Математика

БРОЙ 5
2013 г.
ГОДИНА LII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ
Доц. Руси Русев – главен редактор
Акад. дмн Стефан Додунеков
Чл. кор. дмн Генчо Скордев
Доц. Емил Колев
Проф. Иван Тонов
Доц. Марин Маринов
Александър Иванов
Проф. дмн Николай Николов
Пенка Кирилова — коректор
Проф. дмн Петър Бойваленков — изпълнителен директор

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД ISSN 0204-6881

НОВИНИ

✓ РЕЗУЛТАТИТЕ на българския национален отбор на 54-та Международна олимпиада по математика, която се проведе от 18 до 28 юли 2013 г. в Санта Марта, Колумбия, са следните: **Йордан Йорданов** – сребърен медал, **Петър Пенков** и **Любен Личев** – бронзови медали, **Виктор Радивчев, Емилиян Рогачев и Тодор Марков** – почетни грамоти. Резултатите на всички участници и отбори са на официалния сайт на международните олимпиади (imo-official.org), а условията и решенията на задачите с кратки коментари ще намерите в статия в този брой на „Математика“.

✓ РЕЗУЛТАТИТЕ на българските национални отбори на 30. БОМ и на 16. МБОМ, които се проведоха съответно в Турция и Кипър, както и условията и решенията на задачите от балканиадите, ще намерите в съответни статии в този брой на „Математика“.

✓ ФИНАЛНИЯТ кръг на Конкурса за малките на списание „Математика“ се проведе на 8 юни 2013 г. в Института по математика и информатика на БАН. Задачите с кратки решения, имената на участниците и победителите ще намерите в статия в този брой на „Математика“.

✓ КОНКУРСЪТ за 9-12 клас на списание „Математика“ за 2012/13 приключи. След проверката на получените в срок решения, Редколегията на списанието обявява следните резултати.

Първа награда и по 350 лв. печелят **Станислав Чобанов** от МГ, Варна (11 клас), **Кристиян Кирилов** от МГ, Плевен (11 клас) и **Любен Личев** от МГ, Плевен (10 клас), *втора награда* и 250 лв. получава **Йордан Йорданов** от МГ, Варна (11 клас). *Поощрителни награди* и по 50 лв. получават **Ивайло Хартарски** от СМГ, София (12 клас) и **Ангел Ангелов** от ПМГ, Враца (9 клас).

Редколегията благодари и на **Божидар Ганев** и **Венислав Върбанов** за изпратените решения на някои от задачите.

✓ ПРИКЛЮЧИ конкурсът по информатика на списание „Математика“ за 2012/13 г. Класирането е следното.

Първо място за **Илиян Йорданов** (МГ, Варна), *второ място* за **Божидар Ганев** (СМГ, София) и *трето място* за **Христо Христов** (МГ, Варна).

54. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков, Николай Николов

От 18 до 28 юли в Санта Марта, Колумбия, се проведе 54. международна олимпиада по математика за ученици. Участваха 527 ученика от 97 страни. България беше представена от Йордан Йорданов (11. клас МГ Варна), Виктор Радивчев (11. клас, МГ Варна), Емилиян Рогачев (10. клас, СМГ), Любен Личев (10. клас, МГ Плевен), Петър Пенков (11 клас, СМГ) и Тодор Марков (12 клас, ПМГ Бургас). Ръководители на отбора бяха проф. дмн Николай Николов (ИМИ-БАН) и проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ-БАН).

Подготовката на отбора за пореден път беше спонсорирана от Американска Фондация за България и се проведе в Пампорово от 4 до 18 юли.

Предлагаме ви задачите и резултатите на българските участници.

Задача 1. Да се докаже, че за всяка двойка от естествени числа k и n съществуват k естествени числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не непременно различни) такива, че

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Решение. (Първи начин – стандартна индукция по k) Твърдението е тривиално за $k=1$. Нека то е вярно за някое $k \geqq 1$. Сега твърдението следва от индукционното предположение и равенствата

$$1+\frac{2^k-1}{2t}=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t+2^k-2}\right),$$

$$1+\frac{2^k-1}{2t-1}=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

съответно при четно $n=2t$ и нечетно $n=2t-1$. До идеята за тези равенства се достига лесно след преглед на малките случаи за n при $k=2$.

(Втори начин – директно) Да отбележим, че

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+2^k-2}\right),$$

като множителите отдясно са 2^k-1 на брой. Сега от равенството $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)=1+\frac{1}{x}$ се вижда как съседните множетели се групират по двойки, като всяка двойка дава един множител от същия вид и

новите множители са от същия вид. Оставяме на читателя да съобрази как този процес води до равенство с точно k множителя отдясно.

Коментар. Идеята за индукция беше успешно приложена от Виктор, Емилиян и Петър, а Йордан (успешно) и Любен (неуспешно) опитаха втория начин. За съжаление, пропуснатите точки ни поставиха в трудно положение за отборното класиране. Несправянето със задачи, достъпни за осмокласници, е и твърде лош атестат за мотивацията на учениците ни.

Задача 2. Конфигурация от 4027 точки в равнината се нарича колумбийска, ако се състои от 2013 червени точки и 2014 сини точки, като никои три точки от конфигурацията не лежат на една права. Чрез прекарване на прави равнината се разделя на части. Съвкупност от прави се нарича добра за колумбийска конфигурация, ако са изпълнени следните две условия:

(1) никоя права не минава през точка от конфигурацията;

(2) никоя част не съдържа точки от двата цвята.

Да се намери най-малката възможна стойност на k така, че за всяка колумбийска конфигурация от 4027 точки съществува добра съвкупност от k прави.

Решение. Да разположим 2013 сини и 2013 червени точки върху окръжност така, че цветовете да се редуват (и да не се интересуваме от последната синя точка). Тогава всяка дъга между синя и червена точка трябва да бъде пресечена от права и, понеже имаме 4026 дъги и всяка права пресича най-много две от тях, са необходими поне 2013 прави.

Ще докажем, че 2013 прави са достатъчни за всяка колумбийска конфигурация. Първо да отбележим, че за произволни две точки от един и същ цвят е възможно да бъдат построени две успоредни прави така, че единствено тези две точки от конфигурацията да са в ивицата между двете прави.

Да разгледаме изпъкналата обвивка на колумбийската конфигурация. Ако тя има връх, който е червена точка, можем да отделим тази точка от всички останали с една права и след това да разбием оставащите 2012 червени точки на 1006 двойки, които да отделим с успоредни прави, общо 2012 на брой – получаваме добра конфигурация с 2013 прави. Ако всички върхове на изпъкналата обвивка са сини точки, можем да отделим две от тях с една права и след това да постъпим с оставащите 2012 сини точки както с червените по-горе. Отново получаваме добра конфигурация с 2013 прави.

Коментар. Представените от нашия отбор само две пълни решения на тази приятна комбинаторна задача са крайно незадоволителен резултат, макар и на фона на някои отбори това да не изглежда толкова зле.

Задача 3. Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A се допира до страната BC в точка A_1. Точките B_1 върху страната CA и C_1 върху страната AB се дефинират аналогично, като се използват съответно външновписаните окръжности съответно срещу върховете B и C. Известно е, че центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност лежи върху окръжността, описана около $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Решение. Нека O_1 е центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Ясно е, че O_1 е извън $\triangle A_1B_1C_1$ и без ограничение на общността можем да считаме, че $\sphericalangle B_1A_1C_1$ е тъп, т.е. O_1 и A_1 са от различни страни на B_1C_1.

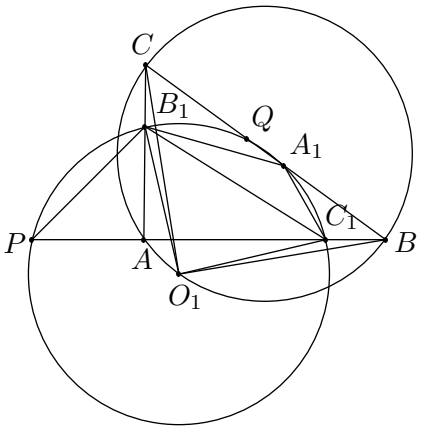
Нека O' е средата на дъгата BAC и да разгледаме триъгълниците $O'BC_1$ и $O'CB_1$. Имаме $BC_1 = B_1C = p - a$, $O'B = O'C$ и

$$\sphericalangle O'BC_1 = |\sphericalangle ABC - \sphericalangle O'BC| = \left|\sphericalangle ABC - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC\right)\right| =$$

$$= \left|\left(90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC\right) - \sphericalangle ACB\right| = |\sphericalangle O'CB - \sphericalangle ACB| = \sphericalangle O'CB_1,$$

откъдето $O'BC_1 \cong O'CB_1$. Тогава $O'C_1 = O'B_1$, т.е. O' лежи на симетралата на B_1C_1 и на окръжността, описана около $\triangle ABC$. Следователно $O' \equiv O_1$.

Да означим с P и Q съответно допирните точки на AB и външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха B и на BC и на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Тъй като $CQ = BA_1 = p - b$, точката O_1 лежи на симетралата на QA_1, което означава, че Q лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Тъй като $\sphericalangle CO_1B_1 = \sphericalangle BO_1C_1$, то $\sphericalangle C_1O_1B_1 = \sphericalangle CO_1B = \sphericalangle CAB$, откъдето $\sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Оттук и от $\sphericalangle B_1PC_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ следва, че P лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.



Остава да разгледаме степента на точка B относно описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Имаме $BQ.BA_1 = BC_1.BP \iff (p-b)(p-c) = (p-a)p \iff a^2 = b^2 + c^2$.

Коментар. Слабостите ни по геометрия можеха да се компенсират донякъде от решенията на Йордан и Любен, но и двамата пропуснаха важни

стъпки в горното решение. Повече трябва да съжалява Йордан, който беше доказал, че O_1 е среда на дъгата BAC и беше намерил $\sphericalangle A_1B_1C_1$, но липсата на добър чертеж очевидно му е попречила да въведе точките P и Q и да довърши решението (което щеше да означава 4 точки повече и златен медал за него).

Задача 4. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H и нека W е точка върху страната BC (различна от B и C). Точките M и N са петите на височините съответно от B и C. Нека ω_1 е описаната окръжност около $\triangle BWN$, а X е диаметрално противоположната точка на W относно ω_1. Аналогично, нека ω_2 е описаната окръжност около $\triangle CWM$, а Y е диаметрално противоположната точка на W относно ω_2. Да се докаже, че точките X, Y и H лежат на една права.

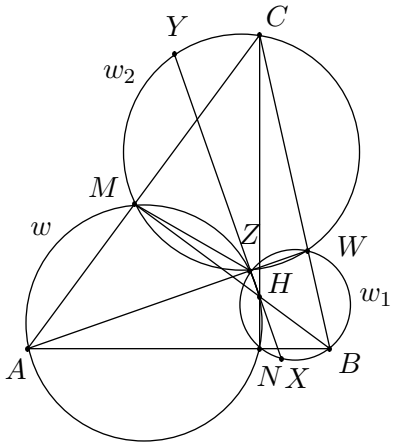
Решение. Нека Z е втората пресечна точка на правата AW и описаната окръжност ω около $\triangle AMN$. Понеже $H \in \omega$, то $HZ \perp AZ$, откъдето

$$\sphericalangle MZW = 90^\circ + \sphericalangle MAH = 180^\circ - \sphericalangle C.$$

Значи $Z \in \omega_2$ и аналогично $Z \in \omega_1$. Това означава, че AZ е радикалната ос на ω_1 и ω_2. Тогава

$$XZ,\ YZ \perp AZ \perp HZ,$$

т.е. точките X, Y, H (и Z) лежат на една права.



Забележка. При $W = H$, $W \to B$ и $W \to C$ твърдението на задачата се проверява лесно. След това общото твърдение може да се получи и чрез равномерно движение.

Коментар. Четири пълни решения и две нули на тази много лесна задача са недопустимо слаб резултат.

Задача 5. Нека $\mathbb{Q}^+$ е множеството на положителните рационални числа. Нека $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ е функция, изпълняваща следните три условия:

(i) $f(x)f(y) \geqq f(xy)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}^+$;

(ii) $f(x + y) \geqq f(x) + f(y)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}^+$;

(iii) съществува рационално число $a > 1$ такова, че $f(a) = a$.

Решение. Като положим $x = 1$, $y = a$ в (i) получаваме, че $f(1) \geqq 1$. От (ii) по индукция следва, че

$$f(nx) \geqq nf(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В частност имаме, че

$$f(n) \geqq n. \tag{2}$$

Пак (i) показва, че $f(n/m)f(m) \geqq f(n)$ $(m \in \mathbb{N})$ и значи $f > 0$ върху $\mathbb{Q}^+$. Сега от (ii) следва, че f е строго растяща функция. Тогава (2) води до

$$f(x) \geqq f([x]) \geqq [x] > x - 1, \quad x \geqq 1.$$

Оттук и (i) по индукция получаваме, че $f(x)^n \geqq f(x^n) \geqq x^n - 1$ и следователно $f(x) \geqq \sqrt[n]{x^n - 1}, \quad x \geqq 1$. При $n \to \infty$ следва, че

$$f(x) \geqq x, \quad x \geqq 1. \tag{3}$$

По-нататък, от (i) и (3) намираме, че $a^n = f(a)^n \geqq f(a^n) \geqq a^n$ и значи $f(a^n) = a^n$. За $x \geqq 1$ избираме n така, че $a^n - x \geqq 1$. Тогава от (ii) и (3) следва, че $a^n = f(a^n) \geqq f(x) + f(a^n - x) \geqq x + (a^n - x) = a^n$, откъдето $f(x) = x$ при $x \geqq 1$.

Накрая, от (i) и (1) имаме, че $nf(x) = f(n)f(x) \geqq f(nx) \geqq nf(x)$ и значи $f(nx) = nf(x)$. Следователно $f(m/n) = f(m)/n = m/n$.

Забележка. Условието $f(a) = a > 1$ е съществено. Наистина, при $b \geqq 1$ функцията $f(x) = bx^2$ изпълнява (i) и (ii), но има единствена неподвижна точка $1/b \leqq 1$.

Коментар. Отново две нули и едва 13 т. общо на тази задача, предложена от ръководителя на отбора Н. Николов. Само Йордан е осъзнал, че решението изисква (малък) аналитичен аргумент, за което получи 5 т.

Задача 6. Нека $n \geqq 3$ е естествено число и $n + 1$ точки върху окръжност да образуват правилен $(n+1)$-ъгълник. Разглеждаме всички номерирания на тези точки с числата $0, 1, \ldots, n$ такива, че всеки номер се използва точно по един път, а две номерирания се считат за еднакви, ако едното се получава от другото след ротация на окръжността. Едно номериране се нарича красиво, ако за всеки четири номера $a < b < c < d$, за които $a+d = b+c$, хордата, съединяваща точките с номера a и d не пресича хордата, съединяваща точките с номера b и c. Нека M е броят на красивите номерирания, а N е броят на наредените двойки (x, y) от естествени числа, за които $x + y \leqq n$ и НОД$(x, y) = 1$. Да се докаже, че $M = N + 1$.

Решение. Твърдението е равносилно на $M = \sum_{m=1}^{n} \varphi(m)$, където φ е Ойлеровата функция. Да наречем едно номериране m-подредба, ако m е непосредствено след 0 по часовата стрелка. Достатъчно е да докажем, че за всяко $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ съществуват точно $\varphi(m)$ „чудесни “ m-подредби. Да фиксираме $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Да разделим числата $0, 1, 2, \ldots, n$ на m блока

в зависимост от техните остатъци по модул m, като във всеки блок числата са подредени в нарастващ ред. Да означим тези блокове с $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$, където c_i се състои от числата, които дават остатък i по модул m. Сега да изберем $1 \leqq r \leqq m$ такива, че $(r, m) = 1$. Ясно е, че тези r са $\varphi(m)$ на брой. Да подредим един след друг блоковете $c_0 c_r c_{2r} \ldots c_{(m-1)r} = S_{m,r}$ и да наречем това подреждане „аритметично“. (Тук индексите на блоковете са редуцирани по модул m.)

Ще докажем, че всяко „аритметично“ подреждане е „чудесно“. Нека това подреждане е $S_{m,r}$ за някакви $1 \leqq r \leqq m \leqq n$, $(r, m) = 1$. Да допуснем противното. Тогава съществуват четири различни цели числа a, b, c, d, разположени в този ред в $S_{m,r}$ и такива, че $a + c = b + d$. Съществуват индекси $0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq l < m$ такива, че тези числа принадлежат съответно на блоковете c_{ri}, c_{rj}, c_{ru} и c_{rl}. Ако разгледаме $a + c = b + d$, по модул m получаваме $ri + rk \equiv rj + rl$ или $i + k \equiv j + l \pmod{m}$, понеже $(r, m) = 1$. Да забележим обаче, че $i + k \leqq j + l < k + m \leqq i + k + m$. Следователно $i + k = j + l$, което означава, че $i = j$ и $k = l$. Тогава обаче $a < b$ и $c < d$, което е противоречие с $a + c = b + d$.

Сега ще покажем, че всяко „чудесно“ подреждане е „аритметично“. Нека T е произволно „чудесно“ подреждане. Да означим с m и x съседните на 0 числа съответно по и обратно на часовниковата стрелка. Имаме $m + x > n$, иначе хордата m-x ще пресича хордата 0-$(m + x)$.

Лема 1. Числата m и x са взаимнопрости.

Доказателство. Да допуснем противното и нека p е техен общ прост делител. Поради симетрията без ограничение на общността считаме $x > m$. Да разгледаме редицата $z_0, z_1, \ldots$, дефинирана така: $z_0 = 1$ и

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k + m, \text{ ако } z_k \leqq n - m \\ z_k + m - x, \text{ ако } z_k > n - m. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че $0 < z_k \leqq n$ и $z_k \neq z_{k+1}$, защото $0 < m < x \leqq n$ и $x \neq m$. Освен това никое от тези числа не се дели на p, поради което m и x не са числа от тази редица. Сега ще докажем, че ако тръгнем от 0 и обходим окръжността по часовата стрелка, то първо ще срещнем z_k, а след това z_{k+1} за всяко k. Ако $z_{k+1} = z_k + m$, това е така, защото в противен случай хордата z_k-m ще пресича хордата z_{k+1}-0. Ако $z_{k+1} = z_k + m - x$ това е така, иначе хордата z_k-m ще пресича хордата z_{k+1}-x. Това означава обаче, че обхождайки окръжността, ние ще срещаме числата $z_0, z_1, \ldots$ в този ред, което е абсурд, понеже между тях явно има безбройно много равни, понеже са от интервала $[0, n]$.

Съгласно Лема 1, ако $1 \leqq r \leqq m$ е такова, че $x \equiv -r \pmod{m}$, то $(r, m) = 1$. Да отбележим, че съседът отляво на 0 в $S_{m,r} - x'$ удовлетворява $x' \equiv (m-1)r \equiv -r \equiv x \pmod{m}$ и $n - m < x' \leqq n$. Ясно е тогава, че $x = x'$.

Ще докажем, че $T = S_{m,r}$ за така дефинираното r. Да разгледаме произволно цяло $a \in [0, n] \backslash \{0, x\}$ и неговият съсед b по часовата стрелка в $S_{m,r}$.

Лема 2. Ако тръгнем от 0 и обходим окръжността по часовата стрелка, първо ще срещнем a, а след това b.

Доказателство. Ако a и b са от един и същ блок на $S_{m,r}$, то $b = a + m$ и твърдението следва, защото иначе хордите 0-b и a-m в T ще се пресичат. Нека сега a е най-голямото число в някой блок c_{ir}, а пък b е най-малкото в следващия блок $c_{(i+1)r}$ за някое i, $0 \leqq i < m - 1$. Да забележим, че $b - a + x \equiv (i + 1)r - ir - r \equiv 0 \pmod{m}$. Освен това $|a - x| < m$ поради $n - m < a, x \leqq n$ и също $0 < b < m$. Следователно $b - a + x \in (-m, 2m)$, което означава, че $b - a + x \in \{0, m\}$. Ако $b - a + x = a$ твърдението следва, иначе хордите 0-a и x-b се пресичат. Ако пък $b - a + x = m$, твърдението следва, защото иначе хордите a-m и b-x се пресичат.

Лема 2 е доказана, откъдето поради това, че твърдението е вярно за произволни a и b, всъщност това е възможно само ако $T = S_{m,r}$ (съобразете внимателно този момент!) С това е доказано, че наистина произволно „чудесно“ подреждане е „аритметично“и задачата е решена.

Коментар. Повечето наши ученици доказаха само, че $N = \sum_{i=2}^{n} \varphi(m)$.

Резултатите на всички участници, заедно с интересна статистика, са на официалния сайт на международните олимпиади www.imo-official.org. Ето резултатите на нашия отбор по задачи.

Име	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Общо**	**Медал**
Йордан Йорданов	7	5	3	7	5	0	27	сребърен
Петър Пенков	7	7	0	7	2	0	23	бронзов
Любен Личев	3	2	2	7	3	0	17	бронзов
Виктор Радивчев	7	7	0	0	0	0	14	почетна грамота
Емилиян Рогачев	7	3	0	0	0	0	10	почетна грамота
Тодор Марков	0	0	0	7	3	0	10	почетна грамота
Общо	31	24	5	28	13	0	101	

Пропуснатите точки на лесните първа и четвърта задача, както и недопустимо слабите резултати на втора, трета и пета задача ни отредиха незавидното 38-мо място в неофициалното отборно класиране. Пропуските в подготовката са базови и това личи най-добре от резултата на първа задача, с която всеки осмокласник олимпиец трябва да може да се справи. Проблемите (включително и като необходимо време) в по-лесните задачи затрудняват напредъка при по-трудните и това ясно си проличава при трета и пета задача. Дори упражнявани неща (като например ситуацията в четвърта задача) се оказват проблемни.

30. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Стоян Боев, Петър Бойваленков, Рафаел Рафаилов

От 28 юни до 3 юли 2013 г. в гр. Агрос, Кипър, се проведе 30-ата балканска олимпиада по математика. Българският отбор беше в състав Ивайло Хартарски (12 клас, СМГ), Любен Личев (10 клас, МГ Плевен) Павлена Ненова (11 клас, СМГ), Виктор Радивчев (11 клас, МГ Варна), Станислав Чобанов (11 клас, МГ Варна), Нгуен Чи Зунг (11 клас, СМГ), проф. Петър Бойваленков (ИМИ-БАН) – ръководител, гл. ас. Стоян Боев (НБУ) – заместник-ръководител и Рафаел Рафаилов (Бъркли, САЩ) – научен консултант.

Отборът беше определен след двудневно контролно на 6-7 април 2013 г., което се проведе в ИМИ-БАН с разширен отбор от 23 най-добре представили се участници от Есенния математически турнир в София, Зимните математически състезания в Пловдив и Пролетния математически турнир в Ямбол.

Причина за необичайното време за провеждане на БОМ 2013 беше отказът на Албания от домакинство. Тази година в БОМ участваха балканските страни Албания, Босна и Херцеговина, България, Кипър, Гърция, Македония, Молдова, Черна Гора, Румъния и Сърбия, както и неофициално отбори на Азербайджан, Италия, Казахстан, Таджикистан, Туркменистан, Великобритания и втори отбор на Кипър.

Българският отбор спечели един златен, четири сребърни и един бронзов медал. В отборното класиране България остана на второ място след Румъния. Златен медал спечели Ивайло Хартарски ($31 = 10 + 10 + 10 + 1$ точки), със сребърни медали са Виктор Радивчев ($30 = 10 + 10 + 10 + 0$ точки), Нгуен Чи Зунг ($30 = 9 + 10 + 10 + 1$ точки), Павлена Ненова ($21 = 10 + 10 + 1 + 0$ точки) и Любен Личев ($21 = 10 + 10 + 1 + 0$ точки), а с бронзов медал остана Станислав Чобанов ($16 = 10 + 4 + 1 + 1$ точки).

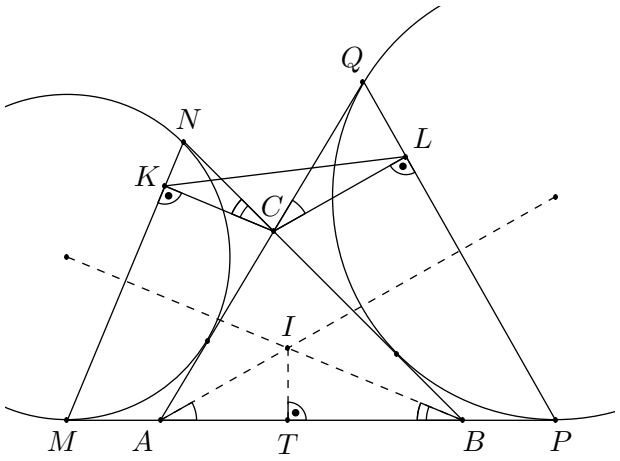
Благодарим на Министерството на образованието и науката и на генералния спонсор на отбора Американска фондация за България, които подпомогнаха нашето участие на състезанието.

Предлагаме Ви условията и решенията на задачите от Балканиадата.

Задача 1. В триъгълник ABC външновписаната окръжност ω_a срещу върха A се допира до AB в точка P и до AC в точка Q, а външновписаната окръжност ω_b срещу върха B се допира до BA в точка M и до BC в точка N. Нека K е ортогоналната проекция на C върху MN и L е ортогоналната

проекция на C върху PQ. Да се докаже, че четириъгълникът $MKLP$ е вписан.

Решение. (*С. Боев*) Нека I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$, а T е проекцията на I върху страната AB. Ще докажем, че $\triangle KCL \sim \triangle AIB$.



Тъй като $AI \perp PQ$ и $BI \perp MN$, то $AI \parallel CL$ и $BI \parallel CK$. Това означава, че

$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle AIB,\ \sphericalangle QCL = \sphericalangle QAI = \sphericalangle IAT \text{ и } \sphericalangle NCK = \sphericalangle NBI = \sphericalangle IBT.$$

От последните две равенства следва, че $\triangle QCL \sim \triangle IAT$ и $\triangle NCK \sim \triangle IBT$, т.е.

$$\frac{CL}{CQ} = \frac{AT}{AI} \quad \text{и} \quad \frac{CK}{CN} = \frac{BT}{BI}.$$

Но $CQ = BT = p - b$, $CN = AT = p - a$ и така получаваме

$$CL.AI = (p-a)(p-b) = CK.BI \Rightarrow \frac{CL}{CK} = \frac{IB}{IA}.$$

От друга страна, $\sphericalangle KCL = \sphericalangle AIB$ и следователно $\triangle KCL \sim \triangle AIB$. Тогава

$$\sphericalangle KLP + \sphericalangle PMK = (90^\circ + \sphericalangle ABI) + (90^\circ - \sphericalangle ABI) = 180^\circ$$

с което доказателството е завършено.

Коментар. Тази задача е българско предложение (на Александър Иванов) и предполага доста възможни решения, използвайки не само синтетични, но и тригонометрични похвати. Това е и причината да бъде определена като първа задача в темата, за което обаче не трябва да бъде подценявана. Нашият отбор се представи отлично с шест решения (59 от 60

възможни точки), използващи различни похвати като решението на Нгуен бе най-близко по идея на горното, въпреки използването на малко тригонометрия.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа x, y и z, за които $x^5 + 4^y = 2013^z$.

Решение. От $5 = (11-1)/2$ следва, че 11 е важен модул за разглежданото уравнение. Действително, имаме $4^y \equiv 4, 5, 9, 3, 1 \pmod{11}$ и $x^5 \equiv 0, 1, 10 \pmod{11}$, откъдето следва, че $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ и значи $5|y$. Нека $y = 5t$, $t \in \mathbb{N}$, и да представим уравнението във вида

$$(x + 4^t)(x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}) = (3.11.61)^z.$$

Тъй като двата множителя отляво са взаимнопрости (докажете!) и 3 не дели втория (докажете!), имаме $3^z | x + 4^t$. Ако $(x + 4^t, 11.61) = 1$, то $x + 4^t = 3^z$ и $2013^z = x^5 + 4^{5t} < (x + 4^t)^5 = 243^z$, противоречие. Ако пък $(x + 4^t, 11.61) > 1$, то $x + 4^t \geqq 33^z$ и

$$2013^z = x^5 + 4^{5t} \geqq \frac{(x + 4^t)^5}{16} \geqq \frac{33^{5z}}{16} > 2.(33^4)^z > 2013^z,$$

противоречие.

Коментар. Получените от нашия отбор 54 от 60 възможни точки не са добър резултат с оглед на подготовката ни за такива задачи. За съжаление, елементарна логическа грешка провали решението на Станислав (и причината не е в разлагането на 2013, защото на контролните за МОМ имаше задача с това разлагане и решението на Станислав там беше най-доброто).

Задача 3. Нека S е множеството от реалните положителни числа. Да се намерят всички функции $f : S^3 \to S$, за които за всички реални положителни числа x, y, z и k са изпълнени следните три условия:

(a) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$,

(b) $f(x, ky, k^2 z) = kf(x, y, z)$,

(c) $f(1, k, k + 1) = k + 1$.

Решение. От (b) и (c) имаме $f(1, tk, t^2(k+1)) = tf(1, k, k+1) = t(k+1)$. Да положим $tk = a$ и $t^2(k + 1) = b$, като отбележим, че променливите a и b могат да приемат всички стойности в S. Тогава $t = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ и

$$f(1, a, b) = a + t = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Сега от (a) получаваме $f(b, a, 1) = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}$. Следователно

$$\begin{aligned} f(b,a,c) &= f\left(b, \frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c}, \sqrt{c^2}, 1\right) = \sqrt{c} f\left(b, \frac{a}{\sqrt{c}}, 1\right) \\ &= \sqrt{c}\frac{\frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{\frac{a^2}{c} + 4b}}{2b} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}, \end{aligned}$$

където c е произволно число от S. Лесно се проверява, че функцията $f(x,y,z) = \frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}$ изпълнява условието.

Коментар Условието подсказва да се търси решението почти изцяло със субституции, но не всички от нашите състезатели бяха поели по този път, изучавайки вместо това аналитичните свойства на функцията. Основен момент в решението е да се намали броят на променливите. Представеното тук решение е по същество сходно с това на Нгуен, който свежда задачата до две променливи и след това търси решение за ℓ на $\ell^2 z - \ell x = 1$ ($\ell^2 z = k+1$, $\ell y = k$). Официалното решение включваше свеждане до една променлива. В зависимост от избрания подход отговорът се получава в различни варианти. Нашите състезатели, които не бяха решили задачата, получиха по една точка за напредък в намаляването броя на променливите, като свеждането до една променлива се оценяваше с 3 точки. Проверката на отговора се оценяваше с една точка.

Задача 4. Някои от участниците в математическо състезание са приятели, като приятелството е взаимно, т.е. ако A е приятел на B, то и B е приятел на A. Ще казваме, че $n \geqq 3$ различни участници $A_1, A_2 \ldots, A_n$ образуват слабо-приятелски цикъл, ако A_i не е приятел на A_{i+1} за всяко $1 \leqq i \leqq n$ ($A_{n+1} = A_1$), а всички останали двойки в цикъла са приятели.

Известно е, че е в сила следното: за всеки участник C и за всеки слабо-приятелски цикъл S от участници, който не включва C, множеството $D \subset S$ от участници, които не са приятели на C, има най-много един елемент.

Да се докаже, че участниците в това състезание могат да бъдат разположени в три стаи така, че всеки двама, които са в една и съща стая, са приятели.

Решение. Да разгледаме граф G, чиито върхове са участниците, а два върха са свързани с ребро тогава и само тогава, когато съответните им участници не са приятели. Достатъчно е да докажем, че върховете на G могат да бъдат разбити на три подмножества така, че да във всяко от тях да няма ребра.

Първо ще докажем, че в G има връх от степен най-много 2. Да допуснем противното и да разгледаме най-дългия индуциран път P в G (индуциран означава, че съседствата в този път са само между последователни

върхове в пътя). Нека u и v са краищата на P. От допускането следва, че u е съседен на поне два върха u_1 и u_2, които не са в P. От избора на P като максимален следва, че u_1 и u_2 имат поне по един съсед в P. Нека w_1 (съответно w_2) е съседът на u_1 (съответно на u_2) от P, който е най-близо до u. Без ограничение на общността можем да считаме, че w_1 е по-близо до u от w_2 (или $w_1 = w_2$). Тогава u_1 има поне два съседа (u и w_1) в слабоприятелския цикъл, индуциран от върха u_2 и върховете на P от u до w_2, което противоречи на условието.

Ще довършим решението с индукция по броя на върховете на G. Ако G има три върха, твърдението е тривиално. Нека твърдението е вярно за всички графи с $n \geqq 3$ върха, отговарящи на условието, и да разгледаме граф G с $n + 1$ върха. Нека u е връх на G от степен най-много 2 и да разгледаме графа G', получен от G с премахването на u. Графът G' удовлетворява условието и по индукционно предположение неговите върхове могат да бъдат разпределени по искания начин в три множества. Тъй като степента на u е най-много 2, в поне едно от тези множества няма съседи на u – тогава разпределяме u в това множество и доказателството е завършено.

Коментар. Повечето от участниците в балканиадата (нашите ученици в това число) не бяха отделили достатъчно внимание и време за тази не особено трудна комбинаторна задача. В крайна сметка не се получи нито едно пълно решение, а нашите точки са за дефиниране на графа по посочения в началото на горното решение начин.

17. МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Ивайло Кортезов

Седемнадесетата младежка балканска олимпиада по математика се проведе в периода 21-26 юни 2013 в турския курорт Лара, Анталия. В нея взеха участие 20 отбора от 19 страни: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Индонезия (гост), Казахстан (гост), Кипър, Македония, Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), САЩ (гост), Сърбия, Таджикистан (гост), Турция (2 отбора), Филипини (гост), Франция (гост) и Черна гора. Радостно е, че географията на МБОМ продължава да се разширява и състезанието продължава да набира популярност. Отборът на България беше определен чрез две контролни работи, проведени на 12 и 13 май 2013 в ИМИ-БАН. Съгласно регламента на МОМН, до тях бяха допуснати учениците, родени след 22 декември 1997 и постигнали най-голям сбор точки от Зимните и Пролетните математически състезания и Националния кръг на олимпиадата по математика. Най-високи резултати на контролните постигнаха Христо Георгиев Папазов (8 клас, АКС) – 37 т.; Станислав Ивайлов Славов (9 клас, СМГ) – 36 т.; Александър Валентинов Иванов (8 клас, СМГ) – 36 т.; Мария Григорова Делякова (8 клас, ПМГ Бургас) – 33 т.; Виолета Николаева Найденова (8 клас, СМГ) – 29 т. и Дона-Мария Радославова Иванова (8 клас, МГ Русе) – 29 т., които сформираха отбора на България за МБОМ 2013. Високи резултати постигнаха и Виктор Костов (СМГ) – 26т.; Костадин Гаров (ПМГ Бургас) – 26 т.; Димитър Маркович (МГ Варна) – 24 т. и Константин Шейретов (СМГ) – 22 т., а при някои от участниците, от които очаквахме много повече, явно напрежението си каза думата и те не успяха да разгърнат пълните си възможности. Контролните работи и решенията им са дадени в края на статията.

Всички отбори-участници в МБОМ 2013 бяха настанени в хубав хотел близо до морския бряг, а домакините очаквано оказаха традиционното си гостоприемство. Всички детайли на организацията бяха добре обмислени. Самото състезание се проведе на 23 юни в конферентната зала на хотела. Учениците започнаха работа точно в 9:00. Когато в 13:30 видяхме, че нито един участник не е предал работата си преди края, у нас се появи сериозно подозрение коя е четвъртата задача на състезанието; така се и оказа. За съжаление журито беше решило да нанесе известни промени в нея, които не съответстваха на избраната от него маркинг-схема и подведоха доста от участниците. Но нека първо видим задачите.

Задача 1. Намерете всички наредени двойки естествени числа $(a;\ b)$, за които числата $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ и $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ също са естествени.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $AB < AC$ и O е центърът на описаната му окръжност ω. Нека D е точка върху отсечката BC така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$ и E е втората пресечна точка на ω и правата AD. Ако M, Nи P са средите съответно на отсечките BE, OD и AC, докажете, че точките M, N и P лежат на една права.

Задача 3. Докажете, че ако $a > 0$, $b > 0$ и $ab \geqq 1$, то

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqq 16.$$

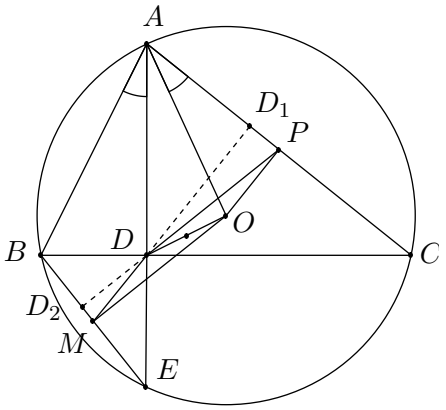
Задача 4. Нека n е естествено число. Двама играчи Алиса и Боби играят на следната игра. Алиса избира n числа, не задължително различни, и записва на лист хартия всички възможни суми по двойки и предава листа на Боби (броят на сумите е $n(n-1)/2$, сред тях може да има равни). Боби печели играта, ако от първия опит намери вярно първоначалните n числа, избрани от Алиса. Може ли Боби да е сигурен, че е победител в следните случаи: а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 8$?

(Например, ако при $n = 4$ Алиса избере числата 1, 5, 7 и 9, които имат същите суми по двойки, както и числата 2, 4, 6 и 10, то Боби не е победител.)

Решения

1. Понеже $a^3b - 1 = b(a^3+1) - (b+1)$ и $a+1$ дели a^3+1, то $a+1$ дели $b+1$. Понеже $b^3a + 1 = a(b^3-1) + (a+1)$ и $b-1$ дели b^3-1, то $b-1$ дели $a+1$. Значи $b-1$ дели $b+1$, т.е. дели 2, така че b е 2 или 3. Ако $b = 2$, то $a+1$ дели $b+1 = 3$ и $a = 2$; наистина $(a;\ b) = (2;\ 2)$ е решение. Ако $b = 3$, то $a+1$ дели $b+1 = 4$ и $a = 1$ или $a = 3$. Наистина $(a;\ b) = (1;\ 3)$ и $(3;\ 3)$ са също решения.

2. Щом $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO = 90° - \sphericalangle ABC$, то $AD \perp CB$ и $BM = ME = MD$. Ако правата MD пресича AC в точка D_1, то $\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle MDE = \sphericalangle MED = \sphericalangle ACD$ и $MD \perp AC$. Така $MD \| OP$, понеже OP е симетрала на AC. Аналогично $PD \| OM$ и $MOPD$ е успоредник. Сега резултатът следва.



3. От САСГ имаме $\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geqq 2$, откъдето $a+2b+\frac{2}{a+1}\geqq\frac{a+3}{2}+2b$; аналогично $b+2a+\frac{2}{b+1}\geqq\frac{b+3}{2}+2a$. Сега от неравенството на Коши – Буняковски

$$(b+3+4a)\,(a+3+4b)\geqq\left(\sqrt{ab}+3+4\sqrt{ab}\right)^2\geqq 64$$

поради $ab\geqq 1$. (Равенството е при $a=b$=1.)

4. а) Да. Нека Алиса е избрала $a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e$. Всяко число участва в четири суми по двойки, така че разделяйки на 4 сбора на десетте суми, получаваме $a+b+c+d+e$. Изваждайки най-малкия сбор $a+b$ и най-големия $d+e$, получаваме c. Изваждайки c от втория по големина сбор $c+e$, получаваме e. Изваждайки e от най-големия сбор $d+e$, получаваме d. Аналогично откриваме a и b.

б) Да. Нека Алиса е избрала $a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e\leqq f$. Всяко число участва в пет суми по двойки, така че разделяйки на 5 сбора на 15-те суми, получаваме $a+b+c+d+e+f$. Изваждайки най-малкия сбор $a+b$ и най-големия $e+f$, получаваме $c+d$. Изваждайки от $a+b+c+d+e+f$ най-малкия сбор $a+b$ и втория по големина $d+f$, получаваме $c+e$. Аналогично получаваме $b+d$, а оттам и $a+f$ и $b+e$. От останалите шест сбора трите най-малки са $a+d$, $a+e$ и $b+c$. Ако от сбора им извадим известните $c+d$ и $b+e$, получаваме $2a$. От a откриваме останалите числа.

в) Не. Числата 1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20 имат същите сборове по двойки като 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19.

Вижда се, че първите три задачи не би трябвало да създадат особени проблеми на сериозните участници. Така се и оказа, като изключенията се дължаха на притеснението от това, че представят държавите си, особено у тези, за които това беше първата международна проява. Трудностите дойдоха от последната задача (първоначално предложена от България), като немалка заслуга за тях има решението на журито да добави обяснението в края на задача 4. Това обяснение носи две беди. От една страна, то даде директна конструкция, която без особено усилие може да се „повдигне“ за два пъти по-голям n от дадения и лиши участниците от момента на откриването на такива числа, с което можеше да се провери кои от тях ще се сетят по какъв начин да търсят два набора с еднакви суми, къде да очакват двусмисленост. По този начин в) се превърна в лесно упражнение. По-голямата беда се състоеше в това, че участниците бяха вкарани в канала на мисли, че за да докажат, че Боби печели, е достатъчно да докажат липсата на двусмисленост, а не да намерят ефективна стратегия за постигането на целта му. Това нямаше да е толкова лошо, ако по неизвестни причини, и въпреки отчаяните протести на координаторите по тази

задача (по собствените им думи), бе избран начин на оценяване, почти приравняващ работите, доказващи липса на двусмисленост, с тези, които нямаха никаква идея как да атакуват задачата. Така участниците попадаха в капана, заложен от допълнителното обяснение, след което биваха посичани с маркинг-схемата. Това впрочем доведе и до необичайно тежка 12-часова координация, от която почти всички ръководители излязоха недоволни. Все пак нашите участници се представиха достойно – всички спечелиха медали: два златни, два сребърни и два бронзови. В неофициалното класиране на официалните страни-участници първите две места спечелиха Румъния и Турция: в този ред, ако се отчита сборът на точките, и в обратния ред, ако се отчитат спечелените медали. Следващите две места бяха заети от Сърбия и България: в този ред, ако се отчита сборът на точките, и в обратния ред, ако се отчитат спечелените медали. Най-добре от българите се представи Виолета Найденова (СМГ, учител Красимира Петрова): $10 + 10 + 10 + 7 = 37$ т., златен медал, следвана от Станислав Славов (СМГ, учител Линка Минчева): $10+10+10+3 = 33$ т., златен медал; Мария Делякова (ПМГ Бургас): $10 + 10 + 10 + 1 = 31$ т., сребърен медал; Александър Иванов (СМГ, учител Надя Кръстева): $10 + 10 + 9 + 1 = 30$ т., сребърен медал; Дона-Мария Иванова (МГ Русе, учител Евелина Минчева): $9 + 2 + 4 + 3 = 18$ т., бронзов медал и Христо Папазов (АК-София, учител Николета Василева): $10 + 2 + 4 + 0 = 16$ т., бронзов медал.

Контролни за определяне отбора на България за МБОМ 2013

1. Да се реши в реални числа системата

$$\left|\begin{array}{l} (x-y)(y-z)(z-x) = xyz \\ (x^3-y^3)(y^3-z^3)(z^3-x^3) = x^3y^3z^3 \\ x+y+z = 8. \end{array}\right.$$

Решение. Да допуснем, че $xyz \neq 0$ и да разделим второто уравнение на първото: $(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2) = x^2y^2z^2$. Имаме $x^2+y^2 > 0$ и $x^2+xy+y^2 \geqq -xy$, така че $x^2+xy+y^2 \geqq |xy|$, като равенство се достига само при $x = -y$. Аналогично $y^2+yz+z^2 \geqq |yz|$ и $z^2+zx+x^2 \geqq |zx|$. Оттук

$$(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2) \geqq x^2y^2z^2,$$

като равенство би се достигало само при $x = -y = z = -x$, т.е. при $x = 0$, което противоречи на допускането. Така сред числата има нула, а значи има и две равни. Сега от третото условие получаваме решенията $(8,0,0),\ (0,8,0),\ (0,0,8),\ (4,4,0),\ (4,0,4),\ (0,4,4)$.

2. Вътре в $\triangle ABC$, върху ъглополовящата ℓ от върха B, е взета точка M такава, че симетралите на отсечките AM и MC се пресичат върху ℓ. Ако $s_{AM} \cap AB = P$ и $s_{CM} \cap CB = N$, докажете, че $BP : BN = BA : BC$.

Решение. Ако $O \in s_{AM} \cap s_{CM} \cap \ell$, то $O \in s_{AC} \cap \ell$ (в частност O лежи на описаната окръжност за ABC). Тогава симетралите ON и OP са ъглополовящи в $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$. От свойството на ъглополовящата имаме $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{BO}{OC} = \dfrac{BO}{OA} = \dfrac{BP}{PA}$. Оттук следва, че $\dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BP}{BA}$.

3. Начертах изпъкнал десетоъгълник и построих всичките му диагонали. Никои три от тях не минаха през една и съща точка. Колко триъгълника има на чертежа ми?

Решение. Триъгълниците с върхове сред тези на десетоъгълника са $\binom{10}{3} = \dfrac{10.9.8}{3.2.1} = 120$. Триъгълниците, имащи два върха сред тези на десетоъгълника, са $4.\binom{10}{4} = \dfrac{10.9.8.7}{3.2.1} = 840$, понеже се пораждат по четири от всяка четворка точки. Триъгълниците, имащи един връх сред тези на десетоъгълника, са $5.\binom{10}{5} = \dfrac{10.9.8.7.6}{4.3.2.1} = 1260$, понеже се пораждат по пет от всяка петорка точки. Триъгълниците, нямащи върхове сред тези на десетоъгълника, са $\binom{10}{6} = \dfrac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$, всеки се поражда от различна шесторка точки. Общо $120 + 840 + 1260 + 210 = 2430$ триъгълника.

4. Намислих естествено число $A < 500$ и цели числа $k,\ m,\ n$, за които $A = (k-m)(m-n)(n-k) = k+m+n$. Намерете всички възможни стойности на A.

Решение. Ако $m,\ n,\ k$ дават три различни остатъка при деление на 3, дясната страна се дели на 3, а лявата – не: абсурд. Щом две от $m,\ n,\ k$ дават еднакви остатъци при деление на 3, то лявата страна се дели на 3, а значи и дясната, така че и третото неизвестно дава същия остатък при деление на 3. Така трите множителя отляво се делят на 3, т.е. A се дели на 27. Понеже $A > 0$, можем да считаме, че $k < m < n$. Нека $k - m = -3a, \quad m - n = -3b, \quad n - k = 3(a + b)$, където $a,\ b$ са естествени. Понеже $A < 1000$, то $ab(a+b) \leqq \lfloor 499/27 \rfloor = 18$. Единствените възможности за $ab(a + b)$ са 1.1.2, 1.2.3, 1.3.4 и 2.2.4. За A получаваме съответно:

$$\begin{aligned}
A &= 54 = (15 - 18)(18 - 21)(21 - 15) = 15 + 18 + 21;\\
A &= 162 = (50 - 53)(53 - 59)(59 - 50) = 50 + 53 + 59;\\
A &= 324 = (103 - 106)(106 - 115)(115 - 103) = 103 + 106 + 115;\\
A &= 432 = (138 - 144)(144 - 150)(150 - 138) = 138 + 144 + 150.
\end{aligned}$$

5. Ако $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y + z = 1$, докажете, че

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leqq \frac{9}{4}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)} + \\ + \frac{z(x+y+z)}{(z+y)(x+z)} = \frac{2(x+y+z)(xy+xz+yz)}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Желаното неравенство е равносилно с

$$8(x+y+z)(xy+xz+yz) \leqq 9(x+y)(x+z)(y+z),$$

което след разкриване на скобите се свежда до $x^2y - 2xyz + yz^2 + y^2z - 2xyz + zx^2 + z^2x - 2xyz + xy^2 = y(x-z)^2 + z(y-x)^2 + x(z-y)^2 \geqq 0$. Равенство се достига при $x = y = z = \frac{1}{3}$.

6. Във вътрешността на $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ е взета точка P. Построени са две еднакви окръжности $k(O_2)$ и $k_1(O_1)$ такива, че k се допира до лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OP^{\rightarrow}$ съответно в точките K и M, а k_1 се допира до лъчите $OB^{\rightarrow}$ и $OP^{\rightarrow}$ съответно в точките N и Q. Нека $O_1M \cap OA = T$. Ако $O_2 \in KQ$ и $QM : MO_1 = q$, намерете $QT : O_2O_1$.

Решение. Четириъгълникът MO_2QO_1 е успоредник, тъй като отсечките MO_2 и QO_1 са успоредни и равни. Следователно $TO_1 \perp OA$ и тогава четириъгълник OTO_1N е правоъгълник. Получаваме, че $\triangle MO_1Q \cong \triangle MOT$ по втори признак, следователно $MQ = MT$. Нека означим $MO_2 = r$, $QO_2 = a$, $MQ = aq$, тогава от Питагорова теорема за $\triangle MO_2Q$ получаваме $r = a\sqrt{1-q^2}$. Изразяваме отново с Питагорова теорема отсечките O_1O_2 и TQ и получаваме, че отношението е $\sqrt{\dfrac{2-2q^2+2q\sqrt{1-q^2}+2\sqrt{1-q^2}}{2-q^2+2q-2\sqrt{1-q^2}}}$.

7. За естествените числа $k,\ m,\ n$ е в сила $n^4 + 2n^3 + kn^2 = m^2 - 1$. Да се намерят най-малката възможна стойност на k и всички $m,\ n$ при тази стойност на k.

Решение. При $k = 1, 2, 3$ имаме

$$(n^2+n)^2 < n^4 + 2n^3 + kn^2 + 1 < (n^2+n+1)^2,$$

така че няма подходящо m.

При $k = 4$ имаме $(n^2+n)^2 < n^4 + 2n^3 + kn^2 + 1 < (n^2+n+2)^2$, така че единствено подходящо е $m = n^2 + n + 1$. Тогава имаме $n^4 + 2n^3 + 4n^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n$, откъдето $n = 2$, $m = 7$.

8. Дадена е окръжност. Един разбойник отбелязва на нея 2013 различни точки, като може да използва 11 разноцветни молива. После Пипи свързва двойки отбелязани едноцветни точки чрез отсечки, които нямат общи точки (дори крайни) помежду си. Накрая разбойникът плаща на Пипи по една жълтица за всяка построена отсечка. Колко жълтици гарантирано ще спечели Пипи, ако и двамата играят оптимално?

Решение. Понеже $2013 = 11.183$, в двата най-масови цвята има поне $2.183 = 366$ точки. Ще покажем с индукция по n, че ако има $2n + 1$ точки в два цвята, те могат да се свържат с n отсечки без общи точки. Базата е ясна. За индукционната стъпка да отбележим, че задължително има две съседни едноцветни точки. Свързваме ги с отсечка и прилагаме индукционното предложение за останалите точки. Сега при $n = 182$ получаваме, че на Пипи са гарантирани поне 182 жълтици.

От друга страна, ако разбойникът оцвети точките по модул 11, то Пипи не може да построи повече от 182 отсечки. Наистина, ако имаме $11n$ точки, оцветени по модул 11, то с индукция по n ще докажем, че можем да построим повече от $n - 1$ отсечки. Базата е ясна. За стъпката да изберем най-късата отсечка и да отъждествим крайните ѝ точки, като премахнем всички точки между тях (между тях няма свързани). След това да приложим индукционното предположение към останалите точки. Сега при $n = 183$ получаваме, че Пипи не може да си гарантира повече от 182 жълтици.

МЕЖДУНАРОДНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА В БУРГАС (BIMC)

Емил Колев

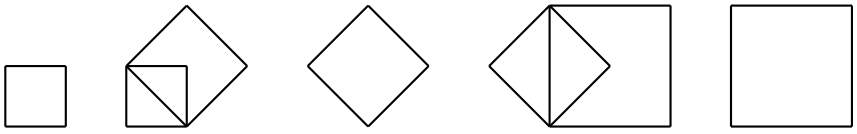
От 30.06.2013 г. до 5.07.2013 г. в Бургас се проведе международно състезание за ученици (Bulgaria International Mathematics Competition (BIMC 2013)). В състезанието участваха 1080 ученици от цял свят, разделени в две възрастови групи. В първата възрастова група (*Key Stage II Division*, което съответства на Elementary International Mathematics Competitions (EMIC)) участваха ученици, родени на или след 01.08.1999 г., а във втората (*Key Stage III Division*, което съответства на Invitational World Youths Mathematics International Competition (IWYMIC)) – ученици, родени на или след 01.08.1996 г. Във всяка от двете групи се проведе индивидуално и отборно състезание. При отборната надпревара всяка възрастова група се раздели на 6 групи, с 12 отбора във всяка група. Във всяка група се определи един шампион, първи подгласник и втори подгласник.

Домакините се справиха отлично с предизвикателствата при организацията на състезанието. По мнение на повечето от участниците, от всички досега проведени подобни състезания, това беше най-добре организираното. Изрично трябва да споменем и неизчерпаемата енергия на Wen-Hsien Sun, Chairman, IMC Executive Board, който успяваше да бъде навсякъде. В работата на международното жури от българска страна взеха участие Емил Колев, Александър Иванов, Владислав Маринов, Стоян Боев, Александър Макелов. Председател на журито беше изтъкнатия популяризатор на математиката Andy Liu.

Повече информация за регламента на състезанието може да бъде намерена на сайта на състезанието: http://www.bimc2013.org Предлагаме ви задачите от индивидуалното и отборното състезания в двете възрастови групи.

Първа възрастова група, индивидуално състезание

1. В редица от квадрати първият квадрат има страна 1 сантиметър. Дължината на страната на всеки следващ квадрат е равна на дължината на диагонала на предишния квадрат. Долната диаграма показва получаването на 2-ия и 3-ия квадрат. Колко е дължината на страната на 11-ия квадрат в сантиметри? (*Предложена от Филипините*)



Квадрат 1 Квадрат 2 Квадрат 3

Решение. Страната на третия квадрат е два пъти по-голяма от страната на първия квадрат. Аналогично, страната на петия квадрат е два пъти

по-голяма от страната на третия и т.н. Тъй като $\frac{11-1}{2} = 5$, дължината на страната на 11-ия квадрат е 2^5 =**32** сантиметра.

2. Двадесет момичета и четири момчета са подредени в редица, като всяко момиче е обърнато на дясно, а всяко момче е обърнато на ляво. Всяко момче преброило момичетата, които се намират в редицата пред него, като получените четири числа били съответно 3, 6, 15 и 18. Всяко момиче преброило момчетата, които се намират в редицата пред него. Колко е сбора на получените от момичетата числа? (*Предложена от Канада*)

Решение. Момчетата са преброили общо $3 + 6 + 15 + 18 = 42$ момичета. Ако момче и момиче са с лице един към друг, те са се преброили взаимно. Ако са с гръб, никой от тях не е преброил другия. Следователно момичетата са преброили точно толкова момчета, колкото момичета са били преброени от момчетата, т.е. **42**.

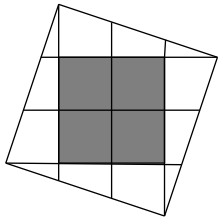
3. Десет реклами A, B, C, D, E, F, G, H, I и J са разположени на билборд 2×5 както е показано на лявата диаграма. Всеки ден рекламите сменят местата си по определен начин, като техните нови места са показани на дясната диаграма. След най-малко колко дни всички реклами ще се окажат на първоначалните си места? (*Предложена от Филипините*)

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J

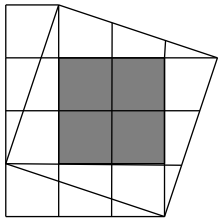
G	A	E	F	B
I	C	J	D	H

Решение. Всяка от рекламите A, B, E, C и G след 5 дни заема първоначалното си място. Рекламите D, I и F се връщат на първоначалните си места след 3 дни, а рекламите H и J след 2 дни. Следователно всички реклами ще се окажат на първоначалните си места едновременно след 5.3.2 =**30** дни.

4. Всяка страна на квадрат със страна 10 сантиметра е разделена на три равни части. Някои от тези точки са свързани помежду си или с върховете на квадрата както е показано на диаграмата. Колко е лицето в квадратни сантиметри на четирите малки квадратчета, които са затъмнени? (*Предложена от България*)

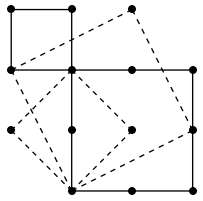


Решение. Като преместим два правоъгълни триъгълника на фигурата виждаме, че лицето на квадрата 10×10 е равно на лицето на 10 еднакви квадрата, четири от които образуват затъмнената част. Следователно лицето на затъмнената част е 40% от лицето на големия квадрат, което е **40** квадратни сантиметра.



5. Точките от два противоположни върха на квадрат, образуван от 16 точки са изтрити. Колко са различните квадрати, които могат да се образуват от някои 4 от тези 14 точки? (*Предложена от Кипър*)

Решение. Има четири вида квадрати, като на диаграмата е показан по един от всеки вид. Броят на квадратите 1×1 е 7, броят на квадратите 2×2 е 2, броят на квадратите $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ е 4 и броят на квадратите $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ е 2. Общо имаме $7 + 2 + 4 + 2 =$**15** квадрата.



6. Да се намери броят на естествените числа, по-малки от 1000 и с цифра на единиците равна на 9, които могат да бъдат представени като сбор на степен на 2 и степен на 3.

Забележка. Числото 1 е степен и на 2, и на 3. (*Предложена от Тайланд*)

Решение. Степените на 2, които са по-малки от 1000, са 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512. Цифрите на единиците на тези степени са 1, 2, 4, 6 или 8. Степените на 3, които са по-малки от 1000, са 1, 3, 9, 27, 81, 243 и 729. Цифрите на единиците са 1, 3, 7 и 9. Търсените числа са показани в долната таблица. Общо имаме **10** такива числа.

Степени на 2	Степени на 3	Търсени числа
1		
2, 32, 512	27	29, 59, 539
4, 64		
16, 256	3, 243	19, 259, 499
8, 128	1, 81	9, 89, 129, 209
	9, 729	

7. Дадени са 2008 последователни естествени числа $6, 7, 8, \ldots, 2012, 2013$. Алис замества всяко от числата със сбора от неговите цифри. Браян замества всяко от числата на Алис със сбора от неговите цифри и Колин замества всяко от числата на Браян със сбора от неговите цифри. Кое от числата на Колин се среща най-често? (*Предложена от Румъния*)

Решение. Най-голямото число, записано от Алис е $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Най-голямото число на Браян е $1 + 9 = 2 + 8 = 10$. Следователно всички числа на Колин са с една цифра, която е 9, ако първоначалното число се дели на 9 или е равна точно на остатъка при деление на 9 на първоначалното число, ако то не се дели на 9. Остатъците при деление с 9 образуват цикъл с дължина 9, като първият и последният елементи са 6. Следователно числото **6** се появява един път повече от всеки друг остатък.

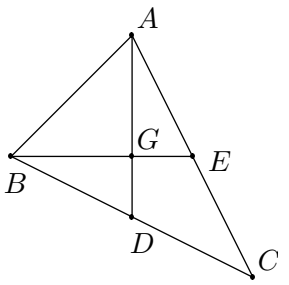
8. Кое е най-малкото естествено число, което е едновременно 2 пъти по-голямо от квадрат на естествено число и 5 пъти по-голямо от пета степен на естествено число? (*Предложена от България*)

Решение. Тъй като търсим най-малкото число с даденото свойство, можем да считаме, че простите делители в каноничното разлагане на това число са само 2 и 5. Понеже числото е два пъти по-голямо от точен квадрат, то степента на 2 е нечетна, а степента на 5 е четна. Понеже числото е 5 пъти по-голямо от пета степен на естествено число, то степента на 2 трябва да се дели на 5, а степента на 5 трябва да дава остатък 1 при деление на 5. Най-малкото такова число е $2^5.5^6 =$**500000**.

9. Всяко естествено число може да се представи като сбор на различни степени на двойката. Например, $131 = 2^7+2^1+2^0$. Колко са трицифрените числа, които са сбор на точно 9 различни степени на двойката? (*Предложена от България*)

Решение. Тъй като $1023 = 1 + 2^1 + \cdots + 2^9$, трябва да премахнем точно едно събираемо и да получим трицифрено число. Това събираемо трябва да бъде по-голямо от 23, т.е. то може да бъде 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 или 2^9. Следователно имаме **5** такива числа.

10. Точките D и E са съответно среди на страните BC и CA на триъгълник ABC. Отсечките AD и BE са перпендикулярни. На фигурата е построена пресечната точка G на AD и BE. Тази точка се нарича медицентър на триъгълника ABC и за нея са изпълнени равенствата $AG = 2DG$ и $BG = 2EG$. Колко е стойността на израза $\dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$? (*Предложена от Русия*)



Решение. Нека $EG = x$ и $DG = y$. Тогава $BG = 2x$ и $AG = 2y$. От Питагоровата теорема имаме $AB^2 = 4x^2 + 4y^2$, $AE^2 = x^2 + 4y^2$ и $BD^2 = 4x^2 + y^2$. Сега $BC^2 + AC^2 = 20(x^2 + y^2)$. Следователно $\dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2} =$**5**.

11. Точка O от вътрешността на четириъгълник $ABCD$ е такава, че разстоянията от O до четирите върха на $ABCD$ са равни на (в някакъв ред) 1, 2, 4 и 7 сантиметра. Какво е възможно най-голямото лице на четириъгълника $ABCD$ в квадратни сантиметри? (*Предложена от Канада*)

Решение. При дадени дължини на две от страните на триъгълник, неговото лице е най-голямо, когато тези страни са перпендикулярни. Следователно можем да приемем, че AC и BD са перпендикулярни и се пресичат в точката O. Тогава лицето на $ABCD$ е половината от произведението на AC и BD. Разделяме числата 1, 2, 4 и 7 на две двойки и намираме

най-голямото произведение от сбора на числата в двете двойки:

$$(1+2)(4+7) = 33 < (1+4)(2+7) = 45 < (1+7)(2+4) = 48.$$

Най-голямото лице на $ABCD$ е $\dfrac{48}{2}$ =**24** квадратни сантиметра.

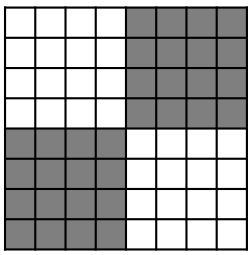
12. Дадено е произведението 1.2.3. . . . .2013. Какъв най-малък брой множители трябва да бъдат изтрити така, че в полученото произведение цифрата на единиците да бъде равна на 9? (*Предложена от Китай*)

Решение. Да разгледаме първо числата от 1 до 2010. Трябва да изтрием всички числа с последна цифра 0, 2, 4, 5, 6 или 8, защото в противен случай последната цифра на произведението ще бъде четна или 5. Имаме $6.201 = 1206$ такива числа. Да забележим, че цифрата на единиците на всяко от произведенията 1.3.7.9, 11.13.17.19 и т.н., е 9. Освен това $9.9 = 81$ и $1.9 = 9$, което означава, че последната цифра на произведението на всички оставащи числа е 9. Да разгледаме последните три числа 2011, 2012 и 2013. Можем да запазим 2011, но трябва да изтрием 2012 и 2013. Следователно търсеният най-малък брой е равен на $1206 + 2$ =**1208**.

13. Едно естествено число се нарича *странно*, ако всички степени в каноничното му разлагане са нечетни. Например, числата 22, 23 и 24 образуват редица от три последователни странни числа, защото $22 = 2^1.11^1$, $23 = 23^1$ и $24 = 2^3.3^1$. Каква е най-голямата дължина на редица от последователни странни числа? (*Предложена от Казахстан*)

Решение. Да забележим, че $29 = 29^1$, $30 = 2^1.3^1.5^1$, $31 = 31^1$, $32 = 2^5$, $33 = 33^1$, $34 = 2^1.17^1$ и $35 = 5^1.7^1$ са седем последователни странни числа. Ще покажем, че не може да има повече от **7** последователни странни числа. От всеки 8 последователни числа точно едно се дели на 8. Да означим това число с a. Тъй като едно от числата $a-4$ и $a+4$ е измежду избраните 8, това число се дели на 4, но не на 8. Това означава, че степента на 2 в неговото канонично разлагане е 2.

14. Половината от клетките на дъска 8×8 са оцветени, както е показано на фигурата. Какъв е общият брой на квадратчетата с размери 2×2, 4×4 или 6×6, за всяко от които точно половината от клетките му са оцветени? (*Предложена от Русия*)



Решение. Квадрат 2×2 с исканите свойства се съдържа изцяло в четвъртия или петия ред или в четвъртия или петия стълб. Има 13 такива квадрата. Квадрат 4×4 с исканите свойства се съдържа изцяло в третия,

четвъртия, петия и шестия ред или в третия, четвъртия, петия и шестия стълб. Има 9 такива квадрата. Квадрат 6×6 с исканите свойства се съдържа изцяло във втория, третия, четвъртия, петия, шестия и седмия ред или във втория, третия, четвъртия, петия, шестия и седмия стълб. Има 5 такива квадрата. Общо търсените квадрати са $13 + 9 + 5 =$**27**.

15. Едно естествено число се нарича *добро*, ако цифрата на единиците му е 0 или 1, цифрата на десетиците му е 0, 1 или 2, цифрата на стотиците му е 0, 1, 2 или 3, цифрата на хилядите му е 0, 1, 2, 3 или 4 и т.н. Първите 10 добри числа са 1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111 and 120. Кое е стотното добро число? (*Предложена от Канада*)

Решение. Да разгледаме редицата от добрите числа. Първото двуцифрено добро число е на второ място в тази редица. Първото трицифрено добро число е на шесто място в тази редица. Първото четирицифрено число е на $1.2.3.4 = 24$-то място в тази редица, а първото пет цифрено добро число е на $1.2.3.4.5 = 120$-то място. Следователно търсеното число има 4 цифри. При деление на 100 с 24 получаваме частно 4 и остатък 4. Следователно първата цифра е 4 и числото е **4020**.

Първа възрастова група, отборно състезание

1. В шест от полетата на ферма с размери 5×5 са разположени къщите на фермерите A, B, C, D, E и F както е показано на чертежа. Останалите 19 полета трябва да се разпределят между фермерите така, че фермер D трябва да получи 5 полета, фермерите A и F трябва да получат по 4 полета всеки, а фермерите B, C и E по 2 полета всеки. Всеки фермер може да притежава само полета, които са разположени в същия ред или колона на собствената му къща. Освен това, всяко поле притежавано от фермер трябва да бъде или директно свързано със собствената му къща или от него трябва да има път до собствената му къща, който преминава само през полета притежавани от самия него. Покажете как могат да бъдат разпределени полетата между фермерите, като на схемата отдолу във всяко поле отбележите една от буквите A, B, C, D, E и F. (*Предложена от Канада*)

	A			
				B
C		D		
				E
	F			

Отговор.

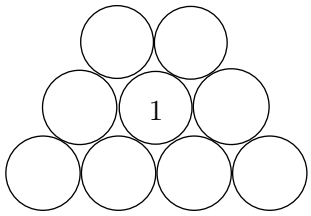
A	A	A	A	B
C	A	D	B	B
C	D	D	D	D
C	F	D	E	E
F	F	F	F	E

2. Майфенг написала приказка за 5 дни, като всеки ден пишела цял положителен брой думи. Всяка вечер тя записвала в редица число, което

съответствало на броя на думите, които е написала до момента. След това разделила първото число в редицата на 1.2, второто число на 2.3, третото число на 3.4, четвъртото число на 4.5 и последното число на 5.6. Ако сумата на петте получени числа е 5, колко най-малко думи има в приказката на Майфенг? (*Предложена от Индонезия*)

Отговор. 14.

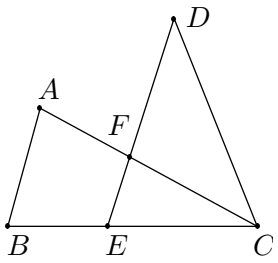
3. Дадени са 9 окръжности като всяка от тях се допира до съседните, както е показано на чертежа. В централната окръжност е написано числото 1. В останалите окръжности трябва да бъдат написани числата 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4 и 4 така, че във всеки две съседни допиращи се окръжности трябва да има различни числа. По колко различни начина може да се напишат числата в окръжностите? (*Предложена от Китай*)



Отговор. 12.

4. На чертежа триъгълниците ABC и CDE имат еднакви лица, като CA и DE се пресичат в точка F. AB е успоредна на DE, $AB = 9$ cm и $EF = 6$ cm. Да се намери дължината на DF. (*Предложена от Филипините*)

Отговор. 7.5 cm.



5. В магазин за сувенири се продават 350 сувенира, които струват съответно $1, 2, 3, \ldots, 349$ и 350 долара. Даниела разполага с 50 банкноти от по 2 долара и 50 банкноти от по 5 долара. Тя иска да закупи един сувенир и иска да заплати точната сума за него. Колко от тези 350 сувенира би могла да закупи Даниела? (*Предложена от Румъния*)

Отговор. 346.

6. Сборът на 1997 положителни цели числа е 2013. Колко е разликата между минималния и максималния възможен сбор на техните квадрати? (*Предложена от Китай*)

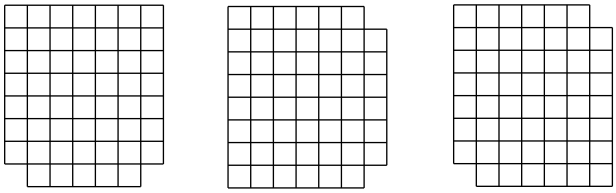
Отговор. 240.

7. В горния ляв ъгъл на таблица 4×4 е записано числото 16. Останалите 15 полета от таблицата трябва да се попълнят с числата $1, 2, \ldots, 15$ (като всяко се използва точно веднъж) така че сумата на числата във всеки ред, колона и диагонал е една и съща. Каква е максималната възможна сума на числата в защрихованата част от таблицата? (*Предложена от Румъния*)

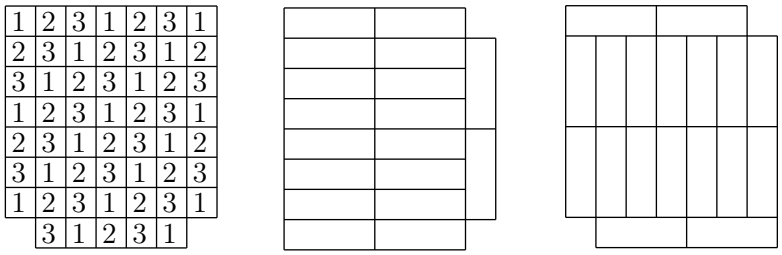
16			

Отговор. 66.

8. Два от ъглите на правоъгълник 7×8 могат да се изрежат по три начина, както е показано на схемата. Останалата част от правоъгълника трябва да се разреже на 36 правоъгълника 1×3 като правоъгълниците могат да бъдат ориентирани хоризонтално или вертикално. За всеки един от трите случая покажете примерно разрязване, или докажете, че такова не съществува. (*Предложена от Канада*)



Отговор. Пример за разрязване за втория и третия случай е показан на схемата долу. В първия случай да означим всяко квадратче с 1, 2 или 3 (вж. схемата долу вляво). Тогава всеки правоъгълник 1×3 съдържа едно квадратче с 1, едно квадратче с 2 и едно квадратче с 3. Тъй като има 19 квадратчета с 1, 17 квадратчета с 2 и 18 квадратчета с 3, разрязването е невъзможно.



9. Числата $0, 1, \ldots, 8$ трябва да се запишат в кутийките така, че равенството да е вярно. Всяко число може да се използва по веднъж. Каква е минималната положителна разлика между двете трицифрени числа от лявата част на равенството? (*Предложена от Филипините*)

$$\square + \square\square + \square\square\square + \square\square\square = 999$$

Отговор. 24.

10. Всички десетцифрени числа съставени от цифрите 1, 2 и 3 са оцветени в червен, зелен или син цвят. Всеки две числа, които се различават помежду си по всичките десет цифри, са оцветени в различен цвят. Ако 1111111111 е червено, а 1112111111 е синьо, в какъв цвят е оцветено 1231231231? (*Предложена от Казахстан*)

Отговор. Червен.

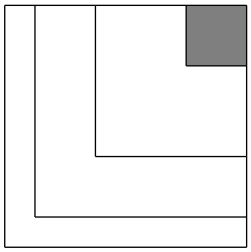
Втора възрастова група, индивидуално състезание

Тази част се състои от 12 задачи. Всеки верен отговор носи 5 точки.

1. В тази задача различните букви съответстват на различни цифри, а еднаквите букви съответстват на еднакви цифри. Трицифреното число ABB е с 25 по-малко от трицифреното число CDC. Ако е известно, че шестцифреното число $ABBCDC$ е точен квадрат, да се намери неговият квадратен корен. (*Предложена от Канада*)

Решение. Условието $ABB + 25 = CDC$ показва, че $C = A + 1$ и има пренос от цифрата на десетиците към стотиците. Следователно $B = 7$, 8 или 9 и съответно $C = 2$, 3 или 4. Понеже $ABBCDC$ е точен квадрат, то $C = 4$. Следователно $B = 9$, $A = 3$, $D = 2$. *Отговор.* **632**.

2. Къща с размери 30×30 метра е разположена в североизточния ъгъл на парцел с рамери 120×120 метра. Собственикът на къщата иска да раздели незастроената част от парцела с две V-образни огради на три равнолицеви участъка, както е показано на чертежа по-долу. Всяка от двете V-образни огради се състои от две части с равни дължини, разположени под прав ъгъл и перпендикулярни на границата на парцела. Да се намери дължината в метри на по-късата ограда. (*Предложена от Канада*)



Решение. Лицето на всеки от трите участъка е $(120^2 - 30^2) : 3 = 4500$ кв.м. Къщата и съседния ѝ участък образуват квадрат с лице $4500 + 900 = 5400$ кв.м. и следователно страната на този квадрат е $30\sqrt{6}$ м., а дължината на късата ограда е $\mathbf{60\sqrt{6}}$ м.

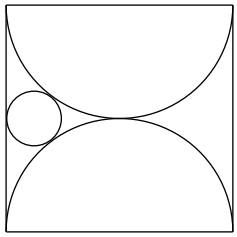
3. По колко начина шестте букви на думата MOUSEY могат да бъдат подредени в редица, така че да не се среща нито думата YOU, нито думата ME? Например самата дума MOUSEY отговаря на едно такова подреждане. (*Предложена от Кипър*)

Решение. Общият брой подреждания е $6! = 720$. Броят на тези от тях, в които се образува думата ME е $5! = 120$, броят на тези от тях, в които се образува думата YOU е $4! = 24$, а броят на тези от тях, в които едновременно се образуват думите YOU и ME е $3! = 6$. Следователно търсеният брой е $720 - 120 - 24 + 6 = \mathbf{582}$.

4. Колко са двойките естествени числа $a \leqq b$, такива че $2\left(\sqrt{\frac{15}{a}} + \sqrt{\frac{15}{b}}\right)$ е цяло число? (*Предложена от Филипините*)

Решение. Нека $2\left(\sqrt{\frac{15}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}\right)=k\in\mathbb{N}$. Тогава $\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{15}{a}}$ и след повдигане на квадрат получаваме, че $\sqrt{\frac{15}{a}}$ е рационално число, т.е. то има вида $\frac{p}{q}$, където p и q са взаимно прости естествени числа. Тогава $ap^2=15q^2$ и следователно p^2 дели 15, т.е. $p=1$. Така получаваме, че $\sqrt{\frac{15}{a}}=\frac{1}{q}$ и аналогично $\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{r}$, където r е естествено число и $r\geqq q$. Следователно $\frac{k}{2}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\leqq 2$, т.е. $k=1,2,3$ или 4. При $k=1$ получаваме $(q,r)=(4,4)$ или $(3,6)$, а при $k=2,3$ или 4 получаваме съответно $(q,r)=(2,2),(1,2)$ или $(1,1)$. Така съответните стойности на a и b са $(a,b)=(240,240),(135,540),(60,60),(15,60)$ и $(15,15)$; общо **5** двойки.

5. Даден е квадрат със страна 80 см. Построени са полуокръжности с диаметри две срещуположни страни на квадрата, допиращи се една до друга в центъра на квадрата и е построена малка окръжност, която се допира до една от страните на квадрата и външно до двете полуокръжности. Колко е радиусът на малката окръжност? (*Предложена от Канада*)



Решение. Нека O е центърът на квадрата, а P е центърът на малката окръжност. Тогава OP е обща допирателна за двете полуокръжности и минава през средата N на страна на квадрата. Нека M е центърът на една от двете полуокръжности, т.е. M е среда на страна на квадрата. Имаме $ON=OM=40$. Нека радиусът на малката окръжност е r. Тогава $MP=40+r$, $OP=40-r$ и от Питагоровата теорема имаме

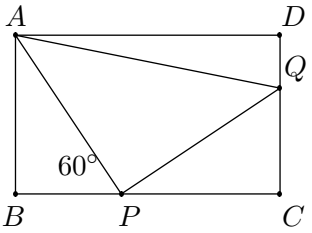
$$1600=OM^2=MP^2-OP^2=(MP-OP)(MP+OP)=2r.80,$$

т.е. $r=\mathbf{10}$ см.

6. Какъв е най-големият брой последователни естествени числа, всяко от които може да се представи като сума от квадратите на две естествени числа? (*Предложена от Русия*)

Решение. Да забележим, че $72=6^2+6^2$, $73=3^2+8^2$ и $74=5^2+7^2$ са три последователни естествени числа с исканото свойство. Ще докажем, че 3 е търсеният максимален брой. Лесно се вижда, че сума от два квадрата на естествени числа дава остатък 0, 1 или 2 при деление на 4. Тъй като едно измежду всеки 4 последователни естествени числа дава остатък 3 при деление с 4, то това число е непредставимо като сума от два квадрата.

7. Даден е правоъгълник $ABCD$ и точки P и Q върху страните BC и CD съответно, такива че APQ е равнобедрен правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха P. Ако $BP = 1$ см и $\sphericalangle APB = 60°$, то колко е лицето на $\triangle ADQ$? (*Предложена от Южна Африка*)



Решение. Да забележим, че $\sphericalangle CPQ = 180° - \sphericalangle APQ - \sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle APB = \sphericalangle PAB$. Следователно триъгълниците ABP и PCQ са еднакви и $CQ = BP = 1$ см, $AB = PC = \sqrt{3}$ см. Тогава лицето на триъгълник ADQ е $\frac{1}{2}AD.DQ = \mathbf{1}$ кв. см.

8. Лия има три пръстена – диамантен, златен и пръстен от слонова кост. Тя ги поставя върху дясната си ръка. Всеки пръстен може да бъде поставен върху всеки от петте пръста и върху всеки пръст може да бъде поставен повече от един пръстен. По колко различни начина Лия може да постави трите пръстена? (Ако имаме два или три пръстена, поставени върху един и същи пръст, то редът на поставянето им е от значение, т.е. се брои различно) (*Предложена от Мексико*)

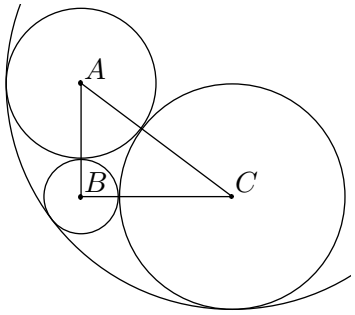
Решение. Първо, трите пръстена могат да бъдат подредени в редица по $3! = 6$ начина. Ще разположим 4 разделителя между тях за да определим кои пръстен върху кой пръст е разположен. Броят на начините за разположение на разделителите е $\binom{3+4}{4} = 35$. Следователно търсеният брой различни поставяния е $6.35 = \mathbf{210}$.

9. Нека a, b и c са естествени числа. Ако най-големият общ делител на числата $b+c$, $c+a$ и $a+b$ е k пъти по-голям от най-големият общ делител на числата a, b и c, то каква е максималната стойност на k? (*Предложена от България*)

Решение. Нека d е най-големият общ делител (НОД) на числата a, b и c. Тогава НОД на числата $2a$, $2b$ и $2c$ е $2d$. Тъй като kd дели всяко от числата $b+c$, $c+a$ и $a+b$, то kd дели $(c+a)+(a+b)-(b+c) = 2a$. Аналогично kd дели $2b$ и дели $2c$, т.е. kd дели НОД на числата $2a$, $2b$ and $2c$, който е $2d$. Следователно $k \leqq 2$. Максималната стойност $k = 2$ се достига при $a = b = c = 1$, т.е. $d = 1$. Тогава $b + c = c + a = a + b = 2$ и техният НОД е 2, което е точно равно на $2d$. Отговор: **2**.

10. Даден е триъгълник ABC с дължини на страните $BC = 4$ см, $CA = 5$ см и $AB = 3$ см. Построени са три взаимно допиращи се окръжности с центрове съответно A, B и C. Построена е и четвърта окръжност, допираща се вътрешно до трите окръжности както е посочено на чертежа по-долу. Колко е радиусът на четвъртата окръжност? (*Предложена от Русия*)

Решение. Нека радиусите на трите окръжности с центрове A, B и C са съответно a, b и c. От $a+b=3$, $b+c=4$ и $c+a=5$ намираме $a=2$, $b=1$ и $c=3$. Да построим правоъгълника $ABCD$. Тогава $DA=BC=b+c=4=6-a$, $DB=C=c+a=5=6-b$, $DC=AB=a+b=3=6-c$ и следователно D е центърът на четвъртата окръжност, чиито радиус е **6** см.

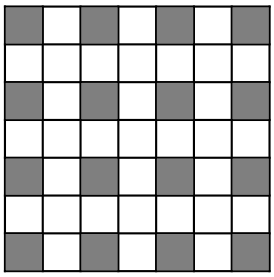


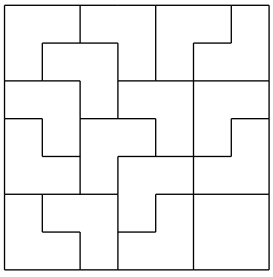
11. Естествените числа $a<b$ са такива, че $\dfrac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ са огледални двуцифрени естествени числа. Каква е минималната стойност на a? (*Предложена от Филипините*)

Решение. Нека $a+b=2A$ и $ab=G^2$, $A=10p+q$ и $G=10q+p$, където $p>q>0$ са цифри. Тогава a и b са корените на квадратното уравнение $x^2-2Ax+g^2=0$ и $a=A-\sqrt{A^2-G^2}$, $b=A+\sqrt{A^2-G^2}$, $A>G$. Имаме $b-a=2\sqrt{A-G}A+G$ и следователно $(A-G)(A+G)=99(p-q)(p+q)$ е точен квадрат. Тогава 11 дели $(p-q)(p+q)$, но $1\leqq p-q\leqq 8$. Следователно 11 дели $p+q$, но $3\leqq p+q\leqq 17$, т.е. $p+q=11$. Това означава, че $p-q$ също е точен квадрат и при това $p-q$ е нечетно число, защото $p+q$ е нечетно. Следователно $p-q=1$ и получаваме $p=6, q=5, A=65, G=56$, $\sqrt{A^2-G^2}=33$. Оттук $a=65-33=\mathbf{32}$.

12. В една фабрика трябва да се изготвят метални пластини от два вида. Първият вид е квадрат 2×2. Вторият вид е квадрат 2×2 с едно премахнато квадратче. Тези пластини се изрязват от метален лист с размери 7×7, като от листа не трябва да остават неизползвани квадратчета. Колко най-малко пластини от втория вид могат да се изрежат? (*Предложена от Мексико*)

Решение. Всяка от двете пластини покрива най-много едно от 16-те оцветени квадратчета на чертежа. Следователно трябва да има поне 16 пластини. Ако всички са от втория вид, то общото им лице е $16.3=48$. Следователно има точно **15** от втория вид и една от първия (вж. примера).





Тази част се състои от 3 задачи. Всяко вярно решение носи 20 точки.

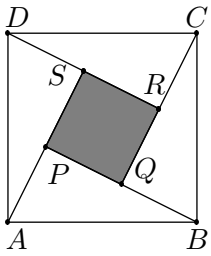
1. Даден е изразът

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

в който всяко събираемо в скоби, започвайки от второто, се получава от предишното с премахване на първото събираемо. Каква е стойността на този израз, ако $n = 2013$? (*Предложена от Русия*) *Отговор.* 4026.

2. На чертежа $ABCD$ е квадрат и

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle QDC = \sphericalangle RAD = \sphericalangle SBA.$$



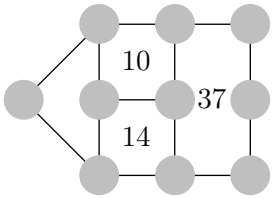
Ако лицето на $ABCD$ е два пъти по-голямо от лицето на $PQRS$, то каква е мярката в градуси на $\sphericalangle PCB$? (*Предложена от Тайланд*)

Отговор. 15°.

3. В редица са разположени 8 монети, като всички са обърнати с герб нагоре. На всеки ход е позволено да преобърнем две съседни монети, при условие, че и двете сочат едновременно герб или стотинка. Какъв е броят на различните конфигурации от герб и стотинка, които можем да получим след краен брой ходове? *Отговор.* 70.

Втора възрастова група, отборно състезание

1. На чертежа са дадени 10 кръгчета, някои от които са свързани с отсечки. Всяко от числата 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 трябва да се постави в кръгче, като последователни числа не могат да са в кръгчета, свързани с отсечка. Трите числа на чертежа са сбор на числата в заграждащите ги кръгчета (те оформят правоъгълен контур). Попълнете липсващите числа в кръгчетата. (*Предложена от Канада*)

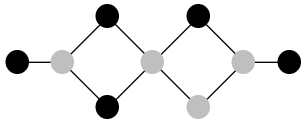


Отговор. В лявото кръгче е 1, на горния ред 3, 5 и 7, на втория 0, 2 и 9 и на последния 4, 8 и 6.

2. Страните на правоъгълен триъгълник, измерени в сантиметри, са взаимно прости естествени числа. Правата през медицентъра и центъра на вписаната окръжност е перпендикулярна на една от страните. Какъв е максималният периметър на триъгълника? (*Предложена от Мексико*)

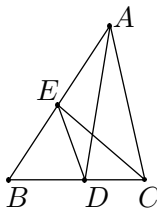
Отговор. 12 см.

3. Един жетон е поставен по случаен начин върху едно от деветте кръгчета на чертежа. След това жетонът е преместен по случаен начин върху друго кръгче, съседно на първоначалното, движейки се по отсечката, която ги свързва. Каква е вероятността след този ход жетонът да се окаже върху кръгче, което е оцветено в черно? (*Предложена от Южна Африка*)



Отговор. $\frac{29}{108}$.

4. В $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 40^\circ$ и $\sphericalangle B = 60^\circ$. Ъглополовящата на $\sphericalangle A$ пресича BC в точка D, а F е точка от правата AB, такава че $\sphericalangle ADF = 30^\circ$. Каква е мярката в градуси на $\sphericalangle DFC$? (*Предложена от Мексико*)



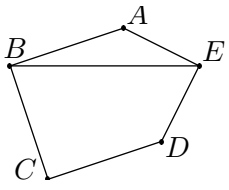
Отговор. 30°.

5. Естественото число N се записва с 2013 цифри, първата от които е 5 и всеки две съседни цифри образуват число, кратно или на 13, или на 27. Колко е сборът на всички възможни стойности на последната цифра на N? (*Предложена от Южна Африка*)

Отговор. 16.

6. В турнир всеки участник играе по веднъж с всеки друг, равенство е невъзможно. След края на турнира се оказало, че за всеки двама играчи X и Y съществува играч Z, които е победил и двамата. Докажете, че за така проведения турнир (а) броят на участниците не може да е бил 6; (б) броят на участниците може да е бил 7. (*Предложена от Мексико*)

7. Даден е изпъкнал петоъгълник $ABCDE$, за който $\sphericalangle ABC = 90^\circ = \sphericalangle DEA$, $AB = BC$, $DE = EA$ и $BE = 100$ см. Да се намери лицето на дадения петоъгълник в квадратни сантиметри. (*Предложена от Русия*)

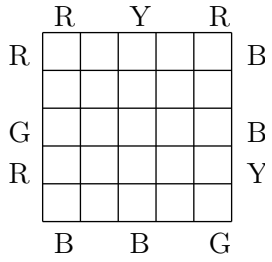


Отговор. 5000 кв.см.

8. Всяка клетка на квадратна таблица 100×100 е маркирана. Двама играчи започват да играят следната игра. Играчът, който е на ход, изтрива маркировките на една или повече клетки, които до този момент са образували правоъгълник, състоящ се само от маркирани клетки. Играчът, който изтрие последната маркировка, губи. Съществува ли стратегия за някой от играчите, която да му гарантира сигурна победа? (*Предложена от Япония*)

Отговор. За първия.

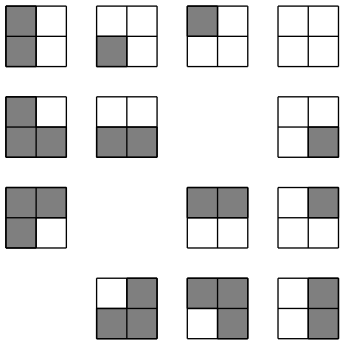
9. В кутия 5×5 са поставени 5 червени, 5 жълти, 5 сини и 5 зелени скъпоценни камъка. Всеки камък е в различна клетка, като във всеки ред и всеки стълб има точно по една празна клетка, а в останалите четири клетки има камъни с различни цветове. Всеки от 12 ценители разглежда скъпоценните камъни от даден ред или стълб (в една от двете възможни посоки) и записва цвета на първия камък, който е видял (разположен в първата или във втората клетка, ако първата е празна). Техните записки са отразени на таблицата, като буквите R, Y, B и G отговарят на цветовете Red (червен), Yellow (жълт), Blue (син) и Green (зелен). Определете в кои клетки какви камъни е имало. (*Предложена от Канада*)



Отговор.

R	G	Y	B	
Y	B	G		R
G		R	Y	B
	R	B	G	Y
B	Y		R	G

10. Разглеждаме 4 различни пощенски марки, свързани в блок 2×2. Показани са всички 13 възможни свързани блока, които можем да получим (свързването е по цяла страна), откъсвайки нула или повече марки (потъмнените квадратчета отговарят на махнатите марки). Колко различни свързани блока от марки можем да получим от 8 различни марки в блок 2×4? (*Предложена от Япония*)



Отговор. 108.

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

Петър Бойваленков

На 8 юни 2013 в Института по математика и информатика на БАН се проведе финалният (очен) кръг на конкурса на списание „Математика“ за малките. За участие в състезанието бяха поканени 34 ученика от 5, 6 и 7 клас, които се бяха представили най-добре в задочния етап на конкурса.

До очния кръг бяха допуснати следните ученици:

5 клас: Антон Пашов (Казанлък), Габриела Петрова (Казанлък), Деница Павлова (София, СМГ), Димитър Спасов (Пазарджик), Иван Боев (Казанлък), Моника Милева (Плевен) и Мария Младенова (Плевен);

6 клас: Александър Георгиев (Враца), Десислава Ценова (Враца), Елинор Сергеева (София, 125 СОУ), Златина Милева (Варна), Ива Иванова (Плевен), Ивайло Иванов (София, 125 СОУ), Иван-Александър Мавров (София, СМГ), Илко Симеонов (Плевен), Йоан Иванов (Казанлък), Климент Костов (Казанлък), Людмил Стаменов (София, 125 СОУ), Мария Стоянова (София, 125 СОУ), Михаил Пенев (Казанлък), Петър Димитров (Казанлък), Ния Василева (Враца), Христо Георгиев (Враца) и Чавдар Лалов (Плевен);

7 клас: Асел Исмолдаева (Шумен), Ванеса Славчева (Казанлък), Зорница Димова (Шумен), Ивайло Георгиев (Шумен), Илина Павлова (Враца), Мария Ангелова (Враца), Момчил Вилиянов (Варна), Неда Попова (Враца), Светлана Тенева (Казанлък) и Янита Терзиева (Казанлък).

На самото състезание се явиха 33 ученика. Неофициално по темата за 7. клас участваше и разширеният национален младежки отбор, който по същото време се подготвяше в ИМИ-БАН за участие в младежката балканиада.

Журито в състав проф. Иван Тонов и доц. Емил Колев присъди следните награди за най-добро представяне на очния кръг.

За пети клас – първа награда за **Димитър Спасов**, втора награда за **Антон Пашов** и трета награда за **Мария Младенова**.

За шести клас – първа награда за **Златина Милева**, втора награда за **Иван-Александър Мавров** и трета награда за **Ива Иванова**.

За седми клас – първа награда за **Ивайло Георгиев**, втора награда за **Зорница Димова** и трета награда за **Момчил Вилиянов.**

Ето условията и кратки решения на задачите.

Задача 5.1. На дъската са написани естествените числа от 1 до 243. Ангел изтрил всички нечетни числа, по-малки от 10. След това Борис изтрил всички числа с последна цифра 8, по-малки от 100. Накрая Васил изтрил всички числа с последна цифра 9. Колко общо са цифрите на останалите на дъската числа?

Решение. В началото на дъската са били записани $9 + 2.90 + 3.144 = 621$ цифри. Ангел е изтрил 5 цифри, Борис е изтрил $1 + 2.9 = 19$ цифри, а Васил е изтрил $2.9 + 3.14 = 60$ цифри. Следователно общият брой на изтритите цифри е $5 + 19 + 60 = 84$ и остават $621 - 84 = 537$ неизтрити цифри.

Задача 5.2. Да се намери броят на всички 11-цифрени естествени числа, кратни на 9, които имат вида $\overline{*2013*2013*}$, където всяка звездичка е цифра (не е задължително различните звездички да са различни цифри). В колко от тези числа звездичките са заместени само от цифрите 0, 1, 2 или 3?

Решение. Понеже сборът на видимите цифри е 12, то цифрите със звездичките трябва да образуват трицифрено число, което дава остатък 6 при деление с 9. Най-малкото такова е 105, а най-голямото е 996, т.е. търсеният брой е равен на $\frac{996 - 105}{9} + 1 = 100$.

Отговор на втория въпрос дава намирането на броя на трицифрените числа със сбор на цифрите 6, които се записват с помощта на цифрите 0, 1, 2 и 3. Понеже $6 = 3 + 3 + 0 = 2 + 2 + 2 = 1 + 2 + 3$, ще имаме общо $2 + 1 + 6 = 9$ такива числа.

Задача 5.3. Ани разполага с 21 картички, на които са написани естествените числа от 1 до 21, всяко по веднъж. Тя се опитала да разпредели картичките в 7 групи по 3 картички, като във всяка група числото, което е най-голямо в нея, да е равно на сумата на другите две числа. Да се докаже, че:

а) Ани няма как да се справи с тази задача.

б) Възможно е да се отделят три картички така, че останалите 18 могат да бъдат разпределени в 6 групи по 3 картички, като във всяка група числото, което е най-голямо в нея, да е равно на сумата на другите две числа.

Решение. а) Сборът на всички числа от картичките е нечетно число – 231. Ако исканото е възможно, то сборът от картичките ще е равен и на удвоения сбор от най-големите числа на картичките, т.е. ще е четно число.

б) Възможно е да се отстранят три картички – например 1, 2 и 12. Тогава останалите могат да се разпределят в 6 групи така: $(3, 16, 19)$, $(4, 9, 13)$, $(5, 15, 20)$, $(6, 11, 17)$, $(7, 14, 21)$ и $(8, 10, 18)$.

Задача 6.1. Да се намери най-голямото 13-цифрено естествено число, кратно на 13, чиито последни четири цифри са 2013. А кое е най-малкото такова 13-цифрено естествено число?

Решение. Фактически търсим 10-цифрени числа с цифра на единиците 2, които са кратни на 13. Най-голямото такова число ще започва с колкото може повече цифри 9. Понеже числото 1001 се дели на 13, то числото $999999 = 999.1001$ също ще се дели на 13. Остава да намерим най-голямото четирицифрено число с цифра на единиците 2, което се дели на 13. Лесно се намира, че това е 9932. За най-малкото постъпваме аналогично. То ще има първа цифра 1, след което ще трябва да следват колкото може повече цифри 0. Отново използваме, че числото 999999 се дели на 13 и задачата се свежда до намиране на най-малкото четирицифрено число с първа цифра 1, последна цифра 2, което се дели на 13. Лесно се вижда, че това е числото 1092. Така търсените числа са 9999999932013 и 10000000092013.

Задача 6.2. Квадрат е разделен на 16 еднакви квадратчета. Стефан трябва да оцвети тези квадратчета в четири различни цвята така, че във всеки ред и всеки стълб да има квадратчета от всички цветове. По колко начина може да стане това?

Решение. За оцветяването на полетата от първия ред имаме 24 възможности. За всяка от тях за полетата от първата колонка по 6 възможности. При всяко възможно такова оцветяване за оставащия квадрат от 9 полета ще имаме по 4 възможности. Следователно търсеният брой е $24.6.4 = 576$.

Задача 6.3. Нека $a = \dfrac{1}{21^2} + \dfrac{1}{22^2} + \cdots + \dfrac{1}{40^2}$ и $b = \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{11^2} + \cdots + \dfrac{1}{19^2}$. Да се докаже, че

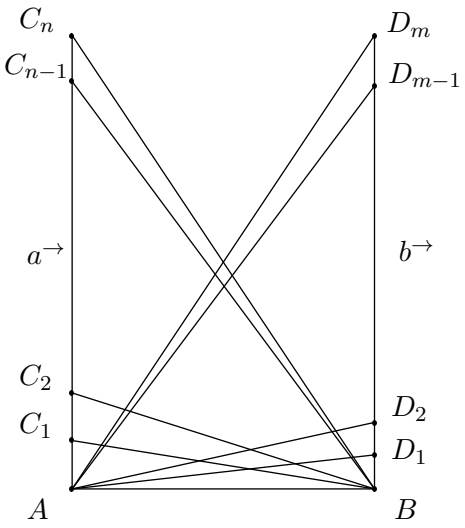
$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}.$$

Решение. Ще използваме, че за всеки две естествени числа $m < n$, числото $A = \dfrac{1}{m^2} + \cdots + \dfrac{1}{m^2}$ се намира между $\dfrac{n+1-m}{m(n+1)}$ и $\dfrac{n+1-m}{(m-1)n}$. Това следва от очевидните неравенства $\dfrac{1}{k(k+1)} < \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)}$ и представянето $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$.

Следователно в нашата задача имаме $\dfrac{60}{21.41} < a < \dfrac{60}{20.40} = \dfrac{3}{40}$ и $\dfrac{3}{20} = \dfrac{30}{10.20} < b < \dfrac{30}{9.19}$, откъдето

$$\frac{a}{b} < \frac{3}{40} \cdot \frac{20}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} > \frac{20}{7.41} \cdot \frac{3.19}{10} = \frac{114}{287} > \frac{1}{3}.$$

Задача 7.1. На чертежа лъчите $a^{\rightarrow}$ и $b^{\rightarrow}$ са перпендикулярни на правата AB. Нека $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и $D_1, D_2, \ldots, D_m$ са такива точки съответно от $a^{\rightarrow}$ и $b^{\rightarrow}$, че $\sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle C_1BC_2 = \cdots = \sphericalangle C_{n-1}BC_n = 5^\circ$ и $\sphericalangle BAD_1 = \sphericalangle D_1AD_2 = \cdots = \sphericalangle D_{m-1}AD_m = 3^\circ$, където n и m са най-големите естествени числа, за които това е възможно. Да се намери броят на триъгълниците с върхове A, B и някоя от пресечните точки на лъчите $AD_j^{\rightarrow}$ и $BC_i^{\rightarrow}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Колко от тези триъгълници са равнобедрени с основа AB и колко от тях са правоъгълни с хипотенуза AB?

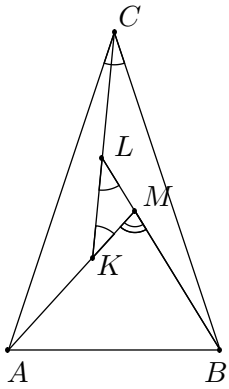


Решение. Понеже $5n < 90$, то $n = 17$ и аналогично $m = 29$. Търсеният брой на триъгълниците е равен на броя на пресечните точки на означените лъчи, т.е. на $17.29 = 493$. Ако някой от тези триъгълници е равнобедрен, то ъгълът при основата му трябва да е кратен на 15°. Такива ъгли са общо 5 на брой. Лесно се вижда, че острите ъгли на правоъгълните триъгълници също трябва да са кратни на 15° и получаваме отново 5 триъгълници.

Задача 7.2. Да се докаже, че сборът на всички трицифрени числа, които са точни квадрати, не е точен квадрат.

Решение. Квадратите на числата от 10 до 31 са единствените, които се записват с по три цифри. От тях 11 са нечетни и техните квадрати дават остатък 1 при деление на 4. Следователно сборът от квадратите, които са трицифрени числа, ще дава остатък 3 при деление с 4, а това означава, че той не е точен квадрат.

Задача 7.3. Точката M от вътрешността на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е такава, че $\sphericalangle AMB = 2\ \sphericalangle ACB$, а точката K от отсечката AM е такава, че $\sphericalangle CKM = \sphericalangle ACB$. Да се докаже, че $CK = KM + BM$.



Решение. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$; $BM \cap CK = L$. Имаме $\sphericalangle MLK + \sphericalangle LKM = \sphericalangle AMB = 2\gamma$, откъдето $\sphericalangle MLK = \gamma$. Следователно $KM = LM$ и $KM + BM = BL$. От друга страна, $AC = BC$, $\sphericalangle AKC = \sphericalangle BLC = 180^\circ - \gamma$ и $\sphericalangle ACK = \sphericalangle CBL$ $(= \gamma - \sphericalangle KCB)$. Следователно $AKC \cong BLC$, откъдето $CK = BL = KM + BM$.

ДВЕ СЪСТЕЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКА ПРЕЗ ЛЯТОТО

Любомир Любенов, Алия Искакова

На 22 юни 2013 г. и на 10 август 2013 г. в България и Казахстан се състояха две състезания по математика за ученици от 1 до 8 клас. Състезанието в България се проведе в Старозагорски бани под името „Ум, Белият Делфин – Свят“ и в него участваха 199 ученици от България, Казахстан, Русия и Китай. Организатор бе Частно СОУ „Делфините“ – Старозагорски бани.

Състезанието в Казахстан се проведе под името „Математически звезди – Казахстан 2013 г.“ и в него участваха 287 ученици от България, Казахстан, Русия и Филипините. Организатор на състезанието бе сдружение „Иновация“ – Казахстан.

И двете състезания бяха под формата на тест от 20 задачи за всеки клас, последните пет задачи бяха с отворен отговор. Времето за работа бе 60 минути. Всеки верен отговор се оценяваше с една точка. При равен брой точки по-напред в класирането бе този участник, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.

Победители в състезанието „Ум, Белият Делфин – Свят“ станаха българските ученици: Атанас Вълев от Стара Загора, Божидар Димитров от Силистра, Лъчезар Жеков от Хасково, Александър Димитров от Бургас, Любомира Димитрова от Свищов, Михаела Димитрова от Бургас, Иван Наумов от Бургас, Иван Джангозов от Димитровград и Полина Кисьова от Стара Загора. Сред победителите са и един ученик от Казахстан, 8 ученици от Китай и двама от Русия.

Победители в състезанието „Математически звезди – Казахстан 2013 г.“ станаха Любен Карбанов от Стара Загора, Галин Тотев от Бургас, Любомира Димитрова от Свищов, Николай Шиваров, Диан Калайджиев, Михаела Милушева и Михаела Димитрова от Бургас, Христо Христов от Варна. Сред победителите са по 11 ученици от Русия, Казахстан и Филипините.

Състезанията намериха отзвук не само в България, но и по света. В електронната страница на клуб „Бернули“ Игор Федоренко от Краснодар рекламираше състезанието „Математически звезди – Казахстан 2013“. Така ученици от бъдещата олимпийска столица Сочи, прочели рекламата, намериха място сред медалистите на състезанието.

В сайта на д-р Саймън Чуа – президент на Mathematics Trainers' Guild, Philippines (MTG) коментира задачите от състезанието, които са били истинско предизвикателство за филипинските участници.

Задачите от състезанията можете на намерите на електронната страница www. mathematicalmail.com. За читателите на списание „Математика“ предлагаме част от задачите от състезанието „Математически звезди – Казахстан 2013“.

4. клас

1. Сборът на най-малкото и най-голямото число, всяко от които е записано с 6 цифри с произведение 6, е:

А) 722 227 **Б)** 10 99 999 **В)** 777 777

2. Числата x, 2, 4 и 8 са делимо, делител, частно и остатък. На едното листче са делимото и делителят, а на другото листче са частното и остатъкът. По колко начина можем да направим това?

А) 4 **Б)** 5 **В)** повече от 5

3. В един втори клас има 21 ученици. Дванадесет имат по по-малко от четири шестици, а 12 – повече от две шестици. Колко ученици имат поне четири шестици?

А) 3 **Б)** 9 **В)** 12

4. Баща има 3 сина и всеки от тях има също 5 сина на 10 години. Колко най-малко са бащите?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 9

5. Сред числата от 1 до 1000 са зачеркнали тези, които завършват на 0. След това сред останалите зачеркнали тези, които се делят на 5. След второто зачеркване са останали:

А) 700 числа **Б)** 800 числа **В)** 900 числа

6. Най-малкото число в записа, на което участват по веднъж цифрите I, X, L и V, записано с арабски цифри, е ...

7. В едно състезание участват 12 души. По колко различни начина могат да се заемат първите три места в него?

5. клас

1. Едно число вместо да го намалят с 10, го увеличили 10 пъти и получили 1 001,01. Числото, което е трябвало да получат, е:

А) 110,101 **Б)** 90,101 **В)** 981,01 **Г)** 1000,01

2. Числото A е най-малкото число, което при делението на 7 дава остатък 3. Остатъкът при делението на A на 6, е:

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 9

3. Броят на двуцифрените числа, които се записват с нечетни цифри, е с X по-голям от броя на двуцифрените числа, които се записват с четни цифри. Тогава $X =$

А) 0 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** 7

4. Стойността на израза

$$\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+\frac{5-4}{4.5}+\frac{6-5}{5.6}+\frac{7-6}{6.7}+\frac{8-7}{7.8}+\frac{9-8}{8.9}+\frac{10-9}{9.10}$$

е

А) 0,1 **Б)** 0,9 **В)** 0,01 **Г)** друг отговор

5. Ако числото A е с 25% по-голямо от числото B, тогава числото B е по-малко от A с x%. Определете числото x.

6. С цифрите 0, 1, 4, 5, 6, 7 и 8 са записани всички четирицифрени числа, в които няма повтарящи се цифри и се делят на 45. Броят на числата е...

7. Нека A е произведението на всички цели числа от 1 до 63, а B е произведението на всички цели числа от 1 до 61. Да се посочи остатъкът при делението на $A - B$ на 71.

6. клас

1. Коя фигура има толкова диагонали, колкото са страните ѝ?

А) триъгълник **Б)** четириъгълник

В) петоъгълник **Г)** шестоъгълник

2. Така гласи постулатът на Бертран: А*ко n е положително цяло число, по-голямо от 1, то винаги има просто число p, за което* $n < p < 2n$. Колко са простите числа между n и $2n$, ако $n = 25$?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 25

3. Средната възраст на членовете на екипажа, без капитана, е 25 години, а с капитана – 26 години. Ако капитанът е на 30 години, тогава екипажът е от:

А) 4 души **Б)** 5 души **В)** 6 души **Г)** повече от 6 души

4. С цифрите 0, 1, 4, 5, 6, 7 и 8 са записани всички четирицифрени числа, които нямат повтарящи се цифри и се делят на 5. Каква част от тези числа са числата, които се делят на 9?

А) 0,1 **Б)** 0,2 **В)** 0,3 **Г)** друг отговор

5. Броят на естествените числа x, за които $\dfrac{x+10}{x}$ и $\dfrac{x+7}{x-1}$ са цели числа, е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** повече от 2

6. Стойността на израза $(-1)^{1001}.(-1)^{1002}\ldots(-1)^{2012}.(-1)^{2013}$ е:

А) 1 **Б)** -1 **В)** -2013 **Г)** 2013

7. 26 литра сок трябва да бутилираме в 10 бутилки от по 1 литър, 3 литра и 5 литра, като бутилките от 1 литър са четно число. Колко са бутилките от 5 литра?

7. клас

1. Изразът $c^2 - a^2 + 2ab - b^2$ е тъждествено равен на:

А) $(c-a-b)^2$ **Б)** $(c-a)(c-b)$

В) $(c+a-b)(c-a-b)$ **Г)** $(c+a-b)(c-a+b)$

2. Броят на решенията на уравнението $x^2 - x = 0$ е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

3. За лицето S на правоъгълен триъгълник с хипотенуза c, винаги е вярно, че:

А) $0 < S \leqq \dfrac{c^2}{4}$ **Б)** $S \geqq \dfrac{c^2}{4}$

В) $\dfrac{c^2}{4} \leqq S \leqq \dfrac{c^2}{2}$ **Г)** $S \geqq \dfrac{c^2}{2}$

4. Ако всеки от ъглите на четириъгълник е средноаритметично на останалите три ъгъла, тогава този четириъгълник е винаги:

А) успоредник **Б)** ромб

В) квадрат **Г)** правоъгълник

5. Дължините на височините на триъгълник са 1, 2 и x. Тогава x може да бъде:

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 0,5

6. Върху основата AB и върху бедрото BC на равнобедрения триъгълник ABC са взети съответно точките M и N, така че $CM = CN$. Тогава $\sphericalangle ACM : \sphericalangle NMB$ е:

А) 1 : 1 **Б)** 1 : 2 **В)** 2 : 1 **Г)** друг отговор

7. Ако p е просто число, а също така прости числа са $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$, тогава p е ...

8. Ако $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 2013^2 - 2014^2 = A.(-1007)$, то $A = \ldots.$

8. клас

1. Ако $\sqrt{2}+1$ е корен на уравнението $x^2+ax+b=0$, в което параметрите a и b са рационални числа, тогава $a+b$ е:

А) -2 **Б)** -5 **В)** -3 **Г)** друг отговор

2. За колко естествени числа n може да се твърди, че $3n+2$ се дели на $2n+5$?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** повече от 2

3. Графиката на линейната функция $y=x-1$ е завъртяна на 180° около началото на координатната система. Новата права има уравнение:

А) $y=-x-1$ **Б)** $y=x+1$ **В)** $y=-x+1$ **Г)** $y=x-1$

4. Ъглите при върховете A и B на триъгълника ABC са съответно 70° и 50°. Точката M е вътрешна за триъгълника и $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = 40^\circ$. Тогава $\sphericalangle BMC$ е равен на:

А) 80° **Б)** 100° **В)** 140° **Г)** друг отговор

5. Остатъкът при делението на $2+2^2+2^3+\cdots+2^{2013}$ на 7 е:

А) 6 **Б)** 4 **В)** 2 **Г)** 0

6. Правоъгълен триъгълник има хипотенуза 4 cm. Най-малкото цяло число, което НЕ може да изразява лицето в cm^2, е ...

ТРИЪГЪЛНИЦИ С ЦЕЛОЧИСЛЕНИ СТРАНИ И ЕДНА ЦЕЛОЧИСЛЕНА МЕДИАНА

Петър Попиванов

Поставяме си следната задача: *Какви трябва да бъдат страните* $a, b \in \mathbb{N}$*, за да следва оттук, че* $c, m_c \in \mathbb{N}$*?*

Очевидно $2(a^2 + b^2) = c^2 + 4m_c^2 = \lambda \in \mathbb{N}$. Следователно числото λ е четно, т.е. $\lambda = 2\lambda'$, $\lambda' \in \mathbb{N}$, и

$$a^2 + b^2 = \lambda' \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2\lambda' = \lambda. \tag{2}$$

От геометрични съображения е ясно, че $a + b > c$, $a + b > 2m_c$.

Следователно уравнението $c^2 + t^2 = \lambda$ има целочислени решения, което по критерия на Лагранж означава, че в каноничното разлагане на λ' няма прости множители от вида $4k + 3$ в нечетна степен (тогава същото важи и за $2\lambda'$). От тези решения (без $c = 0$ или $t = 0$, когато нямаме триъгълник) ще получим търсения отговор.

Да отбележим, че от (2) следва, че c е четно, т.е. $c = 2c_1$ и

$$4c_1^2 + 4m_c^2 = \lambda, \tag{3}$$

откъдето $\lambda = 2\lambda' = 4\lambda''$, $\lambda'' \in \mathbb{N}$, и следователно $c_1^2 + m_c^2 = \lambda'' \in \mathbb{N}$. Нека $c_1 \in \mathbb{N}_0$, $m_c \in \mathbb{N}_0$ са решенията на (3). Тогава имаме, че $a^2 + b^2 = 2\lambda''$, което означава, че a и b трябва да са с еднаква четност[1].

Аритметично задачата е решена[2], но геометрично трябва допълнително да поискаме $a + b > c = 2c_1 > 0$, $a + b > 2m_c$, където $c_1^2 + m_c^2 = \lambda'' = \frac{a^2+b^2}{2} \in \mathbb{N}$.

Да се съсредоточим на основното представяне (3). То не е единствено. Как можем да намерим всички представяния в $\mathbb{N}_0$: $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \lambda$? Имаме $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$. Нека се ограничим със случая $y_2 \neq y_1$, защото $y_1 = y_2 \in \mathbb{N}_0$ води до $x_1 = x_2 \in \mathbb{N}_0$. Следователно

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{u}{v},\ (u, v) = 1, \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 = ut \\ y_2 - y_1 = vt \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l} y_1 + y_2 = us \\ x_1 + x_2 = vs \end{array} \right. ,$$

[1] В каноничното разлагане на λ'' няма прости множители от вида $4k + 3$ в нечетна степен.

[2] Заедно с бележките по-долу върху броя на решенията, този подход е по-интересен от прозаичната проверка с формулата за медианата на всички възможни стойности на $c \in \{|a - b| + 1, |a - b| + 2, \ldots, a + b - 1\}$.

откъдето

$$\left|\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2}(ut+vs) \\ y_1=\frac{1}{2}(us-vt) \end{array}\right| , \left|\begin{array}{l} x_2=\frac{1}{2}(vs-ut) \\ y_2=\frac{1}{2}(us+vt) \end{array}\right| , \lambda = x_1^2+y_1^2=\frac{1}{4}(u^2+v^2)(s^2+t^2).$$

Ако u и v са от еднаква четност, те не могат да са четни поради $(u,v)=1$, и тогава s и t трябва да са от еднаква четност, т.е. четни (иначе λ ще е нечетно). Ако u и v са с различна четност, то s и t трябва да са четни.

Заключителна бележка. Вече знаем, че естественото число $n \in \mathbb{N}$ може да се представи като сума от два квадрата на цели числа $x,\ y \in \mathbb{Z}$ точно когато в каноничното разлагане на n простите множители от вида $4k+3$ участват само в четни степени. Остава открит въпросът за броя на тези представяния. С помощта на знаменитата Θ_3 функция на К. Якоби (Потсдам 1804, Берлин 1851) и по-точно с едно тъждество за $\Theta_3^2(0)$ се доказва следният интересен резултат.

Теорема 1. Броят на представянията на естественото число n като сума от два квадрата на цели числа е равен на учетворената разлика между броя на делителите на n от вида $4k+1$ и броя на делителите на n от вида $4k+3$, когато тази разлика е положителна. В противен случай броят е 0.

Както е добре известно, Ж.-Л. Лагранж (Торино 1736 – Париж 1813) е доказал, че всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ може да се представи като сума от четири квадрата на цели числа: $n=x^2+y^2+z^2+w^2,\ x,\ y,\ z,\ w \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Имаме $2=(\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2+0^2=0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2=0^2+0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2=(\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2+0^2=(\pm1)^2+0^2+0^2+(\pm1)^2=0^2+(\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2$, т.е. 24 представяния.

Пример 2. Имаме $3=0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2=(\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2=(\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2=(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2$ (32 представяния).

С помощта на едно тъждество за Θ_3 Якоби установил следното обобщение на теоремата на Лагранж.

Теорема 2. Всяко естествено число n се представя като сума от четири квадрата на цели числа. Броят на тези представяния е равен на 8 кратната или двадесет и четири кратната сума от нечетните делители на n в зависимост от това нечетно ли е n или четно.

На интересуващите се предлагам кратка историческа разходка из теорията на елиптичните функции. Съвременната ѝ версия е дело на К. Якоби и паралелно с него – на Н. Абел (остров Финой 1802 – Арендал 1829). Якоби въвежда функциите $\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4$ и дефинира трите основни елиптични функции като техни частни: $C_1\frac{\Theta_1}{\Theta_4},\ C_2\frac{\Theta_2}{\Theta_4},\ C_3\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$, където $C_j,\ j=1,2,3$ са подходящи константи. Основните му резултати са публикувани на латински език в Кьонигсберг през 1829 г., а тяхно продължение в том 13 на знаменитото списание „Креле“ през 1835 г. (пак на латински).

ВЪРХУ ЕДНА КОНКУРСНА ЗАДАЧА ОТ СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“2013, БР. 1

Николай Хадживанов

Задачата е на страница 43, за ученици от V до VII клас, и текстът и е:
Да се докаже, че числото $123456789101112\ldots20112013$ *се дели на 3.*

В решението ѝ на стр. 37 от бр. 3 е уточнено, че числото в текста е получено, като последователно са записани числата от 1 до 2013.

В съвременната десетична позиционна бройна система, основите на която са положени в Индия през V в., едно естествено число A се записва във вида $A = a_0a_1a_2\ldots a_n$, където $a_i \in \{0, 1, 2\ldots, 9\}$, $a_0 \neq 0$, когато

$$A = a_0.10^n + a_1.10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.10 + a_n. \tag{1}$$

Уместно е да отбележим, че е вярно следното

Твърдение 1. Всяко естествено число A може да се представи по единствен начин във вида (1).

Доказателство. Нека A е естествено число и n е максималното цяло неотрицателно число, за което $10^n \leqq A$, а a_0 е максималното естествено число, удовлетворяващо неравенството $a_0.10^n \leqq A$. Тъй като $10^{n+1} > A$, ясно е, че $a_0 \leqq 9$. Ако $A < 10$, тогава очевидно $n = 0$ и $a_0 = A$,така че в този случай (1) приема вида $A = a_0$. Нека сега $A \geqq 10$. Очевидно $n \geqq 1$. Ще означим с a_1 максималното цяло неотрицателно число, за което $a_1.10^{n-1} \leqq A - a_0.10^n$. Очевидно е, че $a_1 \leqq 9$, защото иначе $10^n \leqq A - a_0.10^n$, което противоречи на избора на a_0.

Ако $A < 10^2$, тогава очевидно $n < 2$ и следователно $n = 1$. Ще положим $a_1 = -a_0.10$. Ясно е, че $a_1 < 10$. Имаме $A = a_0.10 + a_1$, т.е. (1) е в сила и при $10 \leqq n < 10^2$.

Продължавайки в този дух, лесно се убеждаваме, че A може да се представи във вида (1).

За да завършим доказателството на твърдението, остава да се убедим, че представянето (1) е единствено.

Да допуснем, че

$$A = b_0.10^m + b_1.10^{m-1} + \cdots + a_{m-1}.10 + a_m, \tag{2}$$

където m е цяло неотрицателно число, $b_j \in \{0, 1, 2\ldots, 9\}$, $b_0 \neq 0$ за всяко $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Първо ще докажем, че $m = n$. Да допуснем, че $m \neq n$. Нека $n > m$. От неравенствата $b_j \leqq 9$ следва, че

$$A \leqq 9(10^m + 10^{m-1} + \cdots + 10 + 1 = 9 \cdot \frac{10^{m+1} - 1}{10 - 1} = 10^{m+1} - 1 \leqq < 10^n - 1 < 10^n.$$

Тогава $A < a_0.10^n \leqq a_0.10^n + a_1.10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.10 + a_n. = A$, което е противоречие.

По същия начин се разсъждава, когато $n < m$, като само се сменят ролите на m и n. Така доказахме, че $m = n$. Имаме

$$(3)\quad a_0.10^n + a_1.10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.10 + a_n = b_0.10^n + b_1.10^{n-1} + \cdots + b_{n-1}.10 + b_n.$$

От (3) очевидно следва, че $a_n - b_n$ се дели на 10 и тъй като $0 \leqq a_n \leqq 9$ и $0 \leqq b_n \leqq 9$, то $a_n = b_n$. Тогава (3) можем да запишем във вида

$$a_0.10^{n-1} + a_1.10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = b_0.10^{n-1} + b_1.10^{n-2} + \cdots + b_{n-1}.$$

Продължавайки по този начин, достигаме до заключението, че $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$.

Доказателството на твърдението е завършено.

Ще означим с $S(A)$ сбора от цифрите на естественото число $A = a_0a_1 \ldots a_n$, т.е. $S(A) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Очевидно е, че

$$(4)\qquad A - S(A) = a_0(10^n - 1) + a_1(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_{n-1}(10 - 1).$$

Всяко от числата $10^i - 1$ се дели на 9. Това следва по индукция: $10 - 1 = 9$, $10^i - 1 = 9.10^{i-1} + (10^{i-1} - 1)$. От (4) следва, че $A - S(A)$ се дели на 9 и, разбира се и на 3. Поради това *A и $S(A)$ имат един и същ остатък при деление на 9 (и на 3).* Ако прибавим към A и $S(A)$ едно и също цяло число, те пак ще имат един и същ остатък при деление на 9 (и на 3). В частност, A и $S(A)$, $A + 1$ и $S(A + 1)$, $A + 2$ и $S(A + 2)$ са три двойки числа, всяка от които има един и същ остатък при деление на 3. Поради това сумите $S(A) + S(A + 1) + S(A + 2)$ и $A + A + 1 + A + 2$ имат един и същ остатък при деление на 3. Тъй като втората сума се дели на 3, то $S(A)+S(A+1)+S(A+2)$ също се дели на 3. По същия начин заключаваме, че $S(A) + S(A + 2) + \cdots + S(A + 8)$ се дели на 9.

Да си спомним сега задачата, с която започнахме. Ето едно нейно обобщение.

Нека $A_1, A_2, \ldots, A_m$ е редица от последователни естествени числа и $A = \overline{A_1A_2 \ldots A_m}$ е числото, което се получава, като запишем последователно цифрите в десетичните им записи. Очевидно $S(A) = S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_m)$.

От изложеното малко по-горе очевидно следва

Твърдение 2. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_m$ е редица от m последователни естествени числа и $A = \overline{A_1A_2 \ldots A_m}$. Ако m се дели на 3 (на 9), тогава A и се дели на 3 (на 9).

НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ ПО МАТЕМАТИКА, 7. КЛАС

23 май 2013 г.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $15^2 - 5^2$ е равна на:

А) 10 **Б)** 20 **В)** 100 **Г)** 200

2. Стойността на израза $12 - (2,5 - b)$ при $b = -2,5$ е:

А) 7 **Б)** 8 **В)** 12 **Г)** 17

3. Ако $3 + k = 4$, то стойността на $k^2 + 6k + 9$ е:

А) 8 **Б)** 12 **В)** 16 **Г)** 17

4. Коренът на уравнението $5(2 - x) = -4$ е:

А) $-\frac{4}{5}$ **Б)** $\frac{14}{5}$ **В)** 6 **Г)** 14

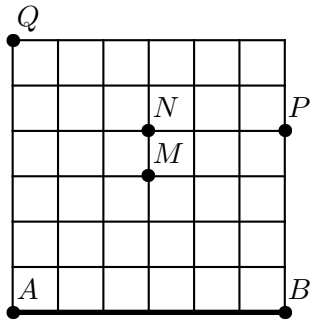
5. Кое от числата е решение на неравенството $37 + x < 5x - 7$?

А) 11,1 **Б)** 11 **В)** -11 **Г)** $-11,1$

6. В квадратната мрежа е начертана отсечката AB. Коя от посочените точки е връх на правоъгълен равнобедрен триъгълник с катет AB?

А) M **Б)** N

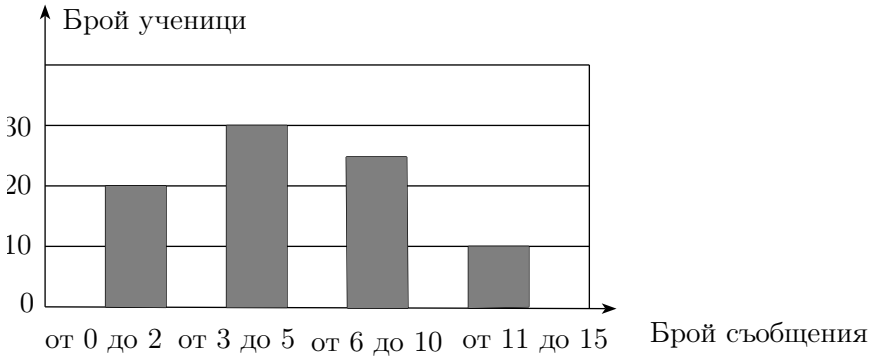
В) P **Г)** Q



7. Дължините на страните на триъгълник в сантиметри могат да са:

А) 2, 3 и 4 **Б)** 2, 3 и 5 **В)** 1, 2 и 3 **Г)** 1, 1 и 2

8. Диаграмата представя резултатите от изследване на броя кратки съобщения (SMS), които седмокласниците от едно училище изпращат ежедневно. Колко е възможният брой ученици, които изпращат повече от 5 съобщения дневно?



А) 25 **Б)** 30 **В)** 35 **Г)** 40

9. В 50 kg сплав има 40% сребро. Колко килограма е среброто в тази сплав?

А) 2 **Б)** 4 **В)** 20 **Г)** 40

10. Сборът на числата m и 4 намалили 5 пъти. Получили 0,5. Кое е числото m?

А) $-2,5$ **Б)** $-1,5$ **В)** $1,5$ **Г)** $6,5$

11. Тони имал x лева. Похарчил $\frac{2}{5}$ от тях и после дал на Иво 2 лв. и 50 ст. Парите, които са му останали, могат да се изразят в левове така:

А) $\frac{3}{5}x - 2,5$ **Б)** $\frac{2}{5}x + 2,5$ **В)** $\frac{2}{5}x - 2,5$ **Г)** $\frac{3}{5}x + 2,5$

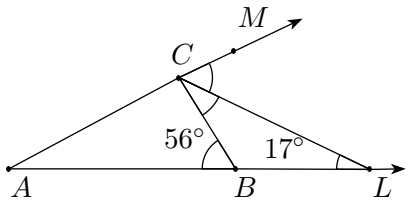
12. Кой израз е тъждествено равен на многочлена, отговарящ на следното описание? *Към втората степен на едночлена* $3n$ *е прибавено произведението на* n *и* 3.

А) $3(3n + 1)$ **Б)** $3n(n + 1)$ **В)** $3n(2n + 1)$ **Г)** $3n(3n + 1)$

13. Изразът $(a + 1)^3 - (a + 1)(a^2 - a + 1)$ е тъждествено равен на:

А) 0 **Б)** 2 **В)** $3a^2 + 3a + 2$ **Г)** $3a^2 + 3a$

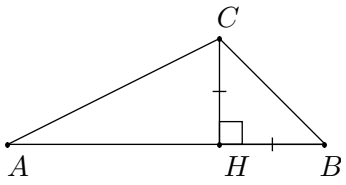
14. Точките B и C лежат на раменете на $\sphericalangle LAM$, като $\sphericalangle BCL = \sphericalangle MCL$. По данните от чертежа намерете мярката на $\sphericalangle LAM$.



А) 12° **Б)** 17°

В) 22° **Г)** 39°

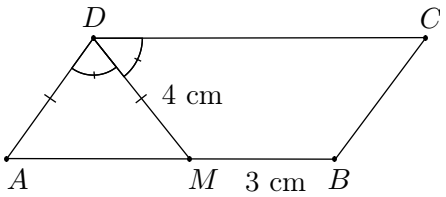
15. На чертежа $CH \perp AB$ и $BH = CH = \frac{1}{2}AC$. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е равна на:



А) 120° **Б)** 105°

В) 90° **Г)** 75°

16. На чертежа $ABCD$ е успоредник, DM е ъглополовяща и $AD = DM = 4$ cm. Ако $MB = 3$ cm, то периметърът на $MBCD$ в сантиметри е:



А) 14 **Б)** 18

В) 20 **Г)** 22

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Наем за зала се определя по формулата $y = 15x + 30$, където x е броят на часовете за ползване, а y е цената в левове. За колко часа най-много можете да наемете тази зала, ако имате 180 лв.?

18. В първата колона на таблицата последователно са изпълнени указания за привеждане на израза $4 - 4x^2 - 2x(x+2) + x$ в нормален вид. Попълнете празната колона, като следвате същите действия за израза $x + (1+2x)^2 - 3(x-1)$.

Указания

(А) Разкрий скобите.

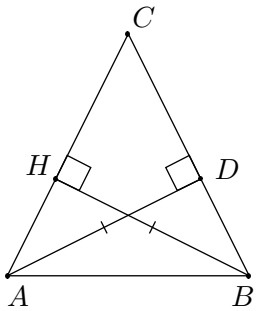
(Б) Направи приведение.

(В) Подреди едночлените по степените им.

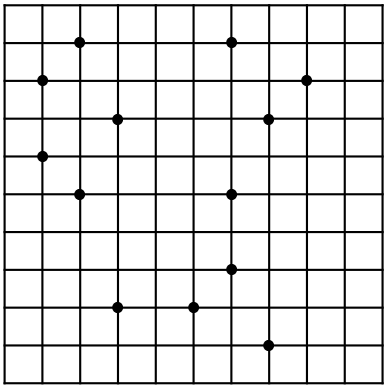
Приведете в нормален вид многочлена	
$4 - 4x^2 - 2x(x+2) + x$	$x + (1+2x)^2 - 3(x-1)$
$4 - 4x^2 - 2x^2 - 4x + x$	
$4 - 6x^2 - 3x$	
$-6x^2 - 3x + 4$	

19. В триъгълника ABC височините AD и BH са равни. Петър доказал, че $\triangle ABC$ е равнобедрен, но шест части от доказателството му липсват.

Във втората колона на таблицата запишете срещу всеки номер липсващия текст така, че доказателството да е вярно.



Доказателството на Петър:
Правоъгълните триъгълници ADC и ...(1)... са ...(2)..., защото: имат общ ъгъл при върха ...(3)... и катетът ...(4)... е равен на катета ...(5).... Следователно отсечките AC и BC са ...(6)..., т.е. $\triangle ABC$ е равнобедрен.



20. В квадратната мрежа начертайте три успоредника с ъгли, различни от 90°, всички върхове на които са някои от отбелязаните точки.

ВТОРИ МОДУЛ

21. НАБИРАНЕ НА ТЕКСТ

Вальо и Лъчо подготвят информация в електронен вид. Таблицата показва броя символи, които всеки от тях набира за определено време.

	Брой символи	Определено време (секунди)
Вальо	20	12
Лъчо	35	28

А) За колко секунди Вальо ще набере 90 символа, ако набира със същото темпо?

Б) Изразете като несъкратима дроб отношението на броя символи към определеното време (секунди) за всеки от двамата и сравнете получените дроби. Отговорът запишете, като препишете и допълните изреченията.

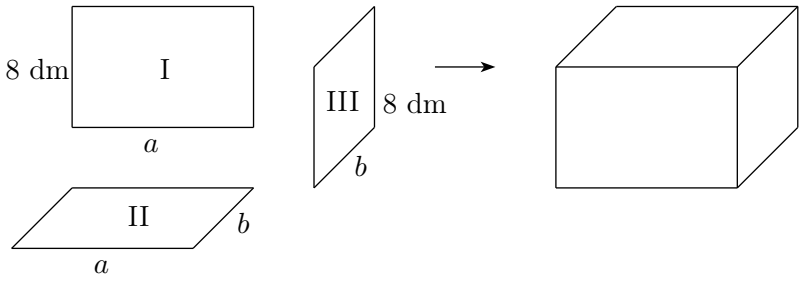
При Вальо отношението е равно на ..., а при Лъчо то е равно на .... По-голяма е дробта ....

22. АКВАРИУМ

Майстор Андрей изработва аквариуми с форма на правоъгълен паралелепипед, като разполага с три вида стъклени листове. За всеки аквариум задължително използва от всеки вид, без да ги реже. На схемата са показани трите вида листове и един от възможните начини за използването им като съседни стени. Лицето на лист (I) е 72 dm^2, а лицето на лист (II) е 36 dm^2.

А) Намерете стойностите на a и b в дециметри.

Б) Един от аквариумите трябва да е без капак (отворен отгоре). Майстор Андрей иска да използва възможно най-малко квадратни дециметра стъкло. Той съобразил, че това зависи от избора на лист за дъно. Кой от листовете (I), (II) или (III) трябва да избере за дъно на аквариума?



В) Андрей иска да направи аквариум, който да събира най-много вода. Водата, която се налива в аквариума, достига до 1 dm под горния ръб. Кой лист трябва да избере за дъно в този случай?

Отговорете, като препишете изреченията и ги попълните.

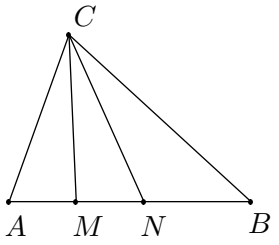
Обемът на водата, ако избере за дъно
лист (I), е ... dm^3;
лист (II), е ... dm^3;
лист (III), е ... dm^3.
Следователно за дъно трябва да избере лист (...).

На задачи 23. и 24. напишете пълните решения с необходимите обосновки.

23. Решете уравненията $\dfrac{(3x-1)^2}{4} - \dfrac{1}{4}\cdot(3x-1) = 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+1$ и $9-|x-9|=9$.

Еквивалентни ли са тези уравнения? Обосновете отговора си?

24. Даден е $\triangle ABC$ със страна $AC = 7$ cm и $\sphericalangle ABC = 25°$. Върху страната AB точките M и N са такива, че $AM = MN$, $BC = 2CM$ и $\sphericalangle MCN = \sphericalangle NCB = \alpha$. Ако K е средата на BC, обосновете, че $\triangle AMC \cong \triangle NKB$. Изразете ъглите на $\triangle ANC$ чрез α и намерете дължината на страната AB.



ОТГОВОРИ

1. Г; **2.** А; **3.** В; **4.** Б; **5.** А; **6.** Г; **7.** А; **8.** В; **9.** В; **10.** Б; **11.** А; **12.** Г; **13.** Г; **14.** В; **15.** Б; **16.** Б; **17.** 10; **18.** а) $x+1+4x+4x^2-3x+3$; б) $2x+4+4x^2$; в) $4x^2+2x+4$; **19.** (1) BHC; (2) $\cong$; (3) C; (4) AD; (5) BH; (6) равни; **21.** а) 54; б) $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{5}{3}$; **22.** а) $a=9$, $b=4$; б) (I); в) 216, 252, 256, (III).

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ 23 И 24

23. Решаваме първото уравнение и получаваме $\frac{(3x-1)^2}{4} - \frac{1}{4}\cdot(3x-1) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+1 \iff \frac{9x^2-6x+1}{4} - \frac{3x-1}{4} = 2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)+1 \iff 9x^2-6x+1-3x+1 = 8x^2-2 \iff x^2-9x=0 \iff x(x-9)=0$, откъдето $x_1 = 0$ и $x_2 = 9$. Решаваме уравненнието $9-|x-9| = 9 \iff |x-9| = 0$ и получаваме $x = 9$. Следователно двете уравнения не са еквивалентни, защото първото уравнение има два корена, а второто един.

24. Построяваме средата K на BC. Понеже $\sphericalangle ANC$ е външен за $\triangle NBC$, то $\sphericalangle ANC = \alpha+25^\circ$. Триъгълниците MNC и NKC са еднакви ($\sphericalangle MCN = \sphericalangle NCK = \alpha$, $MC = CK = \frac{1}{2}BC$ и CN – обща страна). Тогава $AM = MN = NK$ и $\sphericalangle MNC = \sphericalangle CNK = \alpha+25^\circ$. Триъгълниците AMC и NKB са еднакви, защото $AM = NK$, $CM = BK = \frac{1}{2}BC$ и $\sphericalangle AMC = \sphericalangle NKC = 2\alpha+25^\circ$. Тогава $\sphericalangle ACM = \sphericalangle NBC = 25^\circ$. Получихме, че ъглите на $\triangle ANC$ са $\sphericalangle ACN = \sphericalangle ANC = \alpha+25^\circ$ и $\sphericalangle NAC = 180^\circ - 2(\alpha+25^\circ) = 130^\circ - 2\alpha$. Триъгълникът ANC е равнобедрен ($AC = AN$). Тогава $AB = AN+NB = 2AC = 14$ cm.

ВЪТРЕШЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В НПМГ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ“

Мариана Кьосева, Илия Костов

На 2 юни 2013 г. се проведе вътрешният профилиращ изпит по математика за прием на ученици след седми клас в НПМГ. Изпитът включва десет задачи, като пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Времето за работа е 4 астрономически часа. Оценките се получават по формулата $2 + 0,1.T$, където T е броят на точките. На изпита тази година се явиха 457 ученика от цялата страна. От подготвените два изпитни варианта беше изтеглен вариант 2. Резултатите бяха следните: 38 отлични оценки, 127 оценки много добър, 172 оценки добър, 66 оценки среден и 54 слаби оценки. Графичното представяне на резултатите показва, че те са разпределени нормално, т.е. темата е добре балансирана.

Предлагаме ви задачите, които бяха дадени на вътрешния изпит по математика в НПМГ, както и техните примерни решения.

Задача 1. Решете уравнението $\dfrac{x(x+3)}{2} = x - \dfrac{(3x-1)(2-x)}{6}$.

Решение. Преобразуваме уравнението и получаваме
$3x(x+3) = 6x - (3x-1)(2-x) \iff 3x^2 + 9x = 6x - 6x + 3x^2 + 2 - x \iff 10x = 2 \iff x = \dfrac{1}{5}$.

Задача 2. Решете уравнението $\Big|4 - |x|\Big| = A$, където $A = \dfrac{(-2)^{2013} + 5.2^{2012}}{2^{2011} + 4^{1005}}$.

Решение. Намираме стойността на $A = \dfrac{2^{2012}.(-2+5)}{2^{2010}.(2+1)} = 4$. Тогава уравнението добива вида $\Big|4 - |x|\Big| = 4$, което е еквивалентно с $4 - |x| = 4$ или $4 - |x| = -4$. От тези уравнения намираме $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ и $x_3 = -8$.

Задача 3. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $(2-x)^3 - x(3-x)(3+x) - \dfrac{2(3x+1)^2+1}{3} < 27$.

Решение. Решаваме неравенството и получаваме

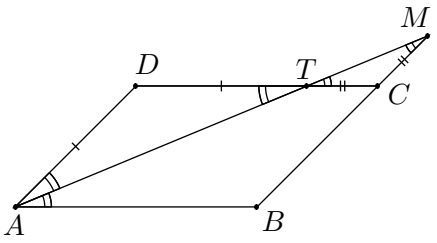
$8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 9x + x^3 - \dfrac{18x^2+12x+3}{3} < 27 \iff$

$8 - 12x + 6x^2 - 6x^2 - 4x - 1 < 27 \iff -25x < 20 \iff x > -0,8.$

Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството, е 0.

Задача 4. Даден е успоредникът $ABCD$. Ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$ пресича страната CD в точка T и продължението на страната BC в точка M. Ако $DT = 5$ см и $CM = 2$ см, намерете периметъра на $ABCD$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAT = \sphericalangle DAT = \alpha$, тогава от $(AB \parallel DC) \cap AT \Rightarrow \sphericalangle BAT = \sphericalangle ATD = \alpha$ (кръстни ъгли). Тъй като $\triangle ADT$ е равнобедрен, то $AD = DT = 5$ см. От $\sphericalangle CTM = \sphericalangle ATD = \alpha$ (върхни ъгли) и $\sphericalangle DAT = \sphericalangle BMA = \alpha$ (кръстни ъгли) следва, че $\triangle TCM$ е равнобедрен, т.е. $TC = CM = 2$ см. Така $P_{ABCD} = 2.5 + 2.7 = 24$ см.

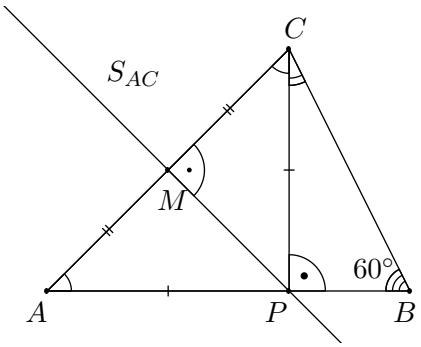


Задача 5. За да изоре дадена площ в определен срок, тракторист трябвало да изорава по 20 декара на ден. Той решил да изорава с 20% повече от определената норма и в резултат на това 3 дни преди определеното време изорал $\dfrac{4}{5}$ от цялата площ. Да се намери колко декара е цялата площ.

Решение. Нека определеното време по план е x дни, тогава времето в действителност е $x - 3$ $(x > 3)$. Тъй като нормата в действителност е 24 декара на ден, то работата, която е свършена в действителност, е $24(x-3)$, а работата по план е $20x$. Така съставяме уравнението $24(x-3) = \dfrac{4}{5}.20x \iff 120(x-3) = 80x \iff 40x = 360 \iff x = 9$ дни. Следователно цялата площ е $20.9 = 180$ декара.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ABC = 60°$. През средата M на AC е построен перпендикуляр към AC, който пресича AB в точка P така, че $\sphericalangle ACP : \sphericalangle PCB = 3 : 2$. Ако $BP = 3$ см, намерете дължината на страната BC.

Решение. Нека $\sphericalangle ACP = 3\alpha$, тогава $\sphericalangle PCB = 2\alpha$. Тъй като $P \in S_{AC}$, то $AP = PC$ и $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA = 3\alpha$. От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC$ имаме, че $8\alpha + 60^\circ = 120^\circ$, т.е. $\alpha = 15^\circ$. Тогава $\sphericalangle BCP = 30^\circ$ и $\sphericalangle BPC = 90^\circ$. От правоъгълния $\triangle BPC$ с $\sphericalangle BCP = 30^\circ$ имаме, че $BC = 2.BP = 6$ см.



Задача 7. Решете уравнението $(1-2a)^2x - a^2(4x-5) = 0$, където a е параметър. Намерете за кои стойности на a то има положителен корен.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение и получаваме $(1-4a+4a^2)x - 4a^2x + 5a^2 = 0 \iff x - 4ax + 4a^2x - 4a^2x + 5a^2 = 0 \iff (1-4a)x = -5a^2$.

При $a \neq \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{5a^2}{4a-1}$. При $a = \frac{1}{4}$, $0x = -\frac{5}{16}$, т.е. уравнението няма решение. Следователно уравнението има положителен корен, когато $x_1 > 0 \Leftrightarrow 4a - 1 > 0$ и $a \neq 0$, т.е. $a > \frac{1}{4}$.

Задача 8. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) и точка O е вътрешна за триъгълника. През точката O е построена права m, успоредна на BC, която пресича AC в точка M и AB в точка K. Ако $ON \perp BC$ ($N \in BC$), $OM = ON$ и $\sphericalangle CAN = \sphericalangle BNK$, намерете ъглите на $\triangle ANK$.

Решение. От $(m \parallel BC) \cap AC \Rightarrow \sphericalangle CMO = 90^\circ$. Тъй като $\sphericalangle MCN = \sphericalangle ONC = \sphericalangle OMC = 90^\circ$, то $MONC$ е правоъгълник, но по условие $MO = NO$, т.е. $MONC$ е квадрат и $CN = CM$.

От $(m \parallel BC) \cap NK$ следва $\sphericalangle OKN = \sphericalangle KNB = \alpha$ (кръстни ъгли). От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ANC$ имаме, че $\sphericalangle ANC = 90^\circ - \alpha$, т.е. $\sphericalangle ANK = 90^\circ$.

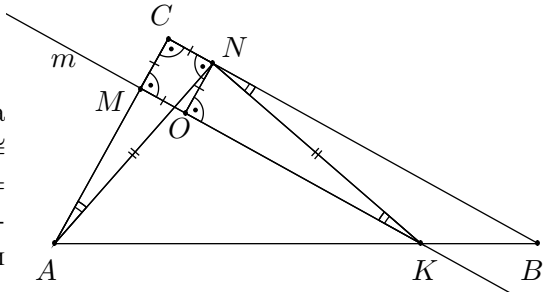
Разглеждаме $\triangle ACN$ и $\triangle KON$:

1) $ON = CN$

2) $\sphericalangle CAN = \sphericalangle OKN = \alpha$

3) $\sphericalangle ACN = \sphericalangle KON = 90^\circ$.

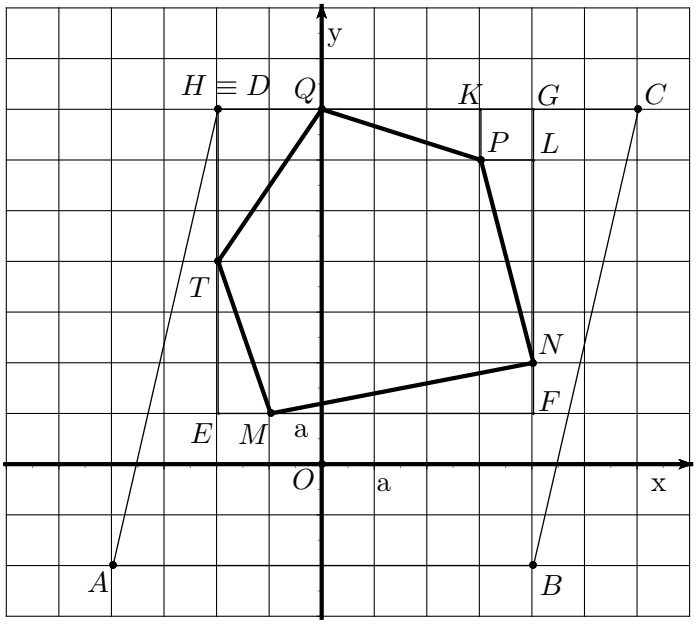
По втори признак за еднаквост на триъгълници следва, че $\triangle ACN \cong \triangle KON$. Следователно $AN = NK$, т.е. $\triangle ANK$ е равнобедрен правоъгълен триъгълник и $\sphericalangle NAK = \sphericalangle NKA = 45^\circ$.



Задача 9. В координатна система с единична отсечка a см са дадени точките M, N, P, Q и T, както е показано на чертежа. Лицето на петоъ-

гълника $MNPQT$ е 98 см^2. Намерете a и пресметнете лицето на четириъгълника, чиито върхове са точките $A(-4a;-2a)$, $B(4a;-2a)$, $C(6a;7a)$ и $D(-2a;7a)$.

Решение. Нека „опаковаме“петоъгълника $MNPQT$ с квадрата $EFGH$, както е показано на чертежа.



Тогава можем да изразим лицето на петоъгълника по следния начин:

$$S_{MNPQT} = S_{EFGH} - (S_{TEM} + S_{MNF} + S_{NLP} + S_{PLGK} + S_{KPQ} + S_{QTH}) =$$

$$= 6a^2 - \Big(\frac{3a^2}{2} + \frac{5a^2}{2} + \frac{4a^2}{2} + a^2 + \frac{3a^2}{2} + \frac{6a^2}{2}\Big) = 36a^2 - \frac{23a^2}{2} = \frac{49a^2}{2}.$$

От $\dfrac{49a^2}{2} = 98$ получаваме, че $a^2 = 4$, т.е. $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2) = 0$, но a е дължина на отсечка и затова $a = 2$ см.

Точките A и B, както точките C и D, имат еднакви ординати, затова отсечките AB и CD са успоредни на абсцисната ос. За дължините им намираме $AB = CD = 8a$. Следователно четириъгълникът $ABCD$ е успоредник и лицето му е $8a.9a = 72a^2$. При намерената стойност $a = 2$ см, това лице е 288 см^2.

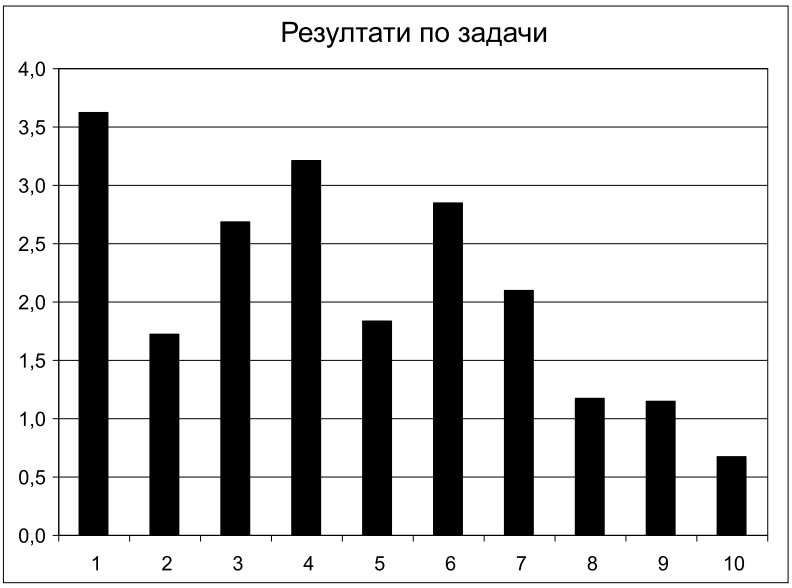
Задача 10. Ако x, y и z са цели положителни числа такива, че $x < y < z$ и $x^3 + x^2z + x^2y + xyz + x^2 + xz + yz + xy = 2013$, намерете x, y и z.

Решение. Разлагаме лявата страна на уравнението на множители и получаваме $x^2(x+z) + xy(x+z) + x(x+z) + y(x+z) = 2013 \iff$

$x(x+z)(x+y)+(x+z)(x+y)=2013 \iff (x+1)(x+y)(x+z)=3.11.61$. Тъй като $1 \leqq x<y<z$ по условие, то $x+1<x+y<x+z$. Следователно уравнението има решение, точно когато $x+1=3$, т.е. $x=2$ и $x+y=11$, т.е. $y=9$ и $x+z=61$, т.е. $z=59$.

Средни резултати по задачи

Задача	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Общо
Точки	3.6	1.7	2.7	3.2	1.8	2.9	2.1	1.2	1.2	0.7	21.1



Както се вижда от таблицата и графиката, седмокласниците се справиха най-добре със задачи 1, 4 и 6. Те са решени напълно или с дребни пропуски от около 60% от кандидатите. Най-трудни се оказаха последните три задачи, което е естествено, тъй като тяхната цел е да открои най-добрите кандидати. Намираме за добър резултата, че те са решени от около 13% от явилите се на изпита.

Можем накратко да обобщим постиженията и проблемите на седмокласниците при работата по тази изпитна тема. Основните знания и умения за решаване на уравнения, неравенства и несложни геометрични задачи са добре овладени. Част от пропуските се дължат на нетрайност и незадълбоченост на знанията, което се вижда най-вече в работите по задачите, изискващи прилагане на знания по теми, изучавани в предходните класове. Друга част от пропуските са в неумението да се аргументират решенията, което води или до непълни решения, или до грешки в разсъжденията и резултатите.

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

В тази рубрика Ви предлагаме теста за държавен зрелостен изпит, проведен на 23 май 2013 г.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Най-малко е числото:

А) $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ **Б)** 1 **В)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-0,5}$ **Г)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{0,5}$

2. Стойността на израза $\frac{x+3}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{x-2013}{x+3}$ за $x=2013$ е равна на:

А) 2 **Б)** 1 **В)** 0 **Г)** -2013

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ са:

А) $(-\infty;\infty)$ **Б)** $[0;\infty)$

В) $(-\infty;0]$ **Г)** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

4. Числото $\log_2 3$ е корен на уравнението:

А) $3^x=2$ **Б)** $2^x=3$ **В)** $3^x=\frac{1}{2}$ **Г)** $2^x=\frac{1}{3}$

5. На кое от уравненията сборът от реалните корени е 2,5?

А) $2x^2-5x+5=0$ **Б)** $2x^2-5x+3=0$

В) $2x^2-2x+5=0$ **Г)** $2x^2+5x-3=0$

6. Решенията на неравенството $x^2-2x+3>0$ са:

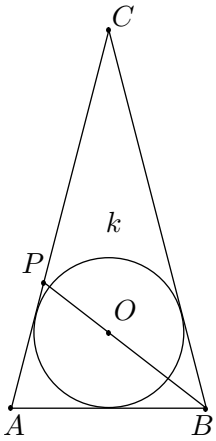
А) $x\in\emptyset$ **Б)** $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

В) $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ **Г)** $(-\infty;\infty)$

7. Стойността на $\sin 240^\circ$ е:

А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е вписана окръжност k с център O. Лъчът $BO^{\rightarrow}$ пресича страната AC в точка P, като $AP = 6$ cm и $PC = 12$ cm. Периметърът на $\triangle ABC$ е:



А) 72 cm **Б)** 45 cm

В) 9 cm **Г)** не може да се определи

9. В $\triangle ABC$ страната $AB = 7$ cm, а $AC = 5$ cm. Ако $\sphericalangle ACB = 120°$, то дължината на страната BC е:

А) 3 cm **Б)** 6 cm

В) $\sqrt{39}$ cm **Г)** 8 cm

10. Ако общият член на числова редица е $a_n = (-1)^{n+1}(n+1) - 3(-1)^n$, то a_{13} е равен на:

А) -16 **Б)** -11 **В)** 10 **Г)** 17

11. Дадена е крайна геометрична прогресия с $a_1 = 729$, $q = \frac{1}{3}$ и $a_n = \frac{1}{9}$. Броят n на членовете на прогресията е:

А) 5 **Б)** 7 **В)** 8 **Г)** 9

12. Наредените двойки числа $(x; y)$, които са решения на системата $\left| \begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{array} \right.$, са разположени:

А) само в I квадрант **Б)** само в IV квадрант

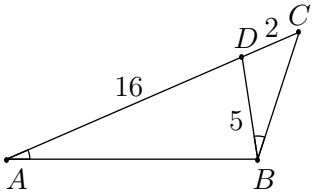
В) във II и в IV квадрант **Г)** в I и в III квадрант

13. Разходите на фирма за един месец са 18 000 лв. Тяхното разпределение е представено чрез кръговата диаграма. Ако $\sphericalangle AOB = 170°$ и $\sphericalangle BOC = 64°$, то разходите за заплати са:

А) 3200 лв. **Б)** 6000 лв.

В) 6300 лв. **Г)** 8500 лв.

14. На страната AC на $\triangle ABC$ е взета точка D, така че $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CAB$. Ако $AD = 16$ cm, $DC = 2$ cm и $BD = 5$ cm, то дължината на страната AB е равна на:



А) 6 cm **Б)** 15 cm **В)** $\frac{55}{3}$ cm **Г)** 36 cm

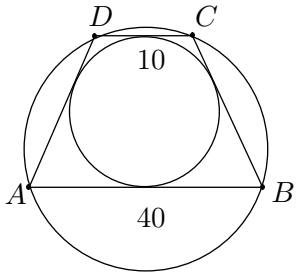
15. За $\triangle ABC$ е дадено, че $AB = 5$ и $\sin \sphericalangle CAB : \sin \sphericalangle CBA = 3 : 2$. Ако $AC^2 + BC^2 = 117$, то периметърът на триъгълника е:

А) 20 **Б)** 18 **В)** $5 + 3\sqrt{17}$ **Г)** $5 + 3\sqrt{85}$

16. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник има дължина 6 cm и сключва с един от катетите ъгъл 30°. Лицето на триъгълника е:

А) 18 cm^2 **Б)** 36 cm^2 **В)** $24\sqrt{3}$ cm^2 **Г)** $48\sqrt{3}$ cm^2

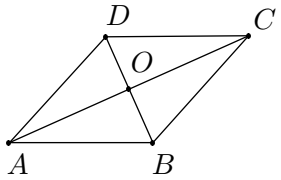
17. Около трапеца $ABCD$ с основи $AB = 40$ cm и $CD = 10$ cm е описана окръжност. Ако в трапеца е вписана окръжност, то дължината на нейния радиус е:



А) 10 cm **Б)** 15 cm

В) 20 cm **Г)** друг отговор

18. Дължината на единия диагонал на ромб е 75% от дължината на другия, а лицето му е 24 cm^2. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е:



А) 8 cm **Б)** 6 cm

В) 4,8 cm **Г)** 2,4 cm

19. В $\triangle ABC$ страната $AB = 8$, $AC = 15$ и $\sphericalangle BAC = 60°$. Височината AH ($H \in BC$) на триъгълника е:

А) $\frac{60}{13}$ **Б)** $\frac{60\sqrt{3}}{13}$ **В)** $\frac{60\sqrt{3}}{7}$ **Г)** $\frac{120\sqrt{3}}{13}$

20. Колко са трицифрените четни числа с различни цифри, цифрата на десетиците на които е нула?

А) 32 **Б)** 36 **В)** 45 **Г)** 72

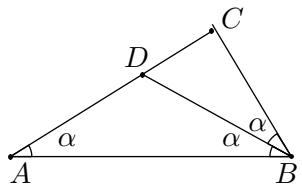
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете решенията на неравенството $(x + 6)(36 - x^2) \leqq 0$.

22. Да се реши уравнението $\frac{x}{2 - x} + \frac{x + 4}{x^2 - x - 2} = 2$.

23. В серия от 30 опита участник в стрелба по цел е получил 13,5 наказателни точки. Колко попадения е реализирал участникът, ако за първия пропуск наказанието е една точка, а всеки следващ пропуск се наказва с половин точка повече от предходното наказание?

24. Коефициентът c на квадратното уравнение $x^2-2x+c=0$ е цяло число от интервала $[-2;3]$. Каква е вероятността уравнението да има реални корени?



25. Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща BD. Ако $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$, $AC = 3CD = 18$, намерете S_{ABC}.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Намерете корените на уравнението $x^2-2x=t$, където t е решение на уравнението $\sqrt{t+1}-\sqrt{2t-5}=1$.

27. Да се докаже, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то е изпълнено тъждеството $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

28. В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата AM ($M \in BC$) и височината CH ($H \in AB$) са съответно равни на $6\sqrt{5}$ cm и 12 cm. Ако страната $BC = 20$ cm, намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Отговори

1. В); **2.** В); **3.** Г); **4.** Б); **5.** Б); **6.** Г); **7.** А); **8.** Б); **9.** А); **10.** Г); **11.** Г); **12.** В); **13.** В); **14.** Б); **15.** А); **16.** В); **17.** А); **18.** Г); **19.** Б); **20.** А); **21.** $x \in [6;\infty) \cup \{-6\}$; **22.** $x = -\frac{4}{3}$; **23.** 24; **24.** $\frac{2}{3}$; **25.** $S_{ABC} = 54\sqrt{3}$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Ирационалното уравнение записваме във вида $\sqrt{t+1} = \sqrt{2t-5}+1$, повдигаме двете му страни на квадрат и получаваме $t+1 = 2t-5+1+2\sqrt{2t-5} \iff 5-t = 2\sqrt{2t-5}$. Отново повдигаме на квадрат и получаваме $25-10t+t^2 = 8t-20 \iff t^2-18t+45=0$, откъдето $t_1=15$, $t_2=3$. Но $t_1=15$ не е решение на даденото уравнение. Остава да решим уравнението $x^2-2x=3$; корените му са $x_1=3$, $x_2=-1$.

27. Като използваме, че $\alpha+\beta = 180^\circ-\gamma$, преобразуваме $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

28. По Питагоровата теорема за $\triangle HBC$ намираме $HB = \sqrt{20^2-12^2} = 16$ cm; $\sin\sphericalangle B = 0,6$, $\cos\sphericalangle B = 0,8$. По косинусовата теорема за $\triangle ABM$ имаме $(6\sqrt{5})^2 = AB^2+10^2-2.AB.10.0,8$, откъдето $AB = 20$ cm. Тогава $AH = 4$ cm и от Питагоровата теорема за $\triangle AHC$ получаваме, че $AC = 4\sqrt{10}$ cm. По синусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме $R = \frac{4\sqrt{10}}{2.\frac{3}{5}} = \frac{10\sqrt{10}}{3}$.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2013/14 г. при следните условия:

Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. Наредената n-орка от естествени числа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ се нарича “добра„ ако $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$ и за всяко k, $1 \leqq k \leqq n$ сборът на всеки k от дадените числа не е равен на n. Да се намерят всички добри n-орки.

Задача 2. Подмножествата $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ са такива, че за всеки $1 \leqq i_1, i_2, i_3, i_4 \leqq k$ е изпълнено

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leqq n - 2.$$

Да се докаже, че $k \leqq 2^{n-2}$.

Задача 3. С $n(r)$ означаваме броят на точките с цели координати върху кръг с радиус $r > 1$. Да се докаже неравенството $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Срокът за представяне на решенията е 30.11.2012 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 3/2013 г.

Задача 1. Дадена е редицата $x_1 = 4, x_2 = 6$, а x_n, при $n \geqq 3$ е равен на най-малкото съставно число, което е по-голямо от $2x_{n-1} - x_{n-2}$. Да се намери x_{1000}.

Решение. С индукция по $n \geqq 4$ ще докажем, че $x_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$. Тъй като $x_3 = 9$ и $x_4 = 14 = \dfrac{4.7}{2}$, то имаме база на индукцията. Нека твърдението е вярно за $x_4, x_5, \ldots, x_n$. Тъй като $2x_n - x_{n-1} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$ и

по условие x_{n+1} е първото съставно число, по-голямо от $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-1$, то $x_{n+1}=\frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Оттук $x_{1000}=500.1003=501500$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AC=b$ и $BC=a$. Външно за триъгълника на страната AB е построен квадрат с център O. Ако M и N са средите на страните AC и BC, да се намери максимума на сбора $OM+ON$, когато ъгъл ACB се мени.

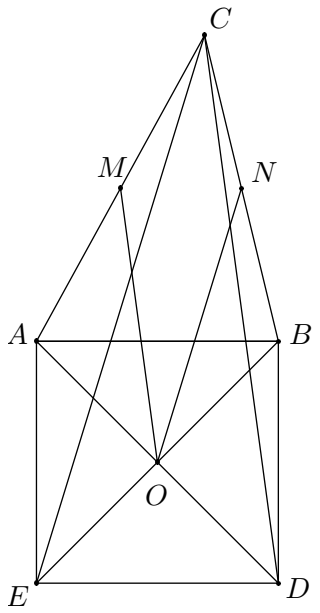
Решение. При стандартните означения за елементите на триъгълника ABC, нека квадратът е $ABDE$ и $d=CD$ и $e=CE$. Тъй като OM и ON са средни отсечки съответно в триъгъниците ACD и BCE, то $CD+CE=2(OM+ON)$. Следователно търсим максимума на $CD+CE=d+e$. От косинусовата теорема за $\triangle AEC$ имаме

$$e^2=b^2+c^2-2bc\cos(90^\circ+\alpha)b^2+c^2+2bc\sin\alpha$$

и след заместване $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ и $c\sin\alpha=a\sin\gamma$, намираме

$$e^2=2b^2+a^2+2ab(\sin\gamma-\cos\gamma).$$

Аналогично $d^2=2a^2+b^2+2ab(\sin\gamma-\cos\gamma)$ и следователно най-голямата стойност на e и d се достигат едновременно при максимум на $\sin\gamma-\cos\gamma$. Този максимум се достига при $\gamma=135^\circ$ (Докажете!) и следователно търсеният максимум е равен на $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.



Задача 3. Да се докаже, че за всяко $k>1$ съществува число n, което е степен на двойката със следното свойство: измежду последните k цифри на n не по-малко от половината са деветки.

Решение. С индукция по k ще покажем, че $2^{2.5^{k-1}}+1$ се дели на 5^k. За $t=4^{5^{k-1}}$ имаме

$$2^{2.5^k}+1=4^{5^k}+1=t^5+1=(t+1)(t^4-t^3+t^2-t+1).$$

Тъй като според индукционното допескане изразът в първите скоби се дели на 5^{k-1} и $t\equiv -1 \pmod 5$ (което означава, че изразът във вторите скоби се дели на 5), то $2^{2.5^k}+1$ се дели на 5^k. Лесно се вижда, че числото $2^k(2^{2.5^{k-1}}+1)$ завършва на поне k нули и че при $k>1$ броят на цифрите на 2^k е не по-голям от $\frac{k}{2}$. Оттук следва и твърдението на задачата.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2013 г. и бр. 1, 2 от 2014 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2014 г. При равен брой точки от очния кръг за крайното класиране се вземат и резултатите от задочния кръг. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. На дъската са написани 9 последователни трицифрени числа, като нито в едно от тях не участва цифрата 0. След това записали произведението на цифрите на всяко от тях и събрали тези произведения. Възможно ли е да се получи сбор 2013? А 1125?

Задача 2. Всеки елемент на множеството $A = \{5, 6, 7, \ldots, 74, 75\}$ е оцветен по следното правило: ако някое число от A е оцветено в някакъв цвят, то и всеки негов делител, който е от A, е оцветен в същия цвят. Какъв е максималният брой цветове, които могат да се използват при това оцветяване?

Задача 3. Нека m и n са две естествени числа, такива че $m + n$ е нечетно число. Да се докаже, че $13^m + 13^n$ може да се представи като сбор от два точни квадрата.

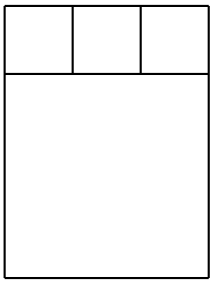
Срокът за представяне на решенията е 30.11.2013 г.

за по-малките задачи

Невена Събева

4. клас

61. Девет изследователи планират 12-дневен преход между два оазиса в пустиня. Те трябва да наемат носачи, а местните носачи могат да носят толкова храна и вода, колкото са необходими на един човек за 15 дни. Колко носачи трябва да наемат изследователите (самите те не носят храна и вода)?



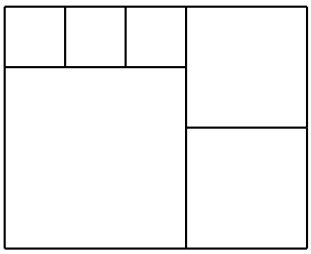
62. Пресметнете $A = 35.7 + 37.7 + 72.3$ и намерете $B = A : 2 + A : 3 + A : 4 + A : 5 + A : 6$.

63. Правоъгълникът на чертежа е съставен от четири квадрата. Ако обиколката на най-големия от тях е 552 см, да се намери обиколката на целия правоъгълник.

64. Ако днес изям два пъти повече бонбони, отколкото вчера, ще ми останат точно 10 бонбона за утре. Но ако днес изям с 5 бонбона повече, отколкото вчера, за утре ще ми останат 17 бонбона. Колко бонбона имам в момента?

5. клас

65. Пресметнете $A = (63.56) : 9$, $B = (2015 : 15).3$ и $C = (71170 : 5) : 2$. Колко пъти числото C е по-голямо от разликата $B - A$?



66. Правоъгълникът на чертежа е съставен от шест квадрата. Ако по-голямата страна на правоъгълника е 60 см, да се намери лицето му.

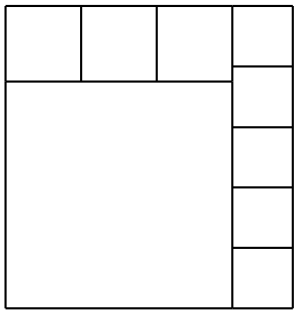
67. За три дена две буболечки събрали сто тънки клечки. За колко дни три буболечки ще съберат 250 тънки клечки?

68. Пътешественик изминал 600 км за три дни. Отначало се движел бързо и затова първия ден изминал два пъти по-дълго разстояние, отколкото втория ден, и с 5 км повече, отколкото третия ден. По

колко километра е изминавал пътешественикът във всеки от трите дни?

6. клас

69. Правоъгълникът на чертежа е съставен от девет квадрата. Ако обиколката на правоъгълника е 234 см, да се намери лицето му.



70. Да се намери неизвестното число x от равенството

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}}{1\frac{1}{5}}=\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{19}.$$

71. Турист извървял определен маршрут за два дни. През първия ден изминал 40% от маршрута, а втория ден – с 12 км повече. Колко километра е маршрутът?

72. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC = 24$ см). Височината през върха C е с 20% по-голяма от височната през върха A. Да се намери обиколката на триъгълника.

7. клас

73. Даден е правоъгълникът $ABCD$ с обиколка 60 см и отношение на страните $AD : AB = 5 : 7$.

а) Да се намери лицето на правоъгълника.

б) Да се намери лицето на триъгълника AEF, където точката E лежи на страната CD, а точката F дели страната AB в отношение $AF : FB = 2 : 5$.

74. Ако $a = \dfrac{(-4^2)^3.(-27)^2}{(2.6^2)^3}$, да се намери коренът на уравнението $(1 - 50a)x = 2013 + a$.

75. През август в един магазин обявили разпродажба. Цената на един от моделите летни обувки била намалена с 25%. В резултат на това намаление през август продали с 400 чифта от този модел обувки повече, отколкото през юли. Оказало се, че приходите от продажбата на този модел през юли и през август са равни. Да се определи общо колко чифта от летния модел обувки са продадени през двата месеца.

за по-малките решения

на задачите от бр. 4/2013

46. Когато Стефан отворил учебника по математика, произведението на номерата на отворените страници било 3306. Кой е номерът на страницата вдясно?

Решение. Като вземем предвид, че $3306 = 57.58$, заключаваме, че страницата вдясно има номер 58.

47. Петър живее далеч от училище, но понякога отива или се връща от училище пеша. Той забелязал, че ако пътува с автобус в двете посоки му трябват 40 минути, а ако използва автобус само в едната посока — час и половина. Колко време му трябва, за да измине пеша разстоянието от къщи до училището и обратно?

Решение. Щом Петър е изминавал разстоянието в двете посоки с автобус за 40 минути, в едната посока ще е пътувал 20 минути. Тъй като, пътувайки с автобус и пеша, са му необходими час и половина, то Петър пътува в едната посока пеша 1 час и 10 минути. Следователно Петър пътува пеша в двете посоки 2 часа и 20 минути.

48. В конкурс по танци се състезават 22 танцови двойки (една танцова двойка се състои от дама и кавалер). Дамите, които са танцували с червени рокли, са 2 пъти повече от дамите с жълти рокли, а те са с 2 повече от дамите с бели рокли. На колко от кавалерите дамите са танцували с червени рокли?

Решение. Ако дамите с жълти рокли са a, то тези с бели рокли са $a-2$, а с червени $2a$. Тогава $4a-2=22$, откъдето $a=6$. Тогава дамите с червени рокли са 12.

49. От две села един срещу друг тръгнали двама велосипедисти — единият със скорост 20 километра в час, а другият със скорост 15 километра в час. Какво ще бъде разстоянието между тях 2 часа преди срещата им?

Решение. Тъй като велосипедистите се движат един срещу друг, те за два часа ще са на разстояние $(20+15).2 = 70$ км.

50. Разполагаме с 5 пакета. Първият и вторият заедно тежат 12 кг, вторият и третият заедно тежат 13,5 кг, третият и четвъртият тежат общо 11,5 кг, четвъртият и петият тежат общо 8 кг. Общото тегло на първия, третия и петия пакет е 16 кг. Колко тежи всеки пакет?

Решение. Означаваме теглото на пакетите съответно с I, II, III, IV и V. По условие $\mathrm{I}+\mathrm{II}=12$, $\mathrm{II}+\mathrm{III}=13{,}5$, $\mathrm{III}+\mathrm{IV}=11{,}5$, $\mathrm{IV}+\mathrm{V}=8$ и

I + III + V = 16. Събираме равенствата и получаваме

$$2.\text{I} + 2.\text{II} + 3.\text{III} + 2.\text{IV} + 2.\text{IV} = 61.$$

Но 2.I + 2.II + 2.IV + 2.V = 40. Тогава 3.III = 21, т. е. третият пакет тежи 7 кг, вторият 6,5 кг, първият 5,5 кг, четвъртият 4,5 кг и петият 3,5 кг.

51. Да се намерят две естествени числа, ако едното от тях е по-голямо от другото със 120 и е известно, че ако сборът на тези две числа се раздели на разликата им, се получава частно 5 и остатък 24.

Решение. Тъй като разликата на двете числа е 120, то сборът им е $120.5 + 24 = 624$. Тогава по-голямото число е $624 : 2 + 120 : 2 = 312 + 60 = 372$, а по-малкото $372 - 120 = 252$.

52. Да се намери сборът от цифрите на естественото число $\overline{abcde}$, ако числото $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea}$ е точен квадрат.

Решение. По условие имаме $10a+b+10b+c+10c+d+10d+e+10e+a = 11(a+b+c+d+e)$. Произведението $11(a+b+c+d+e)$ е точен квадрат, когато $a+b+c+d+e = 11.k^2$ за някое естествено число k. Тъй като $a+b+c+d+e \leqq 45$, то $a+b+c+d+e$ е 11 (при $k=1$) или 44 (при $k=2$). Следователно търсеният сбор е 11 или 44.

53. В триъгълник с обиколка 176 дължините на страните са изразени с числата $\overline{aa}$, $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, където a и b са последователни цифри. Да се определят дължините на страните на триъгълника.

Решение. Нека $b = a+1$. Тогава $\overline{aa} = 10a+a = 11a$, $\overline{ab} = 10a+a+1 = 11a+1$, $\overline{ba} = 10b+a = 10(a+1)+a = 11a+10$. Обиколката на триъгълника е $11a + 11a + 1 + 11a + 10 = 176$ или $33a = 165$, откъдето $a = 5$ и $b = 6$. Следователно страните на триъгълника са 55, 56 и 65.

54. Сборът на три естествени числа е 100. Като разделим първото число на второто, се получава частно 1 и остатък, равен на третото число. Второто число е с 10 по-голямо от третото. Да се намери произведението на тези три числа.

Решение. Ако числата са a, b и c, то $c = b - 10$ и понеже $\dfrac{a}{b} = 1 + \dfrac{c}{b}$, то $\dfrac{a}{b} = 1 + \dfrac{b-10}{b}$ или $a = 2b - 10$. Тъй като сборът от трите числа е 100, $2b - 10 + b + b - 10 = 100$, т. е. $b = 30$. Следователно трите числа са 50, 30 и 20, а произведението им е 3000.

55. Кутия има форма на правоъгълен паралелепипед. Обиколките на три от стените ѝ са 14 cm, 10 cm и 20 cm. Да се намери обемът на кутията.

Решение. Означаваме дължините на страните на паралелепипеда с a, b и c. Тогава $a + b = 7$, $b + c = 5$ и $a + c = 10$. Като съберем почленно

тези три равенства, получаваме $2a + 2b + 2c = 22$, откъдето $a + b + c = 11$. Тогава от $7 + c = 11$ следва $c = 4$ cm, $b = 1$ cm и $a = 6$ cm.

56. Цената на една стока е увеличена последователно два пъти с 12%. С колко процента общо се е увеличила цената на стоката?

Решение. Означаваме цената на стоката с A лева. След първото увеличение цената е $\frac{112}{100}A$, а след второто $\frac{112}{100}\cdot\frac{112}{100}\cdot A = \frac{12\ 544}{10\ 000}$. Следователно цената на стоката се е увеличила с 25,44%.

57. Измеренията на правоъгълен паралелепипед са три последователни естествени числа. Обемът на паралелепипеда и сумата от дължините на трите му различни ръба се изразяват с едно и също число. Кое е това число?

Решение. Означаваме дължините на страните на паралелепипеда с $a-1$, a и $a+1$. Тогава от условието на задачата следва, че $(a-1)a(a+1) = 3a$, откъдето $a^3 - a = 3a$, т. е. $a^2 = 4$. Следователно $a = 2$. Тогава търсеното число е $3a = 6$.

58. В два съда имало 64 литра вода. От първия съд взели 20% от намиращата се в него вода и я сипали във втория. След това от втория съд взели 20% от намиращата се в него вода и я сипали в първия съд. Тогава се оказало, че в двата съда има едно и също количество вода. По колко литра вода е имало във всеки съд първоначално?

Решение. Означаваме количеството вода в първия съд с x литра. Тогава във втория съд водата е $64 - x$ литра. След първото преливане в първия съд остават $0,8x$ литра вода, а във втория съд водата е $64 - x + 0,2x = 64 - 0,8x$. При второто преливане във втория съд остават $(64 - 0,8x)\cdot 0.8$ литра вода. Водата в първия съд става $0,8x+(64 - 0,8x)\cdot 0,2$ литра. Понеже в двата съда след второто преливане има по равно количество вода, получаваме уравнението

$$0,8x + (64 - 0,8x)\,.0,2 = (64 - 0,8x)\,.0,8 \iff$$

$$0,8x + 12,8 - 0,16x = 51,2 - 0,64x \iff 1,28x = 38,4,$$

откъдето $x = 30$. Следователно в първия съд първоначално е имало 30 литра, а във втория — 34 литра вода.

задачи задачи

8. клас

61. Да се докаже, че уравнението

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

има само един реален корен.

62. Двойките точки A и A_1, B и B_1 са симетрични относно правата l. Да се докаже, че тези четири точки лежат на една окръжност или на една права.

63. Даден е остроъгълен равнобедрен триъгълник ABC. Симетралата на бедрото BC пресича продължението на основата AB в точката M. На лъча, противоположен на CM, е нанесена отсечката $CE = MA$. Да се докаже, че триъгълникът MBE е равнобедрен.

9. клас

64. Сплав на мед и цинк с тегло 24 kg при потопяване във вода „губи“ $2\frac{8}{9}$ kg от теглото си. Да се определи количеството на медта и цинка в тази сплав, ако е известно, че медта „губи“ във водата $11\frac{1}{9}\%$ от теглото си, а цинкът — $14\frac{2}{7}\%$ от теглото си.

65. В триъгълника ABC с дължини на страните $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ е вписана окръжност. Прекарана е допирателна, която пресича AC и BC и разделя триъгълника ABC на триъгълник и четириъгълник. Да се намери периметърът на получения триъгълник.

66. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB||CD$, $AB > CD$) е вписан в окръжност с център точката O. С P, Q и R са означени средите съответно на AB, OC и OD. Да се докаже, че триъгълникът PQR е равностранен.

10. клас

67. Да се намерят стойностите на k, за които корените на уравнението $x^2 - (2k + 1)x + k^2 = 0$ се отнасят както $1 : 4$.

68. Даден е правоъгълният триъгълник ABC с хипотенуза $AB = c$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. Да се намери дължината на ъглополовящата CL ($L \in AB$).

69. Катетите на правоъгълен триъгълник са a и b и $a + b = s$. Да се намери интервалът от стойностите, които може на приема хипотенузата c.

11. клас

70. Да се пресметне $\log_{a_1.a_2...a_k} x$, ако

$$\log_{a_1} x = b_1, \log_{a_2} x = b_2, \ldots, \log_{a_k} x = b_k \quad \text{и} \quad x \neq 1.$$

71. Да се реши уравнението $2^{2(x^2-x)-3} - 2^{x^2-x-2} = 1$.

72. Ъглите на триъгълника ABC са α, β и γ и $\gamma > 90°$. Да се докаже, че

$$\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta < 1.$$

12. клас

73. Да се реши неравенството

$$x^2 + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} \geqq \frac{3+x}{2}, \text{ за което } |x| \leqq 2.$$

74. Ъглите при върховете A, B и C на остроъгълен триъгълник ABC ($BC > AC$) са съответно α, β и γ. Окръжност с диаметър AB пресича страните BC и AC съответно в точките A_1 и B_1. Да се докаже, че

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\text{cotg } \alpha}{\text{cotg } \beta},$$

където M е пресечната точка на правите AB и A_1B_1.

75. Основата на паралелепипед е квадрат със страна a. Един от върховете на горната основа е на равни разстояния от върховете на долната основа и е на разстояние $a\sqrt{2}$ до равнината на тази основа. Да се намери лицето на пълната повърхнина на паралелепипеда.

на задачите от бр. 4/2013 г.

46. Да се намери най-малката стойност на параметъра a, за която квадратното уравнение $4x^2 + 4(a+1)x + 1 = 0$ има точно едно решение.

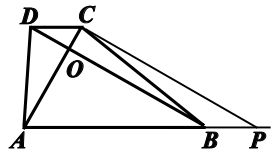
Решение. За да има уравнението едно решение, трябва дискриминантата му да е равна на нула. Тогава $D = 4(a+1)^2 - 4 = 0$, откъдето $a^2 + 2a = 0$, т. е. $a = 0$, $a = -2$. Следователно най-малката стойност на a, за която уравнението има точно едно решение, е $a = -2$.

47. Да се реши неравенството $2\sqrt{2}x - 3 \leqq 3x - 2\sqrt{2}$.

Решение. Записваме неравенството във вида $(2\sqrt{2}-3)x \leqq -(2\sqrt{2}-3)$. Тъй като $2\sqrt{2} < 3$, то е еквивалентно на $x \geqq -1$, т.е. $x \in [-1, \infty)$.

48. В трапеца $ABCD$ ($AB||CD$) средната основа е равна на a cm и е равна на диагонала AC. Диагоналите на трапеца са взаимно перпендикулярни и AC се разделя от пресечната им точка O в отношение $3:1$. Да се намерят основите на трапеца.

Решение. През върха C прекарваме права, успоредна на диагонала BD, до пресичането ѝ с продължението на AB в точката P. В $\triangle APC$ отсечката $AP = AB + CD = 2a$ и тъй като $\sphericalangle ACP = 90°$, то $\sphericalangle APC = 30°$ и $\sphericalangle BAC = 60°$.



От това, че $AO : OC = 3 : 1$ и $AC = a$ следва, че $AO = \dfrac{3a}{4}$ и $OC = \dfrac{a}{4}$. Тогава от $\triangle AOB$ определяме $AB = 2.AO = \dfrac{3a}{2}$ cm, а от $\triangle COD$ намираме $CD = \dfrac{a}{2}$ cm.

49. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравнението $\sqrt{x-3} + ax = 2a + 3$ има единствено решение.

Решение. При $x \geqq 3$ полагаме $t = \sqrt{x-3} \geqq 0$ и получаваме

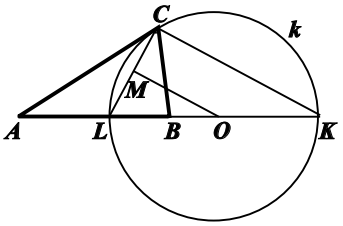
$$at^2 + t + a - 3 = 0. \tag{1}$$

Тогава (1) трябва да има точно един неотрицателен корен. При $a = 0$ получаваме $t = 3$. Нека $a \neq 0$. Разглеждаме дискриминантата $D = 1 - 4a^2 + 12a$. Имаме $D = 0$ за $a_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$. При $a = \dfrac{3 - \sqrt{10}}{2}$ уравнението (1) има единствен положителен корен, а при $a = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$ — единствен

отрицателен корен. Нека $\frac{3-\sqrt{10}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ и $a \neq 0$. Уравнението (1) ще има един положителен корен.

50. В триъгълника ABC вътрешната ъглополовяща през върха C пресича страната AB в точката L. Ако $AL = 5$ и $BL = 3$, да се намери радиусът на окръжността, минаваща през точките C и L, с център върху правата AB.

Решение. Нека O и R са центърът и радиусът на окръжността k. Тъй като CL е хорда в k, то $MO \perp CL$ ($M \in CL$ и $LM = MC$). Ако CK (K лежи на правата AB) е външната ъглополовяща през върха C, $CK \perp CL$ и MO е средна отсечка в $\triangle CLK$. Тогава $LK = 2R$. От свойствата на ъглополовящата имаме

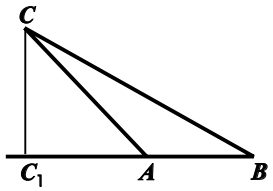


$$\frac{KA}{KB} = \frac{LA}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}.$$

Но $KA = KB + AB = KB + 8$, откъдето $KB = 12$, $LK = 15$ и $R = 7{,}5$.

51. Даден е триъгълникът ABC с $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 15^\circ$. Да се намери периметърът на триъгълника ABC, ако височината му през върха C е равна на 4.

Решение. Нека CC_1 е височината на $\triangle ABC$. Тъй като $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ от $\triangle C_1BC$ следва, че $BC = 8$ и $BC_1 = 4\sqrt{3}$. Имаме $\sphericalangle ACB = 15^\circ$, откъдето $\sphericalangle C_1AC = 45^\circ$ и A е между C_1 и B. От $\triangle C_1AC$ получаваме, че $CC_1 = C_1A = 4$ и $AC = 4\sqrt{2}$. Следователно $AB = 4\sqrt{3} - 4$ и $P_{ABC} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 4$.



52. Да се реши уравнението $2.4^{\sqrt{x}} - 5.2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$.

Решение. При $x \geqq 0$ полагаме $y = 2^{\sqrt{x}} \geqq 2^0 = 1$ и получаваме $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Последното уравнение има решения $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Само $y_1 = 2$ принадлежи на областта от допустимите стойности, откъдето получаваме, че $2^{\sqrt{x}} = 2$, т.е $x = 1$.

53. Да се реши неравенството $\log_3 \frac{x-1}{x-3} - 2\log_3 \frac{1-x}{x-5} < 0$.

Решение. Множеството от допустимите стойности е $x \in (3,\ 5)$. В този случай даденото неравенство е последователно еквивалентно на

$$\log_3 \frac{x-1}{x-3} < \log_3 \frac{(1-x)^2}{(x-5)^2} \iff \frac{(x-5)^2}{x-3} < x-1 \iff \frac{3x-11}{x-3} > 0 \iff$$

$$x \in \left(\frac{11}{3}; 5\right).$$

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

НОВИНИ 2

54. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА,
Петър Бойваленков, Николай Николов 4

30. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА,
Стоян Боев, Петър Бойваленков, Рафаел Рафаилов 10

17. МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА,
Ивайло Кортезов 15

МЕЖДУНАРОДНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА В БУРГАС
(BIMC), *Емил Колев* 22

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“,
Петър Бойваленков 37

ДВЕ СЪСТЕЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКА ПРЕЗ ЛЯТОТО,
Любомир Любенов, Алия Искакова 41

ТРИЪГЪЛНИЦИ С ЦЕЛОЧИСЛЕНИ СТРАНИ И ЕДНА
ЦЕЛОЧИСЛЕНА МЕДИАНА, *Петър Попиванов* 46

ВЪРХУ ЕДНА КОНКУРСНА ЗАДАЧА ОТ СПИСАНИЕ
МАТЕМАТИКА 2013, БР. 1, *Николай Хадживанов* 48

ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС, ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ ... 50

ВЪТРЕШЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В НПМГ
„АКАД. Л. ЧАКАЛОВ“, *Марияна Къосева, Илия Костов* 56

ТЕСТ ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА .. 61

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ 65

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 67

ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 68

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 70

ЗАДАЧИ 73

РЕШЕНИЯ 75

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70x100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 02.10.2013 г.
Печат „Деметра“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.