МАТЕМАТИКА

БРОЙ 1
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Пред Вас е първият брой на списание *Математика* за 2017 г., в който включихме полезни и разнообразни по тематика и сложност материали.

За участниците в математически състезания и техните учители предлагаме актуална информация за национални и международни състезания. В броя ще намерите статии за юбилейното издание на *Есенния турнир* и за турнира *Математика без граници*, а основният акцент е *Седмицата на олимпийската математика*, която се проведе в началото на годината в ИМИ-БАН.

На страниците на списанието, както и досега, ще намерите примерни теми за кандидатстудентски изпити, тестове за ДЗИ и за приемни изпити след 7. клас. Допълнителни теми за подготовка публикуваме в рубриките *В помощ на зрелостниците*, *В помощ на седмокласниците* и *В помощ на четвъртокласниците.*

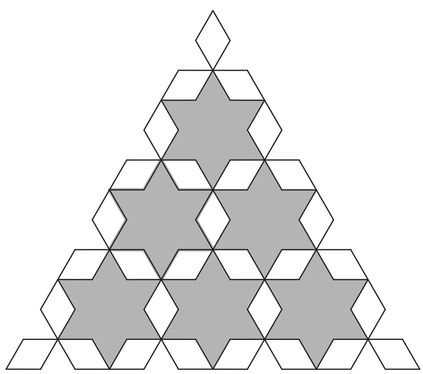
Загадките от *Математическата ракла*, разказани достъпно и увлекателно, са вдъхновение за всички, които обичат математиката и информатиката.

Дори и през зимата може да се докоснете до магията на летните математически лагери, представени в рубриката *Математика на открито.*

Както е известно, работата – дори математическата, върви по-добре с настроение. Добро математическо настроение в броя създава рубриката XA^3.

Редколегията на списанието Ви пожелава успешна година с новогодишната задача, която получихме от нашия колега Jerry P. Becker.

На фигурата е представена математическа елха с височина 3 (с 3 реда оцветени звездички).



Каква част от елхата е оцветена? Как ще се промени отговорът на този въпрос, ако елхата е с височина 4? А ако разгледаме безкрайно висока елха, оцветена по подобен начин?

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА НА ИМИ–БАН

Петър Бойваленков, ИМИ–БАН

На 5–10.01.2017 г. в Института по математика и информатика на Българската академия на науките се проведе третото издание на Седмица на олимпийската математика (СОМ) на ИМИ–БАН. СОМ се организира от ИМИ със съдействието на Фондация *Георги Чиликов* и Американска Фондация за България.

Програмата на тазгодишната Седмица отново включваше четири тематични контролни, по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата. За участие бяха поканени 40 ученика от цялата страна съответно на рейтинга към момента – първите 10 от всеки от класовете 9-12. Освен в контролните, учениците получиха възможност за изява и чрез изнасяне на доклади на олимпийска тематика.

Предлагаме ви условията и решенията на задачите, както и резултатите.

Контролно по теория на числата, 06.01.2017

Задача NT1. Да се реши в цели числа уравнението

$$2^m - 37n^2 = 19.$$

Задача NT2. Нека p и q са нечетни прости числа, като $q > p$ и

$$A_k = k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k + 1 \quad \text{за} \quad k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}.$$

Да се намерят всички възможни остатъци, които могат да се получат при деление на q на числото $A_1 A_2 \ldots A_{q-1}$.

Задача NT3. За дадени естествено число n и просто число $p > n$ означаваме с $f_p(n)$ броя на числата от множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$, които са квадратични остатъци по модул p. Естественото число n се нарича *спокойно по отношение на квадратичните остатъци* (споко), ако за всяко просто число $p > n$ имаме $f_p(n) \geq \dfrac{n}{2}$. Да се определи дали 100 е споко.

Забележка. Едно цяло число a се нарича квадратичен остатък по модул p, ако сравнението $x^2 \equiv a \pmod p$ има решение. Например 2 е, а 3 не е квадратичен остатък по модул 7.

Контролно по геометрия, 07.01.2017

Задача G1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), вписан в окръжност k. Нека X е произволна точка от страната AB. Разглеждаме окръжностите k_1 и k_2, които се допират до страната AB, до отсечката CX и вътрешно до k. Ако означим техните радиуси с r_1 и r_2, да се докаже, че

$$r_1 + r_2 \leqq 2r,$$

където r е радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача G2. Даден е $\triangle ABC$. Нека M и N са точки върху страните AC и BC съответно, такива че при симетрия относно правата MN образът ω' на описаната около $\triangle MNC$ окръжност ω се допира до страната AB. Да се докаже, че при всеки такъв избор на точките M и N, окръжността ω се допира до фиксирана окръжност.

Задача G3. Даден е $\triangle ABC$ и точка T върху страната AB. Да означим с N и M допирните точки на външновписаната за $\triangle ATC$ окръжност към страната AC със страната AC и продължението на AT. Съответно с L и K означаваме допирните точки на външновписаната за $\triangle BTC$ окръжност към страната BC със страната BC и продължението на BT. Да се докаже, че пресечната точка на правите MN и KL, средата X на CT и центърът I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k лежат на една права тогава и само тогава, когато T съвпада с допирната точка на k с AB.

Контролно по алгебра, 09.01.2017

Задача A1. Нека $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ е такава редица, че $a_0 = \dfrac{1}{2}$ и

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Да се докаже, че $a_n < 1 < a_{n+1}$.

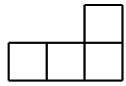
Задача A2. Да се докаже, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то

$$\frac{1}{3 - 2\cos\alpha} + \frac{1}{3 - 2\cos\beta} + \frac{1}{3 - 2\cos\gamma} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача A3. Нека f е полином с реални коефициенти и степен $n \geq 1$. Да се докаже, че съществуват реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всички равни на 0, за които полиномът $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i}$ се дели на $f(x)$.

Контролно по комбинаторика, 10.01.2017

Задача C1. Равнината е разделена на единични квадратчета и е покрита с плочки от показания вид. Да се докаже, че равнината може да се покрие по още 16 начина с такива плочки така, че в кои да е две различни покрития (от всичките 17 покрития) да няма съвпадащи плочки.



Задача C2. Даден е ориентиран граф G. Да се докаже, че ориентацията на някои (възможно нула) от ребрата на G може да се промени така, че да се получи граф H със следните свойства:

(1) В H няма цикли.

(2) Най-дългият път между произволни два върха в H не надминава най-дългия път между тези върхове в G.

Задача C3. Всички клетки на таблица $m \times n$, където m и n са нечетни числа без едно ъглово квадратче са покрити с домина 1×2. За един ход може да изберем домино, което заедно с непокритото квадратче образува правоъгълник 1×3 и да преместим това домино на едно квадратче в посока на празното квадратче. Да се докаже, че с няколко хода празното квадратче може да се премести във всеки от ъглите на таблицата $m \times n$.

Темите бяха предложени както следва: проф. Петър Бойваленков и Нгуен Чи Зунг – теория на числата, Стоян Боев и Александър Иванов – геометрия, проф. Олег Мушкаров и проф. Николай Николов – алгебра, проф. Емил Колев и проф. Иван Ланджев – комбинаторика. Ето и решенията на задачите.

Решения

NT1. След умножение на двете страни по 4 уравнението може да се запише във вида

$$2(2^{m+1}-1) = 37\left((2n)^2+2\right).$$

Тъй като показателят на 2 по модул 37 е 36, то $36 \mid m+1$ и следователно $7 = 2^3-1 \mid 2^{m+1}-1$. От друга страна, $7 \nmid (2n)^2+2$ за никое $n \in \mathbb{Z}$, откъдето заключваме, че даденото уравнение няма решение в цели числа.

NT2. Ако $q \equiv 1 \pmod{p}$, то $k^p-1 | k^{q-1}-1$ и сравнението $x^p \equiv 1 \pmod{q}$ има решения в множеството $\{2, 3, \ldots, q-1\}$. Следователно в този случай $A_1A_2\ldots A_{q-1} \equiv 0 \pmod{q}$.

Нека $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Тогава $k^p \equiv 1 \pmod{q}$ за $k \in \{2, 3, \ldots, q-1\}$ е невъзможно (Защо?).

Ако $k_1^p \equiv k_2^p \pmod q$ за някои $k_1, k_2 \in \{2, 3, \ldots, q-1\}$, $k_1 \neq k_2$. Тогава $(k_1 k_2^{-1})^p \equiv 1 \pmod q$, откъдето $k_1 k_2^{-1} \equiv 1 \pmod q$ съгласно горното. Тъй като обратният елемент е единствен, получаваме $k_2^{-1} = k_1^{-1}$, т.е. $k_2 = k_1$, противоречие. Следователно остатъците на $k^p - 1$, $k \in \{2, 3, \ldots, q-1\}$, пробягват множеството $\{1, 2, \ldots, q-2\}$, а същото правят и остатъците на $(k-1)^{-1}$, $k \in \{2, 3, \ldots, q-1\}$. Тогава

$$A_2 A_3 \ldots A_{q-1} \equiv \prod_{k=2}^{q-1} (k^p - 1) \prod_{k=2}^{q-1} (k-1)^{-1} \equiv 1 \pmod q$$

(използвахме теоремата на Уилсън), откъдето окончателно получаваме $A_1 A_2 \ldots A_{q-1} \equiv p \pmod q$.

NT3. Ще докажем, че 100 не е спокойно по отношение на квадратичните остатъци. За целта е достатъчно да докажем, че $f_p(100) \leq 49$ за някое просто $p > 100$.

Идеята е да изберем просто число p, което е малко по-голямо от 100 и да установим, че квадратичните остатъци в интервала $[101, p-1]$ са повече от половината. Тъй като квадратичните остатъци в $[1, p-1]$ са точно половината, това ще означава, че тези в $[1, 100]$ са по-малко от половината, т.е. $f_p(100) \leq 49$ и значи 100 не е споко.

Числото $p = 109$ има исканите свойства. Директно се проверява, че числата 102, 104, 105, 106 и 108 са квадратични остатъци по модул 109 $(102 = 50^2, 104 = 39^2, 105 = 43^2, 106 = 18^2, 108 = 33^2 \pmod{109})$.

G1. Нека окръжността k_1 е с център I_1 и се допира до AX и CX в точките P_1 и Q_1 съответно, окръжността k_2 е с център I_2 и се допира до BX и CX в точките P_2 и Q_2 съответно, а вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е с център I и се допира до AB в точка P. От теоремата на Виктор-Тебо следва, че I лежи на отсечката $I_1 I_2$ и нещо повече, I е пресечната точка на правите $P_1 Q_1$ и $P_2 Q_2$ (*Защо?*).

Без ограничение на общността нека $\sphericalangle AXC \leqq 90^\circ$. Тогава

$$\frac{I_1 I}{I I_2} = \frac{P_1 P}{P P_2} = \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle AXC}{2} \leqq 1$$

и следователно средата M на $I_1 I_2$ е между I и I_2. От друга страна, $AC = BC$, т.е. $r_1 \geqq r_2$ и следователно разстоянието от M до AB ненадминава разстоянието от I до AB, т.е. $\dfrac{r_1 + r_2}{2} \leqq r$, с което доказателството е завършено.

Забележка. В случай на произволен триъгълник, максималната стойност на $r_1 + r_2$ се достига, когато X съвпада със средата на отсечката, свързваща петата на височината от върха C и допирната точка на външновписаната окръжност към страната AB с AB.

G2. Нека T е допирната точка на окръжността ω' с AB, а P е втората пресечна точка на описаните окръжности около $\triangle AMT$ и $\triangle BNT$. Без ограничение на общността нека P е вътрешна точка за $\triangle ABC$. Тогава

$$\sphericalangle MPN = 360^\circ - \sphericalangle MPT - \sphericalangle NPT = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma,$$

т.е. $P \in \omega$ (P *е точката на Микел*). От друга страна,

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AMT + \sphericalangle BNT = \gamma + \sphericalangle MTN = 2\gamma$$

и остава да докажем, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност се допира до ω в точка P. Но

$$\begin{aligned} \sphericalangle MPA + \sphericalangle NPB &= \sphericalangle MTA + \sphericalangle NTB = 180^\circ - \gamma = \\ &= (\sphericalangle MNP + \sphericalangle NMP) + (\sphericalangle ABP + \sphericalangle BAP), \end{aligned}$$

с което достигаме до извода, че търсената окръжност е описаната около $\triangle ABP$.

G3. Нека O_1 и O_2 са центровете на разглежданите външновписани окръжности за $\triangle ATC$ и $\triangle BTC$ съответно, P е пресечната точка на MN и O_1T, а Q е пресечната точка на KL и O_2T. Точките O_1, C, N и P лежат на една окръжност, както и точките O_2, C, L и Q лежат на една окръжност и следователно $\sphericalangle O_1PC = \sphericalangle O_1NC = 90^\circ$ и $\sphericalangle O_2QC = \sphericalangle O_2LC = 90^\circ$. Но $\sphericalangle O_1TO_2 = 90^\circ$, т.е. $PTQC$ е правоъгълник, средата X на CT е среда и на PQ, и нещо повече, $PQ \parallel AB$ (*Защо?*).

Нека точките D и E от правата PQ са такива, че $MADP$ и $BKQE$ са успоредници. От теоремата на Щайнер за трапеца $MKQP$ следва, че пресечната точка на правите MN и KL, X и I лежат на една права тогава и само тогава, когато X, I и средата Y на MK лежат на една права, но отново от теоремата на Щайнер за трапеца $ABDE$ последното е изпълнено тогава и само тогава, когато Y е среда на AB, т.е. $MA = BK$. Остава да съобразим, че $MA = BK$ е еквивалентно с факта, че T съвпада с допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с AB.

A1. Имаме, че $\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{n + a_k} < \dfrac{1}{n}$ и като сумираме при $k = 0, \dots n-1$ получаваме, че $\dfrac{1}{a_0} - \dfrac{1}{a_n} < 1$, т.е. $a_n < 1$. Тогава $\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} > \dfrac{1}{n+1}$ и пак след сумиране следва, че $\dfrac{1}{a_0} - \dfrac{1}{a_n} > \dfrac{n}{n+1}$, т.е. $a_n > \dfrac{n+1}{n+2}$. Оттук

$$a_{n+1} > \frac{n+1}{n+2} + \frac{(n+1)^2}{n(n+2)^2} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2}.$$

Забележка. Във връзка с тази задача на читателите сигурно ще е интересно да видят и статията на проф. Николов в този брой.

A2. След полагането $x = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $y = 2\sin\dfrac{\beta}{2}$, $z = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ имаме да докажем, че ако $x, y, z > 0$ и (1) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$, то

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{2},$$

което е еквивалентно на

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3x^2y^2z^2.$$

Като използваме, че $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq \dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{3}$ и (1), (2) ще следва от $7 - xyz \geq \dfrac{(4-xyz)^2}{3} + 3x^2y^2z^2$, което се преобразува до неравенството $(xyz-1)(2xyz+1) \leq 0$. Остава да съобразим, че от $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ и (1) следва, че $0 < xyz \leq 1$.

A3. От теоремата за деление на полиноми с частно и остатък следва, че за всяко $0 \leq i \leq n$ имаме, че $x^{2^i} = q_i(x)f(x) + r_i(x)$, където $\deg r_i \leq n-1$. Тъй като всеки $n+1$ вектора в $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими следва, че съществуват реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всички равни на 0, за които $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i r_i(x) = 0$.

Следователно $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{2^i} = f(x) \sum\limits_{i=0}^{n} a_i q_i(x)$.

C1. Равнината може да бъде разделена на правоъгълници 2×4 с хоризонтални прави на разстояние 2 и вертикални прави на разстояние 4 или с хоризонтални прави на разстояние 4 и вертикални прави на разстояние 2. В зависимост от това къде прекарваме хоризонталните и вертикалните прави от всеки от двата вида, има по 8 различни начина за покриване. Два правоъгълника 2×4 от две различни покрития или не се пресичат или се пресичат по правоъгълник 1×1, 1×2, 1×3 или 2×2. Това означава, че ако всеки правоъгълник 2×4 разделим по произволен начин на две плочки от дадения вид, във всеки две от тези 16 покрития няма съвпадащи плочки.

Да разгледаме даденото покритие. Да допуснем, че това покритие има съвпадаща плочка L с някое от построените по-горе (нека това е покритие X) 16 покрития. Можем да променим покритието на правоъгълника 2×4 (всеки правоъгълник 2×4 може да се раздели по два начина на две плочки от дадения вид) от X, който съдържа плочката L. Директно се вижда, че в този правоъгълник вече няма съвпадащи плочки с даденото покритие.

C2. Да разгледаме всички подграфи на G, в които няма цикли. От всички такива графи да изберем граф X, който има най-много ребра.

Да образуваме граф H, който се получава от G по следния начин:

На ребрата от X запазваме посоката, а на ребрата извън X променяме посоката. Ще докажем, че H изпълнява двете условия на задачата.

(1) Тъй като в X няма цикли, то можем да номерираме върховете на X (а значи и на G) така, че всяко ребро на X свързва връх с по-малък номер с връх с по-голям номер. От максималността на X следва, че всяко ребро от G, което не е от X участва в цикъл с ребрата на X, т.е. свързва връх с по-голям номер с връх с по-малък номер. Но в H всички ребра от G, които не са от X са с променена посока. Това означава, че в H всяко ребро свързва връх с по-малък номер с връх с по-голям номер, т.е. в G_1 няма цикли.

(2) Да разгледаме път между два върха a и b в H. Нека този път включва ребро $x - y$ от G с променена посока. Тъй като $y - x$ участва в цикъл с ребра от X, то реброто $x - y$ може да се замени с път, съставен само от ребра на X. При това дължината на пътя между a и b може само да се увеличи. Това означава, че всеки път между два върха в H може да се замени с път с поне същата дължина, който минава само по ребра на X, а значи и само по ребра на G. От тук следва, че най-дългият път между произволни два върха в H не надминава най-дългия път между тези върхове в G.

C3. Да номерираме редовете и стълбовете на таблицата съответно с числата от 1 до m и от 1 до n. Без ограничение нека празното квадратче е в клетка $(1;1)$. При всеки ход една от координатите на празното квадратче се променя с 2. Това означава, че празното квадратче може да заема само клетки с две нечетни координати. При това всяко домино може да заема само две положения. Да оцветим в зелено клетките с две нечетни координати. Да разгледаме множеството A от клетки, до които може да се стигне от клетката $(1;1)$ и да допуснем, че това множество не съдържа всички зелени клетки. Построяваме „граница“ на множеството A по следния начин:

За всеки правоъгълник 1×3, в който само едната крайна клетка е зелена, оцветяваме средната клетка в червено. Получаваме червени клетки, всеки две съседни от които са през едно квадратче. Свързваме червените клетки до получаване на път, който започва и завършва в клетки $(a;b)$ и $(p;q)$ от контура на голямата таблица. Понеже $a+b$ и $p+q$ са нечетни числа (тъй като са от контура и не са зелени), то пътят между тях съдържа нечетен брой клетки.

Да забележим, че всяка червена клетка е покрита от домино, което е перпендикулярно на правоъгълника 1×3, от който е получена тази червена клетка (в противен случай двете крайни клетки в правоъгълника 1×3 ще бъдат от A). Това означава, че целият път от $(a;b)$ до $(p;q)$ е покрит с домина, което е невъзможно, тъй като той има нечетна дължина.

Следователно множеството A съдържа всички зелени клетки, а значи и другите три ъглови клетки.

Резултатите по задачи на учениците с над 10 точки са в следващата таблица.

Резултати

Име	град, клас	NT1-3	G1-3	A1-3	C1-3	$\sum$
Константин Гаров	Бургас, 11	7, 7, 7	7, 7, 2	7, 7, 1	1, 7, 6	66
Атанас Динев	Бургас, 11	7, 7, 5	7, 7, 5	7, 3, 0	1, 2, 7	58
Иван Ганев	София, 12	7, 7, 7	7, 0, 7	7, 3, 0	2, 3, 7	57
Кирил Бангачев	София, 11	7, 7, 7	7, 1, 7,	0, 7, 1	0, 5, 7	56
Костадин Гаров	Бургас, 12	7, 2, 7	6, 0, 0	7, 7, 0	0, 7, 7	50
Калоян Алексиев	София, 11	7, 7, 7	7, 0, 0	0, 3, 1	3, 7, 6	48
Кристиян Василев	София, 10	7, 7, 3	7, 0, 1	4, 7, 1	0, 7, 2	46
Борислав Антов	София, 10	7, 7, 7	7, 0, 0	0, 7, 0	7, 4, 0	46
Виолета Найденова	София, 12	7, 7, 7	7, 0, 0	3, 0, 0	0, 6, 4	41
Борис Барбов	София, 10	7, 2, 7	6, 0, 2	7, 0, 0	0, 5, 1	37
Христо Папазов	София, 12	7, 7, 7	4, 0, 0	0, 0, 0	5, 5, 1	36
Илия Божинов	София, 11	7, 3, 0	7, 0, 0	0, 7, 0	0, 5, 2	31
Васил Йорданов	София, 11	5, 7, 4	1, 0, 3	0, 0, 0	2, 0, 7	29
Евгени Кайряков	София, 9	7, 3, 1	0, 0, 0	0, 0, 0	7, 3, 7	28
Иван-Александър Мавров	София, 10	2, 7, 2	0, 0, 1	0, 0, 0	0, 7, 2	21
Габриел Костадинов	Силистра, 12	7, 7, 1	2, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 1	18
Христо Попов	София, 12	7, 4, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 7	18
Иво Петров	София, 9	2, 0, 0	0, 0, 7	0, 0, 1	0, 5, 3	18
Пламен Иванов	София, 10	7, 2, 0	0, 0, 0	0, 0, 1	0, 0, 7	17
Димитър Любенов	София, 11	7, 0, 0	0, 0, 0	0, 3, 0	0, 0, 7	17
Димитър Чакъров	Пловдив, 9	7, 1, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	7, 0, 2	17
Орлин Кучумбов	Бургас, 10	7, 7, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 1	15
Виктор Балтин	Бургас, 9	7, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 4, 4	15
Алек Димитров	София, 9	1, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	7, 0, 7	15
Асел Исмолдаева	Варна, 11	7, 0, 0	2, 0, 0	0, 0, 0	0, 2, 3	14
Илиян Йорданов	Варна, 12	7, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 7, 0	14
Кристиан Минчев	Бургас, 9	7, 0, 1	0, 0, 1	0, 0, 0	0, 3, 0	12
Люба Конова	София, 10	2, 0, 1	0, 0, 1	0, 0, 0	1, 0, 6	11
Добрин Бараков	Плевен, 9	7, 0, 0	0, 0, 1	0, 0, 0	0, 0, 2	10

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи — 0 точки.

1. Стойностите на реалния параметър a, за които отношението на корените на уравнението $x^2 + ax - 16 = 0$ е равно на -4, са:

А) -2 и 2 **Б)** -8 и 8 **В)** -6 и 6 **Г)** само 6

2. Корените на уравнението $|x^2 - 12| = 4$ са:

А) $\pm 4,\ \pm 2\sqrt{2}$ **Б)** само ± 4 **В)** само 4 **Г)** 0

3. Решенията на неравенството $2^{x+2}.5^{x+2} \leq 2^{3x}.5^{3x}$ са:

А) $x \in (-\infty; 1)$ **Б)** $x \in (-\infty; 1]$

В) $x \in [2; 5]$ **Г)** $x \in [1; +\infty)$

4. Решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l} 4x + 7y = 5 \\ 2x + 3y = -6 \end{array}\right. \quad \text{са:}$$

А) $(-57; 17)$ **Б)** $\left(-\dfrac{57}{2}; 17\right)$ **В)** $\left(\dfrac{57}{2}; -17\right)$ **Г)** $\left(-57; \dfrac{17}{2}\right)$

5. За аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че

$$\left|\begin{array}{l} a_3 a_6 = 406 \\ a_9 = 2a_4 + 6. \end{array}\right.$$

Първият член на прогресията е:

А) -79 или 4 **Б)** $\dfrac{79}{7}$ или -4 **В)** $-\dfrac{79}{7}$ или 4 **Г)** $-\dfrac{37}{14}$ или 5

6. Дадена е окръжност $k(O;10)$. Радиусът OA разполовява хордата $BC = 12$. Дължината на AB е:

А) $10\sqrt{2}$ **Б)** $2\sqrt{10}$ **В)** $2\sqrt{2}$ **Г)** 8

7. Дадена е окръжност с център O. Върху продължението на хордата $AB = 5$ (AB не минава през O) е взета точка C такава, че $BC = 3$. Ако $OC = 7$, то радиусът на окръжността е:

А) 5 **Б)** $\sqrt{73}$ **В)** 25 **Г)** 4

8. Ъглополовящата на тъпия ъгъл A на успоредника $ABCD$ пресича страната BC в точка M. Ако $AB = 3CM$ и $P = AM \cap BD$, то отношението на лицата на $\triangle APD$ и $\triangle BMP$ е:

А) $4:3$ **Б)** $16:9$ **В)** $3:4$ **Г)** $9:16$

9. Ако $\log_a b = 7$, то $\log_{\frac{a}{b}} a^3 b$ е:

А) $\dfrac{3}{5}$ **Б)** $-\dfrac{3}{5}$ **В)** 0 **Г)** $-\dfrac{5}{3}$

10. Решенията на неравенството $x^4 + 6x^2 + 5 < 0$ са:

А) $x \in (-5;-1)$ **Б)** $x = -5$

В) $x \in \emptyset$ **Г)** $x \in (-\infty;+\infty)$

11. Корените на уравнението $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$ са:

А) $-\dfrac{1}{8}, -2$ **Б)** $\dfrac{1}{8}, 2$

В) $\forall\, x$ **Г)** $-8, -\dfrac{1}{2}$

12. Многочленът $P(x) = ax^2 + bx + 4$ приема положителни стойности за всяка реална стойност на x. Ако $P'(1) = 4$, то целите положителни стойности на параметрите a и b са:

А) $a = 2,\ b = 0$ **Б)** $a = 3,\ b = 2$

В) $a = b = 4$ **Г)** $a = 1,\ b = 2$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Сборът на първите три члена на една геометрична прогресия е 21, а сумата от квадратите им е 189. Стойността на първия член на прогресията е:

14. Корените на уравнението $\log_{x^2}\sqrt{5} + \log_x \dfrac{1}{125} = \dfrac{11}{8}$ са:

15. След опростяване на израза $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ се получава: $\boxed{}$

16. Локалните екстремуми на функцията $y=x^3-3x^2+4$ са: $\boxed{}$

17. Ако $AB=\sqrt{20}$, $BC=AC+2$ и $\cos\sphericalangle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, то S_{ABC} е: $\boxed{}$

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 15.

18. Решете неравенството

$$\sqrt{2-|x|}<x-1.$$

19. Решете уравнението

$$49^{x-\sqrt{x}-1}-7^{x-\sqrt{x}}+7^{x-\sqrt{x}-1}-7=0.$$

20. Отсечката, съединяваща средите на диагоналите, е равна на отсечката съединяваща средите на страните AD и BC на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Намерете ъгъла между правите AB и CD.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТВАНЕ В УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. Дадено е уравнението

$$\log_a(a+\sqrt{a+x})=\frac{2}{\log_x a}.$$

Ако $x=2$ е корен на уравнението, то a е:

А) 7 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 2 и 7

Задача 2. Дадена е функцията

$$y=f(x)=x^2-6mx+m^2.$$

Ако $y_{\min}=m$, то m е:

А) 0 **Б)** 0, 4 **В)** 4 **Г)** 3

Задача 4. Числото $\sin 43^\circ \cos 28^\circ - \sin 47^\circ \cos 62^\circ$ е равно на:

А) -1 **Б)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **Г)** 1

Задача 5. Най-малката страна на триъгълник се отнася към радиуса на описаната му окръжност както $6:5$, а другите страни са 20 и 21.Тогава тази страна е равна на:

А) 12 **Б)** 13 **В)** 14 **Г)** 15

Задача 5. Цилиндър е пресечен с равнина успоредна на оста му и минаваща на разстояние 4 от нея. Диагоналът на полученото сечение е два пъти по-голям от радиуса на основата на цилиндъра. Височината му е:

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Задача 6. Дадено е уравнението

$$(3^{\cos x} - 3)^2 - a.3^{\cos x} = 0,$$

където a е параметър.

а) За коя стойност на a уравнението има решение $x = \dfrac{\pi}{3}$?

б) Да се реши уравнението за $a = 4$.

в) За кои стойности на параметъра a уравнението има точно едно решение от интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$?

Задача 7. Правоъгълникът $CMNP$ е вписан в окръжност с радиус R. Допирателната към нея в точка N пресича правите CM и CP съответно в точките A и B, като $\sphericalangle CAB = \alpha$.

а) Да се пресметне лицето на четириъгълника $CANP$.

б) Да се намери ъгъл α, ако AP разделя CN в отношение $4:3$, считано от върха C.

в) При фиксирано R, за коя стойност на α лицето на триъгълника ABC е най-малко?

Задача 8. В четириъгълната пирамида $ABCDE$ основата $ABCD$ е квадрат със страна a. Ъглите между основата и стените BAE, ADE и DCE са съответно α, 90° и α, където α е остър ъгъл.

а) Да се докаже, че $\sphericalangle BAE$ е прав.

б) Да се пресметне обемът на пирамидата.

в) Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите BE и CD, ако $\alpha = 30^\circ$.

УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

доц. д-р инж. Борис Цанков, зам.-ректор на УАСГ

Университетът по архитектура, строителство и геодезия е най-старото висше техническо училище у нас. През 2017 г. се навършват 75 години от неговото основаване. През всички тези години УАСГ се е утвърдил като най-престижното висше училище в направление Архитектура, строителство и геодезия в страната.

Обективна оценка за качеството на обучението в УАСГ е професионалната реализация на неговите възпитаници. Редица от тях са изтъкнати практикуващи архитекти, инженери и урбанисти, уважавани преподаватели и висши администратори у нас, в Европа, Азия, Африка и Америка.

Прием в различните специалности на УАСГ

Специалност **„Архитектура“**

Балът се образува като сума от следните числа:

- по-голямото число от следните възможни:
  - оценката от изпита по математика;
  - оценката от ДЗИ по математика, умножена с коефициент 0,8;
- оценките от трите части на конкурсния изпит по рисуване;
- общ (среден) успех от дипломата за средно образование.

Инженерни специалности – Строителство на сгради и съоръжения, Строителство на сгради и съоръжения – англоезиково обучение, Управление в строителството, Транспортно строителство, Организация и управление на движението, Геодезия, Устройство и управление на земи и имоти, Водно строителство, Водоснабдяване и канализация, Хидротехническо строителство, Хидромелиоративно строителство, Инженерна екология

Балът за всички инженерни специалности се образува като сума от следните числа:

- по-голямото число от следните възможни:
  - оценката от конкурсния изпит по математика, умножена с коефициент 3;
  - оценката от ДЗИ по математика, умножена с коефициент 2,5;
  - оценката от ДЗИ по физика, умножена с коефициент 2,5;
  - оценката от ДЗИ по български език и литература, умножена с коефициент 2,5;

- оценката по математика от задължителната подготовка от дипломата за средно образование;
- оценката по физика (физика и астрономия) от задължителната подготовка от дипломата за средно образование.

Специалност **„Урбанизъм“**

Балът се образува като сума от следните числа:

- по-голямото число от следните възможни:
  - оценката от конкурсния изпит по математика, умножена с коефициент 2;
  - оценката от ДЗИ по математика, умножена с коефициент 2;
  - оценката от ДЗИ по български език и литература, умножена с коефициент 2;
- общ (среден) успех от дипломата за средно образование;
- оценката от ДЗИ по български език и литература от дипломата за средно образование;
- оценката по география (география и икономика) от задължителната подготовка от дипломата за средно образование, а ако кандидатът има и ДЗИ по география - по-високата оценка от двете.

Специалност **„Ландшафтна архитектура и ландшафтно планиране“**

Балът се образува като сума от следните числа:

- по-голямото число от следните възможни:
  - оценката от изпита по математика, умножена с коефициент 2;
  - оценката от ДЗИ по математика, умножена с коефициент 2;
  - оценката от ДЗИ по български език и литература, умножена с коефициент 2;
- оценката от изпита по рисуване I част (перспектива);
- общ (среден) успех от дипломата за средно образование;
- оценката от ДЗИ по български език и литература от дипломата за средно образование.

Максималният бал за всички специалности е 30,00.

Дати за провеждане на изпитите по математика:

- Предварителни дати: 9 и 23 април 2017 г.
- Редовна дата: 26. 06. 2017 г.

Подробна информация относно приема на студенти в УАСГ може да се получи на адрес: `http://uacg.bg/?p=525\&l=1`

X ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „Академик Стефан Додунеков“

Емил Колев, Петър Бойваленков, ИМИ–БАН

На 18–20.11.2016 г. в София се проведе десетото издание на Есенния математически турнир (ЕМТ), който от тази година носи името на академик Стефан Додунеков (1945–2012), дългогодишен директор на ИМИ–БАН, председател на СМБ и, за съжаление за кратко, председател на БАН. Както винаги досега, турнирът беше организиран със съдействието на Американска Фондация за България (АФБ), Фондация *Георги Чиликов* и секция БАН–СУ на СМБ. Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Европейската олимпиада за момичета и Всерусийската олимпиада.

За втори пореден път ЕМТ се проведе в сградата на Ректората на СУ „Св. Климент Охридски“ (аудитории 65 и 272), като участваха 450 ученици от 15 града. АФБ и Фондация *Георги Чиликов* финансираха работата на организационния комитет и на журито, както и част от таксите за правоучастие. Резултатите на всички участници са на сайта на турнира `https://sites.google.com/site/esenenmt/`.

Състезанието беше закрито на 20.11.2016 г. в Института по математика и информатика на БАН (ИМИ). Победителите получиха грамоти, купи, медали и математическа литература. Ето и имената на наградените:

Осми клас. До Виет Кьонг (СМГ), Мартин Василев (СМГ) и Светлин Лалов (СМГ) – по 26 т., Йоан Найденов (СМГ), Стефан Хаджистойков (СМГ) и Никола Стайков (СМГ) – по 25 т., Галин Тотев (ППМГ, Бургас) и Йоана Кичева (СМГ) – по 24 т., Александър Недков (СМГ), Валери Ванков (СМГ) и Калоян Фачиков (СМГ) – по 23 т.; отборно – СМГ, ППМГ Бургас, МГ Варна и други.

Девети клас. Евгени Кайряков (СМГ) – 26 т., Добрин Бараков (МГ, Плевен) и Петър Лангов (СМГ) – по 19 т., Димитър Опърлаков (МГ, Варна) – 18 т., Василена Цветанова (МГ, Пловдив) – 16 т., Виктор Балтин (ППМГ, Бургас) – 15 т., Алек Димитров (ПЧМГ) – 14 т, Иво Петров (СМГ) – 13 т., отборно – СМГ, ППМГ Бургас, МГ Варна и други.

Десети клас. Орлин Кучумбов (ППМГ, Бургас), Бойко Борисов (СМГ), Борис Барбов (СМГ), Борислав Антов (СМГ) и Пламен Иванов (СМГ) – по 19 т., Кристиян Василев (ПЧМГ) и Георги Александров (СМГ) – по 18 т., Златомир Папазов (АК) Златина Милева (МГ Варна) и Надежда Китипова (СМГ) – по 17 т.; отборно – СМГ, ПЧМГ, МГ Варна и други.

Единадесети клас. Константин Гаров (ППМГ, Бургас) – 26 т., Калоян Алексиев (СМГ) – 25 т., Кирил Бангачев (СМГ) – 24 т., Васил Йорданов (СМГ) – 22 т., Георги Димитров (СМГ) – 19 т., Илия Божинов (СМГ) – 18 т., Атанас Динев (ППМГ, Бургас) – 15 т., Димитър Любенов (СМГ) – 14 т., отборно СМГ, ППМГ Бургас, НПМГ и други.

Дванадесети клас. Виолета Найденова (СМГ) – 25 т., Иван Ганев (АК) – 21 т., Христо Папазов (АК) – 20 т., Христо Попов (СМГ) – 19 т., Мартин Иванов (ППМГ, В. Търново) – 15 т., Костадин Гаров (ППМГ, Бургас) – 14 т., Димитър Ружев (СМГ) – 13 т.; отборно СМГ, АК, МГ Варна и други.

Подреждането в комплексното отборно класиране е: СМГ, ППМГ Бургас, МГ Варна и други.

Условия на задачите

Задача 8.1. Нека a, b и c са естествени числа, такива че

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

а) Възможно ли е да е изпълнено равенството $a + b + c = 2017$?

б) Да се докаже, че числата $ab + bc + ca$ и ab са точни квадрати на цели числа.

Задача 8.2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC, $AC = BC$, и точките H и M от правата AC, такива че BH и BM са съответно височина и медиана в триъгълника ABC. Да се намерят мерките на ъглите на триъгълника ABC, ако $MH = \dfrac{1}{2}AB$.

Задача 8.3. На дъската са записани в редица естествените числа от 1 до 2016. Разрешава се изтриване на число от произволна двойка съседни числа по следното правило: ако сборът на числата от двойката е нечетен изтриваме лявото число, а ако е четен – дясното. След 2015 такива изтривани на дъската остава едно число. Да се намерят всички възможни стойности на това число.

Задача 8.4. Сборът $\dfrac{2^1}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + \cdots + \dfrac{2^{2016}}{2016}$ е записан като несъкратима дроб $\dfrac{p}{q}$.

а) Да се докаже, че p се дели на 32.

б) Да се докаже или опровергае, че p се дели на 64.

Задача 9.1. Квадратното уравнение $x^2 - bx + c = 0$ има два различни корена, които са естествени числа. Известно е, че $2b + c = 2016$. Да се намерят корените на уравнението и коефициентите b и c.

Задача 9.2. Точка P е вътрешна за страната AB на остроъгълен $\triangle ABC$. Около триъгълниците APC и BPC са описани съответно окръжности k_1 и k_2, като k_1 пресича BC за втори път в точка M, а k_2 пресича AC за втори път в точка N. Допирателната към k_1 в точка P пресича k_2 за втори път в точка S, а допирателната към k_2 в точка Р пресича k_1 за втори път в точка T. Известно е, че правите AT, BS и CP се пресичат в една точка. Да се докаже, че точките S, M, N и T лежат на една права.

Задача 9.3. Дадени са естествени числа n и k. На коледна гирлянда има n разноцветни лампички, поставени през 1 дм. Нека $s(n,k)$ е броят начини от тях да се светнат точно k, така че най-малкото разстояние между две светещи лампички да е равно на 2 дм.

а) Докажете, че $s(n,3)$ е точен квадрат.

б) Докажете, че $s(28,5)$ е точна трета степен.

Задача 9.4. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ съществува естествено число k, такова, че $2k+1$ дели $k! \pm n$ при подходящ избор на знака.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$ax^2 + |x-1| = 0$$

има поне две положителни решения.

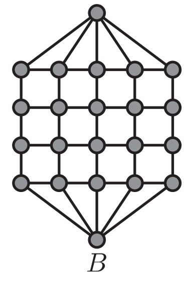
Задача 10.2. Нека CD е височина в $\triangle ABC$, като $D \in AB$. Окръжността с център C и радиус CD пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките E и F съответно. Ако правата EF разполовява CD, то да се намери $\sphericalangle ACB$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$\varphi(n)/n \text{ и } \varphi(n+2016)/(n+2016).$$

(С $\varphi(n)$ означаваме броя на естествените числа, ненадминаващи n и взаимнопрости с n.)

Задача 10.4. В един град има 22 площада, които са свързани с 41 улици както е показано на схемата вдясно. По колко начина можем да затворим някои от улиците, така че да съществува път от площад A до площад B?



Задача 11.1. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията:

$$f(x) = (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x + 2)(\sin x + \cos x + 3).$$

Задача 11.2. Точка M е среда на страната AB на триъгълник ABC. Окръжността през точките C и M, която се допира до страната AB пресича страните AC и BC съответно в точките P и Q. Ако K и L са среди съответно на CP и CQ да се докаже, че $\sphericalangle CKM = \sphericalangle CLM$.

Задача 11.3. Нека $A = \{1, 2, 3, \dots, m+n\}$, където $m \geq 2$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Да се намери броят на функциите $g : A \to A$, за които

$$g(g(i)) = i + 1 \text{ за } i = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, m+n-1;$$
$$g(g(m)) = 1 \text{ и } g(g(m+n)) = m+1.$$

Задача 11.4. Виж задача 12.4.

Задача 12.1. За редиците $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ от положителни реални числа са в сила равенствата

$$2a_{n+1} = a_n + b_n, \quad 2b_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}, \quad n \geq 1.$$

Да се докаже, че редиците са сходящи и да се намерят границите им.

Задача 12.2. Права през точката $A(1,1)$ пресича правата $y = -19$ в точка B и параболата $y = x^2$ в точка C ($C \neq A$). Да се докаже, че $|BC| > 10\sqrt{5}$.

Задача 12.3. Даден е тетраедър $ABCD$ и вътрешна за него точка O. Означаваме с d_1, d_2, d_3 и d_4 разстоянията от O съответно до върховете A, B, C и D и с k_1, k_2, k_3 и k_4 разстоянията от точка O съответно до стените BCD, ACD, ABD и ABC. Да се докаже, че:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1k_3} + \sqrt{k_1k_4} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_2k_4} + \sqrt{k_3k_4}).$$

Кога се достига равенство?

Задача 12.4. Нека a и b са такива естествени числа, че $p = a^2 + b^2$ е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които p дели $(a^n + a + b^n + b)((ab)^n + 1)$

Задачите са предложени както следва: 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 – Иван Тонов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Ивайло Кортезов; 9.4 – Васил Василев, 10.1 – Емил Карлов, 10.2, 10.3 – Стоян Боев, 10.4 – Иван Ланджев, 11.1, 11.3 – Александър Иванов, 11.2 – Мирослав Маринов, 12.1, 12.2, 12.4 (11.4) – Николай Николов, 12.3 – Драгомир Драгнев.

Решенията на задачите може да видите на страницата на турнира `https://sites.google.com/site/esenenmt/`

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ЗА РЕДИЦИ

Николай Николов, ИМИ–БАН

По време на Седмицата на олимпийската математика на ИМИ при БАН, която се проведе от 5 до 10 януари 2017 г., авторът предложи на участниците следната

Задача 1. Нека $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \dfrac{1}{2}$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{a_k^2}{n}$ при $k \geq 0$. Да се докаже, че $a_n < 1 < a_{n+1}$.

Оказва, че изборът на a_0 е единствен. Това следва от решенията на две по-общи задачи.

Задача 2. Да се намерят всички $a \in \mathbb{R}$, които за произволно $n \in \mathbb{N}$ имат следното свойство: ако $a_0 = a$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{a_k^2}{n}$ при $k \geq 0$, то $a_n < 1$.

Задача 3. Да се намерят всички $a \in \mathbb{R}$, които за произволно $n \in \mathbb{N}$ имат следното свойство: ако $a_0 = a$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{a_k^2}{n}$ при $k \geq 0$, то $a_{n+1} > 1$.

Решение на Задача 2. Ще докажем, че

$$\alpha_0 := \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < a \leq \frac{1}{2}.$$

Да отбележим, че $a \leq 0$ има даденото свойство при $n = 1$ точно когато $\alpha_0 < a$. Обратно, ако $\alpha_0 < a \leq 0$ и $n \geq 2$, то $a_k \leq 0$ при $k \geq 0$.

Сега да предположим, че $a > 0$ има даденото свойство за някое $n \in \mathbb{N}$. При $k = 0, \ldots, n-1$ имаме, че

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n + a_k} > \frac{1}{n+1}.$$

Като сумираме, получаваме, че

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a_n} + \frac{n}{n+1} > 1 + \frac{n}{n+1}.$$

Следователно, ако $a > 0$ има даденото свойство за всяко $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$, получаваме, че $a \leq \dfrac{1}{2}$.

Обратно, нека $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Тогава

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n + a_k} < \frac{1}{n}$$

и след сумираме получаваме, че $\frac{1}{a} - \frac{1}{a_n} < 1$, откъдето $a_n < 1$.

Решение на Задача 3. Ще докажем, че

$$a \geq \frac{1}{2}.$$

Нека първо a има даденото свойство за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $a \leq 0$ и $n \geq -a$, то $a_k \leq 0$ при $k \geq 0$, което е противоречие. И така, $a > 0$. Тогава

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n + a_k} < \frac{1}{n}$$

и след сумиране получаваме, че

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{n+1}{n}.$$

При $n \to \infty$ следва, че $a \geq \frac{1}{2}$.

Обратно, нека $a \geq \frac{1}{2}$. Тогава

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n + a_k} > \frac{1}{n + a_{n+1}}$$

и след сумираме получаваме, че

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_{n+1}} > \frac{n+1}{n + a_{n+1}},$$

откъдето $a_{n+1} > 1$.

ДВЕ ЗАДАЧИ ОТ ТЕОРИЯТА НА КОМПЛЕКСНИТЕ ЧИСЛА С ИНТЕРЕСНИ ПРИЛОЖЕНИЯ В АНАЛИЗА И ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ

акад. Петър Попиванов

1. На вниманието на любознателния читател с вкус към миниатюрата предлагам две интересни задачи. Ще започна с напомняне на няколко общоизвестни факта и полезни означения. Комплексните числа $z = x + iy$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $x, y \in \mathbb{R}$ лежат върху S^1, ако $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^1 \colon |z| = 1\}$, докато единичния кръг $B^1 = \{z \in \mathbb{C}^1 \colon |z| < 1\}$; рационалните числа бележим с $\mathbb{Q}$, а естествените с $\mathbb{N}$.

Една редица от комплексни числа $\{a_n\}$ наричаме редица на Коши (фундаментална), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв номер $N(\varepsilon)$, щото при $n > N(\varepsilon)$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ да имаме $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. $\{a_n\}$ е сходяща точно когато е фундаментална.

Уравнението $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ има следните решения: $z_j = e^{ij\frac{2\pi}{n}}$, $j = 0, \dots, n-1$, т.е. $\arg z_j = \pi \dfrac{2j}{n}$, $\dfrac{2j}{n} \in \mathbb{Q}$. Разбира се, $\arg z^n = n \arg z$ и $\arg \overline{z} = \arg \dfrac{1}{z}$, $\overline{z} = x - iy$. Нека $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Тогава ще казваме, че A е навсякъде гъсто в B, ако във всяка околност на точка от B се съдържа поне една точка от A. Да вземем върху единичната окръжност с център в началото две точки A, B и да означим с $\overset{\frown}{AB}$, респективно AB, съответната дъга и хорда, а с $|\overset{\frown}{AB}|$, $|AB|$ техните дължини. Нека $|\overset{\frown}{AB}| = \alpha < \pi$. Тогава $|AB| = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Знае се, че при достатъчно малко α, т.е. $0 \leqq \alpha < \delta$ за някое $\delta > 0$ имаме:

$$\frac{1}{2}|\overset{\frown}{AB}| < |AB| < |\overset{\frown}{AB}|. \tag{$*$}$$

Най-сетне, ако $\alpha \geqq 2\pi$ ще работим понякога с $\alpha \pmod{2\pi}$ вместо с α, където $\alpha \pmod{2\pi} = \alpha - 2k\pi \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{N}$; k е единствено.

Нека $x \in \mathbb{R}^1$. С $[x]$ означаваме най-голямото цяло число, което е $\leqq x$, а с $\{x\} = x - [x]$, т.е. $x = [x] + \{x\}$. $[x]$ наричаме цяла част на x, $\{x\}$ – дробна част.[1]

2. Задача 1. Нека $a \in B_1$. Тогава

$$\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} \lesseqqgtr 1 \tag{1}$$

тогава и само тогава, когато $z \in B_1$ при знак < 1, респективно $z \in S^1$ при знак равенство и $|z| > 1$ при знак > 1.

Доказателство. Твърдението е очевидно при $a = 0$ и затова $a \neq 0$. Трябва да установим кога

$$|z-a|^2 \lesseqqgtr |1-\overline{a}z|^2. \tag{2}$$

При $z = \dfrac{1}{\overline{a}} \Rightarrow |z| > 1$, докато числителят се анулира при $z = a \Rightarrow |z| < 1$. Значи ако знаменателят се анулира, числителят е различен от нула и в дробта

[1] Доказаните по-долу резултати са установени от немските математици Л. Кронекер (7.12.1823–29.12.1891) и И. Шур (10.1.1875–10.1.1941).

(1) имаме формално ∞, което е > 1. Сега означаваме $z = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $0 \leqq \varphi_1 < 2\pi$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, $a = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, $0 \leqq \varphi_2 < 2\pi$, $0 < \rho_2 < 1$ и използваме тъждеството $z\overline{z} = |z|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2$. Понеже $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$,

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{a}) = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Аналогично

$$|1-\overline{a}z|^2 = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) = 1 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \rho_1^2\rho_2^2.$$

И така (2) е еквивалентно с

$$\rho_1^2(1-\rho_2^2) \lesseqqgtr 1 - \rho_2^2 \tag{3}$$

с което всичко е доказано.

Бележка 1. Означаваме

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \tag{4}$$

което изобразява $B_1 \to B_1$, $w(a) = 0$. Изображението е обратимо и обратното му е $z = \dfrac{w+a}{1+w\overline{a}}$. Да отбележим, че (4) изобразява $|z| > 1$ в себе си, но $w = -\dfrac{1}{\overline{a}} \Leftrightarrow z = \infty$.

Приложение 1. Теорема на Шур. Да разгледаме полинома от степен n: $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Съгласно основната теорема на алгебрата $f(z) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{n}(z - z_j)$. Ще предположим, че

$$z_j \in B^1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{i}$$

Да дефинираме сега полинома с комплексно спрегнати коефициенти $(\overline{f})(w) = \overline{a}_0 w^n + \cdots + \overline{a}_{n-1}w + \overline{a}_n$. Понеже $\overline{(\overline{f})(w)} = f(\overline{w})$, нулите на $(\overline{f})(w)$, означени с w_j, са точно $w_j = \overline{z}_j$. Следователно $\overline{f}(w) = \overline{a}_o \prod\limits_{j=1}^{n}(w - \overline{z}_j)$.

Теорема 1 (Шур). Разглеждаме полинома $P(z) = f(z) + \gamma z^n f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $|\gamma| = 1$ при условията (i) и $a_0 + \gamma\overline{a}_n \neq 0$. Той притежава n-нули, които лежат върху S^1.

Доказателството е просто. Наистина $\gamma z^n(\overline{f})\left(\dfrac{1}{z}\right) = \gamma\overline{a}_0 \prod\limits_{j=1}^{n}(1 - z\overline{z}_j)$. Коефициентът A_0 пред z^n в $P(z)$ е $A_0 = a_0 + \gamma\overline{a}_0(-1)^n \prod\limits_{j=1}^{n}\overline{z}_j$, а свободният член е $a_n + \gamma\overline{a}_0 = \dfrac{a_n\overline{\gamma} + \overline{a}_0}{\overline{\gamma}} = \overline{\left(\dfrac{\overline{a}_n\gamma + a_0}{\gamma}\right)} \neq 0$. По формулите на Виет

$$a_0(-1)^n \prod_{j=1}^{n} z_j = a_n \;\Rightarrow\; A_0 = a_0 + \gamma\overline{a}_n \neq 0, \quad \text{т.е.} \quad \deg P = n,\; P(0) \neq 0.$$

Нека z_0 е корен на $P(z_0) = 0 \Rightarrow a_0 \prod\limits_{j=1}^{n}(z_0 - z_j) = -\gamma\overline{a}_0 \prod\limits_{j=1}^{n}(1 - z_0\overline{z}_j)$ т.е. $\prod\limits_{j=1}^{n}|z_0 - z_j| = \prod\limits_{j=1}^{n}|1 - z_0\overline{z}_j|$. Ако $z_0 = \dfrac{1}{\overline{z}_{j_0}} \Rightarrow z_0 = z_{j_1}$, което е абсурд, защото

$|z_j| < 1$. Затова имаме $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{|z_0 - z_j|}{|1 - z_0 \overline{z}_j|} = 1$. От задача 1 знаем, че $z_0 \in S^1$, защото $z_0 \in B^1 \Rightarrow \dfrac{|z_0 - z_j|}{1 - z_0 \overline{z_j}} < 1$ за всяко $j = 1, \ldots, n$ и т.н. $a_0 + \gamma \overline{a_n} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a_0}{\overline{a_n}} = \gamma \in S^1$.

3. Да разгледаме редицата $\{z^n\} \in S^1$, където $z = e^{i\alpha}$, $\alpha > 0$. Ако $\dfrac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, т.е. $\alpha = 2\pi \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, p/q е несъкратима дроб, то редицата е периодична и има q точки на сгъстяване $e^{ij\alpha}$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$.

Наистина, ако $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq q$, то $n = qm + r$, $0 \leqq r \leqq q - 1$, като $m \in \mathbb{N}$, r е цяло. Значи $z^n = e^{i\alpha n} = e^{i2\pi \frac{p}{q}(qm+r)} = e^{i2\pi mp}.e^{i2\pi \frac{p}{q} \cdot r} = e^{ir\alpha}$. Затова по-интересен е случаят, когато

$$(ii) \qquad \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q},$$

т.е. $\alpha = \dfrac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi$ е ирационално кратно на π.

Задача 2 (Кронекер). Нека $\dfrac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Тогава всяка точка $z_0 \in S^1$ е точка на сгъстяване на $\{z^n\}$.

Бележка 2. Твърдението можем да преформулираме така: Редицата $A = \{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ е навсякъде гъста в S^1.

Доказателство. Понеже $|z^n| = 1$, то $\{z^n\}$ е ограничена и следователно притежава поне една точка на сгъстяване върху S^1. Вземаме $\varepsilon > 0$ произволно и го фиксираме. Тогава съществува подредица $\{z^{n_k}\}$ на $\{z^n\}$, която е сходяща значи е редица на Коши, т.е. съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че при $n_k > N(\varepsilon)$, $p_k \in \mathbb{N}$ и $z^{n_k + p_k} \in \{z^{n_k}\}$ имаме

$$|z^{n_k + p_k} - z^{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Leftrightarrow \ |z^{p_k} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ще отбележим тук, че членовете на $\{z^n\}$ са различни помежду си, защото $z^n = z^m$, $n > m \Rightarrow z^{n-m} = 1 \Leftrightarrow z_j = e^{ij\frac{2\pi}{n-m}}$, $0 \leqq j \leqq n - m - 1$, което противоречи на (ii). Значи $z^{p_k} \neq 1$ $(p_k \geqq 1)$. 1 е точка на сгъстяване на $\{z^n\}$, защото в нейна произволна $\dfrac{\varepsilon}{2}$ околност намерихме член на редицата z^{p_k}. Фиксираме горното p_k и образуваме новата подредица $b_n = \{z^{np_k}\}$, $n \geqq 1$. Очевидно $C = |b_{n+1} - b_n| = |1 - z^{p_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $C > 0$, т.е. съседните точки b_n, b_{n+1} са равноотдалечени на разстояние $C > 0$. Нанасяме върху S^1 по посока обратна на часовниковата стрелка и като стартираме от b_1 точките $e^{i\alpha n p_k} = z^{np_k} = b_n$. Те не образуват затворен многоъгълник. Ако работим с $\alpha p_k \pmod{2\pi}$ и използваме $(*)$ съобразяваме,че при

$$A = 1,\ B = e^{i\alpha p_k \pmod{2\pi}},\ \frac{1}{2}\alpha p_k \pmod{2\pi} < \underbrace{|1 - e^{i\alpha p_k}|}_{\overset{\|}{C}} < \alpha p_k \pmod{2\pi},$$

т.е. след $M_1 = \left[\dfrac{2\pi}{\alpha p_k \pmod{2\pi}}\right] + 2$ нанасяния на точките b_n, $n \leqq M_1$, ще направим едно пълно завъртане около 0 и ще задминем точката b_1. Очевидно $M_1 \geqq \left[\dfrac{2\pi}{C}\right] + 2 = M$. Понеже обединението на дъгите $\widehat{b_n b_{n+1}}$, $0 \leqq n \leqq M$ покрива S^1, то всяка точка $z_0 \in S^1$ ще попадне в някоя дъга от вида $\widehat{b_s b_{s+1}}$, т.е.

$|z_0 - b_s| \leqq |\widehat{z_0 b_s}| \leqq |\widehat{b_s b_{s+1}}| \leqq 2|b_s - b_{s+1}| \leqq \varepsilon$. Следователно в $\varepsilon > 0$ околност на z_0 с съдържа член b_s на $\{z^n\}$, което означава, че z_0 е точка на сгъстяване на изходната редица.

Задача 3. Нека $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Тогава всички числа от $[0,1]$ са точки на сгъстяване на редицата с общ член $a_n = \{nx\}$ (цялата чест на nx).

Упътване. Както знаем от зад. 2, ако $x = \dfrac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 2\pi$, то всяка точка от $[0, 2\pi]$ е точка на сгъстяване на $\left\{\dfrac{n\alpha}{2\pi}\right\} \cdot 2\pi$, защото

$$e^{in\alpha} = e^{i.2\pi\left\{\frac{\alpha n}{2\pi}\right\}} = \cos\left(2\pi\left\{\frac{\alpha n}{2\pi}\right\}\right) + i\sin\left(2\pi\left\{\frac{\alpha n}{2\pi}\right\}\right)$$

$$\left(nx = \frac{n\alpha}{2\pi} = \left(\left[\frac{n\alpha}{2\pi}\right] + \left\{\frac{n\alpha}{2\pi}\right\}\right), \text{ т.е. } e^{in\alpha} = e^{i2\pi\left([nx]+\{nx\}\right)} = e^{i2\pi\{nx\}}\right).$$

Приложение 2. Диференциалното уравнение (система) върху тора $\mathbb{T}^2$.

Нека $S_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = C^2 > 0\}$ е окръжност с център 0 и радиус $C > 0$. Параметър върху нея е $\varphi \in [0, 2\pi]$. Разглеждаме декартовото произведение $S_{C_1} \times S_{C_2} = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2 + x_2^2 = C_1, x_3^2 + x_4^2 = C_2\}$. Върху тора (по дефиниция $\mathbb{T}^2 = S_{C_1} \times S_{C_2}$) имаме 2 параметъра $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$. Като използваме аналогията с ъгловите координати върху сфера $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$, $0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi$, ще наричаме φ_1 дължина и φ_2 ширина на точката $A(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$. Геометрично $\mathbb{T}^2$ се получава като завъртим окръжността S_C в равнината около ос, която лежи в същата равнина и не се пресича с S_C. Житейски, $\mathbb{T}^2$ представлява геврек. Да разгледаме сега системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 \end{array} \right. , \qquad \omega_1 = \text{const}, \ \omega_2 = \text{const} \tag{5}$$

върху тора. Щом $\varphi_1(0) = A_1$, $\varphi_2(0) = A_2$, $(A_1, A_2) \in \mathbb{T}^2$ тя притежава единствено решение, което геометрично е гладка крива $\gamma = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{T}^2$. Тя се нарича фазова крива на (5).

Теорема 2. Нека

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}, \quad \omega_1.\omega_2 \neq 0. \tag{iii}$$

Тогава γ е затворена крива върху тора.

(iv) $\qquad \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \gamma$ не се самопресича и γ е навсякъде гъста върху $\mathbb{T}^2$

Кратък коментар върху Теорема 1, чието доказателство съществено използва задача 2. Ако отношението между честотите ω_1, ω_2 (има съответна физическа терминология) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ е ирационално число, то едномерната крива плътно се намотава върху двумерния тор, като γ минава произволно близо до всяка точка от тора. Оттук се вижда, че ирационалните числа внасят качествено нова специфика във фазовата картина на (5). Твърдението, че на практика всяко число, срещащо се в приложенията е рационално, защото се пресмята с точност до някой десетичен знак, би довело в случая на система (5), че всяка фазова крива е периодична, елиминирайки по този начин „екзотичния“, но типичен случай (iv). Казваме типичен, защото рационалните числа са изброимо много, докато ирационалните са неизброимо много и имат пълна Лебегова мярка в $\mathbb{R}^1$.

математическа ракла

В тази рубрика представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

КОЗА ИЛИ КОЛА? (ИЛИ ЗАГАДКАТА НА *МОНТИ ХОЛ* И НЯКОИ НЕЙНИ ВАРИАЦИИ)

Евгения Сендова

> *Правилото 50-50-90: Винаги когато шансовете да успееш са 50 на 50, вероятността да сгрешиш е 90%*
> Анди Руни

Увод

Гледали ли сте някой епизод от шоуто „Сделка или не“? Аз не съм (и не възнамерявам), но зная, че една интересна задача, известна като „Загадката на Монти Хол“, се основава на подобен сценарий. (А за любителите на лесно забогатяване е добре да могат да пресмятат шансовете си за печалба.)

Ето и самата формулировка на загадката (в оригинал – *Monty Hall Problem*):

Монти Хол (домакинът на шоуто) Ви показва 3 врати, зад които са скрити кола и 2 кози (по един обект зад врата). Вие трябва да изберете една от вратите. След това Монти Ви отваря задължително врата, зад която е скрита коза, и Ви дава право да смените своята врата, ако желаете. Наградата Ви е това, което стои зад окончателно избраната от Вас врата. Как е по-разумно да действате (в случай, че предпочитате колата, естествено)?

Не бързайте с отговора! Не е толкова очевиден. На пръв поглед би трябвало да е все едно – зад едната врата има кола, зад другата – коза и Вие сте пред една от тях. С други думи шансът Ви да сте пред „точната врата“ е 50% … Защо да не се доверите на първоначалната си интуиция и да останете при първия си избор …

Да, но така е само на пръв поглед. Да хвърлим втори – този път математически. Да предположим, че имате възможност да участвате в играта повече от 1 път, например 100 пъти. Трябва да формулирате стратегията

си така, че броят на случаите, в които печелите колата, да бъде максимален – до това се свежда задачата.

Да предположим, че сте избрали врата, зад която се крие коза. Монти Ви отваря другата врата, зад която има коза, и Ви пита искате ли да смените избора си с оставащата неотворена врата (в случая зад нея има кола, но Вие няма как да знаете това). Очевидно смяната ще Ви донесе колата. Но тази ситуация се случва с вероятност 2/3 – колкото е вероятността да сте избрали първия път врата с коза зад нея. Следователно, ако сменяте при всяка игра първоначално избраната врата, печелите в 2/3 от игрите.

Едно от най елегантните и кратки решения е предоставено от Ерих Нойвирт, професор емеритус по статистика и информатика от Виенския университет.

Представете си двама играчи, първият от които винаги остава при първоначално избраната (от двамата) врата, а вторият – винаги я сменя. Тогава във всяка игра точно един от двамата печели. Тъй като първият печели в 1/3 *от случаите (такава е вероятността за избор на кола от първи път), вторият ще печели в останалите* 2/3 *случаи, значи смяната на избраната врата е по-изгодна стратегия.*

Ако все още се чувствате объркани, разгледайте ситуацията със 100 врати. Вие избирате една от тях. Вероятността тя да е печелившата е 1/100, а вероятността колата да е била зад една от останалите 99 врати, е 99/100. Монти е ограничен в избора си кои врати да покаже и Ви показва 98, зад всяка от които има коза. Сега ще се смените ли? Ще сте луди да не го направите! Вероятността зад останалите (без избраната) врати да има кола се свежда до това да има кола в останалата последна неотворена от

Монти врата, т.е. 99/100. Тогава смяната на вратите ще увеличи шансовете Ви за печалба от 1% на 99%.

Вече изглежда доста по-ясно, нали? Ако обаче не се уповавате на интуицията си и се опитате да приложите формулата за условна вероятност с лист и молив в ръка, нищо чудно отново да се усъмните в горните разсъждения. Така станало и с някои професионални математици.

Математическа грамотност или математическо невежество?

Решението на загадката на Монти Хол, предложено от Мерилин фон Савант в популярно математическо списание през 1990, предизвикало около 10 000 възмутени писма, че не е права. Интересното в случая е, че най-острата критика идвала от представители на точните науки, които саркастично се обръщали към нея с реплики от типа на „Козата сте вие!“ и оплаквали невежеството на нацията ...

По-късно, американският математик Джон Алън Паулос споменава загадката на Монти Хол в *Scientific American* и отново огромен брой читатели се оплакват, че се чувстват объркани или направо го обвиняват, че е сбъркал.

Проф. Паулос показва, че не разбира нищо от условна вероятност – пише пенсиониран професор по статистика – *и цитираните от него резултати са глупост. Вярата ми във вашето списание е разклатена ...*

Ето как разсъждавал въпросният статистик (въоръжете се с малко търпение, за да проследите доказателството му):

Условната вероятност едно събитие A да настъпи, при положение, че събитието B е настъпило (независимо преди или след A), се означава с $P(A|B)$ и се изчислява по формулата:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

където $P(A \cap B)$ е вероятността да настъпят едновременно събитията A и B, а $P(B)$ вероятността да настъпи събитието B. Нека с A означим събитието „колата е пред врата 1 (предварително избрана от играча)“, а с B – събитието „колата не е пред врата 2 (отворената от Монти врата)“. Ако е вярно A, то в сила е и B. Тогава $P(A \cap B) = P(A) = 1/3$, а $P(B) = 2/3$. Следователно $P(A|B) = (1/3)/(2/3) = 1/2$.

С други думи, не се печели при смяна на вратата, противно на твърдението на проф. Паулос.

Къде е подмолният камък в това разсъждение? Дори изкушени в теорията на вероятностите не са могли да видят веднага грешката. Коя врата отваря Монти обаче зависи от началния избор на играча. Ако последният е избрал врата, зад която има коза, Монти всъщност има *ограничен избор*[1]

[1] Понятието „ограничен избор“ е добре известно в редица игри, например в бриджа.

– той е принуден да отвори единствената оставаща с коза врата. Ако пък играчът е избрал печелившата врата (зад която е колата), Монти може да хвърли монета, за да реши коя врата да отвори. Но настъпването на събитието B (зад отворената врата да няма кола) е сигурно, т.е. $P(B) = 1$. И тогава $P(A|B) = (1/3)/1 = 1/3$, а не $1/2$.

Неотдавнашно изследване показва, че дори след многократно изпълнение на играта, участниците сменяли избора си едва в $2/3$ от предоставените им опити. Гълъбите се оказали малко по-добри – след само няколко опита те започнали да сменят избора си всеки път (предполагам, че не ставало дума за кола и кози обаче …)

Резултатът от това изследване доста ме изненада и реших да видя какво мислят за задачата бивши мои ученици с изявени интереси по математика и информатика. Ето какво сподели Тодор М., носител на редица престижни награди по математика и информатика, който днес се занимава професионално с вероятностни модели:

Кога чух за първи път за задачата на Монти Хол ли? Когато бях ученик в 8 клас на СМГ. Използвана бе в епизод от един криминален сериал (NUMB3RS), в който криминален инспектор и математик спорят за отговора. Първата ми реакция беше: „Глупости! Какво има да спорят? Колата е зад една от двете оставащи врати и шансовете са 50 на 50.“ Обаче във филма показаха доказателство, което оборваше моята логика и аз трябваше да им намеря грешката. Сигурен бях, че такава има. В края на краищата това си бе сериал и математиката им не винаги бе достатъчно прецизна за моите разбирания… Ала грешка не намерих и реших да си направя компютърна симулация, да я пусна достатъчен брой пъти и да покажа, че аз съм правият!

Ето и скелетът на програмата ми:

1. Избираме по случаен начин къде да е колата.
2. Нека играчът е избрал вратата A.

Първи случай – печелившата врата е A. Монти случайно избира коя врата да отвори и играчът сменя избора си с останалата врата. Чакай малко! Няма дори нужда да симулирам този случаен избор на Монти, защото играчът сменя печелившата врата. Значи резултатът в този случай е КОЗА (или ГУБИШ).

Втори случай – печелившата врата не е A (избраната). Това трябва да е по-интересният случай. Първо, Монти отваря една от вратите B и C, зад която няма кола. След това играчът сменя избора си с онази от B и C, която не е отворена, и ние връщаме каквото има зад нея. Леле! То там е именно колата! Значи, винаги връщаме КОЛА (или ПЕЧЕЛИШ)!

Както си писах, разбрах, че дори няма нужда да изпробвам програмата. Свеждането на разсъжденията до основни команди, които компютърът може да разбере, ми помогна да осъзная какво всъщност става и защо шансовете за печалба при смяна са $2:1$ *(т.е. вероятността е* $2/3$*).*

Не мисля, че в онзи момент бих повярвал на каквото и да е абстрактно доказателство – интуицията ми за $50:50$ *бе прекалено силна ... Но това, че сам започнах да пиша програмата, дори без да я пусна, ми помогна много!*

Чувала съм от голям преподавател, че в джоба си трябва да имаш поне 5 различни обяснения на дадено явление, за да си сигурен, че поне едно от тях ще достигне до публиката ти. Когато първият читател на черновата на тази статия стигна дотук, сподели:

Някои от горните обяснения направо ме изнервиха. Чак когато прочетох обяснението на Тодор, нещо ми просветна. Ето как го разбирам: при първоначалния избор в $1/3$ *от случаите печелиш, в* $2/3$ *губиш. Ако след като Монти отвори една врата, ти смениш избора си, то в случаите, в които си щял да спечелиш - ще загубиш, а в случаите, в които си щял да загубиш – ще спечелиш. Е това вече ми е ясно ...*

(Станаха ли 5?)

Оказва се, че загадката на Монти Хол се появява не само в *NUMB3RS*, но и във филма от 2008 г. „21“, в романа *The Curious Incident of the Dog in the Night-Time* и в епизод от шоуто *MythBusters*. А гореспоменатият Тодор М. сподели, че на интервю за получаване на интересна работа, са го питали каква стратегия ще избере, ако играе с Монти Хол. И макар да си признал, че знае задачата, бил одобрен.

Вариации на Монти Хол

Разбира се, не можем да очакваме, че публиката на Монти Хол ще остане за дълго време неориентирана за печеливишата стратегия, ако той поддържа играта с постоянен формат. Затова нека му помогнем с някаква подходяща разновидност, например с 10 врати:

След като играчът избере врата, Монти отваря 7 *от оставащите* 9 *врати, като внимава да не отвори печелившата врата. Останали са* 3 *неотворени врати – тази, избрана първоначално от играча, и двете, които Монти не е отворил. Коя стратегия е по-добра – да се сменя избраната първоначално с някоя от другите* 2 *или да да не се сменя? Каква е вероятността за печалба при всяка от избраните стратегии?*

Преди да погледнете отговора, опитайте се да стигнете до него сами, за да се уверите, че вече добре разбирате проблема.

Отговор. Вероятността играчът да е избрал печелившата врата от първия път е $1/10$ и си остава толкова и след като види отворените от Монти врати. Вероятността колата да е в някоя от останалите 9 врати е $9/10$. Тъй като Монти отваря 7 от тези 9 врати, вероятността колата да е в една от 9-те, сега се свежда до това колата да е в една от неотворените 2, следователно 90-те% вероятност за печалба се разпределят между тези 2 врати. Играчът би трябвало да смени вратата си с една от тях, за да увеличи шансовете си от 10% на половината от 90%, т.е. – на 45%.

Загадката на Монти Хол е еквивалентна от математическа гледна точка на следната задача, формулирана от Мартин Гарднър в рубриката *Mathematical games* на *Scientific American* през 1959 г.

Парадокс на тримата затворници

Трима затворници в отделни килии (A, B и C) били осъдени на смърт, но губернаторът решил да помилва един от тях. Написал имената им на листчета, сложил ги в шапка, разклатил я добре и изтеглил едно от тях. Съобщил името в изтегленото листче на директора на затвора, като му заповядал да пази информацията в тайна. Все пак, той откликнал на молбата на затворника от килия A да му даде поне частична информация: „Ако този от B е помилван, посочи ми килия C. Ако е помилван затворникът от килия C, посочи ми B. Ако ли пък късметлията съм аз, хвърли монета да решиш коя от килиите B и C да ми посочиш. Директорът се смилил и преценил, че няма да издаде тайната, ако удовлетвори молбата: „Добре, затворникът от B ще бъде екзекутиран“. „О-хо“ – казал си затворникът от A – „значи останахме двамата с този от C и шансът ми да бъда помилван е вече 50 на 50“. Побързал да почука на стената, деляща A и C, и да зарадва съседа си, че шансовете им са нараснали. „О-о-о, много ти благодаря, приятел, само че ти не осъзнаваш, че твоите шансове са си все така $1/3$, а моите току-що нараснаха на $2/3$.“

Кой от тях е прав?

Упътване. Направете аналогия със загадката на Монти Хол.

Малко история

Оригиналната задача всъщност принадлежи на френския математик Жезеф Бертран (1822–1900), който я формулира в учебник по теория на вероятностите в 1899 г. Ето как звучи неговия парадокс на български.

Парадокс с три кутийки

В три кутийки са сложени по две монети: в първата – 2 златни, във втората – 2 сребърни, в третата – златна и сребърна. На външен вид кутийките не се различават. Разменяте местата на кутийките със затворени очи, така че вече не знаете коя какво съдържа. Избирате една от тях и изваждате една монета от нея (без да гледате съдържанието ѝ). Да предположим, че монетата е златна. Каква е вероятността и другата монета в кутийката да е златна?

Като установим, че първата монета е златна, какво можем да заключим за другата? Интуицията ни подсказва, че щом тя е или е златна, или е сребърна – значи вероятността за съвпадение на двете монети е $1/2$. (Аналогично за случая, в който сме изтеглили сребърна монета).

Но каква е вероятността в избраната от Вас кутийка да има две еднакви монети (златна-златна или сребърна-сребърна) – $2/3$, разбира се (само в една от трите кутийки монетите са различни)! Е, може ли поглеждането на едната монета да измени вероятността? Естествено, че не.

Още две вариации на парадокса с кутийките

*Каква е вероятността, ако хвърлите 3 монети, и трите да паднат от една и съща страна (*3 *ези или* 3 *тура)?*

Ваш приятел, който се уповава на интуицията си, разсъждава така: *Поне две от трите монети са паднали на една и съща страна (например ези). Тогава за третата остава вероятност* $1/2$ *(ези или тура) да падне на същата страна.*

Покажете, на приятеля си, че греши и че вероятността е по-малка.

Упътване. Разгледайте всички възможни случаи и пребройте благоприятните резултати. Отношението на благоприятните към възможните ще ви даде търсената вероятност.

Андрей и Борка играят на Дартс *(стрелички) по следните правила: момичето има* 2 *стрелички, а момчето – само* 1. *След като ги изстрелят, победител ще е този, чиято стреличка е най-близко до центъра. Какви са шансовете на Борка да спечели? (Приемаме, че равни изстрели няма, толкова прецизно е измерването).*

Борка: *Щом аз имам* 2 *стрелички, а ти само* 1*, вероятността да те бия е* $2/3$.

Андрей: *По моите сметки шансовете ти за победа са още по-големи, защото има* 4 *възможни ситуации:* (1) *И двете ти стрелички са по-близо до центъра от моята;* (2) *само първата ти стреличка е по-близо до центъра от моята;* (3) *само втората ти стреличка е по-близо до центъра от моята и* (4) *моята е по-близо до центъра и от двете ти стрелички.* Кой е прав?

Упътване. Разгледайте всички възможни случаи, по които могат да се подредят трите стрелички, като ги означите по подходящ начин, и преценете колко от тях са благоприятни за Борка.

Накрая да пофилософстваме

Може би най-важното от цялата история е как да убедим някого, че нашият отговор (или въобще някакъв конкретен отговор) е верен. Особено след като сме изложили строго доказателство, приложили сме класическа формула, написали сме компютърна симулация и сме я експериментирали с достатъчен брой опити. Да не говорим, че и интуицията ни може досега да не ни е изневерявала. Ако сме сигурни в резултата, който трябва да получим, понякога това може да повлияе и на начина ни на мислене.

Затова вместо да посрещаме с подигравка мнения, които не съвпадат с нашите, добре е да им се радваме. Не е ли чудесно, че някой е решил да си *поразмърда* мозъка и дори да се противопостави на авторитетите? Нали това ни дава още един шанс да проверим нашите разъждения и да потърсим още по-добро доказателство ...

Ненапразно са казали, че „debugging“-ът, т.е. откриването на грешки в програма (а и не само там), е най-великата образователна идея на 20. век.

Ползвани източници

[1] John Tierney, *Behind Monty Hall's Doors: Puzzle, Debate and Answer?*, New York Times, July 21, 1991

[2] Martin Gardner, *aha! Gotcha: paradoxes to puzzle and delight*, 18^{th} printing 1995, RRD, W.H. Freeman and Company, New York

[3] Davide Castelvecchi, *Let's make a deal: Revisiting the Monty Hall problem*, April 15, 2011, `https://blogs.scientificamerican.com/observations/lets-make-a-deal-revisiting-the-monty-hall-problem/`

[4] Michael Mitzenmacher, *The Monty Hall Problem: A Study*, RSI'86 mini-paper, `http://web.mit.edu/rsi/www/2013/files/MiniSamples/MontyHall/montymain.pdf`

Послепис, който бе написан преди статията

Има най-различни начини и Вие да си направите компютърна симулация. Аз лично съм почитател на *Лого* (език, който мнозина свързват с костенурковата геометрия, но който всъщност е създаден като по-дружелюбна версия на *Lisp*). Ето един от няколкото варианта, които направих на версията *Comenius Logo* (фиг. 1).

```
start
За start
 make "doors [A B C]
 make "car pick :doors
 make "chosen pick :doors
 make "remaining but :chosen :doors
 if :chosen = :car [make "shown pick :remaining][make "shown pick but :car :remaining]
Край
```

```
but
За but :el :list
 if empty? :list [op :list]
 if :el = first :list [op bf :list][op fput first :list but :el bf :list]
Край
```

```
other
За other :el :list
 if :el = first :list [op last :list][op first :list]
Край
```

```
game
За game :N :wins :tries
 if :N = 0 [( print :wins [times out of] :tries "tries ) stop]
 start
 if :ans = "y [make "new_choice other :shown :remaining][make "new_choice :chosen]
 if :new_choice = :car [game :N - 1 :wins + 1 :tries][game :N - 1 :wins :tries]
Край
```

```
Monty_Hall
За Monty_Hall
 pr [How many tries would you like?]
 make "tries readword
 pr [switching? y / n]
 make "ans readword
 game :tries 0 :tries
 pr [more? y / n]
 if readword = "y [Monty_Hall][pr "ciao]
Край
```

Фиг. 1. Компютърна симулуация на загадката на Монти Хол (реализирана на *Comenius Logo*)

За да проверите колко пъти ще спечелите от 100 опита например, ако постоянно избирате стратегията „смяна на първоначално избраната врата“, трябва да изпълните диалоговата процедура Monty_Hall и да отговорите на първия въпрос (*Колко опита искате?*) със **100**, а на втория (*Ще сменяте ли вратата си всеки път?*) с **y** (да). Аналогично, за да видите колко пъти бихте спечелили от 1000 опита при стратегията „оставам с първоначалния избор“, отговорите Ви трябва да са съответно **1000** и **n** (не). Аз лично получих с първата стратегия от 100 опита последователно 61, 63, 64, 71, 65 (т.е. успеваемост между 61% и 71%), а при втората от 1000 опита – последователно 329, 341, 322, 338, 329 (т.е. успеваемост между 32.2% и 34.1%). Естествено Вашите резултати едва ли ще съвпаднат с моите, но би трябвало да се въртят съответно около 2/3 и 1/3.

Да разгледаме сега процедурата **start** с добавени коментари. (Коментарите се предхождат от точка и запетая.)

to start
make "doors [A B C]
;Променливата *doors* е списък, съдържащ имената на вратите
make "car pick :doors
;Променливата *car* съдържа случайно избран елемент от списъка [A B C],
;т.е. името на вратата, зад която е колата
make "chosen pick :doors
;Променливата *chosen* съдържа случайно избран елемент от [A B C],
;т.е. името на вратата, която е избрал играчът
make "remaining but :chosen :doors
;Променливата *remaining* съдържа списъка на вратите **без избраната**
if :chosen = :car [make "shown pick :remaining]~
[make "shown pick but :car :remaining]
;Променливата *shown* съдържа името на вратата, показана от Монти
;Ако избраната от играча врата съвпада с печелившата, променливата *shown*
;съдържа случайно избран елемент от списъка с имената на останалите 2 врати.
;В противен случай Монти избира от останалите врати без тази, зад която
; е колата.
end

Именно в този последен ред от процедурата *start* се крие разковничето на загадката – ако играчът е избрал вратата пред колата, Монти може да хвърля монета, за да избере коя от останалите две врати да покаже. Ако обаче играчът не е улучил колата, тогава Монти е задължен да покаже единствената останала врата, зад която има коза, т.е. фактически той няма избор! С други думи вероятността да отвори врата, зад която няма кола, винаги е единица.

Интересното е, че при първото пускане на програмата, получих резултат, който не отговаряше на очакванията ми – по-скоро беше в полза на защитниците на тезата, че вероятността не зависи от това дали сменяме вратата. Тъй като вече бях убедена в аргумента в полза на смяната, разбрах, че съм допуснала грешка в програмата и не след дълго я открих ...

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Стойчо Стоев, СМГ

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Стойността на израза $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ е:

А) $2\sqrt{3}$ **Б)** 3 **В)** $2\sqrt{6}$ **Г)** 6

2. Подредете числата $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{15}{16}$ по големина, като започнете от най-малкото:

А) $-\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{15}{16}$ **Б)** $-\frac{5}{3}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{15}{16}$

В) $-\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{3}{5}$ **Г)** $-\frac{5}{3}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{15}{16}$

3. Разложете $12a^2b^2-c+3ac^2-6a^2bc+2ab-6abc$ на множители:

А) $(2ab-c)(6ab-3ac+1)$ **Б)** $(3ab-c)(4ab-2ac+1)$

В) $(3ab+c)(4ab+2ac-1)$ **Г)** $(2ab+c)(6ab-3ac-1)$

4. Решенията на неравенството $\frac{x-3}{x^2+2x-5}>\frac{1}{2}$ са:

А) $\left(-\infty;-1-\sqrt{6}\right)\cup\left(-1+\sqrt{6};\infty\right)$

Б) $\left(-\infty;1-\sqrt{6}\right)\cup\left(1+\sqrt{6};\infty\right)$

В) $\left(1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}\right)$

Г) $\left(-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\right)$

5. Стойността на израза $\sqrt[4]{3^{2+\frac{1}{\log_5 3}}+49^{\frac{1}{2\log_3 7}}+1}$ е равна на:

А) $\sqrt[4]{43}$ **Б)** $\sqrt{7}$ **В)** $\sqrt[4]{39}$ **Г)** $\sqrt{6}$

6. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $2x^2-\sqrt{3}x-1=0$, то стойността на израза $|x_1-x_2|$ е:

А) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **Б)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **В)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Г)** $\sqrt{3}$

Задача 7. Сумата от корените на уравнението $|x+1|+|x+2|=3$ е:

А) -4 **Б)** -3 **В)** 2 **Г)** 3

Задача 8. Ако $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}5$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е:

А) 1 **Б)** $0{,}75$ **В)** $0{,}5$ **Г)** $0{,}25$

Задача 9. Най малкото цяло решение на неравенството

$$\sqrt{x^2+4x-5} > 6-x \quad \text{е:}$$

А) 5 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** -1

10. Ако $a_4 = 10$ и $a_7 = 19$, то сумата на първите десет члена на аритметична прогресия е:

А) 145 **Б)** 150 **В)** 152 **Г)** 216

11. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) височината $CD = 8$ ($D \in AB$) и $AB : AC = 6 : 5$. Намерете лицето на вписания в триъгълника кръг.

А) 36π **Б)** 4π **В)** 16π **Г)** 9π

12. ABC е правоъгълен триъгълник с хипотенуза AB. Дължините на двете медиани са $AA_1 = \sqrt{156}$ ($A_1 \in BC$) и $BB_1 = \sqrt{89}$ ($B_1 \in AC$). Дължината на медианата CC_1 е:

А) 6 **Б)** $7{,}2$ **В)** 9 **Г)** 7

13. $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle D = 45^\circ$, $BC = 1$, $AC = 5 < BD$. Лицето на $ABCD$ е:

А) $12+2\sqrt{6}$ **Б)** $12+10\sqrt{2}$ **В)** $\dfrac{25+10\sqrt{2}}{4}$ **Г)** $7{,}5$

14. В кръгов сектор с ъгъл 60°е вписан кръг. При какъв радиус на сектора лицето на вписания кръг е равно на π?

А) $2{,}2$ **Б)** $2{,}5$ **В)** 3 **Г)** $3{,}2$

15. От точка P, външна за окръжност k, е построена допирателна PA ($A \in k$). Намерете радиуса на окръжността k, ако разстоянието от точка P до k е 3 и $PA = 6$.

А) 9 **Б)** 6 **В)** $4{,}5$ **Г)** $3{,}75$

16. С колко процента ще се увеличи лицето на правоъгълник, ако дължината му се увеличи с 20%, а ширината му – с 40%?

А) 60 **Б)** 68 **В)** 76 **Г)** 84

Задача 17. Ако за числова редица е изпълнено $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 2$, то $a_{10} - a_8$ е равно на:

А) 408 **Б)** 396 **В)** 384 **Г)** 358

Задача 18. Стойността на израза $48\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}$ е:

А) $12\sqrt{3}$ **Б)** 12 **В)** $9\sqrt{3}$ **Г)** 9

19. В 12а клас има 27 ученици. Момичетата са с 3 по малко от момчетата. На контролно по математика само двама от учениците имат отлична оценка. Каква е вероятността те да са момичета?

А) $\dfrac{4}{5}$ **Б)** $\dfrac{4}{9}$ **В)** $\dfrac{22}{117}$ **Г)** $\dfrac{20}{39}$

20. Колко диагонала има правилен многоъгълник с централен ъгъл $45°$?

А) 14 **Б)** 20 **В)** 27 **Г)** 35

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете решенията на уравнението $x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$.

22. Намерете лицето на триъгълника ABC, ако $AB = 35$, $AC = 14$ и ъглополовящата $AL = 12$ $(L \in BC)$.

23. В квадрата $ABCD$ точка P е среда на CD и AP пресича BD в точка Q. Намерете $\sin(\sphericalangle AQB)$.

24. На кръглата маса на крал Артур седят 12 рицари. От тях всеки враждува със своите съседи (и само с тях). Кралят трябва да избере 5 рицари, които да освободят омагьосаната принцеса, но сред избраните рицари не трябва да има врагове. По колко начина крал Артур може да направи избора си?

25. Намерете стойността на израза $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha - \sin 4\alpha - \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}$, ако $\alpha = \dfrac{\pi}{18}$.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Решете неравенството $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$.

27. В чанта се намират шест червени и осем зелени еднакви по форма топчета. Случайно се изваждат пет от топчетата и се поставят в червена кутия, а останалите девет – в зелена кутия. Каква е вероятността, че броят на червените топчета в зелената кутия плюс броят на зелените топчета в червената кутия не е просто число?

28. Даден е триъгълник ABC с ъгли $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 75^\circ$. Върху страните AB и BC са избрани съответно точки M и N, такива че $\sphericalangle CAN = \sphericalangle ACM = 30^\circ$. Да се намери лицето на $\triangle CMN$, ако $CM = 2\sqrt{2}$.

ОТГОВОРИ

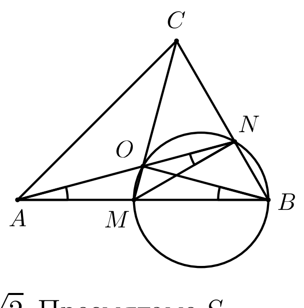
1. Г); **2.** Г); **3.** А); **4.** Г); **5.** Б); **6.** А); **7.** Б); **8.** Б); **9.** В); **10.** А); **11.** Г); **12.** Г); **13.** А); **14.** В); **15.** В); **16.** Б); **17.** В); **18.** Г); **19.** В); **20.** Б); **21.** $x_1 = -9, x_2 = 4$; **22.** $S_{ABC} = 235{,}2$; **23.** $\sin(AQB) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$; **24.** 36; **25.** 1; **26.** $(-\infty; -1] \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$; **27.** $P = \dfrac{213}{1001}$; **28.** $S_{CMN} = 2$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 21 ДО 28

26. Множеството от допустими стойности е $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Преобразуваме даденото неравенство във вида $\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} \geq 0$. Решението му е $(-\infty; -1] \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

27. Нека в червената кутия има x зелени топчета $(0 \leq x \leq 5)$. Тогава червените топчета в червената кутия са $5 - x$ и червените топчета в зелената кутия са $6 - (5 - x) = x + 1$. Зелените топчета в червената кутия и червените топчета в зелената кутия са общо $2x + 1$. От $0 \leq x \leq 5$ следва, че $1 \leq 2x + 1 \leq 11$. Възможните непрости числа в интервала са 1 и 9 и се достигат при $x = 0$ и $x = 4$. Пет топчета с $x = 0$ могат да се изберат по C_6^5 начина, а пет топчета с $x = 4$ могат да се изберат по $C_8^4 C_6^1$ начина. Вероятността е $P = \dfrac{C_6^5 + C_8^4 C_6^1}{C_{14}^5} = \dfrac{213}{1001}$.

28. Нека $AN \cap CM = \{O\}$. От $\sphericalangle CAN = 30^\circ = \sphericalangle ACM \Rightarrow AO = CO$ и $AOC = 120^\circ$. Намираме $\sphericalangle ABC = 60^\circ \Rightarrow BNOM$ е вписан четириъгълник. От $AO = CO$, $\sphericalangle AOC = 120^\circ$ и $ABC = 60^\circ \Rightarrow O \in S_{AC}$ и O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава $\sphericalangle OAB = 15^\circ = \sphericalangle OBA = \sphericalangle ONM$. Намираме $\sphericalangle ANC = 75^\circ$ и тогава $\sphericalangle MNC = 90^\circ$, а $\sphericalangle MCN = 45^\circ \Rightarrow CMN$ е правоъгълен и равнобедрен с хипотенуза $CM = 2\sqrt{2}$. Пресмятаме $S_{CMN} = \dfrac{1}{2} MN^2 = \dfrac{1}{2}(CM \sin 45^\circ)^2 = 2$.



В ПОМОЩ НА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

Предлагаме Ви първия тест от серия теми за подготовка на зрелостници и кандидатстуденти.

ЛОГАРИТЪМ И ЛОГАРИТМИЧНА ФУНКЦИЯ

Мирослав Каракулаков

1. Стойността на израза $(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdot(\log_5 243)$ е:

А) 5 **Б)** 15 **В)** 9 **Г)** 5 **Д)** 45

2. Стойността на израза $(\log_6 7)\cdot(\log_7 8)\cdot\left(\log_8 \dfrac{1}{6\sqrt{6}}\right)$ е:

А) $\sqrt{6}$ **Б)** $-1{,}5$ **В)** $6\sqrt{6}$ **Г)** 7 **Д)** 48

3. Стойността на израза $\log_2^3 4^{\log_4 \sqrt[5]{16}}$ е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** $\dfrac{4}{5}$ **Г)** $\dfrac{64}{125}$ **Д)** $\dfrac{125}{64}$

4. Ако $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{7}{6}$, $c=\dfrac{1}{2}$, стойността на израза

$$a(\log_a 1+\log_a a^{-1})+b(\log_b 1+\log_b b^{-1})+c(\log_c 1+\log_c c^{-1}) \text{ е :}$$

А) -8 **Б)** 2 **В)** -4 **Г)** 4 **Д)** -2

5. Стойността на израза $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3}-\dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ е:

А) $(\log_3 5)^2$ **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** -3 **Д)** $\log_3 5$

6. Стойността на израза $\dfrac{(2\log_2\sqrt{3})\cdot(\log_{0,5}\sqrt{3})^2\cdot(\log_3 2)}{(\log_4 3)\cdot(\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt[6]{3})}$ е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** -1 **Г)** 2 **Д)** -2

7. Стойността на израза $\dfrac{\log_2 384}{\log_{24} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{48} 2}$ е:

А) 4 **Б)** -4 **В)** -3

Г) 3 **Д)** друг отговор

8. Ако $a>0$, $b>0$, то изразът $3\log_2 a - \log_{0,5}\sqrt{b}$ е равен на:

А) $3\log_2\left(3a+\sqrt{b}\right)$ **Б)** $\log_2\dfrac{a^3}{\sqrt{b}}$ **В)** $\dfrac{3\log_2 a}{\log_{0.5}\sqrt{b}}$

Г) $\log_2\left(a^3\sqrt{b}\right)$ **Д)** друго

9. Дефиниционното множество на функцията

$$f(x)=\frac{9}{\log_3(x-3)}+\frac{25}{\log_5(25-x^2)} \text{ е:}$$

А) $x\in(-\infty,-5)\cup(-5,3)\cup(3,5)\cup(5,\infty)$

Б) $x\in(-5,3)\cup(3,5)$

В) $x\in(3,4)\cup(4,2\sqrt{6})\cup(2\sqrt{6},5)$

Г) $x\in(9,25)$

Д) $x\in(3,25)$

10. Дефиниционното множество на функцията

$$f(x)=\lg(x-2)^2+2\lg(4-x) \text{ е:}$$

А) $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)$ **Б)** $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,\infty)$

В) $x\in(-\infty,\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty,4)$

Д) $x\in(2,4)$

11. Дефиниционното множество на функцията

$$f(x)=\lg(x-2)-2\lg(x-3)^2+3\lg(4-x)^3 \text{ е:}$$

А) $x\in(3,\infty)$ **Б)** $x\in(3,4)$ **В)** $x\in(2,\infty)$

Г) $x\in(2,3)\cup(3,4)$ **Д)** $x\in(2,4)$

12. Дефиниционното множество на функцията $y=\log_{0,5}(\log_7 x)$ е:

А) $x\in(1,\infty)$ **Б)** $x\in(0,\infty)$ **В)** $x\in[7,\infty)$

Г) $x\in[0,1)$ **Д)** $x\in(0,1)$

13. Ако числата a, b и c са положителни, а d е отрицателно, кои от равенствата

I. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

II. $\log_a(bd^2) = \log_a b + 2\log_a d$;

III. $\log_c d^2 = 2\log_c |d|$;

IV. $\log_a \dfrac{-c}{d} = \log_a c - \log_a(-d)$;

V. $\log_a \dfrac{-c}{d} = \log_a c + \log_a d$;

VI. $\log_a(-bd) = \log_a b + \log_a |d|$

са верни?

А) всичките **Б)** I, II и IV **В)** II, III и VI

Г) I, III, IV и VI **Д)** I, III, IV, V и VI

14. Дадена е функцията $y = \log_{0,5} x$. Посочете вярното твърдение:

А) за всяко число x стойностите на y са положителни

Б) за всяко положително число x стойностите на y са положителни

В) за всяко положително число x стойностите на y са отрицателни

Г) за всяко отрицателно число x стойностите на y са отрицателни

Д) за всяко число $x > 1$ стойностите на y са отрицателни

15. Ако x е произволно реално число и

$$A = 2\log_5 x, \quad B = \frac{1}{3}\log_5 x^6, \quad C = 6\log_5 \sqrt[3]{x},$$

то вярното твърдение е:

А) $A \neq C$

Б) $A = B$ за всяко $x \neq 0$

В) $C = B$ за всяко $x < 0$

Г) $\dfrac{A+C}{B} = 2$ за всяко $x \neq 0$

Д) $\dfrac{A}{B+C} = \dfrac{1}{2}$ за всяко $x > 0$

16. Ако $x \in (0, \infty)$, кое от твърденията за функцията $y = \log_a x$ е вярно?

А) функцията е растяща за всяко a

Б) функцията е растяща за всяко $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

В) функцията е растяща при $x > a$ и е намаляваща при $x < a$

Г) функцията е растяща при $a > 1$ и е намаляваща при $0 < a < 1$

Д) функцията е намаляваща при $x > a$ и е растяща при $x < a$

17. При $x > 0$ стойностите на функцията $y = \log_2 x$ са:

А) $y \in (1, \infty)$ **Б)** $y \in (0, \infty)$ **В)** $y \in [2,\ \infty)$

Г) $y \in [0, 1)$ **Д)** $y \in (-\infty, \infty)$

18. Ако $a > 1$, $b = \dfrac{1}{a}$ и $x > 0$, произведението $(\log_a x)(\log_b x)$ е:

А) положително

Б) отрицателно

В) отрицателно при $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

Г) положително при $x \in (0, 1)$ и отрицателно при $x \in (1, \infty)$

Д) положително при $x \in (1, \infty)$ и отрицателно при $x \in (0, 1)$

19. Стойностите на функцията $f(x) = \log_5 x$ са отрицателни числа, когато:

А) x е отрицателно **Б)** x е положително **В)** $x > 1$

Г) $x < 5$ **Д)** $x \in (0, 1)$

20. Стойностите на функцията $f(x) = \log_5 x$ са положителни числа, когато:

А) x е отрицателно **Б)** x е положително **В)** $x > 1$

Г) $x < 5$ **Д)** $x \in (0, 1)$

21. Стойностите на функцията $f(x) = \log_{0,5} x$ са отрицателни числа, когато:

А) x е отрицателно **Б)** x е положително **В)** $x > 1$

Г) $x < 5$ **Д)** $x \in (0, 1)$

22. Стойностите на функцията $f(x) = \log_{0,5} x$ са положителни числа, когато:

А) x е отрицателно **Б)** x е положително **В)** $x > 1$

Г) $x < 5$ **Д)** $x \in (0, 1)$

Отговори

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Г	Б	Г	Д	В	Б	В	Г	В	А	Г

12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
А	Г	Д	Д	Г	Д	В	Д	В	В	Д

Продължението следва! Очаквайте *Показателни и логаритмични уравнения.*

СЪСТЕЗАНИЕ „ЕВРИКА“ — 2016

Недялка Димитрова, НПМГ

На вниманието на седмокласниците предлагам темата за 7. клас от състезанието „Еврика“, което се проведе през 2016 г. в 107 ОУ „Хан Крум“. Това е темата и за вътрешен профилиращ изпит по математика за прием в НПМГ „Акад. Л. Чакалов“ за учениците от 107 ОУ.

Според регламента на състезанието, на задачи от 1. до 6. трябва да се посочи само отговор, като всеки верен отговор се оценява с 2 точки. Решенията на останалите задачи трябва да се опишат подробно, като пълното решение на всяка от тях се оценява със 7 точки.

Задача 1. Намерете стойността на израза $A = \dfrac{123^2 - 123.132 + 66^2}{30^2 - 27^2}$.

Задача 2. Решете уравнението $\left|3 - \dfrac{5}{7}x\right| = 4$.

Задача 3. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) $\sphericalangle BAC = 28^\circ$, CM е медиана ($M \in AB$), а CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ ($L \in AB$). Намерете $\sphericalangle MCL$.

Задача 4. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = 75^\circ$, а $\sphericalangle BAC$ е с 10° по-малък от $\sphericalangle ABC$. Симетралата на AB пресича страната AC в точка M. Намерете $\sphericalangle AMB$.

Задача 5. Страните на четириъгълника $ABCD$ са $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 7$ cm и $DA = 3$ cm. Ако дължината на диагонала BD е цяло число, измерено в сантиметри, то какви стойности може да приема BD?

Задача 6. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$$(x^2 + x - 1)^2 - (1 - x)^2 <$$
$$< 4x\left(\frac{1 - \frac{1+x}{2}}{2}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + 2(x-3)(x^2+3x+9) + (2-x)(x+2) + x.$$

Задача 7. Лодка и сал тръгват едновременно от речно пристанище А. Лодката се движи срещу течението до речно пристанище В със скорост 14 км/ч, почива 51 минути в В и потегля обратно. Тя настига сала на 12 км от А. Намерете разстоянието от А до В, ако скоростта на течението на реката е 3 км/ч.

Задача 8. Върху отсечката AB е взета произволна точка C. От една и съща страна на правата AB са построени равностранните триъгълници ACP и BCQ. Ако M и N са средите на AQ и BP, да се докаже, че:
а) $\triangle AQC \cong \triangle PBC$; б) $MC = NC$; в) $\triangle MNC$ е равностранен.

Задача 9. На математически турнир отборът на 107 ОУ „Хан Крум“, състоящ се от 4 ученици, трябвало да реши определен брой задачи. Капитанът имал задължението да разпредели задачите между състезателите в отбора така, че всяка задача да бъде решавана от един състезател. След като капитанът разпределил задачите, се оказало, че всеки състезател е получил различен брой задачи. Произведението от броя на задачите, които всеки от четиримата трябвало да реши, е равно на 2016. Броят на задачите, които капитанът оставил за себе си, е равен на седмия по големина делител на числото 2016. Всеки един от останалите трима състезатели получил поне 4 задачи. Намерете колко задачи трябвало да реши отборът в този турнир.

Задача 10. Да се реши уравнението

$$3m^2(x-1) + m(2x-9) = x + 6,$$

където числото m е параметър.

Задача за любознателни ученици (извън изпитната тема). Решете уравнението

$$21x^2 - 10x(3x^2 + 5x - 1) + (3x^2 + 5x - 1)^2 = 0.$$

Задачите в темата са предложени от: Атанас Сталев – задача 8; Анелия Гочева – задача 6; Анелия Гочева и Недялка Димитрова – задача 9; Недялка Димитрова – задачи 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 и задачата за любознателните ученици.

Отговори и упътвания

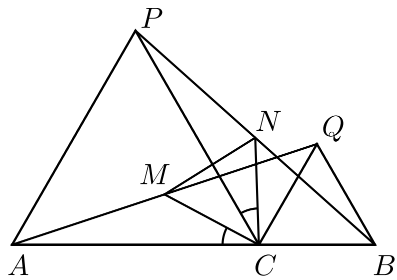
1. 19; **2.** $-1{,}4$ и 9,8; **3.** 17; **4.** 85; **5.** 4, 5, 6 и 7; **6.** 26.

7. Разстоянието от А до В е x км. Салът се движи със скоростта на течението и пътува $12 : 3 = 4$ часа от А до С – точката, в която лодката настига сала. Лодката пътува от А до В $\dfrac{x}{14}$ часа. Скоростта на лодката в спокойна вода е $14 + 3 = 17$ км/ч, а по течението е $17 + 3 = 20$ км/ч. Лодката пътува от В до С $\dfrac{x+12}{20}$ часа. От уравнението

$$\frac{x}{14} + \frac{x+12}{20} + \frac{51}{60} = 4$$

намираме $x = 21$ км.

8. По I признак $\triangle AQC \cong \triangle PBC$. Като използваме равенството на съответните елементи $AQ = PB$, $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CPN$, получаваме, че $\triangle AMC \cong \triangle PNC$ по I признак. Следователно $CM = CN$, т.е. триъгълникът MCN е равнобедрен, а $\sphericalangle ACM = \sphericalangle PCN$, откъдето



$$\sphericalangle MCN = \sphericalangle MCP + \sphericalangle PCN = \sphericalangle MCP + \sphericalangle ACM = \sphericalangle ACP = 60^\circ.$$

Получихме, че триъгълникът MCN е равнобедрен с ъгъл 60°, т.е. е равностранен.

9. Седмият по големина делител на $2016 = 2^5.3^2.7$ е 8 (проверете!), т.е. капитанът е решил 8 задачи. Произведението на броя на задачите, решени от останалите трима, е 2.2.3.3.7. С непосредствена проверка намираме, че тримата са решили 4, 9 и 7 задачи. Отборът е решил общо $8+4+9+7 = 28$ задачи.

10. Уравнението е еквивалентно на $(3m-1)(m+1)x = 3(m+1)(m+2)$ и решението му е:

1) при $m = \dfrac{1}{3}$, $x \in \emptyset$;
2) при $m = -1$, $x \in \mathbb{Q}$;
3) при $m \neq \dfrac{1}{3}$ и $m \neq -1$, $x = \dfrac{3(m+2)}{3m-1}$.

Задача за любознателни ученици. (извън изпитната тема). Да означим $3x^2 + 5x - 1 = y$. Тъй като

$$21x^2 - 10xy + y^2 = 25x^2 - 10xy + y^2 - 4x^2 = (5x-y)^2 - (2x)^2 = (3x-y)(7x-y),$$

уравнението се записва във вида $(3x-y)(7x-y) = 0$, откъдето $y = 3x$ или $y = 7x$.

В първия случай получаваме $3x^2 + 2x - 1 = 0 \iff (3x-1)(x+1) = 0$, т.е. $x_1 = \dfrac{1}{3}$ и $x_2 = -1$.

Във втория случай имаме $3x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (3x+1)(x-1) = 0$, т.е. $x_3 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_4 = 1$.

ВЕРБЛЮД ИЛИ МЕТОДЪТ ОТЗАД НАПРЕД

Емил Карлов

„На руски език думата верблюд значи камила. Но тълкованието, което се дава на верблюда, отделни откъслеци от неговото описание и начинът на появяване и изчезване в никакъв случай не могат да бъдат свързани с камилата.“
Йордан Радичков.

„В старите черказки хроники е записано, че верблюдът живее навсякъде: в пясъка, във водата (имало водни верблюди), на небето; който може да погледне в слънцето, ще види в неговото око верблюд. Записано е още, че той е дошъл най–напред от луната – опустошил там всичко и когато нямало повече какво да пасе и потънал навсякъде в прах до гърди, се разпръснал из вселената. Според същите хроники треви и храсти ще се появят на луната едва след хиляда години и чак тогава ще може да се пасе.“ Тази история на верблюда е записана от българският писател Йордан Радичков, а мен сърцето ме боли да съкращавам приказното описание на верблюда, но бързам да ви обърна внимание на най-важното умение на звяра.

„Много странни работи са станали по времето на верблюда. Един ден на небето се появили крави с рибешки опашки. Те не били нито хвъркати, нито пък били заковани там, махали си съвсем спокойно опашките и преживяли.“

Точно тук искам да добавя, че в други хроники съм срещал, което не е споменавано досега, че по времето на верблюда всички неща се случвали в обратен ред. Гаргите летели с опашките напред и с корема нагоре. Децата се прибирали от училище вкъщи, вървейки назад. А в училище, още в началото на часа, не в края, децата давали домашна работа на учителката, а не учителката на децата.

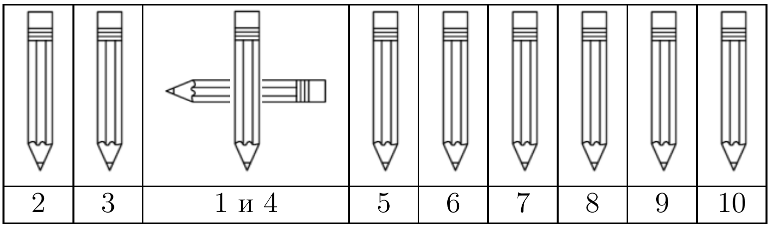
И което е най-важното – решавали задачите по математика отзад напред и това се оказало сто пъти по-лесно, отколкото отпред назад. От тези верблюдски времена е останал този стар метод за решаване на задачи отзад напред и всяко дете, което се сети, че задачата се решава по-лесно, ако я започне от края, на лицето му се появява загадъчната усмивка на човек, заловил верблюд.

Да започнем с една задача от времето на верблюда.

Задача 1. Дадени са 10 молива, подредени на масата в редица, като клавиши на пиано. Всеки молив може да местим в избрана от нас посока, но само през два съседни молива и да го поставим перпендикулярно върху следващия молив, така че двата молива да образуват знак „плюс“. Можем ли с 5 местения да направим 5 знака „плюс“?

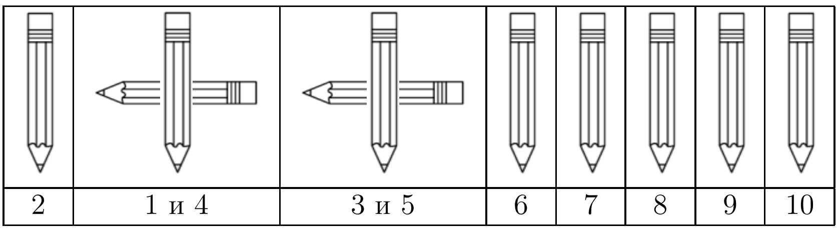
Решение. За удобство номерираме моливите с 1, 2, 3, ..., 10. На рисунката е показано положението на моливите след първия ход.

1. ход



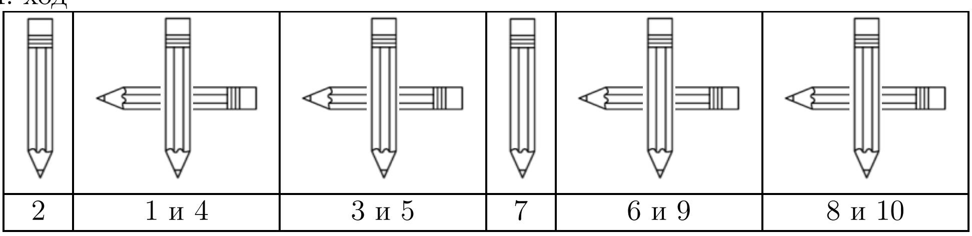
Вторият молив не може да поставим върху молив 5, защото по този начин ще „прескочим“ не два, а три молива, затова третият молив прави знак плюс с петия молив.

2. ход



След още два подобни хода за последните пет молива, получаваме

4. ход

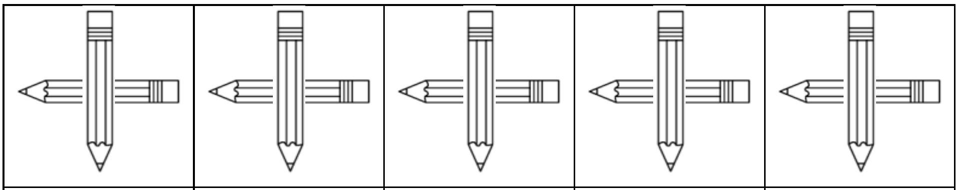


Петият ход не може да направи от втората и седмата клечка знак „плюс“ и така спираме без да сме решили задачата.

Трудна задача. Защо не опитаме да я решим отзад напред?

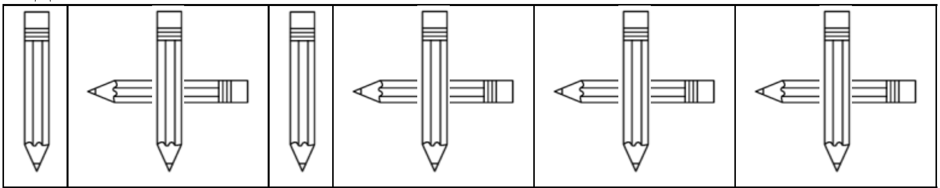
Номерираме отново моливите, но този път след петия ход.

5. ход



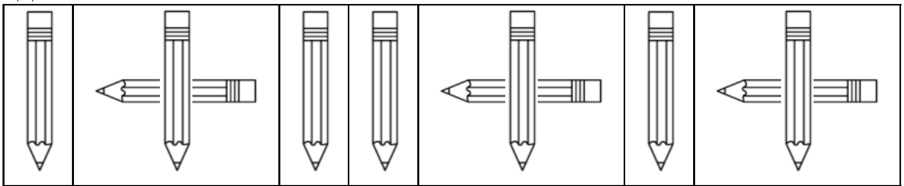
1 и 2	3 и 4	5 и 6	7 и 8	9 и 10

4. ход



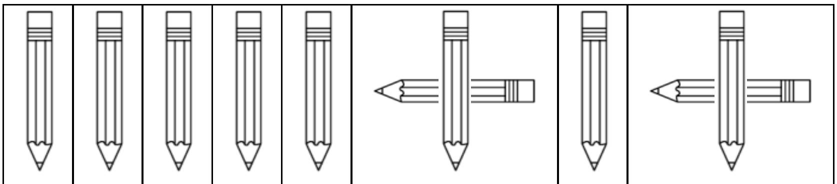
2	3 и 4	1	5 и 6	7 и 8	9 и 10

3. ход



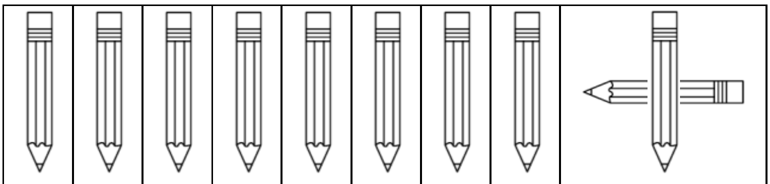
2	3 и 4	1	7	5 и 6	8	9 и 10

2. ход



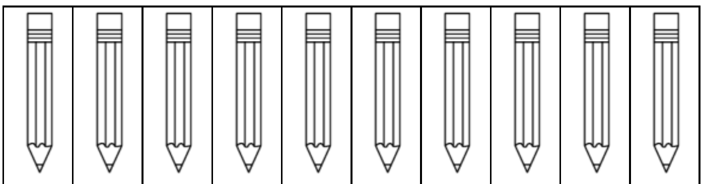
2	4	1	7	3	5 и 6	8	9 и 10

1. ход



2	4	1	5	7	3	6	8	9 и 10

В началото



2	4	1	5	7	3	9	6	8	10

Толкова е просто да решаваш задачите отзад напред – все едно,че друга, по-лесна задача решаваш.

Задача 2. Иван и Мария играят следната игра. От купчинка с 1023 камъчета първи взема Иван и може да вземе колкото камъчета желае, но не повече от половината. След това от останалите в купчината камъчета Мария може да вземе колкото камъчета желае, но не повече от половината. Отново на ред е Иван и от купчината с останалите камъчета взема камъчета при същите условия и т.н. Този, който не може да вземе дори и едно камъче, губи играта. Кой ще спечели играта, ако приемем, че и двамата играят разумно?

Решение. Да започнем, както обикновено, отзад напред.

Ако в купчината е останало едно камъче, този, който е на ход, губи играта.

Ако са останали две камъчета, този, който е на ход печели, защото ще вземе едно камъче и ще „вкара“ следващия в губеща позиция.

Ако са останали три камъчета (позиция 3), този, който е на ход губи играта, защото може да вземе само едно камъче и вкарва следващия в печелившата позиция с две камъчета. Така получаваме, че позиция 3 е губеща.

Ако имаме 4 камъчета, този, който е на ход печели играта, защото взема едно камъче и следващият е в губещата позиция 3.

Ако имаме 5 камъчета, този, който е на ход печели, защото ще вземе 2 камъчета, а позиция 3 е губеща.

Ако имаме 6 камъчета, този който е на ход взема три камъчета и вкарва следващия в губещата позиция 3.

Ако имаме 7 камъчета, този който е на ход губи, защото всичките му позволени вземания от 1, 2 или 3 камъчета водят следващия в печеливши позиции съответно 6, 5 или 4.

В редицата от броя камъчета в купчината сме оградили губещите позиции.

$\boxed{1}$, 2, $\boxed{3}$, 4, 5, 6, $\boxed{7}$, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, $\boxed{15}$, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, $\boxed{31}$, 32, ...

Забелязваме, че за всички губещи позиции броят на камъчетата е с едно по-малък от точна степен на двойката ($1 = 2^1-1$, $3 = 2^2-1$, $7 = 2^3-1$, $15 = 2^4-1$, ...). (Това е естествено – не забравяйте, че вземаме не повече от половината камъчета!) Формулата за губеща позиция е: $\Gamma = 2^n - 1$.

Това наше откритие решава задачата и при 1023 камъчета ($1023 = 2^{10} - 1$). Иван, който играе пръв, губи играта.

Страшно много задачи има, които се решават с метода отзад напред. Коя задача да решим заедно? В мисълта ми се бутат ято патици, от които половината и още половин патица искат да кацат в блатото, привлечени от топъл извор или призивните крясъци на вързано от ловеца мюре.

Сещам се за разсеяният щъркел, който без да брои поздравил гъските: „Здравейте, сто гъски“, а те му отвърнали „Не сме сто.“

Спомням си за трима братя, които делят ябълки или за беден селянин, набрал сливи, принуден да дава половината и още една слива на пазача на овощната градина. Има дори задача за дявол, алчен чиновник и вълшебен мост, по който мост преминеш ли парите в кесията ти се удвояват.

Най-сетне избрах.

Искам да помните, че и по времето на верблюда, децата са ходили на училище, имали са буквари (на корицата на букварите плувала голяма риба, та на букваря му викат Рибен буквар) и децата по този буквар са учили буквите, опитвали се да сричат, а по-късно да четат и пишат.

Задача 3. Иван е написал буква на дъската. След една минута, ако буквата е гласна, Иван я заменя с първата съгласна буква, която следва по азбучен ред след написаната гласна. Ако буквата е съгласна, Иван я замества с първата гласна буква, която следва по азбучен ред след написаната съгласна. Например, ако напише гласната буква *И*, след минута я заменя с първата след нея съгласна буква *Й*, а съгласната буква *Й* след минута заменя с първата след нея гласна буква *О*.

След шест минути (или след 6 замествания) Иван стигнал до буквата *Ф*. От коя буква Иван е започнал играта?

Решение. Разбира се, решаваме отзад напред. Съгласната буква *Ф* е пред гласната *У* и следователно петата буква е била *У*. Следва съгласната буква *П*. Буквата *П* е първата съгласна след гласната буква *О*, значи със съгласната *П* Иван е заменил буквата *О*. Преди буквата *О* в редицата е била съгласната буква *Й*, с която буква е заменила гласната буква *И*. Трябва ни още един ход.

Иван е започнал с една от двете съгласни букви *З* и *Ж*, които са двете съгласни между двете гласни букви *Е* и *И*. Накратко:

$$Ф \leftarrow У \leftarrow П \leftarrow О \leftarrow Й \leftarrow И \leftarrow З \text{ или } Ж.$$

Задача 4. Иван измислил едно число, умножил го по 13 и (защото му се видяло много голямо) го преписал без последната му цифра. Умножението по 13 му се видяло трудно, затова умножил така полученото число (без последна цифра) със 7, но резултатът отново му се сторил твърде голямо число и го преписал без последна цифра (пропуснал цифрата на единиците). Така получил числото 21. Кое число е измислил Иван?

Решение. Числото, което получил след умножението Иван е 210 или 217, защото това са единствените две числа, които са резултат от умножение по 7.

1. случай. Нека числото е 210. Делим на 7 и намираме, че 30 е числото, на което Иван е премахнал последната цифра след като го е умножел с 13, т.е. трицифреното число $\overline{30a}$ трябва да се дели на 13. При делението на 13

$$\begin{array}{l} \overline{30a} : 13 = 2\ldots \\ -\underline{26} \\ 4a \end{array}$$

установяваме, че $\overline{4a}$ не се дели на 13, тъй като няма двуцифрено число с 4 десетици, което се дели на 13.

2. случай. Нека числото е 217. Делим на 7 и получаваме 31. Това е числото без цифра на единиците, което е произведение на измисленото от Иван число и 13. Следователно търсим трицифрено число $\overline{31a}$, което се дели на 13.

$$\begin{array}{l} \overline{31a} : 13 = 24 \\ -\underline{26} \\ 5a \\ -\underline{52} \\ 0 \end{array}$$

Намираме $a = 2$. Числото, което е измислил Иван, е 24.

Вече стана дума, че домашна работа е имало и във времената на верблюда, затова да кажем кои задачи са за домашна работа и кои задачи са за упражнение.

Упражнение 1. Дадени са 15 молива, подредени на масата в редица, като клавиши на пиано. Всеки молив може да местим в избрана от нас посока, но само през три съседни молива и да го поставим върху следващия молив, така че двата молива да образуват знак X. След това местим през три съседни молива друг молив и го поставяме върху двата молива, които образуват знака X и така получаваме *звездичка.* Може ли с 10 премествания от 15 молива да получим 5 *звездички*?

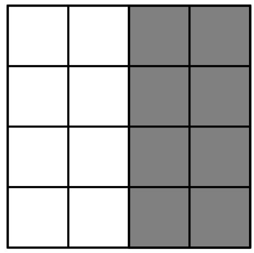
Упражнение 2. Иван и Мария играят следната игра. От купчинка с 728 камъчета първи взема Иван и може да вземе колкото камъчета желае, но не повече от една трета от камъчетата. След това от останалите в купчината камъчета Мария може да вземе колкото камъчета желае, но не повече от една трета от камъчетата. Отново на ред е Иван и от купчината с останалите камъчета взема камъчета при същите условия и т.н. Този който не може да вземе дори и едно камъче губи играта. Кой ще спечели играта, ако приемем, че и двамата играят разумно?

Упражнение 3. Иван е измислил число от седем седмици 7777777. Премахнал последната седмица, умножил по 3 и към полученото число прибавил седем. След това премахнал отново последната цифра, умножил по 3 и добавил премахнатата преди малко цифра. Може ли след няколко такива хода Иван да получи числото 7?

Упражнение 4. Намерете неизвестното x в уравнението
$$444 - 44.(4 + 4 : x) = 4.$$

Задачи за домашна работа

Задача 1. Бял квадрат е оцветен наполовина в черно, както е показано на чертежа. На всеки ход се разрешава да се избере произволен правоъгълник (част от квадрата) и в него всяко бяло поле да стане черно, а всяко черно – бяло. Може ли след три хода този квадрат да е оцветен шахматно?



Задача 2. Около окръжност са подредени 6 пешки. Първо Иван взел всички бели пешки, които имат за съсед поне една черна пешка, след това Мария взели всички черни пешки, коит имат за съсед поне една бяла пешка. След това останала сам една пешка. Какъв е цветът на останалата пешка?

Задача 3. В Мъртво море има пирани и баракуди. В първия ден всяка пираня изяла по една баракуда, на втория ден всяка жива баракуда изяла по една пираня, на третия ден всяка оцеляла пираня изяла по една баракуда и така редувайки се, на седмия ден последната пираня изяла последната баракуда и останала единствената риба в Мъртво море. Колко пирани и баракуди е имало през първия ден в Мъртво море?

Задача 4. Седемте джуджета седнали около кръгла маса. Снежанка сипала в чашките им общо 3 литра мляко, но не по равно на всяко джудже и това ги направило малко нервни. Най-възрастното пресипало всичкото мляко от чашката си на останалите шест джуджета по равно. След това второто джудже пресипало всичкото си мляко по равно на останалите шест джуджета и т.н. докато и седмото джудже направило същото. Оказало се, че всяко джудже има в чашката си толкова мляко, колкото в началото. По колко мляко имало в чашата на всяко от джуджетата?

Задача 5. С всяко число имаме право да правим едно от двете действия: или умножаваме по две, или разместваме по произволен начин цифрите (без да поставяме нула в началото на числото). Може ли с тези действия от числото 1 да получим номера на телефона за спешна помощ 112?

ОКОЛО ЕДНА ЗАДАЧА ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИ ЛАГЕР

Мария Томова, Ивайло Кортезов

В едно от отборните състезания на летния лагер на Асоциация „Кенгуру без граници“ включихме следната задача.

Задача 1. По колко начина числото 2016 може да се представи като сбор на две или повече последователни естествени числа?

Решение. Нека числото 2016 може да се представи като сбор на n последователни естествени числа, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогава за някое $k \in \mathrm{N}^0$ е изпълнено равенството $(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+n) = 2016$. Използвайки, че $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, преобразуваме това равенство по следния начин:

$$nk + (1+2+3+\cdots+n) = 2016 \iff nk + \frac{n\,(n+1)}{2} = 2016 \iff$$

$$2nk + n\,(n+1) = 2.2016 \iff n\,(2k+n+1) = 2.2016 = 2^6.3^2.7.$$

Така свеждаме задачата до решаване на диофантово уравнение. Ще използваме, че числата n и $2k+n+1$ са от различна четност. Тъй като произведението им е $2^6.3^2.7$, това означава, че 2^6 дели точно едно от тях. Но $2^6 = 64$, а $3^2.7 = 63$, така че 2^6е делител на по-голямото от двете числа. Доколкото $k \geq 0$, очевидно $2k+n+1 > n$, откъдето $2^6 | 2k+n+1$. Тогава n е нечетен делител на числото $2^6.3^2.7$, т.е. възможните стойности за n са 3, 7, 9, 21 и 63 (изключихме нечетния делител $n = 1$, тъй като той би довел до представяне на числото 2016 като „сбор“ на едно-единствено число, което противоречи на условието).

Ако $n = 3$, то $2k+3+1 = 2^6.3.7 = 1344$, което води до $k = 670$ и така получаваме представянето $671+672+673 = 2016$.

Аналогично, за $n = 7$ получаваме $k = 284$ и съответно представяне $285+286+\cdots+290+291 = 2016$.

При $n = 9$ намираме $k = 219$ и $220+221+\cdots+227+228 = 2016$.

При $n = 21$ получаваме $k = 85$ и $86+87+...+105+106 = 2016$.

Накрая, при $n = 63$, намираме $k = 0$ и съответното представяне $1 + 2 + 3 + \cdots + 61 + 62 + 63 = 2016$.

Окончателно, числото 2016 има пет представяния като сбор на две или повече последователни естествени числа.

Ясно е, че аналогична задача може да се формулира за всяко естествено число и решението ѝ би следвало от сходни на направените разсъждения. Да разгледаме няколко подобни задачи в опит да формулираме хипотеза за по-общ отговор на поставения въпрос в зависимост от конкретното естествено число.

Задача 2. По колко начина числото 2017 може да се представи като сбор на две или повече последователни естествени числа?

Решение. Използвайки аналогично на горното решение, достигаме до представяне от вида $(k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n) = 2017$, $k \in \mathbb{N}^0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, което от своя страна води до диофантовото уравнение $n\,(2k+n+1) = 2.2017$. Доколкото $2k + n + 1 > n \geq 2$, единствената възможност за множителя n е $n = 2$, която води до $k = 1007$ и съответно представяне $1008 + 1009 = 2017$.

Получихме, че числото 2017 може да се представи по единствен начин като сбор на две или повече последователни естествени числа.

От метода на решение е видно, че при поставяне на аналогична задача за естествено число N, винаги стигаме до диофантово уравнение от вида $n\,(2n + k + 1) = 2N$. Ще разгледаме още една конкретна стойност за N.

Задача 3. По колко начина числото 1024 може да се представи като сбор на две или повече последователни естествени числа?

Решение. За $N = 1024$ получаваме $n\,(2n + k + 1) = 2.1024 = 2^{11}$. Тъй като числата n и $2k + n + 1$ са от различна четност и $n < 2k + n + 1$, то единствената възможна стойност на n е $n = 1$, която обаче не съответства на условието на задачата за представяне на сбор на поне две събираеми. Следователно числото 1024 не може да се представи като сбор на две или повече последователни естествени числа.

Ясно е, че същият извод е валиден за всяко число $N = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

След разгледаните частни случаи за различни фиксирани стойности на N, можем да направим следните наблюдения:

- Числото $N = 2016 = 2^5.3^2.7$ се представя по 5 различни начина като сбор на последователни естествени числа и всеки от тях се поражда от различен нечетен делител на 2016. Нечетните делители на $N = 2016 = 2^5.3^2.7$ съответстват на всевъзможните начини, по които можем да комбинираме нечетни прости множители в разлагането му. В даден нечетен делител на числото 2016 множителят 3 може да участва 0, 1 или 2 пъти, а множителят 7 – 0 или 1 път. Това означава, че нечетните делители може да се конструират по 3.2=6 начина, т.е са 6 на брой.

- Числото $N = 2017$ може да се представи по един начин като сбор на последователни естествени числа и има два нечетни делителя: 1 и 2017.

- Числото $N = 1024$ не може да се представи като сбор на последователни естествени числа и има само един нечетен делител 1.

Като следствие на описаните наблюдения, може да формулираме следната хипотеза.

Твърдение. Броят начини, по които дадено естествено число N може да се представи като сбор на две или повече последователни естествени числа, е с 1 по-малък от броя на нечетните делители на N.

От разгледаните частни случаи забелязваме, че изследването на поставения въпрос води до уравнение от вида $n\,(2n + k + 1) = 2N$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^0$. Подходът за решаване на това уравнение обаче е зависим от конкретната стойност на N и изследването му в общия случай би довело до разбиване на много на брой подслучаи – нещо, което едва ли бихме предпочели да правим.

За да се ориентираме в обстановката, нека видим например как всеки нечетен делител на числото 30, по-голям от 1, поражда различно представяне на 30 като сбор на поредни естествени числа. Въпросните делители са 3, 5 и 15.

Делителят 3 дава $30 : 3 = 10$ и води до представяне с 3 събираеми, средното от които е 10, т.е. $30 = 9 + 10 + 11$.

Делителят 5 дава $30 : 5 = 6$ и води до представяне с 5 събираеми, средното от които е 6, т.е. $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$.

Делителят 15 дава $30 : 15 = 2$ и води до представяне с 15 събираеми, средното от които е 2, т.е. $30 = (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$. Лоша работа, появиха се отрицателни числа! Спокойно, без паника. След като съкратим отрицателните събираеми с положителните им събратя и премахнем нулата, получаваме сбор от поредни естествени числа: $30 = 6 + 7 + 8 + 9$. Разбрахме, че не бива да се страхуваме от отрицателните числа – те ще изчезнат. Забележете, че при този процес събираемите намаляват с нечетно число (имаме двойки положително-отрицателно и една нула), така че останалото представяне е сбор на четен брой поредни естествени числа.

Обратно, ако имаме някакво представяне на 30 като сбор на нечетен брой поредни естествени числа, някое от тях ще е точно по средата и сборът ще е равен на него по броя събираеми, т.е. то ще съответства на нечетен делител на 30. Ако пък събираемите са четен брой, ще добавим всички по-малки естествени числа, техните противоположни и нулата, като така събираемите ще станат нечетен брой и пак сборът ще е равен на средното от тях по броя събираеми, т.е. пак ще съответства на нечетен делител на 30.

Имайки предвид тези наблюдения, нека построим взаимно еднозначно съответствие между нечетните делители на числото N, без един от тях, и представянията на N като сбор на последователни естествени числа.

Първо, нека $d \neq 1$ е нечетен делител на N и $N = dk$. Можем да представим N като сбор $N = \underbrace{k + k + k + \cdots + k + k + k}_{d}$. Запазваме „средното“ поред събираемо k в тази сбор. Събираемото преди него заменяме с $k-1$, а това след него – с $k+1$. Така получаваме сбора

$$N = k + k + \cdots + (k-1) + k + (k+1) + \cdots + k + k.$$

На следващия ход заменяме събираемото след $k+1$ с $k+2$, а това преди $k-1$ – с $k-2$, с което сборът не се променя. Така получаваме

$$N = k + k + \ldots (k-2) + (k-1) + k + (k+1) + (k+2) + \cdots + k + k.$$

Продължавайки по аналогичен начин и използвайки, че преди и след „средното“ събираемо имаме по $\dfrac{d-1}{2} \in \mathbb{N}$ събираеми, накрая стигаме до вида

$$N = \left(k - \frac{d-1}{2}\right) + \cdots + (k-1) + k + (k+1) + \cdots + \left(k + \frac{d-1}{2}\right),$$

който представя N като сбор на d последователни цели събираеми. Да отбележим, че е възможно не всички те да са естествени числа – най-малките събираеми в сбора може да са отрицателни цели числа. Но тъй като $N > 0$, броят на положителните събираеми в сбора е по-голям от този на отрицателните и след съкращаване на евентуалните отрицателни с противоположните им и премахване на събираемото 0, ще получим представяне на N като сбор на оставащите положителни числа. Ще допълним, че на нечетния делител $d = 1$ не съответства представяне по този модел, тъй като то би съдържало само едно събираемо. От конструкцията е ясно, че на различни нечетни делители ще съответстват различни представяния като сбор.

Остава да покажем, че на всяко представяне на N като сбор на последователни естествени числа съответства различен нечетен делител на N. Първо ще разгледаме представянията на N като сбор на нечетен брой последователни естествени числа

$$N = (k-m) + \cdots + (k-1) + k + (k+1) + \cdots + (k+m)\,.$$

Ако в тази сбор заменим всяко от събираемите $k-1$ и $k+1$ с k, сборът няма да се промени. Продължавайки по същия начин, можем да изравним всички събираеми и да получим

$$N = \underbrace{k+k+k+\cdots+k+k+k}_{2m+1} = (2m+1)\,.k.$$

Тук $d = 2m+1 \neq 1$ е нечетен делител на N.

Нека сега разгледаме представяне на N като сбор на четен брой последователни естествени числа. За да сведем този случай до предишния, ще добавим към сбора всички естествени числа, по-малки от най-малкото събираемо в сбора, техните противоположни и числото 0. Тъй като сборът на добавените събираеми е равен на 0, полученият сбор отново е равен на N. При това той включва нечетен брой последователни цели числа и за него може да приложим показаното преобразуване, което води до съответсвие с нечетен делител на N. Този делител d съвпада с броя на събираемите в представянето на N като сбор на последователни цели числа. Така от единствеността на представянето на N като сбор на последователни цели числа, най-малкото от които е фиксирано, следва, че за различните сборове получаваме различни по между си и различни от 1 делители на N.

С това доказахме, че на всеки нечетен делител на N, различен от 1, еднозначно съответства представяне на N като сбор на две или повече последователно естествени числа.

Използвайки това твърдение, бързо може да отговорим на въпроса от горните задачи за произволно естествено число N. Например, числото $N = 63000 = 2^3.3^2.5^3.7$ има $(2+1)(3+1)(1+1) = 24$ нечетни делители, т.е. 23 представяния като сбор на две или повече последователни естествени числа.

А какво става, ако изтрием думата „последователни“? Какво става, ако събираемите са си естествени, но не непременно последователни? Допустимо е сред тях да има и еднакви. Считаме, че редът на събираемите е важен.

Да разгледаме как стои въпросът при няколко малки естествени числа.

Числото 2 има 1 представяне като сбор на поне две естествени числа: $1+1$.

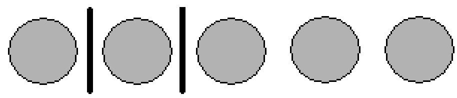
Числото 3 има 3 представяния като сбор на поне две естествени числа: $2+1$, $1+2$, $1+1+1$.

Числото 4 има 7 представяния като сбор на поне две естествени числа: $3+1$, $2+2$, $1+3$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $1+1+1+1$.

Числото 5 има 15 представяния като сбор на поне две естествени числа: $4+1$, $3+2$, $2+3$, $1+4$, $3+1+1$, $1+3+1$, $1+1+3$, $2+2+1$, $2+1+2$, $1+2+2$, $2+1+1+1$, $1+2+1+1$, $1+1+2+1$, $1+1+1+2$, $1+1+1+1+1$.

Получаваме редицата 1, 3, 7, 15, ... Кое е следващото? Познахме ли, че казахте 31? Някои от вас са гледали увеличенията: 2, 4, 8; ясно че следващото е двойно, т.е. 16, и $15 + 16 = 31$. Други пък са забелязали, че в редицата 1, 3, 7, 15 всяко ново число е предишното по 2 плюс 1. Трети са се досетили, че тези числа са с 1 по-малки от поредните степени на 2 (2, 4, 8, 16). Всъщност това са различни проявления на едно и също свойство. По-внимателното вглеждане в последната му форма подсказва, че броят на представянията на естественото число N като сбор на две или повече естествени числа е $2^{N-1} - 1$. Дали това си има простичко обяснение?

Ами да, има си. Да си представим числото N като поредица от N еднакви топки. Ако между две поредни топки сложим разделител, те ще попаднат в различни събираеми, а ако не – в едно и също. С други думи, събираемите са равни на броя на топките между два поредни разделителя или между краен разделител и край на редицата. Например ако N=5 и в първите два интервала между топки има разделител, а във вторите два няма, получаваме представянето 5=1+1+3:



Между N-те топки има $N - 1$ интервала и във всеки от тях може да има или да няма разделител (2 избора), така че броят на изборите за поставяне на разделители е $\underbrace{2.2.2...2}_{N-1} = 2^{N-1}$. А защо имаме минус 1? Защото един от тези 2^{N-1} варианта е да не сложим никакъв разделител и ще имаме сбор от само едно число, което считаме за неприемливо. Така доказахме, че

Броят на представянията на естественото число N като сбор на две или повече естествени числа, ако редът на събираемите е важен, е $2^{N-1} - 1$.

Да отбележим, че ако допускаме в сбора да има и само едно събираемо (самото число N), то броят на начините е 2^{N-1}, което е по-проста формула. Изглежда, че сме били прекалено жестоки, като сме забранили това. Ако сме по-милостиви, то и двете свойства, доказани в статията, се изказват по-кратко:

Броят на представянията на естественото число N като сбор на едно или повече естествени числа, ако редът на събираемите е важен, е 2^{N-1}.

Броят на представянията на естественото число N като сбор на едно или повече поредни естествени числа (в нарастващ ред) е равен на броя на нечетните естествени делители на N.

А какво става, ако редът на събираемите не е важен? Ами ... вижте например на `mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html`

МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ НА ПЕТТЕ КОНТИНЕНТА

Любомир Любенов

От 20 до 28 октомври 2016 г. се проведе есенният кръг на IV международен турнир „Математика без граници“. В него участваха почти 16 000 ученици от 8 до 18 годишна възраст от 27 страни на 5-те континента.

Есенният кръг се проведе в 8 състезателни групи, съответстващи на класовете 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 – 12 клас. Броят на задачите за всяка състезателна група бе 20, а времето за решаване – 60 минути.

Въпросите с избираем отговор от 1. до 10. се оценяваха с по 1 точка за верен отговор и 0 точки за грешен или за непосочен отговор; а задачите от 11. до 20. се оценяваха с по 2 точки. Максималният сбор от точки е 30.

Класирането се извърши по най-голям брой точки, а при равен брой точки се отчита и времето за работа.

Преди турнира всеки участник в турнира „Математика без граници“ трябва да прочете следното ***Обещание за честно състезание:***

Като участник в турнира „Математика без граници“, обещавам да спазвам всички правила на турнира, да спазвам духа на честното състезание, като работя самостоятелно, да покажа най-доброто от себе си и да се стремя към все по-добри изяви, да се стремя да получа нови знания и умения преди, по време и след всяко състезание.

Състезавам се, за да спомогна за утвърждаване на олимпийския дух в състезанията по математика, като защитя своята чест, честта на училището, което представлявам и честта на страната, чийто гражданин съм.

Обещание за честно състезание дадоха и училищните координатори и организатори на турнира: *Обещаваме да организираме и проведем едно честно състезание при стриктно спазване на регламента на турнира. Обещаваме да осигурим спокойна атмосфера и условия за самостоятелна работа на всички участници в турнира, както и да бъдем прецизни и безпристрастни при оценяването на състезателните работи.*

Есенният кръг приключи с обявяване на резултатите и изпращане на наградите на победителите. Всеки участник получи сертификат за участие, а победителите – сертификат и медал за съответното класиране.

През януари и март предстоят зимният и пролетният кръг на турнира (включващи и учениците от 1. клас), след което идва дългоочакваният финал – на 1 юли 2017 г. в Несебър. За повече информация за турнира може да посетите електронната страница `www.mathematicalmail.com`

Избрани задачи от есенния кръг 2016 г.

Задачи за 4. клас

4.1. Колко са нечетните трицифрени числа с произведение на цифрите 0?

A) 900 **B)** 50 **C)** 45

4.2. Записах на дъската числото 123. След това записах други две трицифрени числа със същите цифри, като нито една не запазва позицията си. Колко е сборът на записаните на дъската числа?

4.3. На дъската е записано число, което е по-голямо от 3. Изтриваме го и на негово място записваме или с 1 по-голямо, или с 1 по-малко от него число. По същия начин постъпваме с новото число на дъската и т.н. Колко са възможните различни числа, които могат да се получат след третото изтриване?

4.4. На почетната стълбичка на олимпийските игри застанаха носителите на златен, сребърен и бронзов медал – $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{A}$ е по-тежък от златния медалист; $\boldsymbol{B}$ не тежи колкото сребърния медалист; сребърният медалист е по-лек от $\boldsymbol{A}$. Кой е спечелил сребърния медал?

Задачи за 5. клас

5.1. Сборът на две числа X и Y е 78. При делението на Y на X се получава частно 6 и остатък 8. Пресметнете $Y - X$.

А) 58 **Б)** 48 **В)** 68 **Г)** 70

5.2. В показания магически квадрат трябва да се запишат девет последователни естествени числа. Сборът на числата, скрити под усмивките, може да е равен на:

☺		
	4	
		☺

А) 8 **Б)** 9 **В)** 12 **Г)** 11

5.3. Произведението на две последователни числа има за цифра на единиците цифрата X. Произведението на три последователни естествени числа има за цифра на единиците същата цифра X. Определете всички възможни стойности на цифрата X.

5.4. Кое е числото в средата на редицата

$$98, 99, 100, 101, 102, 103, \dots, 198, 199, 200?$$

Задачи за 6. клас

6.1. Ако едно от трицифрените числа $\overline{4bc}$ и $\overline{bc4}$ е 75% от другото, пресметнете $\overline{bc}$.

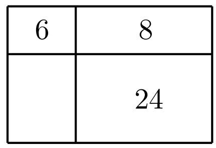
А) 32 **Б)** 42 **В)** 52 **Г)** 62

6.2. Първата от три книги има със 120 страници по-малко, отколкото другите две общо. Втората има със 100 страници по-малко, първата и третата общо. Колко страници има третата книга?

А) 110 **Б)** 120 **В)** 140 **Г)** 160

6.3. Коя е цифрата на единиците на разликата на естествено число X с цифра на единиците 6 и естествено число Y с цифра на единиците 5?

6.4. Правоъгълник A е разрязан на четири правоъгълника с дължини на страните цели числа сантиметри. Лицата на три от тях (в квадратни сантиметри) са записани на чертежа. Колко сантиметра е обиколката на правоъгълника A?



Задачи за 7. клас

7.1. Колко са простите числа P, за които $1\frac{1}{4} > \frac{P}{9} > \frac{1}{5}$?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 9 **Г)** 10

7.2. Обиколките на два квадрата се отнасят както $2 : 5$. Пресметнете отношението на лицата им.

А) 0,4 **Б)** 2,5 **В)** 0,16 **Г)** 6,5

7.3. Намерете най-малкото естествено число, което се дели на 99, а при деление на 97 дава остатък 16.

7.4. В израза $1112 + 11$ преместили една цифра и пресметнали получения израз. Най-много на колко е равна стойността му?

Задачи за 8. клас

8.1. Сборът от ъглите на изпъкнал N-ъгълник ($N \geq 3$) е по-малък от 9 999 градуса. Колко са възможните стойности на N?

А) 55 **Б)** 56 **В)** 57 **Г)** 58

8.2. Колко прости числа делят $2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4}$, ако n е естествено число?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** повече от 3

8.3. Средната възраст на мен, мама и татко е x години. Определете на колко години е сестра ми, ако средната възраст на мен, мама, татко и сестра ми е $\dfrac{1,5x+6}{2}$.

8.4. Нека n е естествено число, $n > 2$. Колко са естествените числа, които са точни квадрати и са от интервала $\left(n^2, 4n^2 - 4n + 1\right)$?

Задачи за 9.–12. клас

9.1. Ако $a^2 = a + 3$, то $a^3 =?$

А) $3a + 4$ **Б)** $4a + 3$ **В)** $a^2 - a$ **Г)** $a^2 + a$

9.2. Намерете най-малкото естествено число, което се дели на 2017, а при делението на 2015 дава остатък 8.

9.3. С колко цифри се записва числото, което е равно на $(5^{673})^3 \times (2^4)^{504}$?

9.4. Колко са реалните решения на уравнението $20x^7 + 16x^2 + 2016 = 0$?

Упътване. Изпозвайте теоремата на Декарт, според която броят на положителните корени на уравнението $f(x) = 0$ е или равен на броя на смените на знаците в редицата на коефициентите, или е по-малък от него с четно число. Броят на отрицателните корени на уравнението $f(x) = 0$ е или равен на броя на смените на знаците в редицата на коефициентите на $f(-x) = 0$, или е по-малък от него с четно число. (Энциклопедія Элементарной математики, H. Weber и J. Wellstein, Одеса, 1906 г.)

Отговори

4.1. C; **4.2.** 666; **4.3.** Възможни са 4 различни резултата. **4.4.** Сребърен медал е спечелил С. **5.1.** А; **5.2.** В централното квадратче на магическия квадрат стои средноаритметичното на всички числа от квадрата. Тъй като в центъра е 4, то квадратът е съставен от числата от 0 до 8, магическият сбор е $36 : 3 = 12$ и сборът от числата под усмивките е $12 - 4 = 8$. **5.3.** Възможните стойности на X са 0 и 6. **5.4.** 149. **6.1.** А; **6.2.** А; **6.3.** 1 или 9; **6.4.** Правоъгълникът може да има страни 10 и 14 см или 8 и 7 см, съответно обиколката е 36 см или 30 см. **7.1.** А; **7.2.** С; **7.3.** 792; **7.4.** 12332. **8.1.** А; **8.2.** С; **8.3.** Възрастта е $4.\dfrac{1,5x+6}{2} - 3x = 12$. **8.4.** Между числата n^2 и $(2n-1)^2$ има $2n - 2 - n = n - 2$ точни квадрати. **9.1.** В; **9.2.** 8068. **9.3.** Числото $5^{2019} \times 2^{2016} = 5^3 \times 10^{2016} = 125\underbrace{0\ldots0}_{2016}$ се записва с 2019 цифри.

9.4. От теоремата на Декарт следва, че уравнението $20x^7 + 16x^2 + 2016 = 0$ няма положителни корени и има един отрицателен корен.

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2016/17 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Всички точки в равнината са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществува трапец, три от върховете на който са в единия цвят, а четвъртия връх – в другия.

Задача 2. Даден е четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали. Симетралите на AD и BC се пресичат в точка O. Да се докаже, че $S_{OAD} = S_{OBC}$ тогава и само тогава, когато четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Задача 3. Дадени са естествени числа a, b и c, за които $b > 2a$ и $c > 2b$. Да се докаже, че съществува реално число α, за което дробните части на числата αa, αb и αc са в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Срокът за представяне на решенията е 28.02.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 5/2016 г.

Задача 1. В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са равни и правите AB и CD се пресичат в точка O. Да се докаже, че правата, съединяваща средите на диагоналите, е перпендикулярна на ъглополовящата на ъгъл AOD.

Решение. Нека $\sphericalangle AOD = 2\varphi$. Разстоянието от точката O до проекцията на средата на диагонала AC върху ъглополовящата на $\sphericalangle AOD$ е равно на

$\dfrac{AO+CO}{2}\cos\varphi$. Аналогично, разстоянието от точката O до проекцията на средата на диагонала BD върху ъглополовящата на $\sphericalangle AOD$ е равно на $\dfrac{BO+DO}{2}\cos\varphi$. От $AB=CD$ следва, че

$$AO+CO=AB+BO+DO=BO+DO+CD=BO+DO.$$

Следователно двете проекции съвпадат, което означава, че правата, съединяваща средите на диагоналите, е перпендикулярна на ъглополовящата на ъгъл AOD.

Задача 2. Да се намерят всички растящи функции

$$f:\{1,2,\ldots,10\}\to\{1,2,\ldots,100\},$$

за които е изпълнено свойството: за всеки две числа $x,y\in\{1,2,\ldots,10\}$ числото $x+y$ дели $xf(x)+yf(y)$.

Решение. Ще докажем по индукция, че съществува единствена функция

$$f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n^2\},$$

удовлетворяваща условието и това е $f(x)=x^2$. При $n=1$ функцията е $f(1)=1$. Да допуснем, че за някое $n=k$ единствената функция, която удовлетворява условието е $f(x)=x^2$. Да разгледаме функция

$$f:\{1,2,\ldots,k+1\}\to\{1,2,\ldots,(k+1)^2\},$$

която удовлетворява условието. Да допуснем, че $f(k)\geq k^2+1$. Тогава $k+(k+1)=2k+1$ дели $kf(k)+(k+1)f(k+1)$, откъдето следва, че $2k+1$ дели

$$(2k+1)f(k+1)-kf(k)-(k+1)f(k+1)=k(f(k+1)-f(k)).$$

Тъй като $(2k+1,k)=1$, то $2k+1$ дели $f(k+1)-f(k)$, което е невъзможно поради

$$f(k+1)-f(k)\leq(k+1)^2-(k^2+1)=2k<2k+1.$$

Следователно $f(k)\leq k^2$ и тогава при $x\in\{1,2,\ldots,k\}$ имаме $f(x)\in\{1,2,\ldots k^2\}$. От индукционното допускане сега следва, че при $x\in\{1,2,\ldots,k\}$ е изпълнено $f(x)=x^2$. Тогава от $2k+1$ дели $f(k+1)-f(k)=f(k+1)-k^2\leq(k+1)^2-k^2=2k+1$ следва, че $f(k+1)=(k+1)^2$.

Задача 3. Даден е изпъкнал n-ъгълник. Да се докаже, че съществуват най-много $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ триъгълника с лице 1, чиито върхове са измежду върховете на дадения n-ъгълник.

Решение. Всяка страна на n-ъгълника може да участва като страна в най-много два триъгълника с равни лица (в противен случай три от върховете ще лежат на една права). Аналогично, всеки диагонал от едната страна на който има само един връх, може да участва като страна в най-много три триъгълника с равни лица. Всеки от останалите диагонали може да участва в най-много 4 триъгълника с равни лица. Следователно триъгълниците с равни лица имат най-много $2n+3n+\left(\dfrac{n(n-1)}{2}-2n\right).4=2n^2-5n$ страни. Оттук следва, че триъгълниците с равни лица са не повече от $\dfrac{n(2n-5)}{3}$.

Конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2016 г. и бр. 1, 2 от 2017 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2016 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.
2. Конкурсните задачи са три – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Класирането е отделно за всеки клас и отчита всички изпратени решения.
3. В писмото напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН,
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Зайо подскачал по пътя от дома си към дома на Пух. Три четвърти от пътя той изминал на подскоци с дължина, равна на две обикновени негови крачки, а останалата четвърт от пътя – на подскоци с дължина, равна на три обикновени негови крачки. Оказало се, че подскоците по две крачки били с 350 повече от подскоците по три крачки. Колко обикновени крачки е пътят между домовете на Зайо и Пух?

Задача 2. Всеки от 28-те ученици в един клас участвал в една или две от олимпиадите по математика, информатика и лингвистика. Броят на учениците, участвали в по две олимпиади, е с 60% по-малък от броя на учениците, участвали в само една. На олимпиадата по информатика се явили 2 пъти повече ученици, отколкото на олимпиадата по лингвистика и k пъти по-малко, отколкото на олимпиадата по математика (k е естествено число). Колко ученици се явили на олимпиадата по математика?

Задача 3. Мими намислила десетцифрено число и му приложила следната операция: изтрила последната цифра, утроила останалото число и към резултата прибавила удвоена изтритата цифра. С полученото число постъпила по същия начин и т.н. Мими стигнала до число, от което получила същото число и спряла да смята.

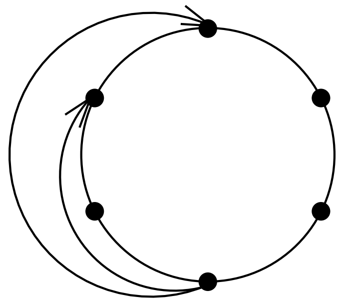
а) Кое число е получила Мими накрая?

б) Най-малко на колко е равно първото число на Мими?

Срокът за представяне на решенията е 28.02.2017 г.

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 5/2016 г.

Задача 1. В кръг са отбелязани шест точки. Скакалец е кацнал на една от тях и скача по посока на часовниковата стрелка – или през една точка на втората, или през две точки на третата (както е показано на чертежа). Най-малко колко пъти трябва да скочи скакалецът, за да посети всяка точка и да се върне в тази, от която е тръгнал?



Решение. Ясно е, че за да посети шест точки, скакалецът трябва да направи поне 6 скока. Освен това той трябва да направи скокове и от двата вида (иначе ще останат непосетени точки).

Ще казваме, че скоковете през една точка във втората са с дължина 2, а скоковете през 2 точки в третата са с дължина 3. Тъй като маршрутът на скакалеца започва и завършва в една и съща точка, общата дължина на скоковете е равна на няколко пълни обиколки, т.е. на $6.k$. Ако скакалецът е изпълнил условието, като е направил x скока с дължина 2 и y скока с дължина 3, то

$$2x + 3y = 6k. \qquad (1)$$

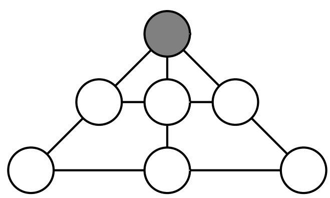
Да допуснем, че скакалецът може да посети всички точки и да се върне в началото с 6 скока, т.е. $x + y = 6$. От (1) получаваме $2(x + y) + y = 6k \Rightarrow 12 + y = 6k$, откъдето следва, че y се дели на 6, следователно y е 0 или 6. Това означава, че скоковете са само от един вид, противоречие.

Следователно са нужни поне седем скока. Лесно се вижда, че като направи последователно скокове с дължина 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, скакалецът ще посети всички точки и ще се върне в началото.

Задача 2. В кръгчетата на схемата трябва да се запишат числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, и 7 така, че сборът от трите числа по всяка от петте прави да е един и същ.

а) Кое число трябва да се запише в сивото кръгче?

б) По колко различни начина могат да се запишат дадените числа в кръгчетата така, че да е изпълнено условието на задачата? (Две записвания са различни, ако се различават в поне едно кръгче.)



Решение. Сборът на дадените числа е 28. Нека в сивото кръгче е записано числото x, а сборът на трите числа по всяка от петте прави е S. Сборът на числата по двете хоризонтални прави е

$$2S = 28 - x.$$

Ако съберем трите сбора по правите през сивото кръгче, ще получим

$$3S = 28 + 2x.$$

От получените две равенства намираме $x = 4$ и $S = 12$.

В двете бели кръгчета по всяка права през сивото кръгче трябва да се запишат числа със сбор 8. Такива двойки са $(1;7)$, $(2;6)$ и $(3;5)$. От всяка от тези три двойки трябва да изберем по едно число така, че избраните три числа да имат сбор 12 и да ги запишем на една хоризонтална права. Това са $1+6+5$ или оставащите $7+2+3$.

За числата 1, 6 и 5 може да изберем една от двете хоризонтални прави и може да ги разположим в трите кръгчета по $3.2.1. = 6$ начина. Следователно различните записвания са $2.6 = 12$.

Задача 3. Във всяко поле на таблица 7×7 е записано различно естествено число от 1 до 49. *Интересно число в таблицата* е такова число, което е най-голямото в своя ред и в същото време е най-малкото в своя стълб на таблицата. Например, числото 28 е *интересно* в показаната таблица.

1	3	6	10	15	21	**28**
2	5	9	14	20	27	34
4	8	13	19	26	33	39
7	12	18	25	32	38	43
11	17	24	31	37	42	46
16	23	30	36	41	45	48
22	29	35	40	44	47	49

а) На колко може да е равно числото N, което е *интересно* в дадена таблица?

б) Възможно ли е числата да се запишат в таблицата така, че в нея да няма *интересно* число?

в) Колко *интересни* числа може да има в една и съща таблица?

Решение. а) Интересното число е по-голямо от останалите шест в своя ред, значи е най-малко 7. То е по-малко от останалите шест в своя стълб, значи е най-много $49 - 6 = 43$. Всяко число N от 7 до 43 може да е интересно (виж фиг. 1).

1	2	3	4	5	6	N
						44
						45
						46
						47
						48
						49

Фиг. 1

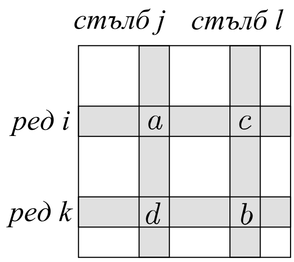
1						
	2					
		3				
			4			
				5		
					6	
						7

Фиг. 2

б) Таблица без интересно число може да получим, например, ако запишем по диагонала на таблицата числата от 1 до 7 (фиг. 2). Всяко от тези числа е най-малкото в своя стълб, т.е. само някое от тях би могло да е интересно. От друга страна, всяко от записаните седем числа е най-малко и в своя ред, т.е. не е интересно.

в) От примера в условието и от б) следва, че броят на интересните числа може да е 0 или 1.

Ще покажем, че в една таблица не може да има повече от едно интересно число. Да допуснем, че има две интересни числа: числото a в i-ия ред и j-ия стълб и числото b в k-ия ред и l-ия стълб. Да означим с c числото в i-ия ред и l-ия стълб и с d числото в k-ия ред и j-ия стълб. Тогава



$$\left.\begin{array}{ll} a > c, & \text{тъй като } a \text{ е най-голямото число в } i\text{-тия ред} \\ c > b, & \text{тъй като } b \text{ е най-малкото число в } l\text{-тия стълб} \end{array}\right\} \Rightarrow a > b$$

$$\left.\begin{array}{ll} a < d, & \text{тъй като } a \text{ е най-малкото число в } j\text{-тия стълб} \\ d < b, & \text{тъй като } b \text{ е най-голямото число в } k\text{-тия ред} \end{array}\right\} \Rightarrow a < b.$$

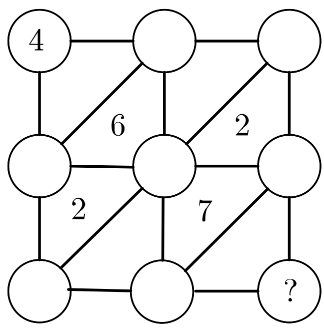
Противоречие.

ЗАБАВНА МАТЕМАТИКА

Viva Cognita продължава сериите с етюди по забавна математика, посветени на математическите главоблъсканици. Всеки етюд е придружен от три задачи – предизвикателство към Вашата съобразителност!

Главоблъсканица с числа

Запишете в кръгчетата на схемата числата от 1 до 9 така, че разликата между най-голямото и най-малкото число във върховете на даден триъгълник да е равна на записаното в него число. Кое е числото в кръгчето долу вдясно?



Отговорът на тази главоблъсканица и други подобни ще намерите на адрес `http://vivacognita.org/mathfun2017`.

Ученическо творчество

Скъпи ученици, списание „Математика“ обявява конкурс за авторска задача за ученици от 4.-12. клас. Най-интересните и оригинални задачи ще публикуваме на страниците на списанието. Вярваме във Вашата изобретателност и очакваме вдъхновяващи и провокиращи мисълта задачи (заедно с решенията им) на e-mail: math_competition@abv.bg.

В този брой публикуваме задачата на **Мария Дренчева** от 5. клас, СМГ. В задачата си Мария комбинира знания за лице на триъгълник и едно обобщение на Питагоровата теорема, което се приписва на Хипократ от Хиос (5 в. пр.Хр) и е цитирано в *Елементите* на Евклид.

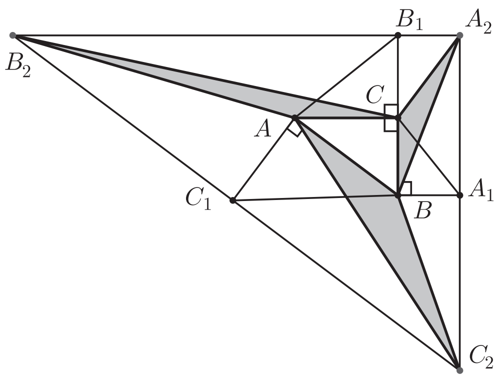
Питагорова теорема в задача за лица

На страните на правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) са построени правоъгълни триъгълници ABC_1, BCA_1 и CAB_1 с прави ъгли съответно при върховете A, B, C, като

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = k.$$

Правите през A_1, B_1 и C_1, успоредни съответно на BC, CA и AB, образуват при пресичането си триъгълник $A_2B_2C_2$, както е показано на чертежа. Да се докаже, че

$$S_{ABC_2} = S_{BCA_2} + S_{CAB_2}.$$



Решение. Имаме $S_{ABC_1} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC_1 = \dfrac{k}{2}AB^2$ и аналогично получаваме $S_{BCA_1} = \dfrac{k}{2}BC^2$ и $S_{CAB_1} = \dfrac{k}{2}CA^2$. Тогава от Питагоровата теорема $AB^2 = BC^2 + CA^2$ следва, че

$$S_{ABC_1} = S_{BCA_1} + S_{CAB_1}. \tag{1}$$

Тъй като $C_1C_2||AB$, то триъгълниците ABC_2 и ABC_1 имат равни височини към общата си страна AB, следователно $S_{ABC_2} = S_{ABC_1}$. По същия начин, от $A_1A_2||BC$ следва $S_{BCA_1} = S_{BCA_2}$, а от $B_1B_2||CA$ имаме $S_{CAB_1} = S_{CAB_2}$. Тогава от (1) следва желаното равенство $S_{ABC_2} = S_{BCA_2} + S_{CAB_2}$.

за по-малките задачи

4. клас

1. Вярно ли е, че

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+987+654+321=2017?$$

2. Сборът на две числа е 83, а ако разделим едното на другото, ще получим 8 и остатък 2. Кои са числата?

3. Ели дала половината от бонбоните си и още 5 бонбона на сестра си. След това майка и́ дала още толкова бонбони, колкото Ели имала в момента. Ели изяла 6 бонбона, а след това и половината от останалите. Последните два бонбона дала на сестра си. Колко бонбона имала Ели отначало?

4. Имам девет банкноти на обща стойност 177 лв. Банкнотите са от 1, 5, 10 или 50 лв., като от всеки вид има поне по една банкнота. Колко са десетлевовите банкноти?

5. клас

5. Ако

$$1\frac{1}{5}-a=\frac{1}{2}, \quad a:b=\frac{7}{6}, \quad c-b=\frac{3}{20}, \quad d:c=\frac{4}{9},$$

да се пресметне $\dfrac{a+b}{c+d}$.

6. Иво получил 20 шоколада. Той изял $\frac{1}{4}$ от шоколадите, след което раздал на приятелите си $\frac{3}{5}$ от оставащите шоколади. Колко шоколада са останали?

7. В кутия има жълти, зелени и червени топчета. Червени са $\frac{2}{5}$ от топчетата, зелени са $\frac{1}{4}$ от от топчетата, а жълтите топчета са 14. Колко топчета има в кутията?

8. В първия ден от ваканцията Теди решила $\frac{1}{4}$ от задачите, които получила за домашно. На следващия ден решила $\frac{4}{9}$ от оставащите задачи. Броят задачи, които решила на третия ден, бил равен на $\frac{5}{7}$ от броя задачи, решени общо през първите два дни. Колко задачи са останали за четвъртия ден?

6. клас

9. Вярно ли е, че

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0 = 2017?$$

10. Ако $a = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ и $b = \dfrac{(-2^2)^3}{(-2^3)^2}$, в правоъгълна координатна система да се построи триъгълник с върхове $A(a; b)$, $B(-b; a)$ и $C(b; -a)$ и да се намери лицето му.

11. Да се пресметне стойността на израза $\dfrac{(x+y)^y}{x^{y-x}}$ при x и y, за които

$$7 + 12 : x = 1 \quad \text{и} \quad 5 - y : (-3) = 7.$$

12. Фермер ожънал пшеница, ечемик и ръж. Количеството на ръжта било с 50% по-малко, отколкото на ечемика, а общото количество ръж и ечемик било с 40% по-малко, отколкото пшеницата. С колко процента ечемикът е бил по-малко от пшеницата?

7. клас

13. Ако $a = 2xz$, $b = 2yz$, $c = x^2 + y^2 - z^2$ и $d = x^2 + y^2 + z^2$, да се докаже, че

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

14. Да се реши уравнението

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{2x-1}{3} = ax$$

и да се намерят целите стойности на параметъра a, за които решението x е цяло число.

15. В 9:00 от село Х към село У тръгнал пешеходецът Димо. По същото време и по същия път, но от У към Х тръгнал велосипедистът Мишо. До срещата Димо изминал третината от пътя до У. Ако Димо беше тръгнал един час по-рано, срещата би била по средата на пътя между двете села. В колко часа са се срещнали Димо и Мишо?

за по-малките решения

на задачите от бр. 6/2016

76. Еми записала числата 1, 2, 3 и така нататък, до 30 включително. Диди преписала числата на Еми, но заместила всяка цифра 2 с цифрата 1. С колко сборът от числата на Еми е по-голям от сбора от числата на Диди?

Решение. В записа на числата от 1 до 30 цифрата 2 се среща 10 пъти като цифра на десетиците и 3 пъти като цифра на единиците. Затова при замяната на 2 с 1 сборът е намалял с $10.10 + 3 = 103$.

77. Мила прочела 15 книги една след друга. Първата книга прочела за един ден, четенето на втората книга продължило два дни, след нея третата книга – 3 дни и т.н. За четенето на всяка следваща книга Мила отделила с един ден повече, отколкото за предишната. Мила прочела първата книга в понеделник и завършила втората в сряда. В кой ден от седмицата Мила завършила 15-тата книга?

Решение. Четенето на книгите продължило

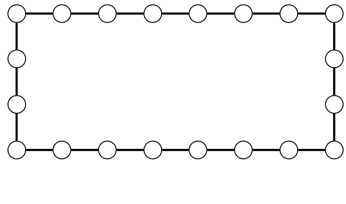
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 14 + 15 = 15.(1 + 15) : 2 = 120$$

дни. Тъй като $120 : 7 = 17$ (ост. 1), Мила е чела 17 седмици и един ден. Тя е започнала в понеделник и е приключила четенето също в понеделник.

78. За да огради правоъгълната си градина, Кольо купил 20 колчета, забил по едно колче във всеки ъгъл на градината, а останалите разпределил по страните така, че разстоянието между две съседни колчета да е 4 метра. Оказало се, че броят на колчетата (като се броят и ъгловите) на по-дългата страна на градината е 2 пъти по-голям от броя на колчетата на по-малката страна (заедно с ъгловите). Да се намерят размерите на градината.

Решение. Нека на по-малката страна има x колчета (заедно с ъгловите); тогава на по-голямата страна има $2x$ колчета (заедно с ъгловите). За четирите страни получаваме сбора $x + x + 2x + 2x = 6x$, в който всяко от четирите ъглови колчета участва два пъти. Следователно $6x = 20 + 4$, откъдето намираме $x = 4$.

Това означава, че на по-малката страна има 4 колчета, а на по-голямата страна има 8 колчета. Оттук малката страна на градината е $3.4 = 12$ м, а голямата страна е $7.4 = 28$ м.



ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

В този брой ще Ви представя истории, свързани с няколко легендарни представители на българската математика, които са ми преподавали в студентските години. Преподаватели като тях са вдъхновявали поколения наред да оценят математиката като „поезия на логическите идеи“.

Колко ограничен може да е един избор

В рубриката „Ха на куб“ се споменава понятието „ограничен избор“. Ето един нагледен пример за такъв избор, споделен от студент на един от най-големите български математици, акад. Никола Обрешков:

Течеше изпит по висша алгебра при Обрешков. Този път той не бе подготвил билетчета и формулираше устно въпросите, по които да говорят студентите. Един нахакан млад човек обаче заявяви на академика, че иска да си тегли билет. Тогава Обрешков спокойно извади кутията си с цигари, издърпа оризовата хартия под цигарите, написа нещо върху нея, сгъна я на четири и я сложи върху катедрата си. „Теглете, колега!“

Как се става професор по математика

През есента на 1962 г. бе първата ни среща с проф. Ярослав Тагамлицки. Зала 272 на Софийския университет бе препълнена с първокурсници – производствен и педагогически профил. Преподавателят, усмихнат дребен човек, облечен в бяла престилка, ни се представи с поклон, вдигна пред себе учебника по *Диференциално и интегрално смятане* и каза с напевна интонация: *Драги студенти, който от вас има това букварче, моля да стане*! Станаха поне дузина. *Като бях студент, аз нямах учебник и си водех записки. Както виждате, станах професор. Значи всички, които седите, ще стането професори, а за станалите, не гарантирам ...*

Зала в хиперпространството?

В коридора на Президиума на БАН известният с осторумието си професор Тагамлицки напразно се опитва да разчете малка табелка на една от вратите. Буквите ситни, а и табелката – твърде високо за човек с неговия ръст. Търси помощ от преминаващ служител на БАН: *Извинете,* спира го Тагамлицки, *бихте ли ми помогнали с надписа на тази врата?* Човекът се приближава, готов да услужи. За беда той не е съвсем добре със зрението, но поне е висок. Все пак надписът се оказва твърде дребен и за него. *Ка-мер-на зала*, срича той. *Така ли?*, учудва се Тагамлицки, *твърде любопитно! Трябва да се види ...*

Привлечени от суетнята, пред вратата се събират и други учени. Тагамлицки благодари любезно, чука на вратата и влиза. След минута излиза и леко разочаровано обявява: *Вярно е, но в частния случай $K = 3$!*

Лекции по геометрия по метода на д-р Лозанов

По времето, когато проф. Алипи Матеев бе декан на математическия факултет, го посетила млада журналистка. *Съгласен ли сте да приложим метода на д-р Лозанов за преподаване на чужди езици по време на сън и в часовете по математика тук*, попитала тя професора. *Като декан нямам нищо против*, казал Алипи Матеев, *но като преподавател отсега Ви гарантирам, че експериментът Ви е обречен на неуспех. Аз вече 30 г. обучавам студентите си в заспало състояние и досега не съм постигнал положителни резултати.*

Един „ненадежден“ математик

Васил Попов бе изключителен и щедър математически талант, който остави достойни ученици след себе си. Все пак отвреме навреме изразяваше разочарованието си, че големият му син (тогава на 15 г.) не върви по пътя му: *Драска си там някакви фантазии ... Не че са лоши, но няма надежда да стане математик!* Този „ненадежден“ математик днес е Алек Попов - един от най-известните съвременни български писатели.

Лесно ли е да знаеш как иска учителката?

Акад. Илиев бе изключително благороден и фин човек, но когато се разгневеше около него *хвърчаха искри* ... На един научен съвет на Института по математика и механика завеждащата личен състав подхвърли предизвикателно: *Не знам какво си мислят авторите на учебниците по математика, но днес дадох задача за 7. клас на двама кандидати на науките, един доктор и двама доценти и дъщеря ми все казва „Учителката не иска по този начин ... “* Всички замръзнахме в очакване нз справедливия гняв на академика, който по онова време бе директор на института. *Ех, Дима, вече 20 години си завеждащ личен състав и още не си разбрала коя задача на кой сектор да даваш ...* – укорително заключи той.

За особения ум на разузнавача

Проф. Благовест Долапчиев (член-кореспондент на БАН) ни преподаваше аналитична механика. Притежаваше изключителна ерудиция и лекциите му бяха изпъстрени с примери от най-различни области на живота, включително музика и литература. За математиците смяташе, че притежават *един сетивен орган в повече* от представителите на останалите професии, а за математическите познания – че трябва бъдат елемент от общата култура. По този повод сподели с нас възмущението си от поредния роман на Андрей Гуляшки за разузнавача Авакум Захов: *За да подчертае изключителните му умствени способнисти, авторът обрисува героя си като човек, който за развлечение вечер решава на ум интегрални уравнения. Не очаквам от Гуляшки да знае как се решават интегрални урванения, но поне би трябвало да знае, че не се решават на ум ...*

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви най-утвърдените от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 10.02.2017 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.