aligned}$$

От последното получаваме $\gamma = 40^\circ$

11.3. Нека X е множеството от n точки. За изпъкнали многоъгълник P с върхове в X да означим с $C(P)$ множеството от точки в X , които са вътре или на контура на P . Нека Q е общият брой бонбони, получени от всички ученици, а m е броят бонбони, получени от нещастен ученик. Имаме

$$Q = \sum_P |C(P)|^2 \leq \sum_{A \subset X} |A|^2 = \sum_{k=3}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Първото неравенство е в сила, защото $P \rightarrow C(P)$ е инекция от множеството на изпъкналите многоъгълници с върхове в X към множеството от всички подмножества на X . Използвайки $\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$

и $\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$, пресмятаме:

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{k=3}^n k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=3}^n k \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \sum_{k=3}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=3}^n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n(n-1) \sum_{k=3}^n \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=3}^n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n(n-1)(2^{n-2} - 1) + n(2^{n-1} - (n-1) - 1) \\
 &= n(n+1)2^{n-2} - 2n(n-1) - n \quad (1).
 \end{aligned}$$

От (1) следва

$$m \leq (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$$

Да разположим сега учениците във върховете на правилен n -ъгълник. Тогава за всяко $A \subset X$, изпъкналата обвивка на A се състои от всички върхове на A . Значи в (1) равенството се достига и $Q = n(n+1)2^{n-2} - n - 2n(n-1)$. От друга страна поради симетрията всеки ученик получава равен брой бонбони и значи $m = Q/n = (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$.

11.4. Нека означим

$$S = \sum_{i=1}^n a_i; \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Тъй като a_i и a_i^2 са от еднаква четност, то S и Q също са от еднаква четност. Щом Q дели $S^2 - 2025$, то S и Q са нечетни. Но тогава $S^2 - 2025 = (S - 45)(S + 45)$ се дели на 8 и понеже Q е нечетно, получаваме

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2025}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq 8.$$

От друга страна от неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме:

$$nQ \geq S^2 > S^2 - 2025 \geq 8Q,$$

следователно $n > 8$, значи $n \geq 9$. Ще докажем, че за $n = 9$ е възможно да удовлетворим условията. Искаме да намерим решение на

уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$, тъй като знаем, че ако изразът има стойност, различна от 8, то $n > 16$. Целейки симетрия, нека положим $(a_1, a_2, a_3) = (x - 1, x, x + 1)$, $(a_4, a_5, a_6) = (y - 1, y, y + 1)$ и $(a_7, a_8, a_9) = (z - 1, z, z + 1)$ за естествени числа x, y и z . Тогава можем да пренапишем уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$ като

$$(3x + 3y + 3z)^2 - 2025 = 8(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6).$$

Разделяйки двете страни на 3 и разлагайки лявата страна, получаваме:

$$3(x + y + z - 15)(x + y + z + 15) = 8(x^2 + y^2 + z^2 + 2).$$

От съображения по модул 3 за дясната страна, точно едно от числата x, y и z не е кратно на 3. Нека $x = 3u + 1, y = 3v, z = 3w$ за $u, v, w \in \mathbb{N}$ (избрахме $x = 3u + 1$, но решения могат да се намерят и в случая $x = 3u + 2$). Пренаписвайки уравнението отново, получаваме:

$$(3u + 3v + 3w - 14)(3u + 3v + 3w + 16) = 8(3u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2u + 1).$$

Можем да забележим, че $u \equiv 2 \pmod{3}$, разглеждайки уравнението отново по модул 3. При $u = 2$ уравнението е еквивалентно на

$$3(v - w)^2 + \frac{1}{2}(2v - 7)^2 + \frac{1}{2}(2w - 7)^2 + 55 = 0.$$

Последното няма решения, понеже лявата страна е положителна, а при $u = 5$ намираме $(v; w) = (7; 10)$, което води до решението

$$(a_1, a_2, \dots, a_9) = (15, 16, 17, 20, 21, 22, 29, 30, 31).$$

12.1. Нека първо $c > \frac{1}{16}$. Тогава имаме

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{16} + \frac{a_n}{2} + c - \frac{1}{16} \geq a_n + \left(c - \frac{1}{16}\right),$$

т.к. $x^2 + \frac{1}{16} \geq \frac{x}{2}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Така получаваме, че

$$a_n \geq c + (n - 1) \left(c - \frac{1}{16}\right) \quad \text{за } n \in \mathbb{N},$$

те редицата е неограничена и следователно не е сходяща.

Обратно, нека $c \leq \frac{1}{16}$. Ще докажем с индукция по n , че за всяко

$n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \geq a_{n-1}$ и $a_n \leq l$, където l е по-малкият корен на уравнението $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + c = 0$.

За $n = 0$ е ясно, че $a_1 > c = a_0$, а т.к $f(c) = c^2 + \frac{c}{2} > 0$ и c е по-малко от поне един от двата корена на f (това е вярно т.к уравнението има поне един корен по-голям от $1/4$ от формулите на Виет) то следва, че $c < l$.

Ако допуснем, че твърдението е вярно за n , то т.к имаме $a_{n+1} - a_n = f(a_n)$, получаваме, че $f(a_n) > 0$, понеже $a_n < l$. Също така имаме, че

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \leq l^2 + \frac{l}{2} + c = l,$$

където първото неравенство следва, т.к $x \mapsto x^2 + \frac{x}{2}$ е растяща в $(0, 1)$, а последното равенство следва от $f(l) = 0$. Така индукцията е завършена откъдето следва, че a_n е растяща и ограничена, следователно сходяща. Ако t е границата ѝ, то $f(t) = 0$ и т.к $a_n < l$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то получаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - c}.$$

12.2. Нека l_A е правата през A , перпендикулярна на AX и нека l_B, l_C са дефинирани аналогично. Нека $l_B \cap l_C = A_1$, $l_C \cap l_A = B_1$ и $l_A \cap l_B = C_1$. Имаме, че A_1S_A е вътрешната ъглополовяща на $\sphericalangle B_1A_1C_1$, т.к $A_1 \in (BXC)$. Така получаваме, че правите A_1S_A, B_1S_B, C_1S_C се пресичат в точка I , където I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle A_1B_1C_1$. Също така имаме, че A_1X е диаметър в (BXC) , следователно $\sphericalangle IS_AX = 90^\circ$, т.е S_A лежи на окръжността с диаметър IX . Аналогично получаваме, че точките S_B и S_C лежат на същата окръжност, с което задачата е решена.

12.3. *Първи начин.* За $n = 2$ твърдението се проверява директно. Нататък ще считаме, че $n \geq 3$ и $m \geq 7$. Да отбележим, че m се среща в някоя от групите, така че $mn \leq \sum_{d|m} d$. Нека $k \in (m/3, m/2)$ е естествено число (такова има поради $m \geq 7$). Тогава

$$mn \leq \sum_{d|m} d = \sum_{d|m} \frac{m}{d} \leq m \left(\sum_{d \leq m, d|m} \frac{1}{d} \right)$$

$$\leq m \left(\sum_{d \leq m/2, d|m} \frac{1}{d} \right) + 1 \leq m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right) - \frac{m}{k} + 1 < m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right),$$

понеже m няма делители между $\frac{m}{2}$ и m и т.к k не дели m .

От друга страна, ако $t \in \mathbb{N}$ е такова, че $2^t \leq m < 2^{t+1}$, то

$$\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \leq \sum_{d < 2^t} \frac{1}{d} = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{d} \leq \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{2^s} = t$$

Така получаваме, че $t > n$, откъдето следва, че $m \geq 2^{n+1}$.

Коментар. Оценката не е точна, може да се покаже, че $\sum_{d|m} d = O(m \log \log m)$. Ето един възможен начин:

Втори начин. (Драгомир Грозев) Да означим с $s(x)$ сумата от делителите на $x \in \mathbb{N}$. Имаме $s(m) \geq mn$. Нека $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, където p_i са различни прости числа и $a_i \geq 1$. Имаме

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^j},$$

защото всеки делител на m присъства в дясната страна. И така,

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i - 1} \right) \leq m \cdot \exp \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i - 1} \right).$$

Тук използвахме неравенството $1 + x \leq e^x$. Нататък,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i - 1} \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{q_i - 1} \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} < \ln(k+1) \quad (1),$$

където $q_1, q_2, \dots, q_k$ са първите k прости числа. Това дава

$$mn \leq s(m) < m(k+1) \text{ или } k > n-1,$$

значи $k \geq n$. При $n \geq 3$ получаваме

$$m \geq \prod_{i=1}^k q_i \geq 2 \cdot 3 \cdot 5^{k-2} \geq 6 \cdot 5^{n-2} > 5^{n-1} > 2^{n+1}.$$

При $n = 2$ имаме $k \geq 2$ и $m \geq 2 \cdot 3 = 6$. Вижда се, че $n = 2, m = 6$ възможно, другите опции са $n = 2, m \geq 12$ (ако въобще има такива.)

Коментар. Оценката в (1), може да се подобри така

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{q_i - 1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{q_k} \leq 1 + 1 + \ln \ln k.$$

Така получаваме, $mn \leq s(m) \leq me^2 \ln k$, значи $\ln k \geq n/e^2$, $k \geq e^{n/9}$ и

$$m \geq \prod_{i=1}^k q_i \geq 2^k \geq 2^{e^{n/9}}.$$

Също може да се докаже, че

$$\sum_{d|m} d \leq H_m + \log H_m e^{H_m}, \quad \text{където} \quad H_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i}.$$

12.4. Да разгледаме следната фигура M , получена чрез залепяне на 2 копия на L .



Имаме, че M се съдържа в правоъгълник с размери 1×9 и заема повече от $17/18$ от лицето му. Нека S е множество от 18 точки в равнината и нека C е случайно покриване на равнината с правоъгълници 1×9 . По-конкретно фиксираме покриване A на равнината с правоъгълници 1×9 и избираме $X \sim U[0, 9]$, $Y \sim U[0, 1]$, а след това получаваме C като транслираме A с X единици в x направление и Y единици в y направление. Всяко такова покриване на равнината дава еднозначно определено покритие на част от равнината с копия на M .

Да отбележим, че за всяка точка $s \in S$ имаме

$$\mathbb{P}(s \text{ е покрита от някое копие на } M) > 17/18.$$

Така получаваме, че $\mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копие на } M) < \frac{1}{18}$. Следователно

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists s \in S : s \text{ не е покрита от копие на } M) \\ & \leq \sum_{s \in S} \mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копие на } M) < |S|/18 = 1, \end{aligned}$$

откъдето следва, че съществува покриване на равнината, за което всяка точка от S е покрита от някое копие на M .

Ученическо творчество

АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9.3 ОТ ЕМТ

ЙОАНА МЛАДЕНОВА, СМГ

В темата за 9. клас на Есенния математически турнир беше предложена следната задача.

Едно естествено число наричаме *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на никое просто число. За естествено число a разглеждаме числото $f(a) = a^{a+1} + 1$. Докажете, че съществуват безбройно много нечетни a , за които $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Разглеждаме негативното уравнение на Пел

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Фундаменталното му решение е $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Известно е, че ако

$$(1 + \sqrt{2})^{2n-1} = A + B\sqrt{2},$$

то $(x, y) = (x_n, y_n) = (A, B)$ е решение на това уравнение на Пел.

Ще докажем, че за нечетно n е вярно, че

$$x_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Имаме

$$(1 + \sqrt{2})^{2n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} (\sqrt{2})^i, \quad A = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} 2^k.$$

Тъй като при $k \geq 2$ събираемите $\binom{2n-1}{2k} 2^k$ се делят на 4, то

$$A \equiv 2^0 + 2 \binom{2n-1}{2} \pmod{4},$$

т.е.

$$A \equiv 1 + (2n-1)(2n-2) = 4n^2 - 6n + 3 \equiv -2n + 3 \pmod{4}.$$

Когато n е нечетно, $-2n + 3 \equiv 1 \pmod{4}$, следователно

$$x_{2m+1} \equiv 1 \pmod{4}$$

за всяко естествено число m .

Ще наричаме числото a *добро*, ако $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Ще докажем, че $a = x_{2m+1}$ е добро за всяко естествено m .

Тъй като $x_{2m+1} \equiv 1 \pmod{4}$, то $x_{2m+1} = 4k + 1$ и

$$f(x_{2m+1}) = ((4k+1)^2)^{2k+1} + 1,$$

значи

$$(4k+1)^2 + 1 \text{ дели } f(x_{2m+1}),$$

т.е.

$$x_{2m+1}^2 + 1 \text{ дели } f(x_{2m+1}).$$

Но $x_{2m+1}^2 + 1 = 2y_{2m+1}^2$, следователно

$$2y_{2m+1}^2 \text{ дели } f(x_{2m+1}).$$

Но

$$2y_{2m+1} \geq y_3 > 1,$$

следователно съществува просто число p , което дели y_{2m+1} и следователно

$$p^2 \text{ дели } 2y_{2m+1}^2,$$

откъдето

$$p^2 \text{ дели } f(x_{2m+1}),$$

т.е. $f(x_{2m+1})$ не е свободно от квадрати.

Така доказахме, че съществуват безброй много добри a , а именно тези от вида x_{2m+1} за всяко естествено число m .



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2023 г. и бр. 1, 2, 3 и 4 от 2024 г. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпрацвайте на e-mail: nevenasybeva@gmail.com.

* * *

Задача 1. По колко различни начина може да се сглоби правоъгълник с една плочка 1×1 , една плочка 1×2 , една плочка 1×3 , една плочка 1×4 и една плочка 1×5 ?

Задача 2. Колко естествени числа n , по-малки от 1000, имат свойството, че най-малкото общо кратно на n и 9 е точен квадрат?

Задача 3. Ненулевите цифри E , I , L и V не са непременно различни и четирицифреното число $EVIL$ се дели на 73, а четирицифреното число $VILE$ се дели на 74. Кое е четирицифреното число $LIVE$?

Срокът за представяне на решенията е 28.02.2025 г.

**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 4/2024 г.**

Задача 1. В началото на седмицата Коко имал няколко кутии с различен ненулев брой стъклени топчета. В понеделник добавил едно топче във всяка кутия. Във вторник той проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 2 и добавил по едно топче само в тях. В сряда проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 3 и добавил по едно топче само в тях. Коко продължил по същия начин, като в неделя проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 7 и добавил по едно топче само в тях. След това се оказало, че има няколко кутии с точно 50 топчета в тях.

Най-много колко кутии с точно 50 топчета може да има Коко?

Решение. Ако в неделя в кутията има 50 топчета, в понеделник е имало най-малко 43 и най-много 49. С непосредствена проверка намираме, че в понеделник може да е имало 47 или 48 топчета. Тъй като в кутиите първоначално има различен брой топчета, Коко може да има най-много две кутии с 50 топчета.

Задача 2. Сапо взел един дървен куб и го потопил изцяло в синя боя. Когато кубът изсъхнал, Сапо го разрязал на 27 еднакви кубчета и подредил тези 27 кубчета в кула $27 \times 1 \times 1$. Най-много колко от 110-те външни стени на кубчета от кулата са сини?

Решение. Всички сини стени са $6 \cdot 3^2 = 54$. Ъгловите кубчета са по три сини стени са общо 8. Ако две от тях са крайни в кулата, може да се поставят така, че и трите им сини стени да са външни. Както и да се разположат останалите 6 ъглови кубчета, само по две техни сини стени ще са външни. Следователно най-много $54 - 6 = 48$ външни стени на кубчета от кулата са сини.

Задача 3. Миро записал 88 четворки в един ред:

$$4444 \cdot \cdot \cdot 4444$$

Той изписвал четворките като знак плюс с наклонена черта в горния ляв ъгъл. Ако се изтрие тази черта, четворката се превръща в плюс.

$$4+44444+44+ \cdot \cdot \cdot 4+4+4444$$

Миро превърнал някои четворки в плюс и получил израз със стойност 4444, който не започва и не завършва с плюс и няма два плюса един до друг. Колко четворки Миро е превърнал в плюсове?

Решение. Нека в получения сбор има x на брой събираеми 444, y на брой събираеми 44 и z на брой събираеми 4. Тогава всички събираеми са

$$x + y + z$$

на брой и между тях има

$$x + y + z - 1$$

на брой знака плюс; търсим

$$x + y + z - 1.$$

От една страна, общият брой на четворките отначало е 48, следователно

$$3x + 2y + z + (x + y + z - 1) = 88 \iff 4x + 3y + 2z = 89.$$

От друга страна,

$$444x + 44y + 4z = 4444 \iff 222x + 22y + 2z = 2222.$$

Като извадим двете получени равенства, стигаме до диофантовото уравнение

$$218x + 19y = 2133.$$

Като го запишем във вида

$$19(12x + y - 112) = 5(2x + 1),$$

получаваме, че $2x + 1$ се дели на 19. Но x не надхвърля $4444 : 444$, т.е. 10, и намираме единствената възможна стойност $x = 9$. Тогава $y = 9$, $z = 13$ и броят на плюсовете е

$$x + y + z - 1 = 30.$$



**XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ
„СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“**

ЙОАН ВАСИЛЕВ, ГАЛИНА ВЪЛКАНОВА, ПМГ БУРГАС

Модул 1

1. Пресметнете $15 + \left| -1\frac{1}{11} \right| + (-10) : (-(-110))$.

А) $-15\frac{2}{11}$

Б) 16

В) 17

Г) $14\frac{10}{11}$

2. Даден е едночленът $A = 3x^4y^5a^{-2}z^6xzy$, в който x, y, z – променливи; a е число, различно от нула. На колко е равна степента на A ?

А) 17

Б) 19

В) 20

Г) 21

3. Кой многочлен представлява нормалния вид на $B = (3x - 5)^3$?

А) $27x^3 - 225x^2 + 135x - 125$

Б) $125 - 225x + 135x^2 - 27x^3$

В) $27x^3 - 135x + 225x^2 - 135$

Г) $27x^3 - 135x^2 + 225x - 125$

4. Ако трима математици за 8 минути решават 25 задачи, то за колко време 16 математици ще решат 150 задачи?

А) 27

Б) 18

В) 9

Г) 3

5. Мария отишла на пазар с a^2 лева. Тя си купила 5 книги, като всяка струвала по a лева, и 2 настолни игри, като всяка струвала по $(2a - 4)$ лева. Да се изрази като многочлен в нормален вид рестото на Мария.

А) $a^2 - 9a + 8$

Б) $a^2 - 9a - 8$

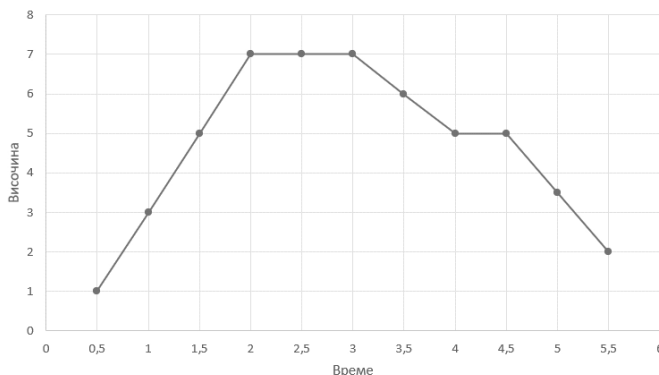
В) $a^2 + a + 8$

Г) $a^2 + 9a + 8$

6. В правоъгълна координатна система са дадени точки $A(a; b)$, $B(-2a; -|-3b|)$. Ако знаете, че т. A се намира във втори квадрант, то в кой квадрант се намира точка B ?

- А) I Б) II В) III Г) IV

7. На графиката е дадено движението на туристи по планина. С колко часа времето за слизание е било повече от времето за изкачване?



- А) 0,5 Б) 1 В) 1,5 Г) 2,5

8. Кое уравнение няма решение?

- А) $2024x = 0$ Б) $x + 1 = 3x$
 В) $x - 2 = 3x - 6$ Г) $4x = 2^2 \cdot x + 1$

9. Даден е многочленът

$$A = ax^2 + bx + c,$$

където x е променлива. Коефициентът пред едночлена от втора степен на A е 5. Свободният му член е с (-3) по-малък от коефициента пред най-високата степен на A . Ако числената му стойност при $x = -3$ е 8, то кой е този многочлен?

- А) $5x^2 - 15x + 8$ Б) $5x^2 + 15x + 8$
 В) $5x^2 - 13x + 2$ Г) $5x^2 + 13x + 2$

10. Да се намери $C + D$, ако $C = \frac{2024^3 - 2021^3}{2024^2 + 2024 \cdot 2021 + 2021^2}$, а

$$D = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}.$$

- А) 3 Б) 3,5 В) 2,5 Г) 2

11. Да се намери числената стойност на израза $x^2 + \frac{1}{x^2}$, ако $x + \frac{1}{x} = 6$.

- А) 36 Б) -36 В) 34 Г) -34

12. Кой израз е тъждествено равен на $4z^2 - y^2 - 8yz - 16z^2$?

- А) $(6z + y^2)(2z - y^2)$ Б) $(2z - y)(6z + y)$
В) $-(2z + y)(6z + y)$ Г) $(2z - y - 4z^2)(2z + y + 4z^2)$

13. За прав кръгов цилиндър е известно, че обиколката на основата му, измерена в сантиметри, е 3 пъти по-малка от околната му повърхнина. Ако $r : l = 7 : 6$, то да се намери пълната повърхнина на цилиндъра $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$.

- А) $14,3 \text{ m}^2$ Б) $28,6 \text{ dm}^2$ В) 143 cm^2 Г) 1430 mm^2

14. Магдалена решила да тренира състезателно гребане с лодка. Отишла до най-близката река, която била дълга 75 km. Днес по течението на реката тя изминала разстоянието за 3 часа, а на връщане – за 5 часа. Намерете скоростта на течението на реката.

- А) 2 km/h Б) 3 km/h В) 5 km/h Г) 10 km/h

15. В закусвалня има 3 вида закуски – кашкавалки, милинки и банички. Кашкавалките са 15, а милинките са два пъти по-малко от баничките. Ако общият брой на закуските е 51, то каква е вероятността Нели да си купи баничка?

- А) $\frac{5}{17}$ Б) $\frac{8}{17}$ В) $\frac{4}{17}$ Г) 1

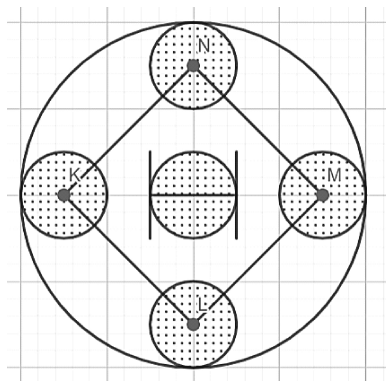
16. Коя е най-голямата стойност на многочлена $-x^2 - 12x + 1$?

- А) 37 Б) 36 В) 38 Г) 1

17. Даден е многочлен $(2ax + 1)^2 - 4(3x + a)^2$, в който x е променлива. За коя стойност на числото a сборът от коефициентите в нормалния му вид е равен на 0?

- А) -3 Б) -1,75 В) 1,75 Г) 3

18. Динко решил да направи лого на математическото състезание „Св. Николай Чудотворец“, като използвал 5 малки еднакви заштриховани кръга, един квадрат и една окръжност. Да се намери каква част от лицето на квадрата $KLMN$ е лицето на заштрихованите части, ако радиусът на един кръг е 7mm ($\pi \approx \frac{22}{7}$).



А) $\frac{55}{63}$

Б) $\frac{110}{441}$

В) $\frac{44}{63}$

Г) $\frac{20}{21}$

19. Кое число е решение на уравнението

$$2x(2x - 1)(2x + 1) + x(5 + x - 8x^2) = (x + 1)(x + 3)?$$

А) Няма решение

Б) 0

В) 3

Г) -3

20. Ако в правоъгълен триъгълник катетът a е равен на

$$\frac{2^{17} - 2^{16} + 3 \cdot 2^{15}}{2^{14} - 2^{13} - 2^{12}} \text{ cm}$$

и хипотенузата c в cm е най-големият прост делител на 2870, то намерете лицето му.

А) 180 cm^2

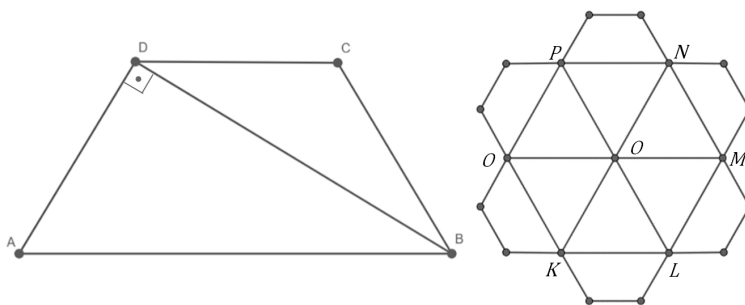
Б) 360 cm^2

В) 90 cm^2

Г) 60 cm^2

Модул 2

21. За Коледа компания за играчки решила да произведе коледни снежинки, направени от два вида фигури – равнобедрени трапеци (всички са с размерите на дадения $ABCD$) и правилни шестоъгълници. Първо се изработва тялото на снежинката – шестоъгълника $KLMNPQ$, а върху всяка от външните му страни се поставя по един трапец от вида $ABCD$, както е показано на чертежа.



За трапеца $ABCD$ се знае, че $\triangle ABD$ е правоъгълен, като $AD = 6$ cm; $AB = 10$ cm, $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ и малката му основа $CD = 2,8$ cm.

А) Намерете лицето на трапеца $ABCD$.

Б) Разстоянието от центъра O на шестоъгълника до всяка от страните му, е с дължина, равна на диагонала BD на трапеца. Да се намери лицето на снежинката.

22. Дадени са многочленът

$$A = (x + 2a)^2 + (2x - 3a)(3a + 2x) + 4(x + a)(x^2 - ax + a^2),$$

където a е число, и уравнението

$$\frac{-2y + 7}{3} + \frac{4y + 1}{-4} = \frac{5y - 3}{6} - 2\frac{5}{12}.$$

А) Приведете многочлена A в нормален вид.

Б) Решете уравнението.

В) Полученото решение в Б) заместете на мястото на a в многочлена A . От получения израз извадете $17x^2 + 12$. Ще се получи многочлен B . Разложете многочлена B на множители.

23. На екскурзия по време на горско училище учениците от 7А клас посетили 3 различни гори.

А) Във всяка от тях те видели по един пън и преброили кръговете му. Дървото в първата гора имало с 15% повече кръгове от дървото във втората гора, а дървото във втората гора имало с 25% повече кръгове от дървото в третата гора. Ако общият брой на кръговете от трите дървета е 354, то да се намери разликата между броя кръгове на първото и третото дърво.

Б) Дебелината на кръговете на едно дърво зависи от температурата и влажността през годината. Формулата за дебелината е следната:

$$\text{Дебелина} = \frac{\text{Средна годишна температура} + \text{Средна годишна влажност}}{10} \text{ mm.}$$

По-долу в таблицата са дадени средните температури за всеки месец в първата гора за миналата година:

Месец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Градуси °C	-3	-2	4	12	18	23	28	30	22	18	15	3

Дебелината на кръга на първия пън за миналата година е 1,446 mm. Колко процента е средната годишна влажност през изминалата година?

Модул 1 – отговори

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б)	Б)	Г)	В)	А)	Г)	А)	Г)	Б)	Б)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В)	В)	В)	В)	Б)	А)	Б)	А)	Г)	А)

Модул 2 – решения

21. А) $AD = 6$ cm; $AB = 10$ cm; $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, следователно $AD^2 + BD^2 = AB^2$; $6^2 + BD^2 = 10^2$; $36 + BD^2 = 100$; $BD^2 = 64 = 8^2$
 $\Rightarrow BD = 8$, $BD > 0 \Rightarrow S_{ABD} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{AD \cdot BD}{2}$; $\frac{10 \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2}$;
 $10h = 48$; $h = 4,8$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(10 + 2,8)}{2} \cdot 4,8$; $S_{ABCD} = \frac{12,8}{2} \cdot 4,8$;
 $S_{ABCD} = 6,4 \cdot 4,8$; $S_{ABCD} = 30,72$ cm².

Б) Разстоянието от O до всяка страна на шестоъгълника е колкото диагонала BD на трапеца $\Rightarrow a = 8$, a – апотемата на шестоъгълника $\Rightarrow S_{\text{фигурата}} = S_{KLMNPQ} + 6 \cdot S_{ABCD} \Rightarrow S = \frac{P \cdot a}{2} + 6 \cdot 30,72 \Rightarrow$
 $S_{\text{фигурата}} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8}{2} + 184,32 \Rightarrow S_{\text{фигурата}} = 240 + 184,32 = 424,32$.

22. А) $A = (x + 2a)^2 + (2x - 3a)(3a + 2x) + 4(x + a)(x^2 - ax + a^2) \Rightarrow$
 $A = x^2 + 4ax + 4a^2 + 4x^2 - 9a^2 + 4(x^3 + a^3) \Rightarrow$
 $A = 5x^2 + 4ax - 5a^2 + 4x^3 + 4a^3 \Rightarrow A = 4x^3 + 5x^2 + 4ax - 5a^2 + 4a^3$.

$$\text{Б)} \quad \frac{-2y+7}{3} + \frac{4y+1}{-4} = \frac{5y-3}{6} - 2\frac{5}{12}$$

Умножаваме двете страни на равенството по 12 и получаваме

$$\begin{aligned}
4(-2y + 7) + (-3)(4y + 1) &= 2(5y - 3) - 29 \Rightarrow \\
-8y + 28 - 12y - 3 &= 10y - 6 - 29 \Rightarrow \\
-20y + 25 &= 10y - 35 \Rightarrow -20y - 10y = -25 - 35 \Rightarrow \\
-30y &= -60 \Rightarrow y = -60 : (-30) = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{В)} \quad a = 2 &\Rightarrow A = 4x^3 + 5x^2 + 4.2x - 5.2^2 + 4.2^3 \Rightarrow \\
A &= 4x^3 + 5x^2 + 8x - 20 + 4.8 \Rightarrow A = 4x^3 + 5x^2 + 8x + 12 \Rightarrow \\
B &= A - (17x^2 + 12) \Rightarrow B = 4x^3 + 5x^2 + 8x + 12 - 17x^2 - 12 \Rightarrow \\
B &= 4x^3 - 12x^2 + 8x \Rightarrow B = 4x(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow \\
B &= 4x(x^2 - x - 2x + 2) \Rightarrow B = 4x(x(x - 1) - 2(x - 1)) \Rightarrow \\
B &= 4x(x - 1)(x - 2).
\end{aligned}$$

23. А) Нека броят на кръговете в третото дърво е $x \Rightarrow$ Броят на кръговете във второто дърво е

$$x + 25\%.x = x + \frac{25}{100}x = x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x.$$

Броят на кръговете на първото дърво е

$$\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}x.15\% = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{100}.x = \frac{5}{4}x + \frac{75}{400}x = \frac{23}{16}x.$$

Съставяме уравнението:

$$x + \frac{5}{4}x + \frac{23}{16}x = 354.$$

$$\frac{16x + 20x + 23x}{16} = 354 \Rightarrow \frac{59}{16}x = 354 \Rightarrow x = 354 : \frac{59}{16} = 96. \Rightarrow$$

$$\text{III дърво: } 96 \text{ кръга; II дърво: } \frac{5}{4}.96 = 5.24 = 120 \text{ кръга;}$$

$$\text{I дърво: } \frac{23}{16}.96 = 23.6 = 138 \text{ кръга.}$$

Разликата в кръговете на I и III дърво е 42 кръга.

Б) Пресмятаме средната температура:

$$\frac{-3 - 2 + 4 + 12 + 18 + 23 + 28 + 30 + 22 + 18 + 15 + 3}{12} = \frac{168}{12} = 14$$

$$\begin{aligned}
1,446 &= \frac{14 + \text{Влажност}}{10} \Rightarrow 14,46 = 14 + \text{Влажност} \Rightarrow \text{Влажност} = \\
14,46 - 14 &= 0,46 = 46\%.
\end{aligned}$$

Отговор. 46%

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА

„ИВАН САЛАБАШЕВ“ ЗА СЕДМОКЛАСНИЦИ

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ, ПЛЕВЕН

Предложените задачи са по темата Теория на числата и са подходящи за състезателна подготовка на седмокласници.

Задача 1. В израза $1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99$ Сашо променил някои знаци $+$ на $-$ така, че числената стойност на получения израз станала отрицателна. Колко най-малко знаци е променил Сашо?

Решение. Сборът на всички числа е $1 + 3 + \dots + 97 + 99 = 50^2 = 2500$. Ясно е, че трябва да сменим знаците на най-големите числа, т.е. търсим най-голямото n , за което:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) - (2n + 1) - \dots - 97 - 99 < 0.$$

Горната сума е равна на $2n^2 - 2500$ и неравенството става $2n^2 < 2500$. Най-голямото естествено число, за което е изпълнено това неравенство е $n = 35$. Следователно има 35 положителни и 15 отрицателни събираеми.

Задача 2. Намерете остатъка при деление с 19 на израза

$$7 + 7^2 + \dots + 7^{2024}.$$

Решение. За произволно естествено число n имаме

$$7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n(1 + 7 + 7^2) = 7^n \cdot 57,$$

което се дели на 19. Понеже $2024 \equiv 2 \pmod{3}$, то търсеният остатък е колкото на $7 + 7^2 = 56$, т.е. е равен на 18.

Задача 3. За кои естествени числа n стойността на израза

$$f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{8} + \frac{n^8}{8}$$

е цяло число?

Решение. Ако n е четно число, то $f(n)$ е цяло число. Ако n е нечетно, то $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $n^4 \equiv 1 \pmod{8}$ и $n^8 \equiv 1 \pmod{8}$, т.н. Следователно

$$f(n) = A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = A + 1,$$

където A е цяло число. Следователно $f(n)$ е цяло число за всяко n .

Задача 4. Нека a и b са взаимнопрости естествени числа, за които $a > b$ и $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^3} = \frac{73}{3}$. Колко е $a - b$?

Решение. Записваме даденото равенство като

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{73}{3}.$$

Ако положим $x = a^2 + b^2$ и $y = ab$, лесно се вижда, че x и y са взаимнопрости и

$$\frac{x + y}{x - 2y} = \frac{73}{3} \iff 3x + 3y = 73x - 146y \iff \frac{x}{y} = \frac{149}{70}.$$

Понеже 149 и 70 са взаимнопрости, то $x = 149$ и $y = 70$. Тогава $(a - b)^2 = x - 2y = 9$, т.е. $a - b = 3$.

Задача 5. В една кошница има 300 топчета от по един, два или пет грама. Известно е, че общото тегло на топчетата е 1 килограм и топчетата от някой два вида са равен брой. Колко е този брой?

Решение. Нека имаме x , y и z топчета от по 1, 2 и 5 грама съответно. По условие $x + y + z = 300$ и $x + 2y + 5z = 1000$.

Ако $x = y$, получаваме $7x = 500$, противоречие.

Ако $x = z$, получаваме $x = z = 200$, $y = -100$, което е невъзможно.

Ако $y = z$, намираме $x = 20$, $y = z = 140$.

Задача 6. Простото число p е такова, че за произволни цели числа a и b числата $10a + 3b$ и $a + 8b$ или и двете се делят на p , или и двете не се делят на p . Колко е сборът на всички възможни стойности на p ?

Решение. Тъй като $10(a + 8b) - (10a + 3b) = 77b$, то (понеже 7 и 11 са взаимнопрости с 10) $p = 7$ и $p = 11$ са възможни стойности.

Ако p е просто число, различно от 7 и 11, нека $b = 1$ и $a = p - 8$. Тогава $10a + 3b = 10p - 77$ не се дели на p , а $a + 8b = p$ се дели на p , противоречие. Така отговорът е $7 + 11 + 18$.

ИЗБРАНИ КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“

ЕМИЛ КОЛЕВ, Институт по математика и информатика – БАН

Предлагам Ви няколко задачи по комбинаторика за 5. и 6. клас от турнира „Иван Салабашев“, който се проведе на 30.11.2024 г. Те илюстрират степента на сложност на предлаганите задачи. Традиционно, задачите по комбинаторика на турнира са нестандартни и изискват въображение и определени знания.

Тази година три от задачите се решаваха с помощта на метода **броене по два начина**.

Задача 1. (5. клас) В група от a жени и b мъже всеки мъж познава точно седем жени, а всяка жена познава точно трима мъже. Намерете $a + b$, ако $12 \leq a + b \leq 29$.

(Познанствата са взаимни, т.е. ако X познава Y , то и Y познава X .)

Решение. Броят на познанствата между мъже и жени е $7b = 3a$. Следователно a се дели на 7, а b се дели на 3. Получаваме, че $a = 7t$ и $b = 3t$ за някое естествено число t . Тогава $a + b = 10t$ се дели на 10. Тъй като $12 \leq a + b \leq 29$, то $a + b = 20$.

Задача 2. (6. клас) Дадени са взаимнопрости естествени числа n и m . Във всяка клетка на таблица с n реда и m стълба е записано по едно естествено число. Известно е, че сборът на числата във всеки ред е равен на 196, а сборът на числата във всеки стълб е равен на 20. Намерете $m + n$.

Решение. Сборът на числата в таблицата е $196n = 20m \iff 49n = 5m$. Тъй като m и n са взаимнопрости числа, то $n = 5$ и $m = 49$ и $m + n = 54$.

Задача 3. (5. клас) Четири отбора изиграли турнир по футбол. След края на турнира се оказало, че три от отборите имат голова разлика съответно $1 : 5$, $6 : 2$ и $3 : 4$. (Голова разлика $a : b$ за даден отбор означава, че този отбор е вкарал a гола, а е получил b гола.)

Колко гола е вкарал четвъртият отбор, ако е известно, че е вкарал два пъти повече голове, отколкото е получил?

Решение. Да означим броя на получените голове на четвъртият отбор с x . Неговата голова разлика е $2x : x$.

Ключът към решението е да съобразим, че общият брой на вкараните голове е равен на броя на получените, т.е.

$$1 + 6 + 3 + 2x = 5 + 2 + 4 + x,$$

откъдето намираме $x = 1$. Четвъртият отбор е вкарал 2 гола.

Често комбинаторните задачи включват и **съображения за делимост**.

Задача 4. (5. клас) Едно трицифрено число се нарича *прекрасно*, ако сборът на частното и остатъка при деление на това число с 3 е четно число. Намерете броя на прекрасните числа.

Решение. Нека частното и остатъкът при деление на естественото число n с 3 са съответно q и r . Тогава

$$n = 3q + r = 2q + (q + r).$$

Тъй като $q + r$ е четно тогава и само тогава, когато n е четно, търсим броя на трицифрените четни числа. Остава да съобразим, че всички трицифрени числа са 900, а четните са 450.

Задача 5. (6. клас) Едно трицифрено число се нарича *прекрасно*, ако сборът на частното и остатъка при деление на това число с 10 се дели на 9. Намерете броя на прекрасните числа.

Решение. Нека частното и остатъкът при деление на естественото число n с 10 са съответно q и r . Да забележим, че

$$n = 10q + r = 9q + (q + r).$$

От тук следва, че $q + r$ се дели на 9 тогава и само тогава, когато n се дели на 9. Следователно търсим броя на трицифрените числа, които се делят на 9. Най-малкото е $108 = 12 \cdot 9$, а най-голямото е $999 = 111 \cdot 9$ и следователно търсеният брой е $111 - 11 = 100$.

Задача 6. Колко е броят на тройките (p, q, r) от прости числа, за които

$$2p - 1 = q \text{ и } 2q + 1 = r ?$$

Решение. Ако q дава остатък 1 при деление на 3, то от равенството $2q + 1 = r$ следва, че r се дели на 3. Това е невъзможно, защото r е просто и $r = 2q + 1 \geq 5$.

Ако q дава остатък 2 при деление на 3, от равенството $2p - 1 = q$ получаваме, че $2p = q + 1$ се дели на 3, т.е. $p = 3$. Тогава $q = 5$ и $r = 11$.

Ако q се дели на 3, то $q = 3$ и намираме $p = 2$ и $r = 7$.

Получихме, че съществуват точно 2 такива тройки: $(3, 5, 11)$ и $(2, 3, 7)$.



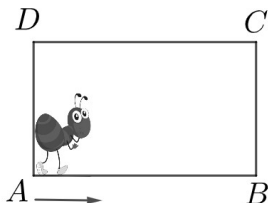
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“

1. Колко са целите числа x , за които

$$4 \cdot (-2) - 9 < x < 8 - 6 : (-2)?$$

- А) 12 Б) 21 В) 27 Г) 28

2. Мравка прави обиколка на правоъгълника $ABCD$ по маршрута $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Когато стигне в точка B , мравката ще е изминала 38% от своя маршрут.



Колко процента от маршрута си ще е изминала мравката, когато стигне в точка D ?

- А) 80% Б) 84% В) 88% Г) 92%

3. Ако

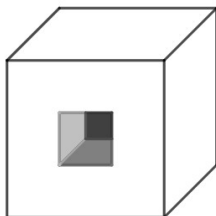
$$\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \end{array} \right\rangle = a - b \cdot c,$$

кое е числото x от равенството

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & -1 & \\ 2 & & -3 \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} & 2 & \\ -3 & & -1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & -3 & \\ -1 & & x \end{array} \right\rangle?$$

- А) 7 Б) -3 В) -5 Г) 4

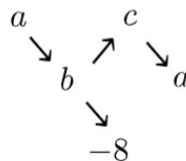
4. В центъра на едната стена на дървен куб е изрязан куб с ръб 2 cm. Ако лицето на повърхнината на полученото тяло е 166 cm^2 , колко кубични сантиметра е обемът му?



- A) 56 Б) 63 В) 117 Г) 208

5. Числата на схемата вдясно са попълнени по следните правила:

- при движение $\searrow$ се умножава с (-2) или се прибавя (-2) ;
- при движение $\nearrow$ се дели на (-3) или се прибавя 3.



На колко е равен сборът $a + b + c$?

- A) -8 Б) -13 В) -3 Г) 9

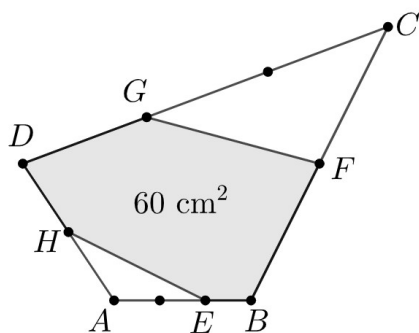
6. В дадена координатна система Oxy казваме, че една точка е *отлична*, ако абсцисата и ординатата на тази точка са цели числа с произведение 6. Най-много колко квадратни единици може да е лицето на триъгълник, чиито върхове са отлични точки?

- A) 36 Б) 35 В) 30 Г) 21

7. Колко естествени числа са кратни на 2 и на 5 и са делители на 25 000?

- A) 15 Б) 18 В) 22 Г) 24

8. На страните на четириъгълника $ABCD$ са избрани точки E, F, G и H , както е показано: $AE = 2BE$, $CG = 2DG$, $BF = FC$ и $AH = HD$. Да се намери лицето на $ABCD$, ако лицето на шестоъгълника $EBFGDH$ е равно на 60 cm^2 .



- А) 75 Б) 90 В) 96 Г) 108

9. Пиратите Джак, Бил и Том си разделили съкровище от монети така, че монетите на Том били колкото 60% от монетите на Джак, а Джак взел с 60% повече монети от Бил. След това двама от пиратите се сбили, защото се оказало, че единият от тях има със 100 монети повече от другия. Колко монети има пиратът, който не е участвал в боя?

- А) 4000 Б) 400 В) 200 Г) 100

10. Трима съученици, Иван, Петър и Борис, имат различни височини и са високи съответно a cm, b cm и c cm.

Иван казал: *Аз съм най-висок.*

Петър казал: *По-висок съм от Борис.*

Борис казал: *Петър е по-висок от Иван.*

Ако и тримата са излъгали, то вярно е, че:

- А) $c > a > b$ Б) $a > b > c$
В) $c > b > a$ Г) $c < a < b$

Отговори, някои решения и коментари

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	В	В	А	В	А	Б	А	Б	А	А

Решение на задача 8. Имаме $S_{AEH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{ABD} = \frac{1}{3} S_{ABD}$. Аналогично $S_{GFC} = \frac{1}{3} S_{BCD}$. Следователно

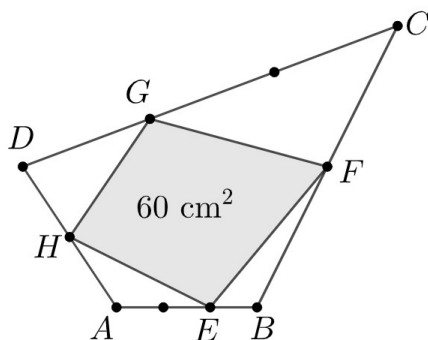
$$S_{AEH} + S_{GFC} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$

и оттук $\frac{2}{3}S_{ABCD} = 60$, т.е. $S_{ABCD} = 90$.

Коментар. По-добър (но и по-труден) вариант на тази задача е следният.

8*. На страните на четириъгълника $ABCD$ са избрани точки E, F, G и H , като $AE = 2BE$, $CG = 2DG$, $BF = FC$ и $AH = HD$.

Да се намери лицето на $ABCD$, ако лицето на $EFGH$ е равно на 60 cm^2 .



В този вариант решението продължава, като се открие, че

$$S_{BEF} + S_{HGD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ACD} = \frac{1}{6} S_{ABCD},$$

откъдето

$$S_{EFGH} = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

и намираме $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = 120 \text{ cm}^2$.

Решение на задача 9. Ако Бил има x монети, тогава Джак има $160\%x = \frac{8}{5}x$ монети, а Том има $60\% \cdot \frac{8}{5}x = \frac{24}{25}x$ монети. Всяко от тези числа е естествено, следователно $x = 25y$ за някое естествено число y . Така Бил има $25y$ монети, Джак има $40y$ монети, а Том има $24y$ монети.

От уравненията $40y - 25y = 100$, $40y - 24y = 100$ и $25y - 24y = 100$ само последното има решение естествено число, $y = 100$. Следователно са се сбили Бил и Том, а Джак има $40 \cdot 100 = 4000$ монети.



ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА
„ИВАН САЛАБАШЕВ“

1. Дробта $\frac{\text{НОД}(42, 70)}{\text{НОК}(42, 70)}$ е равна на:

А) $\frac{1}{15}$

Б) $\frac{1}{30}$

В) $\frac{1}{3}$

Г) $\frac{1}{8}$

2. Трицифреното число $\overline{A9B}$ се дели на 5, а трицифреното число $\overline{B5A}$ се дели на 9. Най-големият прост делител на числото $\overline{3AB}$ е:

А) 5

Б) 7

В) 11

Г) 17

3. Правоъгълник с размери 75 cm и 120 cm е покрит изцяло и без застъпване с възможно най-големи еднакви квадратни плочки. Каква част от площта на правоъгълника покрива една такава плочка?

А) $\frac{1}{13}$

Б) $\frac{1}{20}$

В) $\frac{1}{30}$

Г) $\frac{1}{40}$

4. Дядо набрал по равен брой ябълки, круши и дюли. Той подредил плодовете в кашони отделно: ябълките наредил по 30 в кашон, крушите – по 24 в кашон, а дюлите – по 18 в кашон. Най-малко колко кашона с плодове (ябълки, дюли или круши) е подредил дядо?

А) 47

Б) 60

В) 72

Г) 94

5. На колко е равен сборът $a + b + c$, ако

$$\frac{a}{14} = \frac{6}{21}, \quad \frac{21}{b} = 4\frac{1}{b}, \quad \frac{21}{c} = \frac{14}{16} ?$$

А) 36

Б) 33

В) 21

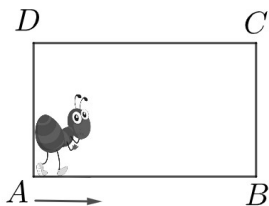
Г) 15

6. Мравка тръгнала от точка A и обикаляла страните на правоъгълник $ABCD$ по маршрута

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$$

и така нататък.

Като изминала 121 см, мравката се оказала за втори път в точка B , а когато изминала 351 см, се оказала за четвърти път в точка D .



Колко сантиметра е изминала тя до момента, в който за шести път минавала през C ?

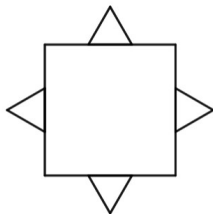
- А) 477 Б) 489 В) 506 Г) 552

7. Колко е сборът на всички естествени числа n , за които

$$\frac{5}{18} < \frac{n}{90} < \frac{8}{15}?$$

- А) 730 Б) 803 В) 828 Г) 851

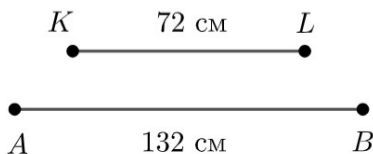
8. Фигурата на чертежа се състои от квадрат със страна x см и четири равнострани триъгълници със страна y см, като x и y са естествени числа.



Обиколката на квадрата е $\overline{1a6}$ см, а обиколката на един равнострани триъгълник е $\overline{7a}$ см. Колко сантиметра е обиколката на фигурата?

- А) 222 Б) 256 В) 324 Г) 356

9. Рали начертала отсечките $AB = 132$ см и $KL = 72$ см.



Вики отбелязал няколко точки на AB и на KL така, че отбелязаните точки разделяли AB и KL на отсечки с равна дължина a см.

Жори свързал с отсечка всяка от отбелязаните точки върху AB (включително A и B) с всяка от отбелязаните точки върху KL (включително K и L).

Най-малко колко отсечки е построил Жори?

- А) 34 Б) 66 В) 84 Г) 132

10. Колко са естествените числа m , за които всяка от дробите $\frac{25}{m}$ и $\frac{m}{250}$ е правилна и несъкратима?

- А) 58 Б) 78 В) 90 Г) 102

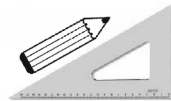
11. Пипи опекла бисквити от три вида, като бисквитите с канела били 2 пъти повече от бисквитите с шоколад и с 20 по-малко от бисквитите със стафиди.

Пипи забелязала, че ако подреди всички бисквити по 24 в кутия, ще останат 3 бисквити; ако подреди всички бисквити по 28 в кутия, пак ще останат 3 бисквити.

Най-малко колко бисквити с шоколад е опекла Пипи?

Отговори

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	А	В	Г	А	Б	В	Б	Б	В	В	131



**XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ
„СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“**

ПЕТКО ЛАЗАРОВ, ЙОАН ВАСИЛЕВ

МОДУЛ 1

1. Стойността на израза $25 + 5 \cdot (25 + 5)$

- А) 155 Б) 900 В) 175 Г) 250

2. В бургаската А група по футбол има 18 отбора, като всеки играе срещу всеки по веднъж. Колко общо мача се играят в бургаската А група?

- А) 138 Б) 144 В) 147 Г) 153

3. Колко е неизвестното x , което е решение на уравнението

$$206 + (1948 - x) : 8 = 2025 : 9?$$

- А) 1794 Б) 1796 В) 1798 Г) 1800

4. Със знака $\otimes$ сме означили измислено действие, което работи по правилното $a \otimes b = 3 \cdot a - 2 \cdot b + 1$. Намерете $(4 \otimes 3) \otimes 7$.

- А) 4 Б) 12 В) 10 Г) 8

5. Започнах да решавам теста по математика в 8 ч и 32 мин, а сега часовникът показва 9 ч и 35 мин. Остава ми да работя с 1 ч и 3 мин повече от времето, което съм работил по теста до сега. В колко часа трябва да приключа работата си по теста?

- А) 11 ч 37 мин Б) 11 ч 41 мин В) 11 ч 30 мин Г) 11 ч 33 мин

6. Четири еднакви мъжки сака струват 404 лв., а пет еднакви вратовръзки струват със 139 лева по-малко. Колко струват общо едно от тези сака и една от тези вратовръзки?

- А) 174 лв. Б) 164 лв. В) 159 лв. Г) 154 лв.

7. Колко двуцифрени числа дават остатък 3 при деление на 4?

- А) 22 Б) 23 В) 24 Г) 25

8. В колко от правоъгълниците на чертежа вдясно има точно по две черни кръгчета?

●			●
	●		

- А) 6 Б) 7
В) 8 Г) 9

9. Обиколката на правоъгълник е 50 см, а дължината му е със 7 см по-голяма от ширината му. Лицето на правоъгълника е:

- А) 126 кв.см Б) 900 кв.см В) 175 кв.см Г) 144 кв.см

10. Удвоените години на дядо са с 6 по-малко от сбора от годините на баба, татко и мама. Сборът от годините на баба и татко е 84, от годините на баба и мама е 92, а от годините на татко и мама е 64. На колко години е дядо?

- А) 57 Б) 58 В) 60 Г) 62

11. Кошница с една ябълка тежи 250 грама. Кошница с 6 ябълки тежи 500 грама. Кошница с 2 ябълки и 3 круши тежи 720 грама. Колко грама тежи една круша?

- А) 100 Б) 140 В) 170 Г) 200

12. Ще казваме, че едно трицифрено число е „гларусово“, ако сумата на цифрите на стотиците и десетиците е колкото цифрата на единиците (например 268 е такова число). Броят на „гларусовите“ числа между 100 и 300 е:

- А) 15 Б) 17 В) 18 Г) 21

13. В двора на къщата си баба Цоцолана отглежда своите любимци: крави и пилета. Ако общо краката им са 66, а очите им са 48, то колко крави има?

- А) 8 Б) 9 В) 10 Г) 11

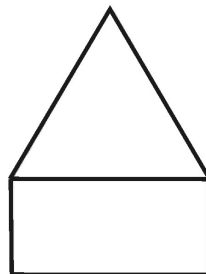
14. Един автобус тръгнал от началната спирка с 18 пътници. На всяка пета минута преди последната спирка се качвали по 8 пътници, а на всяка трета минута преди последната спирка слизали по 5

пътници. След 45 минути автобусът пристигнал на крайната спирка. Колко пътници са слезли на последната спирка?

- А) 21 Б) 12 В) 15 Г) 20

15. На фигурата е показана „кула“, която се състои от правоъгълник и равностранен триъгълник. Страната на триъгълника е 12 см и обиколките на двете фигури са равни. На колко сантиметра е равна широчината на правоъгълника?

- А) 12 Б) 6
В) 9 Г) 4



16. Колко е стойността на израза

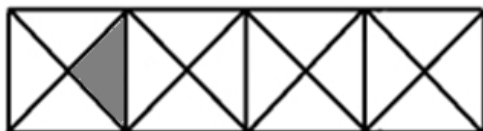
$$2024 - 2020 + 2023 - 2019 + 2022 - 2018 + \dots + 7 - 3 + 6 - 2 + 5 - 1?$$

17. Ако Петко отива на училище с автобус и се връща пеша, това му отнема 1 час и 30 минути. Ако отива и се връща с автобус, ще са му необходими 30 минути. Колко минути ще му трябват, ако отива и се връща пеша?

18. Дадени са десет последователни числа, така че сумата от цифрите на първото (най-малкото) е 16, а на десетото (най-голямото) е 7. Какво може да е първото число?

19. Мария, Симона и Марин обичат да пият кафе. Мария пие кафе всеки ден, Симона пие кафе през ден, а Марин – през два дена (тоест на първи, четвърти, седми и т.н.). На първи януари и тримата пили кафе. На коя дата най-рано тримата ще са изпили общо поне 36 кафета?

20. На чертежа долу лицето на сивия триъгълник е 4 кв.см. Ако броят триъгълници на фигурата е X , а обиколката на големия правоъгълник е Y см, намерете колко е $X+Y$.



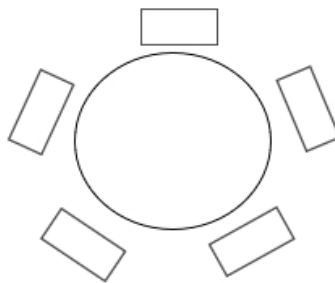
МОДУЛ 2

21. Николай Чудотворец подготвя голямо парти. За тях имал на разположение общо 30 маси от два вида – кръгли и правоъгълни.

а) Около една от кръглите маси сядат петима приятели – Ангел, Васко, Петко, Йонко и Динко. Знаете, че:

- Ангел и Петко седят един до друг;
- Ангел не седи до Йонко;
- Васко седи до Динко;
- Васко не седи до Ангел.

Запишете петте имена в правоъгълничетата така, че условието да е изпълнено.



б) Николай Чудотворец трябвало да украси масите. На всяка маса трябвало да има букет от по 4 рози, 3 лалета и 1 зюмбюл. Понеже не знаел колко са цените на цветята, разгледал бележките от няколко покупки. На една от бележките пишело, че 3 рози, 4 лалета и 5 зюмбюла са закупени за общо 49 лева, а 6 рози, 8 лалета и 7 зюмбюла стрували с 40 лева повече. Помощникът на Николай Чудотворец му казал, че 4 зюмбюла струват с 6 лева повече от 1 роза. Колко лева струват цветята, с които Николай Чудотворец иска да украси събитието си?

в) На кръглите от маси сядали по петима души, а на правоъгълните – по 7. Всяка кръгла маса има 3 крака, а всяка правоъгълна – по 4 крака. Ако общият брой крака на масите и хората е 490, то по колко маси има от всеки вид?

22. В справочника „Броене на числа“ са записани последователно всички естествени числа от 1 до 2024 включително.

а) Справочникът има 76 неномерирани страници. На първата страница има няколко числа. На всяка от втората до десетата страница включително има два пъти по-малко числа от тези на първата страница. На всяка от 11 до последната страница включително са написани четири пъти по-малко числа, от колкото на първата страница. Колко са числата на 15 страница?

б) Колко са всички цифри, използвани за записа на тези числа?

в) Петко написал всички числа, които имат цифрите 12 в този ред (едно след друго), а Ангел записал всички числа, които имат в записа си 23 в този ред (едно след друго). Кой е написал повече числа и с колко?

Отговори

1. В	2. Г	3. Б	4. Г	5. Б	6. Г	7. Б	8. Б
9. Г	10. А	11. Б	12. Б	13. Б	14. Б	15. Б	16. 8080

17. 2 ч 30 мин

18. Примерен отговор е 97, други са 196; 295 и т.н

19. 19.01

20. 78

21. А) Ангел, Динко, Васко, Йоан, Петко

Б) 1170

В) 10 с 3 крака и 20 с 4 крака

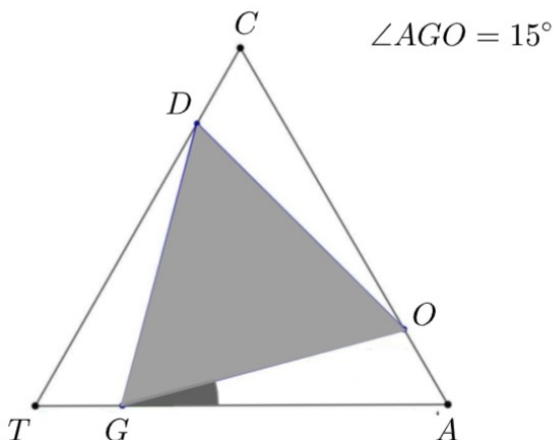
22. А) 23

Б) 6989

В) Петко – 140, Ангел – 41, разлика 99

И седмокласник може да реши

Триъгълниците CAT и DOG са равностранни.



Каква част от лицето на триъгълника CAT е лицето на триъгълника DOG ?

ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ
НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ — 2024 г.

НАУЧНОПОПУЛЯРНИ СТАТИИ

КЛАСИЧЕСКИ ИДЕИ ОТ КОМБИНАТОРНАТА ГЕОМЕТРИЯ, <i>Е. Колев</i>	1
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ, 2024, <i>Д. Грозев</i>	1
РЕШЕНИЕ С ПРЕОБРАЗУВАНИЕТО НА АБЕЛ, <i>Л. Любенов</i>	1
ХАРМОНИЧНИЯТ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И НЕГОВИТЕ СВОЙСТВА, <i>Н. Сзбева</i>	1
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ, <i>Е. Колев</i>	1
КВАДРАТИ И РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ, <i>Н. Сзбева</i>	1
ВЪРХУ ЗАДАЧА 6 ОТ RMM 2024, <i>Д. Грозев</i>	2
ГРАФИ. ПЪРВО ЗАПОЗНАНСТВО, <i>Е. Колев</i>	2
КОМПОЗИЦИИ ОТ РОТАЦИИ	2
ИЗБРАНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ СЪСТЕЗАНИЯТА ПРЕЗ 2023/24 ГОДИНА, <i>Н. Сзбева</i>	3
ЗАДАЧА № 255, <i>Е. Карлов</i>	4
ОКОЛО ЕДНА КОНФИГУРАЦИЯ С УСПОРЕДНИК, <i>Д. Георгиев</i>	4
СТРАННО СОРТИРАНЕ, ИЛИ КОГАТО ИНВАРИАНТИТЕ САМО ПРЕЧАТ, <i>Д. Грозев</i>	5
БРОЕНЕ НА ПЕРМУТАЦИИ, <i>С. Чобанов</i>	5
СЪСТЕЗАТЕЛНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ, <i>Н. Сзбева</i>	5
МАРШРУТИТЕ НА МРАВКАТА	5

ИЗВЪНКЛАСНА РАБОТА И ИНФОРМАЦИЯ

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ, <i>С. Харизанов</i>	1
ПОГЛЕД ВЪРХУ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ ЗА 4. – 7. КЛАС	1
ПРОЛЕТНОТО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ НЕ Е МАСОВО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Н. Сзбева</i>	2
IZZI MATH CHALLENGE – КРЕАТИВНОСТ, АНАЛИТИЧНОСТ, ЛОГИКА САМО В ЕДНО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Й. Сигридова,</i> <i>А. Ангелов, М. Коцев</i>	2
ТРИНАДЕСЕТА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА, <i>Л. Конова, В. Личева</i>	3
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ КОНТРОЛНИТЕ ЗА БАЛКАНСКАТА ОЛИМПИАДА, <i>А. Иванов, Д. Грозев</i>	3

17. Турнир на ВТУ за ученици от 11. и 12. клас, <i>Л. Христов, Д. Цветков, М. Христов, П. Пиперков, Р. Ангелов</i>	3
UNITED STATES ERSATZ MATH OLYMPIAD'23, <i>П. Лазаров</i>	3
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА НОМ ЗА 7. КЛАС, <i>Н. Сзбева, Б. Савова</i>	3
ЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „НАУКА ЗА ДЕЦА“, <i>Н. Сзбева</i>	4
БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024, <i>Д. Грозев, А. Иванов</i>	4
МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА 2024, I ЧАСТ, <i>Д. Грозев, С. Харизанов, С. Боев</i>	4
ДВАДЕСЕТ И ОСМА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, <i>И. Кортезов, М. Маринов</i>	4
XXVI МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АКАД. КИРИЛ ПОПОВ“, <i>И. Кортезов</i>	4
ДВЕ ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА ШКОЛАТА ПО МАТЕМАТИКА	4
ИЗБРАНИ СЪСТЕЗАТЕЛНИ ЗАДАЧИ	4
ЗА СОЗОПОЛ 2024, <i>М. Маринов</i>	5
СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР'24, <i>Е. Колев</i>	5
ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, <i>И. Кортезов, Н. Сзбева</i>	6
ИЗБРАНИ КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“, <i>Е. Колев</i>	6
МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА 2024, II ЧАСТ, <i>С. Боев, Д. Грозев</i>	6
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“ ЗА СЕДМОКЛАСНИЦИ, <i>А. Иванов</i>	6

УЧЕНИЧЕСКО ТВОРЧЕСТВО

ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ТОЧЕН КВАДРАТ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“, <i>М. Димитров, Ч. Стойчев</i>	1
МАТЕМАТИКА В 4. КЛАС... С ДИСНИ	1
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАТА ОЛИМПИАДА, <i>М. Дренчева, М. Христов</i>	3
ВЪРХУ ЕДНА ГЕОМЕТРИЧНА ЗАДАЧА, <i>В. Костадинов, А. Бангачев</i>	4
АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 5 ОТ КОНТРОЛНОТО ЗА МОМ'2024, <i>М. Дренчева</i>	4

ЛЯТНА МАТЕМАТИКА, <i>К. Недялкова</i>	4
АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9.3 ОТ ЕМТ'2024, <i>Й. Младенова</i>	6

КОНКУРСИ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	1 – 6
--------------------------------	-------

ЗА ПО-МАЛКИТЕ

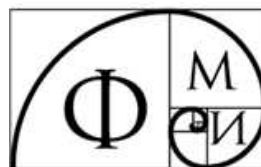
В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ. ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА 7. КЛАС	1, 2, 3
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Т. Дидова</i>	1, 3, 5
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Л. Демебукова,</i> <i>Н. Сзбева</i>	1, 2, 3, 5
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ	2
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Н. Тодорова</i>	3
ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА УЛИЦА ДИАГОН-АЛИ, <i>С. Петрова</i>	5
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА ЗА 5. – 7. КЛАС, <i>Н. Сзбева</i>	5
ПО ПЪТЯ, <i>Н. Сзбева</i>	5
ХАРИ ПОТЪР НА 13. ФЕСТИВАЛ В СОЗОПОЛ, <i>Н. Сзбева</i>	5
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ. XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ „СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“, <i>П. Лазаров, Й. Василев</i>	6
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ. ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“	6
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ. ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“	6
В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ. XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ „СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“, <i>Й. Василев, Г. Вълканова</i>	6

ЗА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ, ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА, <i>Ю. Цветков</i>	3
---	---



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Бакалавърската програма „**Приложна математика**“ подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

2. В бакалавърската програма „**Софтуерно инженерство**“ се подготвят специалисти, които да познават добре всички аспекти на разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер. Учебният ѝ план е разработен в съответствие с изисквания, известни като Computing Curriculum – Software Engineering, на световните професионални организации ACM и IEEE. Завършилите успешно тази програма могат да се реализират като: софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер; аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрол на качеството, консултанти и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цвятзнание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА 2024, II част, <i>С. Боев, Д. Грозев</i>	3
ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, <i>И. Кортезов, Н. Събева</i>	15
АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 9.3 ОТ ЕМТ'2024, <i>Й. Младенова</i>	47
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	49
В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ. XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ „СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“, <i>Й. Василев, Г. Вълканова</i>	52
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“ ЗА СЕДМОКЛАСНИЦИ, <i>А. Иванов</i>	59
ИЗБРАНИ КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“ <i>Е. Колев</i>	61
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ. ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“	63
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ. ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“	67
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ. XXVI СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ „СВЕТИ НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ“, <i>П. Лазаров, Й. Василев</i>	70
ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ – 2024 г.	75

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230

1113 София

тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169

e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.

Дадена за печат на 16.12.2024 г.

Печат „Фастумпринт“ ЕООД

Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.