МАТЕМАТИКА

БРОЙ 4
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ТЕМА 1: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи — 0 точки.

1. Корените на уравнението $(x+2)(5x-10)=10-5x$ са:

А) $-2;\ 2$ **Б)** $-2;\ 0$ **В)** $-3;\ -2$ **Г)** $-3;\ 2$

2. Всички допустими стойности на израза $\dfrac{x^3+3}{x-2}:\dfrac{x-5}{x+4}$ са:

А) $x\neq 2;\ -4$ **Б)** $x\neq 2;\ -4;\ 5$

В) $x\neq 0$ **Г)** $x\neq 2;\ 0;\ -4$

3. Стойността на израза $\lg\dfrac{1}{100}+\log_2 32-\log_{\frac{1}{3}}27+\log_5 1$ е равна на:

А) 10 **Б)** 0 **В)** 3 **Г)** 6

4. Решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x+2^{y+1}=3 \\ 4x+4^y=32 \end{array}\right.$ са:

А) $x=-17,\ y=\log_2 10$ **Б)** $x=-1,\ y=1$

В) $x=-5,\ y=2$ **Г)** $x=-9,\ y=3$

5. Решенията на неравенството $\dfrac{1-2x}{\log_2(2+x)}\leqq 0$ са:

А) $x>-2$ **Б)** $x>-1$

В) $x\in(-2;-1)\cup\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$ **Г)** $x\in\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$

6. Корените на уравнението

$$(x^2 + x - 6)\sqrt{x+1} = 0 \text{ са:}$$

А) $-1;\ 2$ **Б)** $-3;\ 2;\ -1$ **В)** $-3;\ 2$ **Г)** $0;\ -1$

7. Решенията на неравенството

$$\sqrt{2x^2 - 18x + 16} < x - 4 \text{ са:}$$

А) $0 < x \leqq 1$ **Б)** $8 \leqq x < 10$

В) $0 < x < 10$ **Г)** $x \in [8; \infty)$

8. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ се пресичат в точка E от страната CD. Отношението на разстоянията на E до правите AD и BC е:

А) 2 **Б)** $\dfrac{1}{2}$

В) 1 **Г)** не може да се намери

9. Върху страната AC на триъгълника ABC е взета точка D така, че $AD = 15$, $\cos\sphericalangle BDC = -\dfrac{13}{15}$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADB = 180^\circ$. Ако $BC = 10$, то периметърът на триъгълника ABC е:

А) 32 **Б)** 37 **В)** 40 **Г)** 42

10. Окръжности с радиуси 2 и 4 се допират външно в точка A. Права през A пресича малката окръжност в точка B, а голямата – в точка C. Ако $BC = 3\sqrt{2}$, то AC е равна на:

А) $2\sqrt{2}$ **Б)** $2\sqrt{3}$

В) $\sqrt{2}$ **Г)** не може да се намери

11. Един от ъглите в триъгълник е равен на $1\dfrac{1}{3}$ от правия ъгъл, дължината на най-голямата страна в триъгълника е 7, а разликата от дължините на другите две страни е 2. Средната по големина страна на триъгълника е равна на:

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

12. Радиусът на прав кръгов конус е два пъти по-малък от образувателната му, а височината е a. Лицето на околната повърхнина е:

А) $\dfrac{4}{3}\pi a^2$ **Б)** $\dfrac{2}{3}\pi a^2$ **В)** $\dfrac{\pi a^2}{3}$ **Г)** $2\pi a^2$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Ако $a = \log_2 7$ и $b = \log_2 11$, то $\log_7 11$ е равен на:

14. Решенията на неравенството

$$\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geqq \sqrt{5^x + 7}$$

са:

15. За трапеца $ABCD$ ($AB \| BC$) е известно, че $AD = BD = DC = p$ и $BC = q$. Дължината на AB е:

16. Височините BH и BK за ромба $ABCD$ пресичат диагонала AC съответно в точките M и N (M е между A и N). Ако $AM = a$ и $MN = b$, то дължината на HK е:

17. Намерете стойностите на реалния параметър a, при които неравенството $x^2 + 2|x - a| \geqq a^2$ е вярно за всяко реално x.

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 15.

18. Решете уравнението $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$.

19. Около окръжност с радиус R е описан трапец $ABCD$ ($AB \| CD$). Хордата, свързваща допирните точки на бедрата с окръжността, е успоредна на основите и има дължина b. Намерете лицето на трапеца.

20. Решете системата

$$\left| \begin{array}{l} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{array} \right. .$$

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

На 31 март – 2 април 2017 г. във Варна и Бургас се проведоха Пролетните математически състезания (ПМС). В Бургас се състезаваха учениците от 9-12 клас, а във Варна тези от 4-8 клас. За съжаление, не бяха публикувани имената на победителите от 4-8 клас. В останалите класове победителите са:

Девети клас. Василена Цветанова (МГ, Пловдив), Димитър Чакъров (МГ, Пловдив), Димитър Опърлаков (МГ, Варна), Добрин Бараков (МГ, Плевен), Евгени Кайряков (СМГ), Петър Лангов (СМГ) – 26 точки, Алек Димитров (ПЧМГ), Борис Геренски (МГ, Варна) – 25 точки.

Десети клас. Борислав Антов (СМГ), Кристиян Василев (ПЧМГ) – 23 точки, Орлин Кучумбов (ППМГ, Бургас) – 22 точки.

Единадесети клас. Калоян Алексиев (СМГ), Кирил Бангачев (СМГ), Димитър Любенов (СМГ) – 26 точки, Атанас Динев (ППМГ, Бургас) – 24 точки, Константин Гаров (ППМГ, Бургас) – 22 точки.

Дванадесети клас. Виолета Найденова (СМГ) – 26 точки, Иван Ганев (Американски колеж), Христо Папазов (Американски колеж) – 25 точки, Костадин Гаров (ППМГ, Бургас) – 23 точки, Габриел Костадинов (ПМГ, Силистра) – 22 точки.

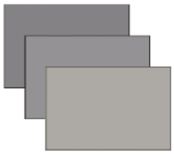
Предлагаме ви условията на задачите с отговори и кратки решения.

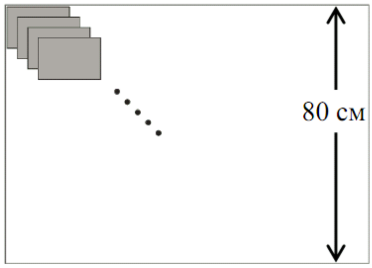
Условия

Задача 4.1. Намерете стойността на израза $C = 3.A : B + B : 3$, ако $A = 26.25 - 25.24 + 24.23 - 23.22 + 22.21 - 21.20 + 20.19 - 19.18 + 18.17 - 17.16 + 16.15 - 15.14$, а B е най- малкото естествено число, което прави равенството $12 : x = 7 - x$ вярно.

Задача 4.2. Образуваме числова редица по следния начин: на първо и второ място записваме съответно цифрите 2 и 7. След това на трето място записваме последната цифра на произведението им. На четвърто място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри. Така, на всяко следващо място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри в редицата. Коя е цифрата на 2017-то място в тази числова редица?

Задача 4.3. Ива разполага с голям брой еднакви картончета с форма на правоъгълник с размери: дължина 12 см и ширина 8 см. Тя направила две отделни подреждания.


Фиг.1



Фиг.2

а) Първо подреждане (Фиг.1): Слага на масата едно картонче. Второто слага върху първото, като го отмества с 3 см надолу и 2 см надясно. Третото картонче слага върху второто, като го отмества също с 3 см надолу и 2 см надясно. Намерете лицето на фигурата, която е получила Ива от така наредените три картончета.

б) Второ подреждане (Фиг.2): Слага едно картонче в горния ляв ъгъл на масата. Второто слага върху първото, като го отмества с 1 см надолу и 1 см надясно. Третото слага върху второто, като го отмества също с 1 см надолу и 1 см надясно. Ива продължава по този начин да слага картончета, докато стигне до ръб на масата.

Ако масата е правоъгълна, дълга 110 см и широка 80 см, колко картончета трябва да сложи Ива, докато стигне ръб на масата?

Намерете лицето на незапълнената част от масата.

Задача 4.4. Двама четвъртокласници играят на игра с 10 купчинки от по 10 камъчета. Когато е на ход, всеки играч има право да направи по избор един от следните четири хода:

1) да вземе всичките камъчета от една от наличните купчинки;

2) да вземе всичките камъчета от две от наличните купчинки;

3) да вземе по едно камъче от всички налични купчинки;

3) да вземе по две камъчета от всички налични купчинки.

Печели този, който вземе последното камъче. Кой от играчите - първият или вторият, може със сигурност да спечели играта, ако играе правилно? Опишете как да стане това.

Задача 5.1. Майката на Любо му дала 10 лева и го изпратила до близката пекарна да купи най-малко 60 курабийки. Обещала му рестото да остане за него. В пекарната една курабийка струва 30 стотинки, пакет от

7 курабийки струва 1 лев, а пакет от 12 курабийки струва 1,80 лева. Каква покупка трябва да направи Любо така, че да остане най-голямо ресто?

Задача 5.2. В редица са написани само нули и единици, общо 5020 цифри. Извършва се следната операция: 25% от първоначалния брой нули се превръщат в единици и 25% от първоначалния брой единици се превръщат в нули. Оказва се, че след тази операция 65% от всички цифри са нули. Колко процента от цифрите първоначално са били нули?

Задача 5.3. След натискане на бутон числото на екрана на калкулатора се увеличава с дробната си част. Например от $\frac{3}{7}$ след натискане на бутона на екрана се появява $\frac{6}{7}$, а от 3,6 след натискане на бутона на екрана се появява 4,2. Започвайки с положително число, по-малко от 1, след десет последователни натискания на бутона на екрана се появява числото 10. Намерете първоначалното число.

Задача 5.4. Дадени са 5 различни естествени числа със следното свойство: сборът на всеки 4 от тях се дели на 5. Докажете, че утроеният сбор на всеки 3 от тези числа се дели на 15.

Задача 6.1. Блатът на първия етаж на двуетажна торта е правоъгълен паралелепипед с дължина 36 cm и широчина 24 cm, а блатът на втория етаж е цилиндър с диаметър 24 cm, височина 7 cm и обем, който е три пъти по-малък от обема на първия етаж. Цилиндърът е поставен с основата си върху паралелепипеда.

а) Намерете височината на блата на първия етаж на тортата.

б) Намерете колко литра крем са необходими, за да се покрият видимите части на блатовете на тортата с равномерен слой с дебелина 5 mm.

При пресмятанията използвайте, че $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Задача 6.2. Намерете цифрите a, b, c, d и e, ако $A = \overline{abcd}$ е най-голямото четирицифрено число, което се дели на 132 и 136, а числото $B = \overline{abcd} + \overline{abde}$ се дели на 12. Сравнете по големина числата

$$X = -\frac{1,44 : 0,9 + (-2,1 : (-0,07)).(-0,17) + |-0,00264 : 0,0024|}{|-0,34 - 0,23| : (-2,5 + 0,6) - |(-0,3)^3 : 0,01| - 0,6}$$

и $Y = \frac{-10d - c}{100}$.

Задача 6.3. Квадрат със страна 10 cm е разделен с хоризонтални и вертикални линии на 100 квадратчета със страна 1 cm. В едно от квадратчетата е поставено камъче. Камъчето се мести по следното правило: осем последователни хода хоризонтално или вертикално и деветият ход е по диагонал, отново осем последователни хода хоризонтално или отвесно и деветият ход е по диагонал и т.н. Не се разрешава камъчето да се слага два пъти на едно и също квадратче. Най-много колко хода могат да се направят?

Задача 6.4. Числото 2017 е записано като сбор на пет естествени числа. По колко различни начина може да бъде направено това, ако за десетичния запис на петте числа са използвани различни цифри?

Задача 7.1. Намерете всички цели стойности на параметрите a, b и c така, че многочлените $A = (x-a)(x-2017)+1$ и $B = (x-b)(x-c)$ да са тъждествено равни.

Задача 7.2. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle CAB = 30^\circ$. Точката M е средата на AB и $\sphericalangle BMC = 45^\circ$. Намерете останалите ъгли на триъгълника.

Задача 7.3. Възможно ли е естествените числа от 1 до 200 да се наредят по окръжност, така че за всяка двойка съседни числа поне едното да се различава от другото с цяло число проценти?

Задача 7.4. Дадено е естествено число. Разрешени са две операции: прибавяне към числото на негова цифра и изваждане от полученото число на негова цифра (цифрата може да е и 0). Първо се извършва прибавяне, след това изваждане и т.н., операциите се редуват. Може ли с помощта на тези операции да се получи 2017 и кое е най-малкото естествено число, с което може да се започне?

Задача 8.1. Дадени са естествените числа a, b и c. Числата $\dfrac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1}$ и $\dfrac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c}$ са рационални. Да се докаже, че числото $\dfrac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)}$ е цяло.

Задача 8.2. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 75^\circ$. Нека $CD \perp AB$, $DP \perp AC$, $DQ \perp BC$ $(D \in AB, P \in AC, Q \in AB)$. Ако H е ортоцентърът на $\triangle PQC$, а M и N са средите съответно на CD и CP, да се намерят ъглите на $\triangle MNH$.

Задача 8.3. В квадратна мрежа без начало и край е даден правоъгълник 21×3, съставен от единични квадратчета на мрежата, които се оцветяват в 5 цвята (незадължително всички). Съществува ли оцветяване така, че всеки два правоъгълни блока 3×1, съставени от единични квадратчета на мрежата, средното от които е в дадения правоъгълник, са различно оцветени. (Два блока са различно оцветени, ако единият не може да се получи от другия чрез преместване или завъртане.) Не се допуска оцветяване, при което повече от един блок 3×1 е съставен само от неоцветени квадратчета.

Задача 8.4. Дадено е уравнението $a^3 + b^3 + 1 = kab$ относно естествените числа a, b и k.

а) Решете уравнението при $k = 11$.

б) Да се докаже, че ако уравнението има решение при $k > 3$, то числото $k^3 - 27$ има делител d, за който $d \in [k + 9; 5k)$.

Задача 9.1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които остатъкът от делението на полинома $ax^n + bx + 2017$ на полинома $x^2 - 1$ е полиномът x.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който вписаната окръжност се допира до страните AB и BC съответно в точки M и N. Ъглополовящите на ъглите ACB и BAC пресичат правата MN съответно в точки K и P. Да се намери ъгъл ABC, ако $AC = 2KP$.

Задача 9.3. На дъската е написано числото 2017. Николай трябва да получи числото 1 с помощта на краен брой от следните операции: от n се получава $n + 1$ или $n/2$, като второто е разрешено само ако n е четно (например от 2017 се достига до 2048 с добавяне на 1 и след това до 1 с деление на 2). Възможно ли е Николай да организира получаването на 1 така, че някоя от цифрите $0, 1, \ldots, 9$ да не се появи на дъската на никоя от стъпките?

Задача 9.4. Да се намерят всички прости числа p и q, за които $p^2 + pq + q^2$ дели $p^3 + q^3 - p$.

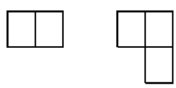
Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които точно две от целочислените решения на неравенството

$$\log_a |\log_{\frac{2}{a}}(x+1)| < 0,$$

не надминават 3.

Задача 10.2. Нека D е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната AB. Нека I_1 и I_2 са центровете на вписаните окръжност в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle I_1 I_2 D$ окръжност се допира до AB.

Задача 10.3. Нека A_n е броят на начините на покриване на правоъгълник $2 \times n$ с плочки от вида



Да се докаже, че за всяко $n \geq 3$ е в сила неравенството $A_n > (1 + \sqrt[4]{2})^{n-1}$.

Задача 10.4. Дадено е множеството $X = \{0, 1, \dots, 20\}$, както и петелементните подмножества на X:

$$B_k = \{k, (3+k) \bmod 21, (4+k) \bmod 21, (9+k) \bmod 21, (11+k) \bmod 21\},$$

$k = 0, 1, \dots, 20$. Някои от елементите от X оцветяваме в червено. Какъв е минималният брой елементи, които трябва да се оцветят, така че всяко от множествата B_k да съдържа като оцветени, така и неоцветени числа.

Задача 11.1. Да се реши неравенството

$$\sin x + \cos x + \sin 2x \leq 1.$$

Задача 11.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Нека H и G са съответно ортоцентърът и медицентърът на $\triangle ABC$. Точка P е пресечната точка на медианата през B и височината през A, а точка Q е пресечната точка на медианата през C и височината през B. Ако точките H, G, P и Q лежат на една окръжност, да се докаже, че триъгълникът, образуван от медианите на $\triangle ABC$, е подобен на $\triangle ABC$.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа a, за които числото

$$N = 1 + a^a + a^{a^2} + \cdots + a^{a^{a+1}} - a$$

е просто.

Задача 11.4. Дадено е естествено число n и две дъски. На първата дъска са записани n единици и няколко (поне една) двойки, а втората дъска е празна. За един ход се изтриват две произволни числа от първата дъска, на тяхно място се записва техния сбор, а на втората дъска се записва произведението на изтритите числа. След няколко хода на първата дъска останало само едно число, като се оказало, че удвоеният сбор на числата върху втората дъска е точен квадрат. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Задача 12.1. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с основа $ABCD$. Всички ръбове на пирамидата са равни. Да се намери косинусът на ъгъла между правите AM и CN, където точка M е среда на ръба BV, а точка N е среда на ръба DV.

Задача 12.2. Да се докаже, че върховете на параболите $y = x^2 + b_i x + c_i$, $i = 1, 2, 3$, лежат на една права, която не е успоредна на оста Oy, тогава и само тогава, когато тези параболи имат обща допирателна.

Задача 12.3. Нека n и d са естествени числа, като n е нечетно, d е четно и не се дели на 3 и $n > 4d$. Една аритметична прогресия

$n-d, n, n+d$ се нарича *добра*, ако най-големите естествени делители на числата $n-d, n, n+d$, различни от тях самите, също образуват растяща аритметична прогресия (в този ред).

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри аритметични прогресии.

б) Колко са добрите аритметични прогресии, за които $n < 24^2$?

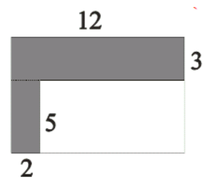
Задача 12.4. Виж Задача 11.4.

Отговори, упътвания и решения

4.1. *Отговор.* $A = 240$, $x = 3$, $C = 241$.

4.2. След първите две места се получава група от шест цифри 482622, която се повтаря. Тъй като $(2017-2) : 6 = 335$ (ост. 5) следва, че последната цифра в така получената редица е 2.

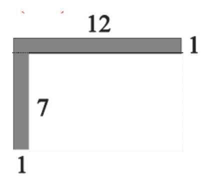
4.3. а) Можем да разрежем получената фигура на правоъгълник с размери 12 см и 8 см, както и два елемента като показания. Лицето на показаната фигура е $5.2 + 12.3 = 46$ кв.см.



Лицето на правоъгълника е $8.12 = 96$ кв.см. Лицето на получената фигура е $S = 2.46 + 96 = 188$ кв.см.

б) Масата има размери 110 см по дължина и 80 см по ширина. За да се достигне десния ръб на масата ще са необходими $1 + (110-12) : 1 = 99$ картончета. За да се достигне долния ръб на масата, ще са необходими $1 + (80-8) : 1 = 73$ картончета. Така Ива ще достигне най-напред долния ръб на масата. Фигурата, оформена от картончетата, се състои от един правоъгълник с размери 12 см и 8 см и 72 елемента като показания.

$S_{\text{пок.елемент}} = 12.1 + 7.1 = 19$ кв.см.
$S_{\text{фигура}} = 72.19 + 8.12 = 1464$ кв.см.
$S_{\text{маса}} = 80.110 = 8800$ кв.см.
$S_{\text{незапълнена част}} = 8800 - 1464 = 7336$ кв.см.



4.4. От условието е ясно, че след всеки ход във всички оставащи купчинки има един и същ брой камъчета. След всеки ход ситуацията на играта може да бъде описана с числата m и n, където m е броят на купчинките, а n е броят на камъчетата във всяка от купчинките. Ще записваме ситуацията след всеки ход с $(m; n)$. В началото ситуацията се описва с $(10; 10)$. След първия ход са възможни следните ситуации $(9; 10)$, $(8; 10)$, $(10; 9)$ или $(10; 8)$.

Във всяка от тези позиции вторият играч може да направи ход, с който да изравни броят на купчинките и камъчетата в тях, т.е. да доведе ситуацията до $(m;m)$. Първият играч отново трябва наруши равенството на двете числа, а вторият може да го възстанови. Така, докато се стигне до ситуация, в която или броят на купчинките, или броят на камъчетата ще стане по-малък от 3. В тази ситуация вторият играч може да вземе всички камъчета. Печелившата стратегия е на втория играч, който винаги трябва да изравнява камъчетата и купчинките.

5.1. *Отговор.* 1,20 лв.

5.2. Решенията на Елена Вутова и Теодор Иванов от ПМГ „Иван Вазов“, Добрич ще намерите в рубриката *Ученическо творчество* в този брой.

5.3. Всеки път цялата част на числото се увеличава най-много с 1, а след 10 хода тя от 0 става 10; следователно на всеки ход цялата част се увеличава с 1. Отзад напред намираме, че числата преди 10 са

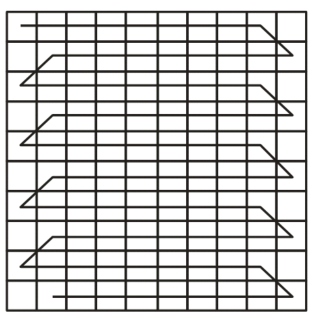
$$9\frac{1}{2},\ 8\frac{3}{4},\ 7\frac{7}{8},\ 6\frac{15}{16},\ 5\frac{31}{32},\ 4\frac{63}{64},\ 3\frac{127}{128},\ 2\frac{255}{256},\ 1\frac{511}{512},\ \frac{1023}{1024}.$$

5.4. Ако означим числата с a, b, c, d, e и сбора им с S, имаме, че $b+c+d+e = S-a$ се дели на 5. Следователно S и a дават един и същ остатък при деление на 5. По същия начин получаваме, че остатъкът при деление на 5 на всяко от числата е равен на остатъка при деление на 5 на техния сбор. Сборът на пет числа, които дават един и същ остатък при деление на 5, се дели на 5. Следователно S, а оттам и всяко от дадените числа, се дели на 5. Оттук следва твърдението на задачата.

6.1. *Отговор.* а) 11 cm; б) 1,403 л.

6.2. *Отговор.* $a = 8$, $b = 9$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 4$, $X = -\dfrac{2}{3} > Y = -0,67$.

6.3. Да оцветим квадратчетата шахматно и да предположим, че първоначално камъчето е на черно квадратче. Тогава следващите 9 хода са БЧБЧБЧБЧЧ, т.е. за всеки 9 хода камъчето стъпва на 5 черни и 4 бели. Ако повторим последователността 9 пъти, камъчето ще е било на $9.5+1 = 46$ черни квадратчета и ще са направени 81 хода. Всички черни квадратчета на дъската са 50, следователно остават още 4, които могат да бъдат обходени с още 8 хода. Следователно броят на ходовете не може да надхвърля 89. На фигурата е показан пример, при който наистина могат да се направят 89 хода и камъчето да бъде поставено на 90 квадратчета, включително началното.



6.4. Числото 2017 дава остатък 1 при деление на 9, следователно сборът на използваните цифри дава остатък 1 при деление на 9. Ако в записа на петте събираеми са използвани 9 цифри, то цифрата 8 не участва.

Ако събираемите са едноцифрени или двуцифрени, сборът е по-малък от 2017. При две трицифрени и три едноцифрени събираеми сборът е най-много $100.(9 + 7) + 10.(6 + 5) + 4 + 3 + 2 + 1 = 1720$.

Следователно едното събираемо е четирицифрено. Ако цифрата на хилядите му е 2, то сборът е най-малко $2.1000 + 0.100 + (1 + 3).10 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 > 2017$. Следователно цифрата на хилядите е 1. Цифрата на стотиците е 9, защото ако е 7 (или по-малко), сборът не надхвърля $1.1000 + 7.100 + (9 + 6).10 + 5 + 4 + 3 + 2 + 0 = 1864$.

Събираемите са четирицифрено, двуцифрено и три едноцифрени числа. Ако сборът на цифрите на десетиците на двуцифреното и четирицифреното число е X, а сборът на цифрите на единиците на петте числа е Y, имаме

$$X + Y = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 \text{ и } 10.X + Y = 2017 - 1900 = 117.$$

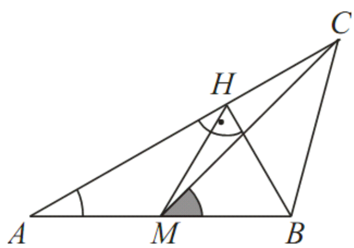
Оттук намираме $X = 10$ и $Y = 17$. Следователно двете цифри на десетиците са 3 и 7 или 4 и 6. Цифрата на деститиците на четирицифреното число е една от тези 4 цифри, т.е. може да се избере по 4 начина, след което цифрата на деститиците на едноцифреното число е еднозначно определена. Цифрите на единиците на четирицифреното и двуцифреното число са 0 и една от останалите 4 цифри, т.е. за избора им има $2.4 = 8$ възможности. Получаваме $4.8 = 32$ възможни сбора.

Забележка. За да е пълно решението, трябва да се отхвърли и случаят, когато в записа на числата участват осем цифри.

7.1. *Отговор.* $a = 2015$, $b = c = 2016$ и $= 2019$, $b = c = 2018$.

7.2. Построяваме височината BH. Отсечката HM е медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник ABH с $\sphericalangle HAB = 30^\circ$, откъдето лесно получаваме, че триъгълникът BMH е равностранен.

Тогава $\sphericalangle CMH = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ и тъй като $\sphericalangle AHM = 30^\circ$, то $\sphericalangle HCM = 15^\circ$, т.е. триъгълникът HCM е равнобедрен и $HC = HM = HB$. В равнобедрения правоъгълен триъгълник HBC имаме $\sphericalangle C = 45^\circ$, откъдето $\sphericalangle ABC = 105^\circ$.



7.3. Ако m и n са естествени числа и m се различава от n с $k\%$, то $m = \dfrac{100 \pm k}{100} \cdot n$. Следователно числото $100 \pm k = \dfrac{100m}{n}$ трябва да е цяло.

Да допуснем, че числата от 1 до 200 могат да се подредят по указания начин и да разгледаме простото число p, $101 \le p < 200$. Нека съседното му число е a. От двете числа $\dfrac{100p}{a}$ и $\dfrac{100a}{p}$ цяло може да е само първото, когато a дели 100. Делителите на 100 са девет, а простите числа в разглеждания интервал са повече от 9, следователно такова подреждане не е възможно.

7.4. Да разгледаме прехода от трицифрено към четирицифрено число. Най-малкото трицифрено число, от което можем да получим четирицифрено, е 991. Ако това не е първото прибавяне, преди него е имало изваждане от число от вида $\overline{99a}$. Но ако от $\overline{99a}$ извадим негова цифра, получаваме число, по-малко или равно на 990. Следователно най-малкото число, с което може да се започне, е 991.

Започваме с 991 и прилагаме операциите:

991, 1000, 999, 1008, 1007, 1014, 1013, 1016, 1015, 1020, 1019 ...

Вижда се, че последната цифра се изменя циклично: 0, 9, 8, 7, 4, 3, 6, 5, 0, ..., като за един цикъл числото се увеличава с 20. Следователно с 50 цикъла от числото 1000 ще получим 2000. След това можем да продължим така: от 2000 с изваждане на 2 и прибавяне на 9 получаваме 2007, а след това с прибавяне на пет пъти 2 и изваждане на 0, получаваме 2017.

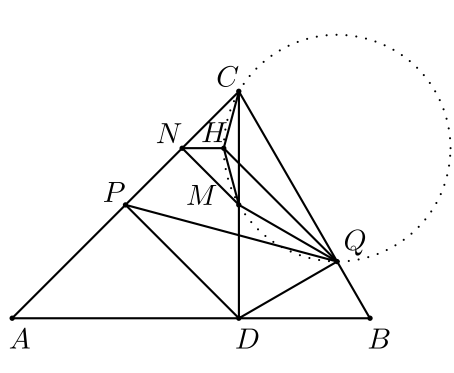
8.1. Нека $\dfrac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1} = n$. Тогава $(a-bn)\sqrt{13} = n-b$ и тъй като $n-b$ и $a-bn$ са рационални числа, то $n-b = a-bn = 0$, т.е. $n = b$ и $a = b^2$.

По същия начин от рационалността на числото $\dfrac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c} = m$ следва, че $c - mb = cm - a = 0$. Оттук $ab = c^2$ и като използваме, че $a = b^2$, получаваме $c^2 = b^3$, Тогава

$$\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)} = \frac{b^6+b^9}{b^2(b^2-b+1)} = b^5+b,$$

което е естествено число.

8.2. Първо да отбележим, че триъгълникът MQD е равностранен, а четириъгълникът $PDQC$ е вписан и оттук $\sphericalangle QPC = \sphericalangle QDC = 60^\circ$ и $\sphericalangle PQC = 45^\circ$. Тъй като H е ортоцентър на $\triangle PQC$, то $\sphericalangle HQC = 15^\circ$ и $\sphericalangle PCH = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle HCM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, както и $\sphericalangle HQM = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$.



Следователно четириъгълникът $HMQC$ е вписан и оттук намираме $\sphericalangle MHQ = \sphericalangle MCQ = 30^\circ$. Тъй като NM е средна отсечка в $\triangle PDC$, то $MN || DP$, следователно $MN || HQ$, откъдето $\sphericalangle NMH = 30^\circ$.

Във вписания четириъгълник $HMQC$ получихме $\sphericalangle HQM = \sphericalangle HQC = 15^\circ$, следователно $HM = HC$. Като вземем предвид, че правоъгълният триъгълник MNC е равнобедрен, получаваме, че $\triangle MNH \cong \triangle CNH$, а оттук следва, че $\sphericalangle MNH = 45^\circ$.

Следователно ъглите на $\triangle MNH$ са 30°, 45° и 105°.

8.3. От условието следва, че трябва да разглеждаме и блоковете 3×1, които излизат извън дадения правоъгълник с по най-много едно единично квадратче, т.е. заедно с дадения правоъгълник трябва да разглеждаме и единичната ивица около него. Тъй като при оцветяването се допускат и неоцветени квадратчета от дадения правоъгълник, може да считаме, че неоцветените квадратчета се оцветяват в шести цвят (например червен), различен от петте.

Да разгледаме средното квадратче на даден блок. То може да се оцвети по 6 начина. За всеки от тях имаме 6 оцветявания, ако другите две квадратчета са едноцветни, и $(6.5) : 2 = 15$ оцветявания, ако са разноцветни; общо 21 оцветявания. Следователно броят на различните оцветявания на един блок е $21.6 = 126$.

От друга страна, блоковете 3×1 с централно квадратче в дадения правоъгълник са точно $2.21.3 = 126$. Следователно ако съществува оцветяване с исканите свойства, в него участва всяко от възможните оцветявания на блоковете 3×1.

Нека червените квадратчета в правоъгълника 21×3 са x. Тогава броят на блоковете с червено средно квадратче е $2x$ (по един хоризонтален и един един вертикален блок). Различните оцветявания на блок с червено средно квадратче са 21. Следователно $2x = 21$, което е невъзможно.

8.4. Първо да отбележим, че при $a = b$ получаваме $2a^3 + 1 = ka^2$, което е възможно само при $a = 1$, $k = 3$. Следователно при $k > 3$ имаме $a \neq b$, т.е. $a + b \geq 3$.

Като използваме тъждеството $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, преобразуваме даденото равенство във вида

$$(3a + 3b + k)(9a^2 + 9b^2 + k^2 - 9ab - 3ka - 3kb) = k^3 - 27.$$

Следователно $k^3 - 27$ има делител

$$3a + 3b + k \geq 3.3 + k = k + 9.$$

Освен това $kab = a^3 + b^3 + 1 > (a + b)(ab + (a - b)^2) > (a + b)ab$, откъдето следва, че $k > a + b$. Оттук $3a + 3b + k < 4k$.

Уравнението в а) няма решение, тъй като $11^3 - 27 = 8.163$ няма делител в интервала $[20; 44)$.

Забележка. Доказахме, че ако уравнението има решение при $k > 3$, то числото $k^3 - 27$ има делител d, за който $d \in [k+9; 4k)$; по-добра оценка от предложената в условието $d \in [k+9; 5k)$.

9.1. Отговор: $a = -2017$, $b = 1$ при четно n, няма такива a и b при нечетно n.

Нека $ax^n + bx + 2017 = p(x)(x^2 - 1) + x$, където $p(x)$ е частното от делението. Тогава при $x = 1$ получаваме $a + b + 2017 = 1$, а при $x = -1$ имаме $(-1)^n a - b + 2017 = -1$. От тези две уравнения за a и b получаваме $a(1 + (-1)^n) + 4034 = 0$, което няма решение при нечетно n, а при четно n намираме $a = -2017$. Тогава $b = -2016 - a = 1$. Имаме (при четно n)

$$-2017x^n + x + 2017 = -2017(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + 1)(x^2 - 1) + x.$$

9.2. Отговор: 60°. Ще използваме стандартните означения за ъглите в $\triangle ABC$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Тъй като $\sphericalangle APM = \sphericalangle BMN - \sphericalangle MAP = (90 - \beta/2) - \alpha/2 = \gamma/2 = \sphericalangle ICB$, четириъгълникът $IPNC$ е вписан. Тогава $\sphericalangle IPC = \sphericalangle INC = 90^\circ$. От $\sphericalangle APM = \gamma/2 = \sphericalangle ICA$ следва и че четириъгълникът $AKPC$ е вписан, откъдето $\sphericalangle AKC = \sphericalangle APC = 90^\circ$.

Нека S е средата на страната AC. Тогава PS и KS са медиани съответно в правоъгълните триъгълници APC и AK и следователно $KS = PS = AC/2$. Оттук и от условието $AC = 2KP$ следва, че $\triangle KPS$ е равностранен.

Тъй като $\sphericalangle CSP = \alpha$ като външен за равнобедрения $\triangle APS$ и аналогично $\sphericalangle ASK = \gamma$, получаваме $60^\circ = \sphericalangle KSP = 180^\circ - (\sphericalangle ASK + \sphericalangle CSP) = \beta$.

9.3. Отговор: Не!

Да наречем една цифра *добра*, ако се появява на дъската. Цифрите 2, 0, 1, 7 и 8 очевидно са добри, а 9 също е добра, защото се получава на третия ход (в 2019 или 1009). Тъй като 1 може да се получи само от 2, а 2 само от 4, цифрата 4 също е добра.

Ще докажем, че 5 е добра цифра. Действително, за да не получим 5 като последна цифра, трябва да приложим деление на 2 най-късно при 2024, при което ще получим число между 1009 и 1012. Сега, отново за да не получим 5 като последна цифра, трябва да приложим деление на 2 най-късно при 1014, при което ще получим число, започващо с 5.

Цифрата 6 също е добра. Действително, за да не я получим като последна цифра, трябва последователно да сме в интервала $[2017, 2025]$, после в $[1009, 1015]$, оттам в $[505, 515]$, после в $[254, 259]$ (иначе имаме 6 като втора цифра), след което в $[127, 135]$ и на следващата стъпка непременно ще получим число, започващо с 6.

По подобен начин се вижда, че и цифрата 3 е добра. За да не я получаваме като последна цифра, трябва последователно да сме интервалите $[2017, 2022]$, $[1009, 1012]$, $[505, 512]$, $[254, 262]$, $[127, 129]$, $[64, 72$ и на следващата стъпка няма как да не я получим като първа цифра.

9.4. Отговор: $p = 5$, $q = 3$.

Ако $p = q$, то $3p^2|2p^3 - p \iff 3p|2p^2 - 1$, откъдето следва, че $p|2p^2 - 1$, което е невъзможно.

Нека $p \neq q$. От условието и от равенството

$$p^3 + q^3 - p = (p + q)(p^2 + pq + q^2) - 2pq(p + q) - p$$

следва, че $p^2 + pq + q^2|p(2q(p + q) + 1)$. Тъй като $(p, p^2 + pq + q^2) = 1$, заключаваме, че $p^2 + pq + q^2|2q(p + q) + 1$.

Ако $p^2 + pq + q^2 \leq \dfrac{2q(p + q) + 1}{2}$, то $2p^2 \leq 1$, което е невъзможно. Следователно

$$p^2 + pq + q^2 = 2q(p + q) + 1 \iff q(p + q) = (p - 1)(p + 1).$$

Тъй като q е просто число, то дели един от множителите $p - 1$ и $p + 1$.

Ако $p + 1 = kq$, $k \in \mathbb{N}$, то $kq + q - 1 = k(kq - 2)$ и значи $k|q - 1$ и $q|2k - 1$, откъдето следва, че $q - 1$ е положително кратно на k, което не надминава $2k - 2$. Тогава $q - 1 = k$ и получаваме $k = 2$, $q = 3$ и $p = 5$.

Ако $p - 1 = mq$, $m \in \mathbb{N}$, то $mq + q + 1 = m(mq + 2)$ и значи $m|q + 1$ и $q|2m - 1$, откъдето следва, че $q + 1$ е положително кратно на m, което не надминава $2m$. При $q + 1 = m$ получаваме $m^2 - 2m + 2 = 0$, което е невъзможно, а при $q + 1 = 2m$ намираме $m = 1$, което също е невъзможно.

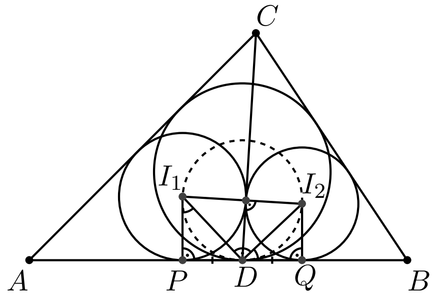
10.1. Очевидно има смисъл да разглеждаме само положителни стойности на a, за които $a \neq 1, 2$. Ясно е също, че $x > -1$ и $x \neq 0$.

1) Нека $a \in (0, 1)$. Сега $|\log_{2/a}(x + 1)| > 1$. Оттук имаме $\log_{2/a}(x + 1) > 1$ или $\log_{2/a}(x + 1) < -1$, което води до $x + 1 > 2/a$ или $x + 1 < a/2$. Това дава решенията $x \in (-\infty, -1 + a/2) \cup (-1 + 2/a, +\infty)$. Тъй като $2/a - 1 > 1$ и $-1 < -1 + a/2 < 0$, две целочислени решения, ненадхвърлящи 3, се получават, когато $2/a - 1 < 2$, т.е. когато $a > 2/3$. Така в този случай получаваме $a \in (2/3, 1)$.

2) Нека $a \in (1, 2)$. Сега получаваме последователно $|\log_{2/a}(x + 1)| < 1$ и $-1 < \log_{2/a}(x + 1) < 1$, откъдето $x \in (-1 + a/2, -1 + 2/a)$. Очевидно в този интервал има само една целочислена стойност за x.

3) Нека $x \in (2, +\infty)$. Както в 2) получаваме $x \in (-1 + 2/a, -1 + a/2)$. Точно две целочислени решения за x, които са по-малки или равни на 3, се получават, когато $2 < -1 + a/2 \leq 3$. Така в този случай получаваме $a \in (6, 8]$. Окончателно имаме $a \in (2/3, 1) \cup (6, 8]$.

10.2. Да означим с P и Q допирните точки на вписаните в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ окръжности със страните AD и BD съответно. Тогава



$$DP = \frac{1}{2}(DC + DA - AC) =$$

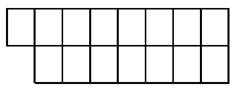
$$= \frac{1}{2}(DC + DB - BC) = DQ$$

и следователно вписаните в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ окръжности се допират до CD в една и съща точка.

Остава да съобразим, че $\sphericalangle I_2I_1D = \sphericalangle DI_1P = \sphericalangle I_2DQ$, с което доказателството е завършено.

Забележка. В сила е по-общото твърдение, че ако D е произволна точка от страната AB, то окръжността, описана около $\triangle I_1I_2D$ минава през постоянна точка, а именно, допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната AB.

10.3. Да означим с B_n броя на начините на покриване на фигура от вида (с n клетки в първия ред)



В сила са рекурентните уравнения:

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + A_{n-2} + 2B_{n-1} \\ B_n &= B_{n-1} + A_{n-2} \end{aligned}$$

Първото уравнение, написано за A_{n-1} има вида $A_{n-1} = A_{n-2} + A_{n-3} + 2B_{n-2}$. Изваждайки това уравнение почленно от израза за A_n, получаваме

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= A_{n-1} - A_{n-3} + 2(B_{n-1} - B_{n-2}) \\ &= A_{n-1} - A_{n-3} + 2A_{n-3}, \end{aligned}$$

откъдето $A_n = 2A_{n-1} + A_{n-3}$.

Сега оценката за A_n се доказва по индукция при използване на неравенството $\sqrt[4]{2} < 6/5$. Лесно се проверява, че

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = 5 > 11^2/5^2 > (1 + \sqrt[4]{2})^2,$$

$$A_4 = 2A_3 + A_1 = 11 > 11^3/5^3 > (1 + \sqrt[4]{2})^3$$

и $A_5 = 2A_4 + A_2 = 11 > 11^3/5^3 > (1+\sqrt[4]{2})^3$ за базата на индукцията. По-нататък,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 2A_n + A_{n-2} \\ &> 2(1+\sqrt[4]{2})^{n-1} + (1+\sqrt[4]{2})^{n-3} \\ &= (1+\sqrt[4]{2})^{n-3}(2+4\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}+1) \\ &> (1+\sqrt[4]{2})^{n}, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

10.4. Всяка двойка от числа от X се среща в точно едно от множествата B_k. Това се проверява лесно, ако забележим, че разликите $(a-b) \mod 21$, $a, b \in \{0, 3, 4, 9, 11\}$, $a \neq b$, пробягват всички ненулеви остатъци по модул 21. В частност оттук следва, че всеки елемент на X се появява в точно пет от множествата B_k.

Нека B_m е множество, съдържащо максимален брой оцветени числа. Очевидно този брой е поне 2. Да допуснем, че той е точно 2 и да означим със c броя на всички оцветени елементи от X. Да означим още с x_1 и x_2 броя на подмножествата, съдържащи съответно 1 и 2 оцветени точки. Очевидно имаме

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 21 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5c \\ & & x_2 & = & \dbinom{c}{2} \end{array} \right. ,$$

откъдето $21 - 5c + \dbinom{c}{2} = 0$, т.е. $c^2 - 11c + 42 = 0$. Последното уравнение няма реални корени. Следователно съществува множество с поне 3 оцветени числа. Оттук получаваме, че броят на оцветените числа от X е поне 7. За това е достатъчно да разгледаме множествата B_k, които съдържат фиксирано неоцветено число. Стойността 7 се достига; да оцветим, например, всички числа, които се делят на 3.

11.1. Полагаме $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ и тогава $\sin 2x = y^2 - 1$. Неравенството е еквивалентно на $y^2 + y - 2 \leq 0$ с решения $y \in [-2, 1]$. Следователно $-2 \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$, откъдето

$$-\sqrt{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Лявото неравенство е изпълнено за всяко x, а за дясното получаваме

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} + 2k\pi,$$

или $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

11.2. Тъй като точките H, G, P и Q лежат на една окръжност, то $\sphericalangle BPH = \sphericalangle CQH$. Следователно $\sphericalangle GBC = \sphericalangle GCA$, откъдето следва, че $\triangle BB_1C \sim \triangle CGB_1$, където B_1 е средата на AC. Оттук получаваме $B_1G.B_1B = B_1C^2$ или $\dfrac{1}{3}m_b^2 = \left(\dfrac{1}{2}b\right)^2$. Като използваме, че $4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$, от последното равенство следва, че $a^2 + c^2 = 2b^2$. От формулите за медианите пресмятаме:

$$m_a = c\frac{\sqrt{3}}{2}, m_b = b\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } m_c = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

откъдето следва твърдението на задачата.

11.3. При $a = 1$ получаваме $N = 1 + a + a^{a^2} - a = 2$, което е просто число. Ако $a > 1$ е нечетно число, то N е четно число и $N > 2$, т.е. N не е просто число.

Ако a е четно число, записваме $a = 2^k b$, където b е нечетно число. Да разгледаме числото $t = a^{2^k} + 1$. Имаме $a^a \equiv -1 \pmod{t}$ и

$$a^{a^2} \equiv a^{a^3} \cdots \equiv a^{a^{a+1}} \equiv 1 \pmod{t}.$$

Тогава

$$N \equiv 1 - a - 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{a \text{ пъти}} \equiv 0 \pmod{t}$$

и N не е просто число. Единствената стойност на a е $a = 1$.

11.4. Лема. Ако върху първата дъска първоначално числата са $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то сборът на числата върху втората дъска в края е равен на

$$\sum_{1 \le i < j \le k} x_i x_j.$$

Доказателство. За $k = 2$ твърдението е вярно. Нека то е вярно за $k - 1$ числа и да разгледаме числата $x_1, x_2, \ldots, x_k$ върху първата дъска.

Без ограничение първият ход е с числата x_1 и x_2. Тогава върху първата дъска ще бъдат записани $k - 1$ числа $x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k$, а върху втората дъска е записано числото $x_1 x_2$. Сега твърдението следва директно от прилагане на индукционното допускане за числата $x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Нека в началото броят на двойките на първата дъска е m. От Лемата следва, че в края сборът S на числата върху втората дъска е равен на

$$S = \frac{n(n-1)}{2} + 2nm + 2m(m-1).$$

Тогава

$$2S = n^2 - n + 4nm + 4m^2 - 4m = (n + 2m)^2 - 2(n + 2m) + n.$$

При $n = 1$ имаме $2S = 4m^2$ и условието е изпълнено. Ако $n > 1$ получаваме

$$(n + 2m - 1)^2 < (n + 2m)^2 - 2(n + 2m) + n < (n + 2m)^2,$$

което означава, че $2S$ не може да е точен квадрат.

12.1. Нека точка K в равнината на основата $ABCD$ е такава, че $2AK = BD$ и $AK \parallel BD$. Тогава $AMNK$ е успоредник и и търсим косинуса на ъгъла между KN и NC. От правоъгълния триъгълник CAK получаваме $KC = \sqrt{AC^2 + AK^2} = a\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a\sqrt{10}}{2}$. Тъй като $AM = KN = CN = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ от косинусовата теорема за триъгълник KCN получаваме

$$\cos\sphericalangle CNK = \frac{3 + 3 - 10}{2.3} = -\frac{2}{3}.$$

Следователно търсеният косинус е $\frac{2}{3}$.

12.2. Нека правата $y = bx + c$ се допира до параболата $y = x^2 + b_i x + c_i$. Това означава, че уравнението $x^2 + b_i x + c_i = bx + c$ има двоен корен, т.е. $(b_i - b)^2 = 4(c_i - c)$. Полагаме $d = \frac{b^2}{4} + c$. Тогава за върха $A_i(x_i^0, y_i^0)$ на параболата имаме, че

$$y_i^0 = c_i - \frac{b_i^2}{4} = -\frac{b_i b}{2} + d = bx_i^0 + d.$$

И така, ако правата $y = bx + c$ се допира до трите параболи, то техните върхове лежат на правата $y = bx + d$.

Обратно, по подобен начин се вижда, че ако върховете на параболите лежат на правата $y = bx + c$, то правата $y = bx + c - \frac{b^2}{4}$ се допира до трите параболи.

12.3. Нека втората прогресия е a_1, a_2, a_3.

Тъй като d не се дели на 3, точно едно от числата $n - d, n, n + d$ се дели на 3. Ако $n + d$ не се дели на 3, то

$$4 + (n - d)/3 \leq 2d' + a_1 = a_3 \leq (n + d)/5$$

или

$$2 + n/3 \leq d' + a_2 = a_3 \leq (n + d)/5$$

(d' е разликата на втората прогресия), като и в двата случая получаваме противоречие с условието $n > 4d$. Следователно $a_3 = \dfrac{n+d}{3}$.

Ако n не се дели на 5, то $a_2 \leq \dfrac{n}{7} < \dfrac{n+d}{6} = \dfrac{a_3}{2}$, което означава, че $a_1 < 0$, противоречие. Следователно $a_2 = \dfrac{n}{5}$.

Нека $a_1 = \dfrac{n-d}{k}$. Да отбележим, че k трябва да е просто число и $a_1 = 1$ или всички прости делители на a_1 трябва да са поне k. Имаме

$$\frac{n-d}{k} + \frac{n+d}{3} = \frac{2n}{5} \iff 15(n-d) + 5kd = nk \iff 15a_1 + 5d = n.$$

От последното равенство и от $n = ka_1 + d$ следва, че $(k-15)a_1 = 4d$. Оттук следва, че $k-15$ се дели на 8. Нека $k = 8t+15$, където t е естествено число. Тогава $d = 2ta_1$, $n = 5a_1(2t+3)$. Тези параметри удовлетворяват условията за двете прогресии и остава да осигурим условието a_1 да е най-големият делител на $n-d$.

а) От теоремата на Дирихле следва, че в аритметичната прогресия с общ член $8t+15$ има безбройно много прости числа (това се доказва лесно и директно с имитация на класическото доказателство на Евклид за съществуването на безбройно много прости числа). Първото тях е 23 и дава при $a_1 = 1$ числата 23, 25, 27, и съответно 1, 5, 9. Една безкрайна серия е например $8t+15, 10t+15, 12t+15$, съответно $1, 2t+3, 4t+5$.

б) Ако $a_1 > 1$, то $a_1 \geq k \geq 23$ според горното и първата възможност е $a_1 = 23$. Всъщност това е и последно, защото при $a_1 \geq 29$ получаваме $n = 5a_1(2t+3) \geq 725 > 24^2$. Следователно прогресиите с исканите свойства са тези, за които $k = 8t+15$ е просто, $n = 10t+15 < 576$, т.е. $t \leq 56$, и още една ($529 = 23^2, 575, 621$, съответно $23, 115, 207$). Тези от първия вид са 22 – от $1 \leq t \leq 56$ се изключват кратните на 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Следователно търсеният брой е 23.

Задачите са предложени от: 4.1. и 4.2. – Катя Чалъкова; 4.3. – Надежда Буюклиева; 4.4. – Теодоси Витанов, 5.1. – Иван Ангелов; 5.2. и 5.3. – Гергана Николова; 5.4. – Петя Тодорова, 6.1., 6.2. и 6.3. – Мариана Кьосева; 6.4. – Велислав Йончев, 7.1. – Стоян Ненков; 7.2, 7.3., 7.4. – Теодоси Витанов, 8.1. – Ирина Шаркова; 8.2. и 8.4. – Веселин Ненков и Тодор Митев; 8.3. – Сава Гроздев; 9.1, 9.3, 9.4, 12.3 – Петър Бойваленков, 9.2 – Диана Данова, 10.1, 10.3, 10.4 – Иван Ланджев, 10.2 – Стоян Боев, 11.1, 11.3, 11.4(12.4), 12.1 – Александър Иванов, 11.2 – Емил Колев, 12.2 – Мини Макс.

БРАВО, МОМИЧЕТА!

От 6 до 12 април 2017 г. в Цюрих, Швейцария, се проведе Шестата европейска олимпиада по математика за момичета (EGMO). Тази година в състезанието участваха 168 момичета от 44 страни.

България бе представена от **Ирина Софронова** (СМГ), **Люба Конова** (СМГ), **Симона Кукова** (МГ, Варна) и **Златина Милева** (МГ, Варна). Талантливите български момичета спечелиха четири отличия: три бронзови медала и почетна грамота.

Ръководители на отбора бяха проф. Емил Колев и **Павлена Ненова**, която донесе на България един златен и два сребърни медала от участията си в EGMO 2012–2014.

Условията на задачите от състезанието (на български език) може да намерите в интернет на адреси

`https://www.egmo.org/egmos/egmo6/paper-day1-Bulgarian.pdf`
`https://www.egmo.org/egmos/egmo6/paper-day2-Bulgarian.pdf`

ДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 11. И 12. КЛАС

Стефка Буюклиева, Иванка Минчева, Галя Накова

На 12 март 2017 г. се проведе десетият Математически турнир на Великотърновския университет „Св. св. Кирил и Методий“ за ученици от 11. и 12. клас, организиран съвместно с Регионалния инспекторат по образованието и секция „Великотърновски университет“ към Съюза на математиците в България.

В турнира взеха участие 82 ученици от градовете Велико Търново, Горна Оряховица, Свищов, Павликени, Лясковец, Трявна, Мездра, Ловеч, Червен бряг, Дупница, Елхово. Бяха наградени 7 участници, които получиха един златен, три сребърни и три бронзови медала. Победител в турнира с резултат от 104 точки стана Памела Даниелова Йорданова от 12. клас на ПМГ „Васил Друмев“, Велико Търново, която спечели златния медал. Сребърен медал беше присъден на: Християн Невелинов Христов от 12. клас на ПЕГ „Екзарх Йосиф I“, Ловеч; Наталия Димитрова Янчева и Ния Миленова Чамурджиева, ученички в 12. клас на ПМГ „Васил Друмев“, Велико Търново. Бронзов медал получиха: Стефка Иванова Вълова от 12. клас на ТГ „Васил Априлов“, Червен бряг; Михаела Иванова Попова от 12. клас на ПМГ „Васил Друмев“, Велико Търново; Йоанна Станимирова Евгениева от 12. клас на ПГ „Христо Ботев“, Дупница. Тази година награда на журито не беше присъдена.

Общият максимален брой точки е 120, като резултатът на всички участници се преобразува в оценка по шестобалната система. За учениците от 11. клас тази оценка е валидна за кандидатстване през 2018 година, а за учениците от 12. клас оценката е валидна за кандидатстване през 2017 и 2018 година за специалностите ***Приложна математика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки*** и ***Софтуерно инженерство*** на факултет „Математика и информатика“ на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Темата се състоеше от 21 задачи – 20 по формата за кандидатстудентски изпит по математика–тест и една допълнителна задача. Решилите допълнителната задача се състезават за наградата на Журито.

Задачите от 1. до 20. са от три типа:

• **дванадесет** тестови задачи от затворен тип с четири възможни отговора, от които само един е верен.

• **пет** тестови задачи със свободен отговор, на които кандидат-студентът записва само отговора.

• **три** задачи, чиито решения с необходимите обосновки се представят в писмен вид.

Допълнителната задача (задача 21) е от тип, който е прието да се дава на математически състезания за ученици от 11. и 12. клас.

Различните начини на решение (при наличие на такива) се оценяват равностойно. При наличие на повече от един начин на решение на дадена задача в писмената работа на участника се зачита само един от тях.

Беше изтеглена следната тема:

1. Кой от изразите приема стойност, която е естествено число?

А) $\dfrac{17}{21}+\dfrac{12}{42}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **Г)** $-\dfrac{11}{12}-\dfrac{1}{12}$

2. Стойността на израза $\dfrac{x+2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x-2017}{x+3}$ за $x=2017$ е равна на:

А) 3 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** -2015

3. Ако средното аритметично на числата a и b е 10, а на числата a, b и c е 15, то числото c е равно на:

А) 10 **Б)** 15 **В)** 20 **Г)** 25

4. Дадено е уравнението $x^2-2x+k=0$ с корени x_1 и x_2, а k е реален параметър. Ако $x_1^2+x_2^2=2$, то стойността на k е равна на:

А) 2 **Б)** 1 **В)** 0 **Г)** -1

5. Ако $4^x+4^{-x}=23$, то стойността на израза 2^x+2^{-x} е равна на:

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

6. Неравенството $\log_a \dfrac{1}{3} > \log_a \dfrac{1}{4}$ е вярно, когато:

А) $a<0$ **Б)** $0<a<1$ **В)** $a=1$ **Г)** $a>1$

7. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Ако S_n е сумата на първите ѝ n члена и $a_3=3a_2$, $S_n=40a_3$, то n е равно на:

А) 10 **Б)** 4 **В)** 12 **Г)** 14

8. Ако $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\operatorname{cotg}\alpha$ е равна на:

А) $\dfrac{5}{12}$ **Б)** $-\dfrac{5}{12}$ **В)** 1 **Г)** $\dfrac{1}{13}$

9. Височината към хипотенузата на правоъгълен триъгълник е $2\sqrt{5}$ cm и дели хипотенузата на части, които са в отношение $1 : 4$. Дължините на катетите на триъгълника (в cm) са равни на:

А) 5, 10 **Б)** $\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$ **В)** 5, 20 **Г)** 4, 16

10. Радиусът на описаната около правоъгълник окръжност е 5 cm. Ако лицето на този правоъгълник е 48 cm^2 , то периметърът му е равен на:

А) 20 cm **Б)** 28 cm **В)** 30 cm **Г)** 32 cm

11. Лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB\|CD$) с $AB = 14$ cm, $CD = 4$ cm и $BD = 15$ cm е равно на:

А) 109 cm^2 **Б)** 112 cm^2 **В)** 44 cm^2 **Г)** 108 cm^2

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб 6 cm и обем $6\sqrt{3}$ cm^3. Дължината на околния ръб на пирамидата е равна на:

А) 5 cm **Б)** 3 cm **В)** 6 cm **Г)** 4 cm

13. Да се реши уравнението $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$.

14. За геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ е дадено, че

$$a_3 \,.\, a_4 \,.\, a_5 = 2^9.$$

Да се намери четвъртият член на прогресията.

15. Да се намери броят на двуцифрените числа, които са записани с различни цифри и се делят на 6.

16. Даден е триъгълникът ABC с $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ и страни $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm. Да се намери дължината на ъглополовящата $AL\,(L \in BC)$.

17. Основата на права призма е ромб. Диагоналите на призмата са 9 m и 5 m, а височината ѝ е 3 m. Да се намери дължината на страната на ромба.

18. Да се намерят решенията на уравнението

$$2\cos^2 x + \cos 4x = 0,$$

които принадлежат на интервала $(0; \pi)$.

19. Лицето на успоредник $ABCD$ е $56\sqrt{3}$ cm^2. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако дължините на диагоналите AC и BD са съответно равни на 16 cm и 14 cm.

20. Основата на пирамида е квадрат. Две от околните стени са перпендикулярни на основата ѝ, а другите две сключват с нея ъгъл α. Да се намери обемът на пирамидата, ако радиусът на описаната около коя да е от наклонените околни стени окръжност е R.

21. Допълнителна задача

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 2)$ са реални числа, всяко от които е по-голямо от 1 и $|x_i - x_{i+1}| < 1$ за $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Да се докаже, че:

а) $(x_i - x_{i+1}).\left(\dfrac{1}{x_{i+1}} - \dfrac{1}{x_1}\right) < 1$ за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

б) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_4} + \dots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} < 2n - 1$.

в) $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_{i+1}}\right| < \dfrac{i}{i+1}$ за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Отговори на задачи от 1 до 12.

1. В; **2.** В; **3.** Г; **4.** Б; **5.** В; **6.** Г; **7.** В; **8.** А; **9.** А; **10.** Б; **11.** Г; **12.** Г.

Отговори на задачи от 13 до 17.

13. $x_1 = 1, x_2 = 5$; **14.** 8; **15.** 14; **16.** $2\,cm$; **17.** $\sqrt{22}\,\mathrm{m}$.

Отговори на задачи от 18 до 20.

18. $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_3 = \dfrac{2\pi}{3}$, $x_4 = \dfrac{3\pi}{4}$; **19.** 13 cm и $\sqrt{57}$ cm;

20. $V = \dfrac{8R^3 \cos^2\alpha \sin\alpha}{3(1+\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$.

Примерно решение на задача 21.

а) Като се вземе под внимание, че за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ числата $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_{i+1}}$ принадлежат на интервала $(0, 1)$, лесно се доказва, че $\left|\dfrac{1}{x_{i+1}} - \dfrac{1}{x_1}\right| < 1$.

Тогава $(x_i - x_{i+1}).\left(\dfrac{1}{x_{i+1}} - \dfrac{1}{x_1}\right) \leq |x_i - x_{i+1}|\,.\left|\dfrac{1}{x_{i+1}} - \dfrac{1}{x_1}\right| < 1$.

б) Разкриваме скобите във всичките $(n-1)$ неравенства от а) и след това ги събираме почленно. Така получаваме неравенството от б).

в) Първо установяваме, че за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ е в сила

$$\begin{aligned}&|x_1 - x_{i+1}| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - \ldots - x_i + x_i - x_{i+1}|\\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_i - x_{i+1}| < i.\end{aligned}$$

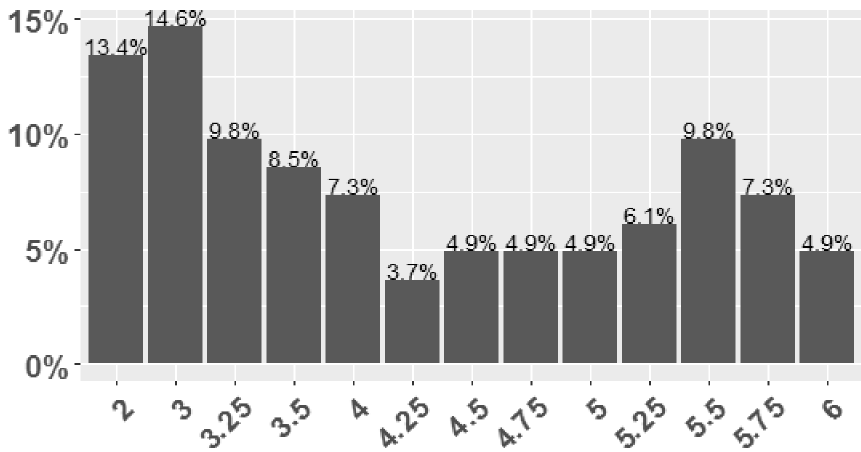
Ако $x_1 \leq x_{i+1}$, то горното неравенство е еквивалентно на $x_{i+1} - x_1 < i$ и следователно $x_{i+1} < x_1 + i$. Като вземем предвид и $\dfrac{1}{x_1} \geq \dfrac{1}{x_{i+1}} > 0$, то

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{i+1}}\right| = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{i+1}} \leq \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + i} = \frac{x_1 + i - x_1}{x_1(x_1+i)} = \frac{i}{x_1(x_1+i)} < \frac{i}{i+1}.$$

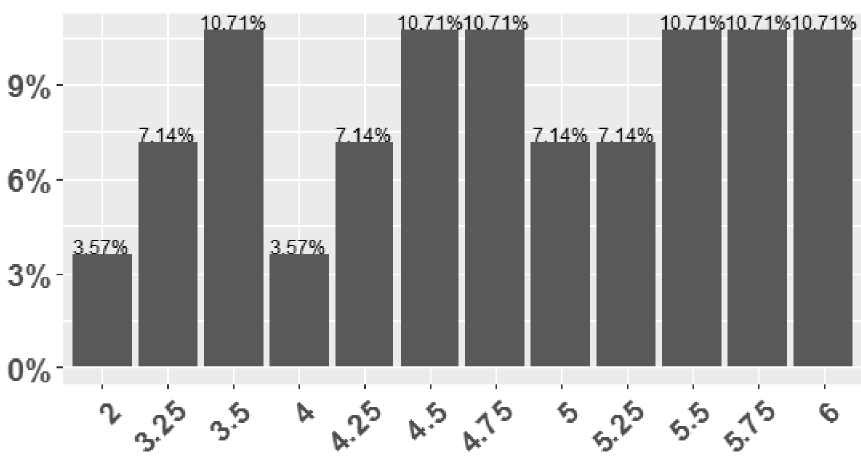
В случая, когато $x_{i+1} \leq x_1$, неравенствата от в) се доказват аналогично.

Резултатите на участниците в турнира са представени на Фигури 1, 2 и 3. Слаба оценка получиха 11 ученици, показали резултат от 20 и по-малко точки за своите решения. Както се вижда от Фигура 1, това са около 13% от участниците. Радващо е, че отличните оценки са повече. Общо на 15 ученика, получили 76 и повече точки, беше дадена отлична оценка, а първите трима в класирането имат оценка 6,00. Както може да се очаква, учениците от природо-математически гимназии показаха по-високи резултати.

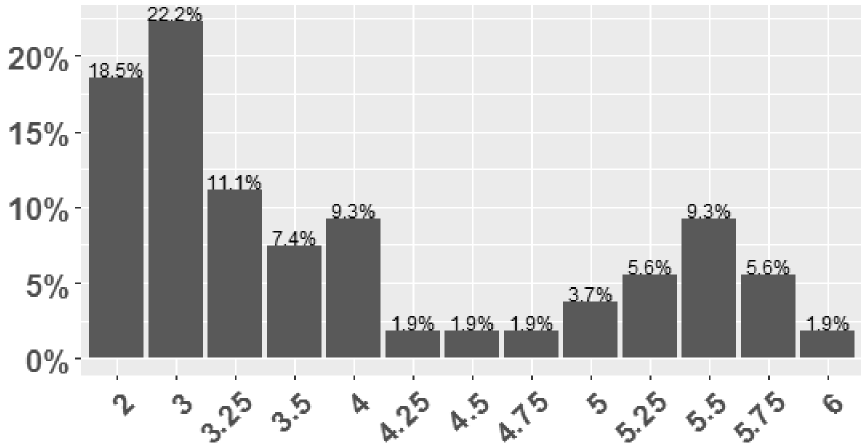
Десетият математически турнир на Великотърновския университет



Фиг. 1. Резултати на всички участници



Фиг. 2. Резултати на участниците от природо-математически гимназии



Фиг. 3. Резултати на участниците от училища без профилирано обучение по математика

„Св. св. Кирил и Методий“ за ученици от 11. и 12. клас привлече и повече спонсори от предишните издания. Тази година за провеждането на турнира помогнаха фирмите „Хюлет Пакард Ентърпрайз“ ООД, „ЗИВ“ ЕООД, „clouWay“ ООД, „Motacilla“ ООД и „Мусала Софт“ ООД. В работата по организацията се включват активно както преподаватели, така и студенти от ФМИ. Допълнително за участниците и придружаващите ги родители и учители бяха представени демонстрации на 3D LED куб и на мини дронове от бивши възпитаници на факултета.

ФМИ поддържа активни връзки с Клуба на програмиста във Велико Търново и със софтуерни фирми от цялата страна. Освен като спонсори, много от тях участват активно и в организацията на различни турнири по математика, програмиране и информационни технологии за ученици и студенти. Нещо повече, представители на тези фирми все по-често се включват и в обучението на студентите най-вече с осигуряване на стажантски места, но също и с учебни програми по различни приложни дисциплини. С помощта на фирма „Програмиста“ стартира и бакалавърската програма „Софтуерно инженерство“.

Факултетът предлага и програми в областта на математиката – „Приложна математика“, бакалавърска степен, и „Математически структури в информационната сигурност“, магистърска степен, които допълват трите бакалавърски програми в професионално направление „Информатика и компютърни науки“ и специалността „Математика и информатика“, подготвяща бъдещите учители.

ТЕСТ за подготовка за държавен зрелостен изпит

Румяна Караджова, Велин Велинов, СМГ

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. От числата $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$, $\log_2\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$, $\log_3 1$, най-голямо е:

А) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ **Б)** $\log_2\dfrac{1}{2}$ **В)** $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$ **Г)** $\log_3 1$

2. Множеството от допустими стойности на израза $\sqrt{25-x^2}-\dfrac{1}{x-3}$ е:

А) $x\in(-5;\ 5)$ **Б)** $x\in[-5;5]$

В) $x\in(-5;3)\cup(3;5)$ **Г)** $x\in[-5;3)\cup(3;5]$

3. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}\leq -1$ са:

А) $\left(-1;\dfrac{5}{2}\right]$ **Б)** $(-\infty;-1)\cup\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

В) $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ **Г)** $(-1;1)\cup\left(1;\dfrac{5}{2}\right]$

4. Стойността на израза $\sqrt{9^{1+\log_3 5}}-\log_2 72$ е равна на:

А) $12-2\log_2 3$ **Б)** $2\log_2 3-12$ **В)** $14+2\log_2 6$ **Г)** $3.(5-\log_2 9)$

5. Нека $a>b>0$. Кое от следните твърдения НЕ е вярно?

А) $a^2>b^2$ **Б)** $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ **В)** $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ **Г)** $a^3>b^3$

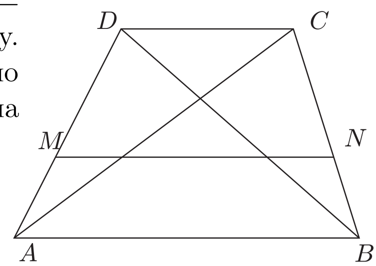
6. В правоъгълен триъгълник ABC е вписана окръжност, която се допира до хипотенузата AB в точка M. Ако $AM=3$ см и $BM=4$ см, то лицето на триъгълника ABC е:

А) 6 **Б)** $6\sqrt{2}$ **В)** 12 **Г)** $12\sqrt{2}$

7. Кое число x удовлетворява равенството $-2\sin^2 x+5\sin x+3=\ 0$, ако $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$?

А) $\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}$ **Б)** $\dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{4\pi}{3}$ **В)** $\dfrac{4\pi}{3}$ **Г)** $\dfrac{7\pi}{6}$

8. В трапеца $ABCD$ с основи $AB = 4a$ и $CD = 3a$ е построена права, успоредна на основите му. Тази права пресича бедрата AD и BC съответно в точки M и N и разделя лицето на трапеца на две равни части. Дължината на MN е:



А) $2\sqrt{3}a$ **Б)** $\dfrac{7}{2}a$

В) $\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\dfrac{40}{9}a$

9. Ако α и β са корени на уравнението $-x^2 - 5x + 1 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$ е:

А) -27 **Б)** -23 **В)** 23 **Г)** 27

10. Решенията на неравенството $(x-3)\sqrt{x^2-4x-5} \leq 0$ са:

А) $(-\infty;\ -1) \cup \{3\}$ **Б)** $(-\infty; -1] \cup \{3\}$

В) $(-\infty; -1] \cup \{5\}$ **Г)** $(-\infty; -1] \cup \{3;\ 5\}$

11. Ако $\operatorname{tg}\alpha = 2$, то стойността на израза $A = \cos(6\pi - 2\alpha) - \sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$ е:

А) $\dfrac{6}{5}$ **Б)** $\dfrac{3}{5}$ **В)** $-\dfrac{3}{5}$ **Г)** $-\dfrac{6}{5}$

12. Ромео и Жулиета със съгласието на родовете си Монтеки и Капулети се записали в клуб по танци. Групата, в която танцували Ромео и Жулиета, се състояла от двадесет танцьори. Единственото условие на двете семейства било, двамата да не танцуват един до друг. По колко начина учителят по танци може да разположи танцьорите от групата за танц *пасамендзо*, ако танцът се изпълнява в редица?

А) 18!.379 **Б)** 19!.2 **В)** 19!.19 **Г)** 19!.18

13. В тъпоъгълен триъгълник ABC, $BC = 15$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е 10. Дължината на страната AB е:

А) 9 **Б)** $12 - 3\sqrt{7}$ **В)** $12 + 3\sqrt{7}$ **Г)** 12

14. Графиките на функциите $f(x) = x^2 - 5x + 6$ и $g(x) = -x^2 + 5x - 6$ се пресичат в точки A и B. Ако върховете на параболите са съответно C и D, то лицето на четириъгълника $ACBD$ е:

А) 0,25 **Б)** 1 **В)** 1,25 **Г)** 2,5

15. Най-малката стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 2x - 6$ в интервала $[-3; 2]$ е:

А) -21 **Б)** -9 **В)** -5 **Г)** -4

16. През последните 10 години температурата в София на 1 април била

$$-3^\circ;\ 4^\circ;\ 0^\circ;\ 4^\circ;\ -2^\circ;\ -5^\circ;\ 1^\circ;\ 7^\circ;\ 10^\circ;\ 5^\circ.$$

Ако M е модата, P е медианата, а S е средната стойност на статистическия ред, то стойността на израза $2.P + M + S$ е:

А) 11,1 **Б)** 7,6 **В)** 10,7 **Г)** 16,1

17. Дължините на основите на трапец са съответно 8 и 4, а дължините на диагоналите са 6 и 10. Лицето на трапеца е:

А) 12 **Б)** $8\sqrt{14}$ **В)** $8\sqrt{7}$ **Г)** 24

18. Дадена е аритметична прогресия, на която квадратът на сумата на третия и четвъртия ѝ член е равен на сумата на втория и петия ѝ член. Сумата на първите 6 члена на прогресията е:

А) 0 **Б)** 2 **В)** 0 или 2 **Г)** 0 или 3

19. В триъгълник ABC е известно, че $AB = 7$, $BC = 6$ и $AC = 8$. В какво отношение центърът на вписаната окръжност разделя ъглополовящата CC_1 на триъгълника?

А) 3 : 1 **Б)** 2 : 1 **В)** 1 : 2 **Г)** 1 : 1

20. Отношението на радиуса на вписаната окръжност на равнобедрен триъгълник към основата му е 1 : 5. Отношението на бедрото на триъгълника към радиуса на описаната му окръжност е:

А) 8 : 29 **Б)** 25 : 13 **В)** 40 : 29 **Г)** 29 : 5

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете решенията на неравенството $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}$.

22. Две окръжности съответно с радиуси 5 и 1 се допират външно в точка M. Намерете разстоянието от M до средата на общата им външна допирателна.

23. От колода с 32 карти се изтеглят по случаен начин 3 карти. В колко от всички възможни случаи ще има поне едно асо?

24. Страните AD и AB на успоредника $ABCD$ са съответно $2\sqrt{7}$ и $2\sqrt{19}$. Ако произведението на диагоналите на успоредника е 96, да се намери по-малкият му диагонал.

25. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с ъгъл при върха C срещу основата, равен на 45°. Да се намери в какво отношение ортоцентърът H дели височината CC_1 на триъгълника.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Три момичета и три момчета седят на една пейка. Пресметнете вероятността:

а) трите момичета да седят едно до друго;

б) момичетата и момчетата да се редуват.

27. Бедрото AD и диагоналът BD на трапеца $ABCD$ са равни. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABD$ пресича бедрото AD и описаната около триъгълника ABD окръжност съответно в точки L и K, като $BL : LK = 3 : 1$.

а) Да се докаже, че триъгълникът ABD е равностранен.

б) Да се намери основата CD на трапеца, ако $AB = 7$ и $BC = \sqrt{37}$.

28. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3 \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{array} \right.$$

ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. В; **2.** Г; **3.** Г; **4.** А; **5.** В; **6.** В; **7.** Г; **8.** В; **9.** А; **10.** В; **11.** Г; **12.** Г; **13.** Б; **14.** А; **15.** А; **16.** А; **17.** Б; **18.** Г; **19.** Б; **20.** В.

20. *Упътване.* Нека основата $AB = c$, бедрото $BC = a$, радиусите на описаната и вписана окръжност са съответно R и r. От синусова теорема имаме $a = 2R\sin\alpha$, а от триъгълник AHI, където CH е височина в триъгълника, а I е център на вписаната в него окръжност, следва $r = \dfrac{c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. От $r : c = 1 : 5$, следва $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{5}$. Изразяваме $\dfrac{a}{R} = 2.\sin\alpha = \dfrac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, заместваме $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{5}$ и получаваме $a : R = 40 : 29$.

21. $(0;\ 1) \cup \left(\sqrt{3};\ 9\right)$

22. $\sqrt{5}$

23. 1684. Всички възможности за избор на 3 карти са $\dbinom{32}{3} = 4960$. Възможностите, когато измежду трите карти няма асо са $\dbinom{28}{3} = 3276$.

Следователно възможните случаи, когато ще има поне едно асо при избор на 3 карти са $4960 - 3276 = 1684$.

24. 8. *Упътване.* Използвайте връзката между страните a и b и диагоналите d_1 и d_2 на успоредник, а именно $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$.

25. $2\left(\sqrt{2}+1\right)$. *Упътване.* Докажете, че $\dfrac{C_1H}{HC} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos 45^\circ}$, където α е мярката на ъгъла при основата на равнобедрения триъгълник. Оттук

$$\frac{C_1H}{HC} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos 45^\circ} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1-\cos\left(180^\circ - 2\alpha\right)}{\sqrt{2}} = \frac{1-\cos 45^\circ}{\sqrt{2}}.$$

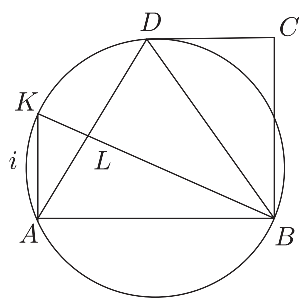
26. Всички възможни разположения на трите момичета и трите момчета на пейката са $6!$.

а) $\dfrac{1}{5}$. Разглеждаме трите момичета като едно. Тогава възможните разположения на 4 момичета на пейката са $4!$. Сега за всяко разположение за трите момичета, седящи едно до друго, има $3! = 6$ възможности. Общо $4!.6$ разположения. Вероятността е $\dfrac{4!.6}{6!} = \dfrac{1}{5}$.

б) $\dfrac{1}{10}$. Нека местата, на които седят момичета, означим с буквата Д, а тези на момчетата – с буквата М. Възможните разположения на местата на пейката са ДМДМДМ или МДМДМД. Разположенията на момичетата на местата за тях са $3! = 6$. Толкова са и за момчетата. Тогава за всеки от двата случая имаме 36 възможности, което прави общо 72. Вероятността е $\dfrac{72}{6!} = \dfrac{1}{10}$.

27. а) Нека $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = \alpha$. Тогава $\sphericalangle ABK = \sphericalangle KAL = \dfrac{\alpha}{2}$. Освен това $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AKB = 180^\circ - 2\alpha$.
Разглеждаме триъгълниците AKL и ABL. Прилагаме синусова теорема за двата триъгълника и получаваме

$$\frac{AL}{KL} = \frac{\sin\left(180^\circ - 2\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{AL}{BL} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$



Разделяме почленно двете равенства. Съгласно условието $\dfrac{BL}{KL} = \dfrac{3}{1}$, откъдето получаваме уравнение за α.

$$\frac{3}{1}=\frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{1}=\frac{4\cos\alpha\sin^2\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow 3=\frac{4\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{1-\cos\alpha}$$

$$3=4\cos\alpha\left(1+\cos\alpha\right) \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha+4\cos\alpha-3=0$$

Корените на това уравнение са $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{2}<-1$, откъдето $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Следователно $\alpha=60^\circ$.

б) От $AB \parallel CD$ и $\sphericalangle ABD=60^\circ$, следва че за триъгълник BCD имаме: $BD=7$, $BC=\sqrt{37}$ и $\sphericalangle BDC=60^\circ$. От косинусова теорема за триъгълника получаваме, че възможните стойности за CD са 3 или 4 cm.

28. Полагаме $2x-1=a$ и $y+3=b$, откъдето получаваме

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{a}+\sqrt{b}=3\\ ab=4.\end{array}\right.$$

Тъй като и b са неотрицателни, тази система е еквивалентна на

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{a}+\sqrt{b}=3\\ \sqrt{ab}=2.\end{array}\right.$$

Съгласно Теорема на Виет, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ са корени на квадратното уравнение $x^2-3x+2=0$. От своя страна това уравнение има корени 1 и 2, откъдето $(a;b)=\{(1;4),(4;1)\}$. Решения на системата са $(x;y)=\left\{(1;1),\left(\frac{5}{2};-2\right)\right\}$.

Фестивал на математиката в Созопол

От 3 до 10 септември 2017 г. в Созопол ще се проведе Осмият фестивал на младите математици. Състезанието се провежда в три възрастови групи — 6.–7., 8.–9., 10.–12. клас. Както през последните години, състезанието ще бъде с международно участие. Освен отборно състезание има индивидуално класиране в четирите олимпийски дисциплини – Алгебра, Комбинаторика, Геометрия и Теория на числата. През почивния ден желаещите могат да се включат в атрактивни състезания – 30 задачи на 30 езика и Иранска геометрична олимпиада.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

ПЪРВИ МОДУЛ
ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $x(1-4x)+(1-2x)^2$ при $x=-\dfrac{1}{3}$ е:

А) 0 **Б)** 2 **В)** $\dfrac{2}{3}$ **Г)** $-\dfrac{4}{3}$

2. Многочленът $16x^2-9y^4$ се разлага на множители, един от които е:

А) $8x-3y^2$ **Б)** $4x+3y^2$

В) $4x-3y$ **Г)** $8x^2+3y$

3. В нормален вид многочленът $(x-2)^3-x(3-x)^2$ е:

А) $3x-8$ **Б)** $2x^3-12x^2+21x-8$

В) $-12x^2+3x-8$ **Г)** $21x-8$

4. Стойността на израза $\left(12\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(11\dfrac{1}{3}\right)^2$ е:

А) 32 **Б)** 24 **В)** $23\dfrac{1}{3}$ **Г)** 8

5. Коренът на уравнението $(5x-1)(3-5x)=(5x+2)(2-5x)$ е:

А) 0,35 **Б)** 0,7 **В)** 0,1 **Г)** 0,05

6. Уравнението $\dfrac{x}{3}=3$ е еквиавалентно на:

А) $x^2-9x=0$ **Б)** $|x-3|=6$

В) $(1+x)^2=(x-1)^2+4x$ **Г)** $(1+x)^2=(x-1)^2+9(x-5)$

7. Решенията на неравенството $1-\dfrac{2-x}{5}<x$ са:

А) $x\in(0,75;\infty)$ **Б)** $x\in(0,5;\infty)$

В) $x\in(-\infty;\ -0,25)$ **Г)** $x\in\emptyset$

8. Двата корена на уравнението $|x-3|=5$ са решения на неравенството:

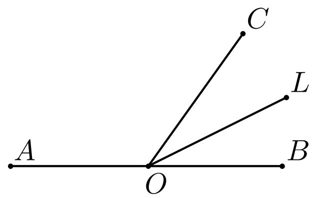
А) $2x>x$ **Б)** $2x<1$

В) $x+12>0$ **Г)** $x+2>0$

9. Цената на цирков билет за деца е 60% от цената на билет за възрастни. Два детски билета и един билет за възрастни струват общо 16,50 лв. Цената на детски билет и два билета за възрастни е общо:

А) 21 лв. **Б)** 19,50 лв. **В)** 18,20 лв. **Г)** 17,70 лв.

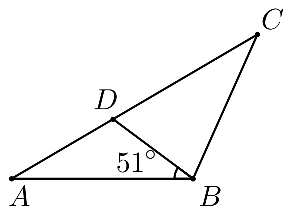
10. На чертежа $\sphericalangle AOB$ е изправен, а OL е ъглополовяща на $\sphericalangle BOC$. Ако $\sphericalangle AOL$ е 4 пъти по-голям от $\sphericalangle LOC$, то $\sphericalangle AOC$ е равен на:



А) 96° **Б)** 120°

В) 144° **Г)** 108°

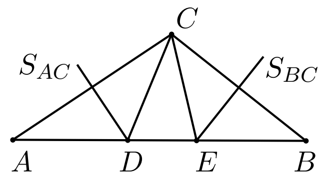
11. На основата на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AB = BC$) е отбелязана точката D така, че $CD = CB$. Ако $\sphericalangle ABD = 51°$, то $\sphericalangle CAB$ е равен на:



А) 27° **Б)** 26°

В) 24° **Г)** 22°

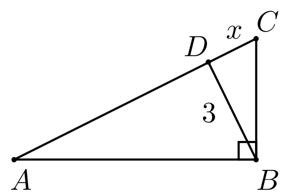
12. В $\triangle ABC$ със страна $AB = 60$ cm симетралите на AC и BC пресичат AB съответно в точките D и E. Периметърът на $\triangle DEC$ е:



А) 60 cm **Б)** 45 cm

В) 75 cm **Г)** 80 cm

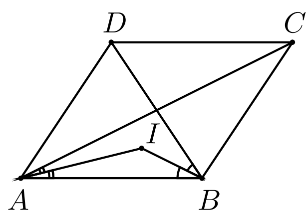
13. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ABC = 90°$) е построена височината $BD = 3$ cm. Ако $\sphericalangle CBD = 30°$ и $DC = x$ cm, лицето на триъгълника ABC (в cm^2) е равно на:



А) $3x$ **Б)** $6x$

В) $9x$ **Г)** $12x$

14. В ромба $ABCD$ ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABD$ се пресичат в точката I. Ако $\sphericalangle DAI = 2\sphericalangle ABI$, то $\sphericalangle BAI$ е равен на:



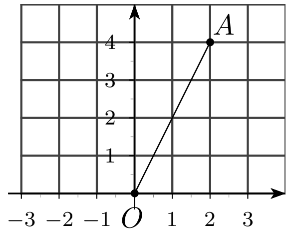
А) 12° **Б)** 15°

В) 18° **Г)** 20°

15. В координатна система с начало точката O е отбелязана точката $A(2;\ 4)$. Симетралата на отсечката OA минава през точка с координати:

А) $(-2;\ 3)$ **Б)** $(-1;\ 3)$

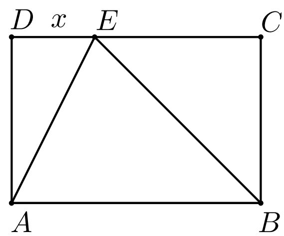
В) $(0;\ 3)$ **Г)** $(2;\ 1)$



16. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страна $AD = 6$ cm. На страната DC е избрана точката E така, че $DE = x$ cm. Ако лицето на триъгълника ABE е 27 cm^2, то лицето на триъгълника BCE е равно на:

А) $54 - 3x$ **Б)** 27

В) $27 - 3x$ **Г)** $6x$

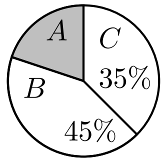


ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Намерете естествените числа, които са решения на неравенството (B), като следвате указанията, с помощта на които са намерени естествените решения на неравенството (A). Попълнете празната колона.

	Указания	$(A)\colon 4 - \dfrac{3x-7}{2} \geqq x$	$(B)\colon 7 - \dfrac{x-7}{3} \geqq 2x$
1.	Приведете към общ знаменател	$8 - 3x + 7 \geqq 2x$	
2.	Запишете във вида $ax \geqq b$	$-5x \geqq -15$	
3.	Решете неравенството	$x \leqq 3$	
5.	Запишете отговора	1, 2 и 3	

18. На парламентарни избори гласували 60% от гражданите, имащи право на глас. Всички подадени бюлетини били действителни и се разпределили между три партии A, B и C, както е показано на диаграмата.

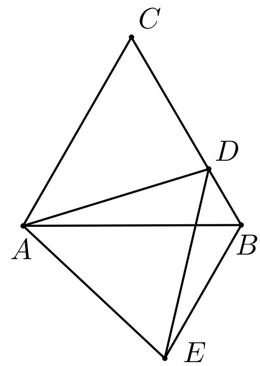


А) Колко процента от гражданите, имащи право на глас, са подкрепили партия A?

Б) В парламента има 240 места, които се разпределят между трите партии пропорционално на събраните от тях гласове. Определете броя на представителите на всяка партия в парламента.

В) Партиите А и С съставили правителство от 11 министри, като министерските постове били разпределени пропорционално на събраните от двете партии гласове. Определете броя на министрите партия А.

19. На страната BC на равностранния $\triangle ABC$ е избрана точка D и е построен равностранният $\triangle ADE$, както е показано на чертежа.



А) Ако $\sphericalangle BAD = \alpha$, изразете чрез α ъглите в таблицата.

$\sphericalangle CAD$	$\sphericalangle BAE$	$\sphericalangle ADC$	$\sphericalangle BDE$	$\sphericalangle CAE$

Б) Ако $\sphericalangle CAE$ е 2,5 пъти по-голям от $\sphericalangle BDE$, да се намери $\sphericalangle BAD$.

В) Попълнете текста.

Триъгълникът ADC *е еднакъв на триъгълника* $\ldots(1)\ldots$. *Следователно* $CD = \ldots(2)\ldots$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle\ldots(3)\ldots = \ldots(4)\ldots^\circ$, $\sphericalangle BEA = \sphericalangle\ldots(5)\ldots$. Изразен чрез α, $\sphericalangle BED = \sphericalangle BEA - \sphericalangle DEA = \ldots(6)\ldots$.

20. Да се намери общият корен на уравненията $4x^3 - 9x = 0$ и $|4x+1| = 5$.

ВТОРИ МОДУЛ

21. Пощенски разходи. Куриерска служба определила следните такси за изпращане на чувал до съседна държава.

Тегло (кг)	без предимство	с предимство
За 5 или част от 5 кг	15.00 лв.	23.00 лв
За всеки следващ кг или част от него	3.00 лв.	5.00 лв.

А) Определете пощенските разходи за изпращане без предимство на чувал с тегло 7,5 кг до съседна държава.

Б) С колко процента изпращането до съседна държава на 10-килограмов чувал с предимство е по-скъпо от изпращането му без предимство?

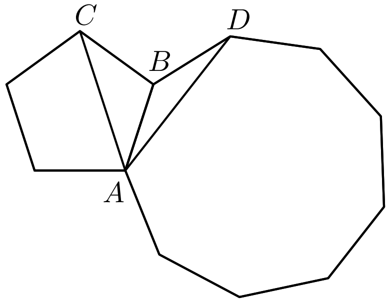
В) За кои стойности на x изпращането на чувал от x кг с предимство е с поне 64% по-скъпо от изпращането му без предимство?

22. Правилни многоъгълници. Правилният n-ъгълник има равни страни и равни ъгли. Ъгълът на правилен n-ъгълник се намира по формулата

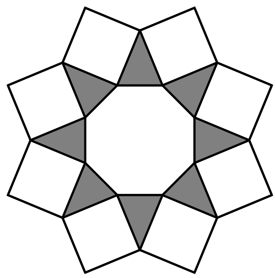
$$\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ.$$

А) Намерете ъгъла на правилния десетоъгълник.

Б) На чертежа отсечката AB е страна на правилен петоъгълник и правилен деветоъгълник. Намерете $\sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle CAD$.



В) Мозайката на чертежа е сглобена от осем квадрата, правилен осмоъгълник и осем сиви триъгълника. Намерете ъглите на сивия триъгълник.



На задачи 23. и 24. запишете решението с необходимите обосновки.

23. Блок може да се санира от бригада от 6 човека за 45 часа. Бригада от 6 човека започнала работа, а след известно време към нея се присъединили още трима работници. Когато работата приключила се оказало, че тримата работници са работили през половината от времето, за което бил саниран блокът. За колко часа е саниран блокът, ако приемем, че всички работници са еднакво ефективни?

24. Даден е успоредник $ABCD$ с височини $DH \perp AB$ и $DE \perp BC$, в който $\sphericalangle BAD = 72^\circ$, а $\sphericalangle ABD$ е с 18° по-малък от $\sphericalangle CBD$. Диагоналите на успоредника се пресичат в точката O.

А) Докажете, че $DH = HB$.

Б) Намерете ъглите на триъгълника $\sphericalangle DEH$.

Отговори

1. Б); **2.** Б); **3.** А); **4.** А); **5.** А); **6.** Г); **7.** А); **8.** В); **9.** Б); **10.** Г); **11.** Б); **12.** А); **13.** Б); **14.** В); **15.** Б); **16.** В); **17.** (1) $21 - x + 7 \geqq 6x$; (2) $-7x \geqq -28$; (3) $x \leqq 4$; (4) $1, 2, 3, 4$; **18.** А) $20\%.60\% = 12\%$; Б) 48 от партия А, 108 от партия В и 84 от партия С; В) 4 министри от партия А;

19. А)

$\sphericalangle CAD$	$\sphericalangle BAE$	$\sphericalangle ADC$	$\sphericalangle BDE$	$\sphericalangle CAE$
$60^\circ - \alpha$	$60^\circ - \alpha$	$60^\circ + \alpha$	$60^\circ - \alpha$	$120^\circ - \alpha$

; Б) 20°;

В) (1) AEB; (2) BE; (3) ACD; (4) 60; (5) ADC; (6) α; **20.** $-1,5$.

РЕШЕНИЯ

21. А) 24 лв.; Б) 60%; В) Ако чувалът тежи x кг, където $x > 5$ е естествено число, цената на изпращането му с предимство е $23 + 5(x - 5) = 5x - 2$, а без предимство $15 + 3(x - 5) = 3x$. Решението на неравенството

$$5x - 2 \geqq 164\% \ . \ 3x$$

е $x \geqq 25$.

22. А) 144°; Б) $\sphericalangle CBD = 112^\circ$, $\sphericalangle CAD = 56^\circ$; В) 45°, $67^\circ 30'$, $67^\circ 30'$.

23. Да означим времето от началото на работата до идването на тримата работници с x часа. Тогава изработените часове са общо $6.2x + 3x = 15x$. Следователно $15x = 6.45$, т.е. $x = 18$. Блокът е саниран за $2.18 = 36$ часа.

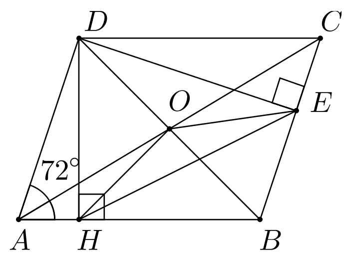
24. а) Имаме $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 108^\circ$. Ако означим $\sphericalangle ABD = x$, то $\sphericalangle CBD = x + 18^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 2x + 18^\circ$. Следователно $2x + 18^\circ = 108^\circ$, откъдето $x = 45^\circ$. Това означава, че правоъгълният триъгълник BHD е равнобедрен, т.е. $BH = HD$.

б) От а) следва, че

$$\sphericalangle CBD = 45^\circ + 18^\circ = 63^\circ$$

и от правоъгълния $\triangle BDE$ намираме $\sphericalangle BDE = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. Следователно

$$\sphericalangle HDE = 45^\circ + 27^\circ = 72^\circ.$$



В правоълните триъгълници BED и BHD построяваме медианите, съответно EO и HO, към общата хипотенуза BD (пресечната точка O на диагоналите на успоредника е среда на диагонала BD). Тогава $EO = HO = BO = DO$. Последователно намираме $\sphericalangle BOE = 2.27^\circ = 54^\circ$ (външен ъгъл за равнобедрения триъгълник DOE), $\sphericalangle HOE = 90^\circ + 54^\circ = 144^\circ$ и в равнобедрения $\triangle HOE$ получаваме $\sphericalangle OHE = (180^\circ - 144^\circ) : 2 = 18^\circ$. Тогава $\sphericalangle EHD = 45^\circ + 18^\circ = 63^\circ$ и $\sphericalangle DEH = 27^\circ + 18^\circ = 45^\circ$.

математическа ракла

В тази рубрика представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

БЕЗКРАЕН ПИНГ-ПОНГ

Евгения Сендова

1. Кратък увод. Когато говорим за приложенията на математиката в реалния живот, да не забравяме, че нейната красота е и във „въздушните замъци“ от идеи и понятия, които виждаме и строим във въображението си. Ще се опитам да илюстрирам това в контекста на любимия си *пинг-понг*. Когато бях състезателка по този спорт, той бе синоним на *тенис на маса*. Днес вече говорим за две разновидности (с различни правила), но това няма значение за математическите задачи, които ще извадим от *математическата ракла* този път.

2. Първа задача: ***Колко мача трябва да се изиграят?***

В един индивидуален турнир по пинг-понг участваха 37 състезатели. Турнирът бе с пълно елиминиране – при загуба отпадаш. Главният организатор трябвше да прецени колко мача ще се изиграят, за да се излъчи шампион.

Преди да продължите, помислете как бихте му помогнали …

И така, организаторът не се плашеше от сметки и започна да драска върху лист хартия:

I кръг – един почива, 36 души образуват 18 двойки, т.е. **18 мача.** От тях продължават 18 победители плюс почиващия, общо 19.

II кръг – един почива, 18 души образуват 9 двойки, т.е. **9 мача**. От тях продължават 9 победители плюс почиващия, общо 10.

III кръг – 10 души образуват 5 двойки, т.е. **5 мача**. Продължават 5 души.

IV кръг – един почива, 4 души образуват 2 двойки, т.е. **2 мача**. От тях продължават двама победители плюс почиващия, общо трима.

V кръг – от трима души един почива, а останалите двама в **1 мач** излъчват единия финалист.

VI кръг – финал!!!

Значи $18 + 9 + 5 + 2 + 1 + 1 = 36$ мача.

За спокойствие организаторът реши да се допита до главния съдия (математик по образование). Съдията пък не обичаше да смята (достатъчно му бе, че може да брои до 21) и след кратко замисляне отсече: 36. *Как* *го сметна толкова бързо?* – учуди се организаторът. *Какво има да се смята? На всеки мач отпада по един състезател. За да се излъчи шампион трябва да отпаднат всички освен един – значи 37 без 1 ...*

Виждате, че разсъжденията на съдията могат да се приложат за произволно число N, колкото и голямо да е то.

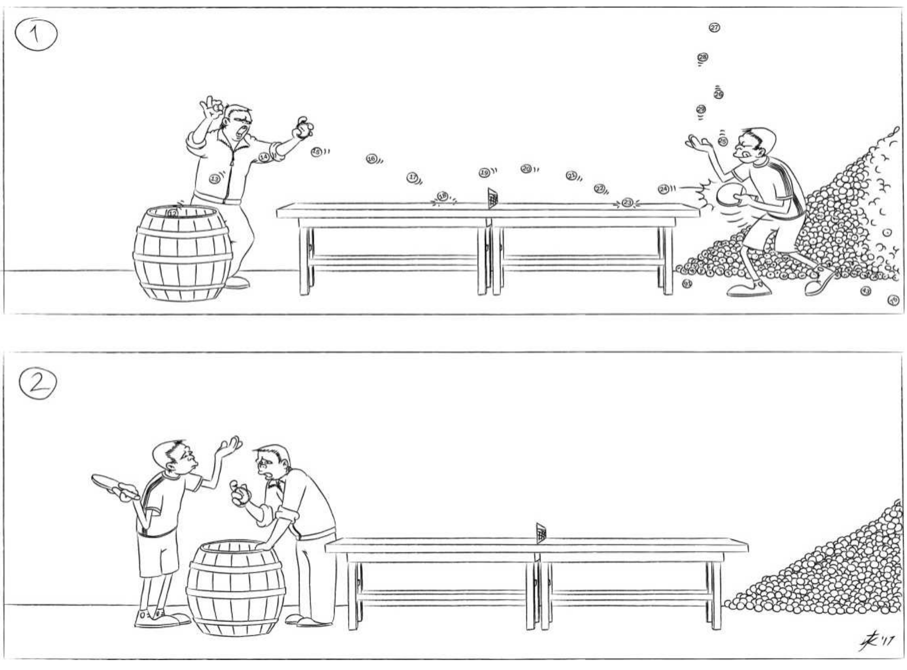
В схемата за турнира с 37 състезатели видяхме, че 4 пъти някой трябва да почива. Можем ли да предвидим колко пъти някой трябва да почива в турнир с N състезатели? Един красив алгоритъм, предложен от Мартин Гарднър в книгата му *Aha! Insight*, е следният:

- Намерете най-малкото число k, което е степен на двойката и надминава N. (В случая на $N = 37$ числото k е $64 = 2^6$).
- Намерете остатъка от делението на k и N (в нашия случай този остатък е 27).
- Превърнете остатъка в двоична система ($27_{10} = 11011_2$).
- Пребройте единиците в двоичното представяне. Това е и търсеният брой на почиващите в турнира.

Опитайте се да разберете защо този алгоритъм е приложим в общия случай.

Да продължим с не толкова приложна *пинг-понгова* задача.

3. Втора задача: *Колко топки за пинг-понг остават в бъчвата?*



Сега вече си представете безброй много топки, които са номерирани последователно (1, 2, 3, 4, 5, …и т.н.) и са поставени в улей една зад друга в *индийска нишка.* Улеят е свързан с *огромна* бъчва – по-голяма от всички, които сте виждали или които някой някога може да види … Към тези въображаеми обекти присъединяваме най-реален хронометър, който ще направи пълен оборот и ще спре след точно 1 мин. Сега извършваме мислено следната процедура.

Стъпка 1. Преди да остане 1/2 мин. до края на експеримента, пускаме в бъчвата топките с номера от 1 до 10 и вадим топката с най-малкия номер (т.е. топка номер 1).

Стъпка 2. Преди да остане 1/4 мин. до края на експеримента,пускаме в бъчвата топките с номера от 11 до 20 и вадим топката с най-малкия номер (т.е. топка номер 2).

Стъпка 3. Преди да остане 1/8 мин. до края на експеримента, пускаме топките с номера от 21 до 30 в бъчвата и вадим топката с най-малкия номер (т.е. топка номер 3).

Продължаваме в този дух, като увеличаваме скоростта си всеки път така, че да успеем да извършим поредната стъпка 2 пъти по-бързо от предишната.

Схванахте ли общата идея? Помислете колко време преди края на експеримента трябва да завършите прибавянето на топките с номера от 91 до 100 и изваждането на топка номер 10. А колко минути преди края трябва да извадите топка номер 100?

Ако вече сте готови с отговора, може да съобразите и **общата формула за стъпка** N.

Сигурно усещате (макар и мислено), че скоростта, с която действаме, ще надмине не само скоростта на звука, но и скоростта на светлината … Ще кажете, че не е възможно да се работи толкова бързо. Вярно е, но пък и кой е виждал безброй много топки за пинг-понг в действителност? За безкрайно огромна бъчва да не говорим …

Представете си сега нашият хронометър точно 1 минута след началото на експеримента. Поемете заслужена глътка въздух и помислете, преди да надникнете в бъчвата. Какво очаквате да видите там? (За да не се отметнете после, запишете предположението си.)

Едно разумно предположение

Какво има да му се мисли? – ще си каже всеки разумен човек. *На всеки ход слагам 10 топки и вадя една. След 100 хода в бъчвата ще има 900 топки, след 1 млн. хода – 9 млн. топки, след безброй ходове – 9 пъти по безброй (каквото и да значи това …)*

Дали е прав?

Едно разсъждение, противоречащо на интуицията

Ето как един математик би предизвикал разумния читател: *Вие твърдите, че виждате топки в бъчвата и то безбройно много. Кажете ми номера на поне една от тях! Може ли да е например 17? Изключено, тя бе извадена* $1/2^{17}$ *мин преди края на експеримента. Топка номер 1 000 000? И тя бе извадена* $1/2^{1\ 000\ 000}$ *мин преди края на експеримента. С други думи, каквото и число да кажете, топката с този номер е била вече извадена в някакъв интервал (точно определен от номера) преди края на експеримента. Значи бъчвата е празна!*

Като заключение

Задачата за топките за пинг-понг и бъчвата е публикувана за първи път от големия английски математик Джон Литълууд през 1953 г. в забележителната му книга *Математическа смес* с идеята да демонстрира наглед парадоксалната (поне неинтуитивна) природа на безкрайността.

Ако се чувствате объркани, не се безпокойте. Може би си струва да отбележим, че математици и философи и до днес спорят дали задачата на Литълууд е добре формулирана, как може да се изменят началните условия, какви доуточнявания трябва да се направят, за да има в бъчвата какъвто си искаме брой топки, възможна ли е тази тъй наречена *суперзадача* и т.н.

По-важното за нас е, че изследването на една проста наглед идея може да ни доведе до дълбоки и неподозирани прозрения и че в математиката „граница може да има само нашето въображение ... “

P.S. Казват, че пинг-понгът бил спортът на безумно смелите. Споменава се дори за смъртен случай (един от публиката умрял от скука). Сигурно не е знаел какви хубави задачи за пинг-понг има или поне не е наблюдавал моята игра ...

Използвани източници

1. Световно първенство по пинг-понг, `https://en.wikipedia.org/wiki/World_Championship_of_Ping_Pong`
2. Burger, E., Starbird, M. *Coincidences, Chaos, and All That Math Jazz*, W.W. Norton&Company, NY, 2005
3. Byl, J. *On resolving the Littlewood-Ross paradox*, Missouri Journal of Mathematical Sciences Vol.12, No. 1, Winter 2000: 42-47
4. Gardner, M. *Aha! Insight*, 1978, Scientific American, Inc./W.H.Freeman and Company, NY City
5. Littlewood, J.E. [1953]: *Littlewood's Miscellany* (ed. Bela Bollobas) Cambridge University Press, Cambridge, 1986

ЦВЕТНИ ЗАДАЧИ

Емил Карлов

– Черното цвят ли е?
– Разбира се, че е цвят.
– А бялото цвят ли е ?
– Да, цвят е.
– Тогава защо чернобелият телевизор да не е цветен?
Фолклор

Има задачи, в които цветовете се споменават още в условието на задачата. Да започнем с една такава задача.

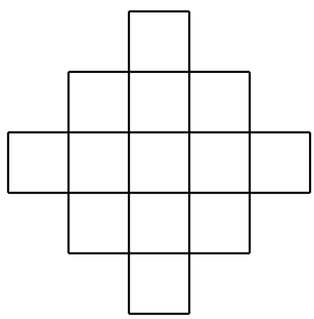
Задача 1. Том Сойер трябва да боядиса оградата около къщата на леля Поли с най-малко цветове, но леля Поли иска през 2 дъски, през 3 дъски и през 5 дъски цветовете да са различни. Най-малко колко цветове са нужни на Том Сойер?

Решение. Проверете, че ако Том Сойер оцвети първите три дъски в син цвят, вторите три дъски в червен цвят и третите три дъски в жълт цвят и т.н. ще изпълни заръката на леля Поли и няма да има едноцветни през две, през три и през пет дъски.

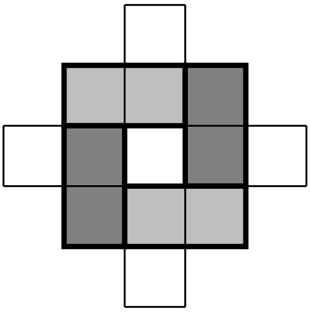
Два цвята не са достатъчни. Ако допуснем, че с два цвята е възможно да се изпълни условието на задачата, то ако първата дъска е синя, четвъртата дъска (през 2 дъски) трябва да е червена, петата дъска (през 3 дъски) трябва да е червена и седмата дъска (през 5 дъски) трябва да е червена. В този случай четвъртата дъска и седмата дъски са един цвят (червен), а се намират през две дъски една от друга.

По-интересни са задачите, в които и дума не се споменава за цвят, но използването на цветовете прави задачата видима и оттам лесна.

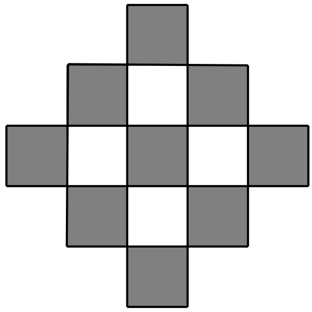
Задача 2. На чертежа е изобразена салфетка, направена от 13 единични квадратчета (клетки). Да се намерят: а) най-големия брой непресичащи се плочки домино, които могат да се вместят в тази салфетка; б) най-малкия брой плочки домино, които могат да скрият салфетката (плочките могат и да се препокриват).



Решение. а) Лесно е да поставим 4 плочки домино в салфетката (черт. 1). Ще докажем, че не може да поставим повече от 4 непресичащи се плочки домино вътре в салфетката. Оцветяваме шахматно в черно и бяло 13-те квадратчета (черт. 2). Всяка плочка домино, както и да я поставим, *лови* едно бяло и едно черно квадратче. Тъй като на салфетката има 4 бели квадратчета, на нея могат да се поставят най-много 4 плочки домино.



Черт.1



Черт. 2

б) Лесно можем да скрием салфетката с 9 плочки домино, ако например поставим върху петте непокрити клетки от черт. 1 по едно домино; така броят на плочките домино става 9.

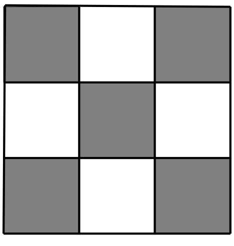
Не са ли много 9 плочки, като изглежда, че са достатъчни 7 плочки домино ($7.2 = 14 > 13$) или поне 8 плочки домино? Не, защото за деветте черни квадратчета на чертеж 2 са нужни 9 плочки домино!

От този вид са и следващите задачи.

Задача 3. Кубът $3 \times 3 \times 3$ на Рубик се състои от 27 единични кубчета, но без централното кубче (там стои механизмът на куба на Рубик). Да си представим, че всяко от единичните кубчета е от кашкавал и мишка яде последователно кубчетата, но след като свърши с някое от тях, яде следващото кубче, само ако то има обща стена с изяденото. Ако няма такова кубче, мишката спира. Ще може ли мишката да изяде всички 26 единични кубчета?

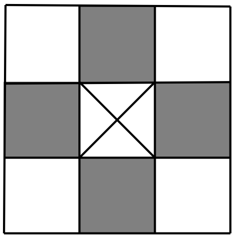
Решение. Оцветяваме шахматно единичните кубчета в куба на Рубик. Ето оцветяването по етажи.

1 етаж



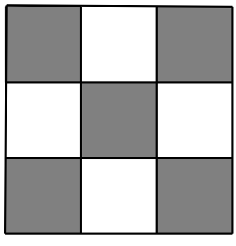
5 черни + 4 бели

2 етаж



4 черни + 4 бели

3 етаж



5 черни + 4 бели

Откъдето и да започне мишката, след бяло кубче трябва да изяде черно кубче, а след черно – бяло. Опитайте да преведете мишката през кубчетата и ще се убедите, че поне едно черно кубче остава неизядено. Това е така, защото белите кубчета са 12, а черните кубчета са 14. Дори да започне с черно кубче, мишката може да изяде най-много 12 бели и 13 черни, т.е. едно черно кубче ще остане неизядено.

Задача 4. Сто круши са подредени в редица, така че разликата в теглото на всеки две съседни круши в редицата е 1 грам. Да се докаже, че ако подредим стоте круши в редица от най-леката до най-тежката круша, то отново разликата в теглото на всеки две съседни круши в редицата няма да надхвърля 1 грам.

Решение. Допускаме, че ако подредим стоте круши от най-леката до най-тежката

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots \leq k_{100}$$

има две съседни круши k_m и k_{m+1}, които се различават в теглото си с повече от 1 грам. Например крушата k_m тежи 200 грама (a грама), а крушата k_{m+1} тежи 202 грама (повече от $a+1$ грама).

Всички круши до k_m включително боядисваме в зелен цвят (те са с тегло по-малко или равно на 200 грама), а останалите круши от k_{m+1} включително боядисваме в червен цвят (тези круши са с тегло по-голямо или равно на 202 грама). Връщаме всяка круша в първоначалната им редица, където не бяха подредени в нарастващ ред по тегло. Непременно ще има някъде в тази редица зелена круша до червена круша и тези две круши ще се различават в теглото си с повече от 1 грам, което не се допуска от условието на задачата. Противоречие.

Следователно, ако подредим крушите в нарастващ по теглото им ред, разликата в теглото на две съседни круши няма да надхвърля 1 грам.

Задача 5. Сто различни монети са подредени в редица. Иван и Мария играят следната игра. Пръв е Иван и взема една монета от края на редицата от 100 монети (или първата, или последната). Втора е Мария и тя взема една монета от края на редицата от останалите 99 монети (или първата, или последната монета). Така се редуват, докато Мария вземе последната монета. Да се докаже, че Иван може да вземе повече от половината или най-малко половината от стойността на всички монети в редицата.

Решение. Оцветяваме шахматно в бяло и черно стоте монети в редицата. Сумата от стойността на 50-те бели (Б) и 50-те черни монети (Ч) е равна на общата стойност на стоте монети.

Да допуснем, че Б$\leq$Ч. Тогава Иван ще принуди Мария да взема само оцветени в бяло монети. Ако оцветяването е например бяло, черно и т.н.

$$b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_{50}, c_{50},$$

Иван на първия ход взема последната черната монета c_{50} и в останалата редица от монети

$$b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_{50}$$

Мария може да вземе само бяла монета. Така Иван ще вземе всички черни монети, т.е. поне половината от стойността на всички монети.

Задача 6. Квадратно поле на електронна игра с размери 9×9 е разделено на 81 единични квадрата и в един от квадратите се е скрил танк. Пилотът не вижда танка, но с един изстрел може да порази квадратче. Ако танкът не е улучен, си стои в квадрата с прикритието. Ако пилотът улучи танка веднъж, танкът се премества в прикритие в съседно по страна квадратче, пилотът отново не го вижда и продължава да стреля по квадратите. Пилотът трябва два пъти да улучи танка, за да го унищожи. Най-малко колко изстрела са нужни, за да унищожи скрития танк?

Решение. Оцветяваме шахматно полетата в черно и бяло, като четирите ъглови квадратчета на полето 9×9 да са черни. Така получаваме 41 черни и 40 бели полета.

Пилотът стреля първо във всички бели полета (40 изстрела), след това стреля във всички черни полета (41 изстрела) и след това отново стреля по всички бели полета (40 изстрела). След тези 121 изстрела танкът е унищожен.

Ако танкът се крие в бяло квадратче, още при първите 40 изстрела по белите квадрати пилотът ще улучи танка и танкът ще се премести в черно квадратче. При следващите 41 изстрела по черните квадратчета, танкът ще бъде унищожен.

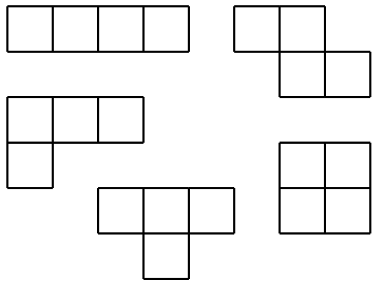
Ако танкът се крие в черно квадратче, ще бъде улучен при втората серия от 41 изстрела по черните квадрати и ще се премести в съседно бяло квадратче. При третата серия от 40 изстрела по белите квадратчета пилотът ще унищожи танка.

Остава да покажем, че изстрелите са не по-малко от 121. Покриваме 80 квадрата от полето 9×9 с 40 плочки домино и едно квадратче остава непокрито. Във всяка плочка на доминото пилотът трябва да стреля поне 3 пъти, ако иска да унищожи танка и поне веднъж трябва да стреля по непокритото квадратче. Това прави $3.40 + 1 = 121$ изстрела.

За да се убедите напълно, че оцветяването е добър метод, опитайте още няколко задачи за упражнение.

Задача 7. От шахматна дъска са премахнати две полета от двата края на един ред. Може ли останалите 62 квадратчета да покрием с 31 плочки домино? Ще се промени ли отговорът на въпроса, ако са премахнати две полета от двата края на един диагонал?

Задача 8. Можете ли да сглобите правоъгълник 4×5, като използвате по веднъж всяка от показаните фигури на чертежа?



Задача 9. Деветдесет и девет различни монети са подредени в редица. Иван и Мария играят следната игра. Пръв е Иван и взема две монети една след друга - първо една от края на редицата от 99 монети (или първата, или последната), а след това втората монета от края на редицата от 98 монети (или първата, или последната). Втора е Мария и тя взема само една монета от края на редицата от останалите 97 монети (или първата, или последната монета). Така се редуват, като Иван взема по две монети, а Мария по една монета. Мария взема последната монета. Да се докаже, че Иван може вземе повече от две трети или най-малко две трети от стойността на всички монети в редицата.

Задача 10. Сто круши са подредени в редица така, че разликата в теглото на всеки две съседни круши в редицата е 1 грам. Да се докаже, че можем да поставим крушите по две в 50 еднакви пакета, които можем да подредим в редица, така че разликата в теглата между всеки два съседни пакета в редицата да не е по-голяма от 1 грам.

Ученическо творчество

КОЛКОТО ПОВЕЧЕ, ТОЛКОВА ПОВЕЧЕ

Елена Вутова, Теодор Иванов

ПМГ „Иван Вазов“, Добрич

Да разгледаме втора задача от темата за пети клас на Пролетните математически състезания 2017.

Задача 5.2. В редица са написани само нули и единици, общо 5020 цифри. Извършва се следната операция: 25% от първоначалния брой нули се превръщат в единици и 25% от първоначалния брой единици се превръщат в нули. Оказва се, че след тази операция 65% от всички цифри са нули. Колко процента от цифрите първоначално са били нули?

Оказва се, че в условието има повече данни, отколкото са необходими за решението на задачата. Отговорът може да се намери и без да знаем общия брой на цифрите в редицата. Ето как е разсъждавал Теодор:

Решение на Теодор. Нека в началото нулите са $x\%$, а единиците са $y\%$. След това $25\%x\% = \frac{1}{4}x\%$ от нулите се превърнали в единици, а $\frac{1}{4}y\%$ от единиците се превърнали в нули. Последователно проверяваме:

$*$ при $x = 96$, $y = 4$, нулите стават $\frac{3}{4} \cdot 96\% + \frac{1}{4} \cdot 4\% = 73\%$;

$*$ при $x = 92$, $y = 8$ нулите стават $\frac{3}{4} \cdot 92\% + \frac{1}{4} \cdot 8\% = 71\%$;

$*$ продължаваме по същия начин и намираме, че при $x = 80$, $y = 20$ нулите стават $\frac{3}{4} \cdot 80\% + \frac{1}{4} \cdot 20\% = 65\%$.

Ясно е, че $x = 80$ е единственото решение, тъй като при $x > 80$ процентът на нулите е по-голям от 65, а при $x < 80$ този процент е по-малък от 65.

За съжаление, решението на Теодор не беше подробно записано на състезанието и затова остана недооценено. Както забелязвате, то не използва броя на цифрите (които по условие са 5020).

В обсъждането на задачата се включи целият отбор и Елена показа на петокласниците още едно решение (това, че си седми клас, не трябва да те спира да решаваш задачите за пети клас!).

Решение на Елена. Нека в началото общият брой на цифрите е S, като нулите са $x\%S$, а единиците са $y\%S$ на брой. Тогава

$$x + y = 100. \tag{1}$$

След прилагането на операцията нулите стават

$$25\% \cdot y\%\ S + 75\% \cdot x\%\ S = \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x\right)\%\ S.$$

По условие

$$\left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x\right)\%\ S = 65\%\ S,$$

откъдето следва, че $\frac{1}{4} \cdot y + \frac{3}{4} \cdot x = 65$, т.е.

$$y + 3x = 260. \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме, че $2x = 160$, т.е. $x = 80$. Това означава, че в началото единиците са били 80% от всички цифри.

Ето как задачата може да бъде решена и без да е даден общият брой цифри. Но, както казва Мечо Пух,

Колкото повече, толкова повече!

Благодарност

Нашата учителка по математика, Милена Аврамова, ни подтикна към идеята за тази статия, докато обсъждахме оживено решението на Тедо. Искрено ѝ благодарим за това, както и че успява винаги да ни насърчава в търсенето на верния отговор, не само в задачите, но и в живота!

МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „ОТ 1 ДО 100“ – ХИСАРЯ, 2017

Боянка Савова, Ивайло Кортезов

Сред състезанията в рамките на Майсторския клас „Черноризец Храбър“ (3-8 януари 2017) е отборното състезание „От 1 до 100“, чийто формат осигурява максимално активно участие на всички участници. Темата се състои от 25 задачи, отговорите на които са естествени числа, не по-големи от 100. За всяка задача се разпределят еднакъв общ брой точки поравно между отборите, които са дали правилен отговор на нея (ако има такива). В такъв смисъл най-ценни са верните отговори на задачите, решени от малко отбори. Съдържателните предизвикателства в забавна форма заинтригуват учениците и дават повод за по-нататъшна работа в лекциите и заниманията. Децата добиват умения за работа в екип, понеже успешното справяне с темата в рамките на ограниченото време предполага добър синхрон между всички участници – малки и големи. Цялата емоционална обстановка по време на състезанията спомага за още по-големия интерес на децата към математиката, стремеж към усвояване на нови знания и амбиция за още по-добро представяне занапред. Ето част от състезателната тема. Решете задачите, за които малката цифричка в скобките след номера ѝ е не по-голяма от номера на класа ви. След това може да си сравните отговорите с дадените в края на тази статия.

1. [5] Плътен шоколадов куб тежи 17 тона. Колко дециметра е страната на куба, ако се знае, че 1 cm^3 от същия шоколад тежи $2\frac{1}{8}$ грама?

2. [5] Естествените числа a и b са по-малки от 100 и $20a - 17b = 1$. Колко решения има задачата?

3. [5] Една четвърт от петокласниците в едно училище са със сини очи, а останалите – с кафяви. Половината от синеоките имат руси коси, а $\frac{2}{5}$ от тези, които са с кафяви очи, не са с руси коси. Колко са петокласниците с руси коси, ако е известно, че всичките петокласници са повече от 30 и не повече от 77?

4. [5] Цифрите на трицифрено число са различни, ненулеви и имат сбор 17. Колко са трицифрените числа с това свойство?

5. [5] Ачо и Вачо имат кутия с 30 бонбона. Те се редуват, като Ачо е пръв; който е на ход, изяжда 1, 2 или 3 бонбона. Печели този, който изяде последния бонбон. Колко бонбона трябва да изяде Ачо на първия си ход, за да е сигурен, че ще победи?

6. [5] На дъската е написано числото 17. Всяка минута изтриват дъската и записват ново число, което е сбор на 17 и произведението от цифрите на предишното число. Кое число ще бъде записано след 2017-тата минута?

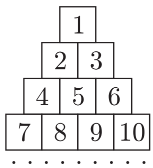
7. [5] Колко години от 2018 г. до края на XXI век може да се използва календар от 2017-та година?

8. [6] Числата Ч, Н, Г са естествени, не непременно различни и е изпълнено равенството

$$\text{Ч}^3 + \text{Н}^3 + \text{Г}^3 = 2017.$$

Пресметнете Ч + Н + Г.

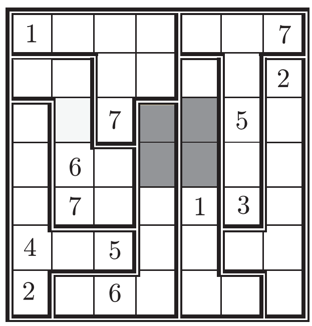
9. [5] Естествените числа са наредени по следния начин:



Означаваме с $a_{m,n}$ числото, което е на n-то място в m-тия ред. Ако $a_{m,n} = 2017$, на колко е равно $m + n$?

10. [5] Едно просто число ще наричаме *тройно просто*, ако може да се представи като сбор на три различни прости числа. Колко са тройно простите двуцифрени числа?

11. [5] В показания квадрат всеки ред, колонка и всеки участък, ограден с плътни линии, трябва да съдържа числата от 1 до 7. На колко е равен сборът от числата в четирите сиви квадратчета?



12. [6] Редицата $\{a_n\}$ е зададена по следния начин: $a_1 = 7$,
$a_n = -a_{n-1}$, когато n е четно число,
$a_n = a_{n-1} + 6$, когато n е нечетно число, по-голямо от 1.
Намерете a_{2017}.

13. [6] Кое двуцифрено число е 108 пъти по-голямо от сумата на останалите двуцифрени числа?

14. [6] Правоъгълникът на чертежа е разделен на 9 по-малки, в някои от които са означени лицата им. На колко е равно $x+y$?

14	6	y
	12	24
x		30

15. [7] Един хотел има n етажа. На всеки етаж има по $n+26$ стаи. Във всяка стая са настанени по двама души. Гостите в хотела са по-малко от 2017 и не по-малко от 1900. Колко етажа има хотела?

16. [6] Ако a, b, c са числа и $a \neq c$, означаваме

$$P(a,b,c) = \frac{a+b}{a-c}.$$

Намерете естественото число x, ако числата $P(x,20,16)$ и $P(x,20,17)$ съществуват и са цели.

17. [7] Две множества A и B, всяко съдържащо по 7 последователни естествени числа, имат точно един общ елемент. Сумата от числата на A е равна на a, а сумата от числата на B е равна на b. Пресметнете $|a-b|$.

18. [6] В квадрата $ABCD$ е избрана такава вътрешна точка P, че лицата на триъгълниците ABP, BCP, CDP, ADP, измерени в квадратни сантиметри, са четири различни прости числа. Най-много колко квадратни сантиметра може да е лицето на $ABCD$, ако е двуцифрено число?

19. [7] Да се пресметне за $x=16$ числената стойност на многочлена

$$P = x^{16} - 17x^{15} + 17x^{14} - 17x^{13} + \cdots + 17x^2 - 17x + 20.$$

20. [7] Смесих 1 литър $2a$%-ен оцет, 2 литра $4a$%-ен оцет и x литра вода. Получих a%-ен оцет. Намерете x.

Решения

1. *Отговор 20.* Имаме $17000000 : \frac{17}{8} = 8000000 = 200^3$, а 200 cm = 20 dm.

2. *Отговор 5.* Решенията са $(6;7)$, $(23;27)$, $(40;47)$, $(57;67)$ и $(74;87)$.

3. *Отговор 23.* Руси и синеоки са $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ от петокласниците, а руси и с кафяви очи са $\left(1-\frac{2}{5}\right) . \left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{20}$ от петокласниците. Следователно общият брой петокласници се дели на 8 и на 20 и понеже е между 29 и 77, той е 40. Русокосите сред тях са $\frac{1}{8} \cdot 40 + \frac{9}{20} \cdot 40 = 23$.

4. *Отговор 42.* Има 7 представяния на 17 като сбор от три ненулеви различни цифри: 1+7+9; 2+6+9; 2+7+8; 3+5+9; 3+6+8; 4+5+8; 4+6+7. Следователно търсеният брой е 7.3!=42.

5. *Отговор 2.* Ако някой завари 1, 2 или 3 бонбона, може да спечели веднага. Ако обаче завари 4, то не може да победи, а противникът може да го победи при следващия си ход. Така 4 е губеща позиция. Ако някой завари 5, 6 или 7 бонбона, той може да спечели, оставяйки противника в най-близката губеща позиция 4. Ако обаче завари 8, то не може да победи, а противникът може да го победи при следващия си ход. Така и 8 е губеща позиция. Следващите губещи позиции са 12 и 16. Тогава ако Ачо изяде два бонбона, ще остави Вачо в губещата позиция 16, а при следващите ходове ще го прати в позициите 12, 8, 4 и 0, т.е. ще победи.

6. *Отговор 24.* На дъската се появяват следните числа:

$$17 \to 24 \to 25 \to 27 \to 31 \to 20 \to 17 \ldots$$

Редицата е с период 6. Остатъкът при деление на 2017 с 6 е 1. Тогава след 2017-тата минута ще бъде написано същото число, както след първата минута.

7. *Отговор 8.* Проверете, че ако годината има остатък 2 или 3 при деление на 4, календарът ѝ ще се повтори след 11 години, а ако е с остатък 1 – след 6 години. Така подходящи години са $2017 + 6 = 2023$, $2023 + 11 = 2034$, $2034 + 11 = 2045$, $2045 + 6 = 2051$, $2051 + 11 = 2062$, $2062 + 11 = 2073$, $2073 + 6 = 2079$, $2079 + 11 = 2090$.

8. *Отговор 18.* Можем да считаме, че $Ч \leq Н \leq Г$. Тогава $Г^3 \geq 2017 : 3$, т.е. Г е 9, 10, 11 или 12.

Ако $Г = 9$, то $Ч^3 + Н^3 = 1288$ и $Н^3 \geq 1288 : 2$, т.е. $Н = 9$. Тогава $Ч^3 = 559$ – абсурд.

Ако $Г = 10$, то $Ч^3 + Н^3 = 1017$ и $Н^3 \geq 1017 : 2$, т.е. $Н = 8$, 9 или 10. Тогава $Ч^3 = 505$, 288 или 17 – абсурд.

Ако $Г = 11$, то $Ч^3 + Н^3 = 686$ и $686 \geq Н^3 \geq 686 : 2$, т.е. $Н = 7$ или 8. При $Н = 7$ получаваме решението $7^3 + 7^3 + 11^3 = 2017$, а при $Н = 8$ получаваме $Ч^3 = 174$ – абсурд.

Ако $Г = 12$, то $Ч^3 + Н^3 = 289$ и $289 \geq Н^3 \geq 289 : 2$, т.е. $Н = 6$ и $Ч^3 = 73$ – абсурд.

Окончателно $Ч + Н + Г = 7 + 7 + 11 = 25$.

9. *Отговор 65.* Номерът на реда е равен на броя на числата в него. В първите 63 реда има $63.64 : 2 = 2016$ числа, а 2017 е първото число на 64-тия ред, т.е. $m + n = 64 + 1 = 65$.

10. *Отговор 18.* Числото 2 не може да участва в сбора, защото сборът на трите различни прости числа ще е четно число. Имаме $3 + 5 + 7 = 15$, а следващият по големина сбор е $3 + 5 + 11 = 19$. Останалите прости двуцифрени числа са тройно прости:

$3+7+13=23$, $3+7+19=29$, $7+11+13=31$, $7+13+17=37$,

$7+11+23=41$, $7+13+23=43$, $7+17+23=47$, $3+7+43=53$,

$7+23+29=59$, $7+23+31=61$, $7+23+37=67$, $3+31+37=71$,

$7+23+43=73$, $19+29+31=79$, $23+29+31=83$, $419+29+41=89$,

$17+37+43=97$.

11. *Отговор 11.* Последователно намираме:

1						7
				7		2
		7			5	
7	6					
	7			1	3	
4	1	5			7	
2		6	7			

1						7
5				7	1	2
3		7	1		5	
7	6	1				
6	7			1	3	
4	1	5			7	
2		6	7			1

1				4	6	7
5	3	4	6	7	1	2
3		7	1		5	
7	6	1			2	
6	7			1	3	
4	1	5			7	
2		6	7		4	1

1	2			4	6	7
5	3	4	6	7	1	2
3	4	7	1	2	5	6
7	6	1			2	
6	7			1	3	
4	1	5			7	
2	5	6	7		4	1

1	2	3	5	4	6	7
5	3	4	6	7	1	2
3	4	7	1	2	5	6
7	6	1	3	5	2	4
6	7	2	4	1	3	5
4	1	5	2	6	7	3
2	5	6	7	3	4	1

12. *Отговор 7.* Редицата е 4-периодична: $7, -7, -1, 1, 7, -7, \ldots$, така че $a_{2017} = 7$.

13. *Отговор 45.* Сумата на всички двуцифрени числа е $(10 + 99).45$, а търсеното число е 109 пъти по-малко от нея, т.е. е 45.

14. *Отговор 47.* От пропорциите $\frac{6}{12} = \frac{y}{24}$ и $\frac{14}{x} = \frac{y}{30}$ следва $y = 12$ и $x = 35$.

15. *Отговор 21.* При $n \le 20$ гостите са най-много $2.20.46 < 1900$, при $n \ge 22$ те са поне $2.22.48 > 2017$, а при $n = 21$ броят им е подходящ.

16. *Отговор 18.* Понеже

$$\frac{x+20}{x-17} = 1 + \frac{37}{x-17}$$

и x е естествено, то е равно на 54, 18 или 16. Проверката сочи, че само при $x = 18$ числото $P(x, 20, 16) = \frac{x+20}{x-16}$ е цяло.

17. *Отговор 42.* Нека $A = \{m, m+1, \ldots, m+6\}$ и $B = \{n, n+1, \ldots, n+6\}$. Ако $m < n$, то $m + 6 = n \Leftrightarrow n - m = 6$. Следователно

$$|a - b| = |7m + 21 - 7n - 21| = 7\,|m - n| = 42.$$

18. *Отговор 96.* $S_{ABP} + S_{CDP} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{ADP} + S_{BCP} \neq 49$, докато $11 + 37 = 17 + 31 = 48$.

19. *Отговор 4.* $P(x) = (x - 16)(x^{15} - x^{14} + x^{13} - \cdots + x - 1) + 4$.

20. *Отговор 7.* $\frac{2a}{100} + \frac{2.4a}{100} = \frac{a.(3+x)}{100} \Leftrightarrow 10 = x + 3 \Leftrightarrow x = 7$.

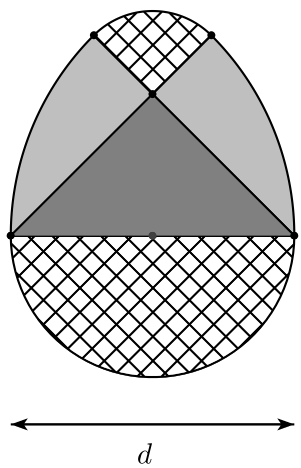
ВЕЛИКДЕНСКА ЗАДАЧКА

КОЛКО Е

ЛИЦЕТО

НА

ЯЙЦЕТО?



В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ

Предлагаме Ви темата от тренировъчното състезание на ППМГ „Акад. Никола Обрешков“, Бургас, което се проведе на 19 март 2017 г.

Йовка Николова

1. Числото, което е сбор на една стотица, десетици – два пъти повече от стотиците и единици – с 4 повече от десетиците, е разделено на 3.

Кое е полученото частно?

А) 53 **Б)** 42 **В)** 69 **Г)** 305

2. В кой от примерите е поставен правилно знака за сравнение?

А) $115 + 150.4 < 705$ **Б)** $217 - 115 - 15 > 114$

В) $808 - 64 : 8 : 2 < 801$ **Г)** $724 : 4 + 76 : 4 = 200$

3. Кошница с 10 еднакви ябълки тежи 1 кг. Наско изяде две ябълки и кошницата вече тежи 850 г. Колко грама тежи кошницата, ако в нея има една ябълка?

А) 325 **Б)** 300 **В)** 275 **Г)** 100

4. За Великден децата от детска градина „Златното ключе“ подредили боядисаните яйца в три големи купи. В първата и втората купа имало 96 яйца, във втората и третата – 156 яйца, а в първата и третата – 132 яйца.

Колко яйца имало в третата купа?

А) 192 **Б)** 26 **В)** 96 **Г)** 60

5. От сумата на всички нечетни числа от 1 до 99 включително е извадена сумата на всички четни числа от 1 до 99 включително.

Намерете получената разлика.

А) 50 **Б)** 60 **В)** 70 **Г)** 90

6. С колко броят на двуцифрените числа, записани с една четна и една нечетна цифра, е по-голям от броя на двуцифрените числа, записани с две различни четни цифри?

А) 10 **Б)** 25 **В)** 34 **Г)** 29

7. Новата пицария предлага промоция – първите пет души за деня получават безплатно парче. Затова петимата приятели Галин, Румен, Илия, Коко и Никола са вече там. Известно е, че Галин е пред Румен, но след

Никола. Илия и Никола не са един до друг, а Коко не е до никой от Галин, Илия и Никола.

Като знаете, че те са първите пет души за деня, определете кой от тях е по средата?

А) Галин **Б)** Никола **В)** Румен **Г)** Илия

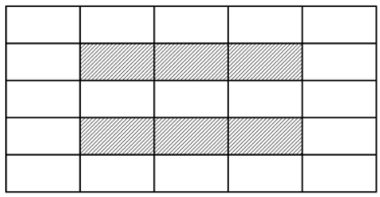
8. От хартиена лента Мира изрязала няколко квадрата. След това половината от тях тя разрязала на по четири по-малки квадратчета, а другата половина разрязала по диагонал на по два триъгълника. Преброила общо 174 фигури. Намерете броя на първоначално изрязаните квадрати.

А) 48 **Б)** 29 **В)** 58 **Г)** 87

9. Два автомобила се движат един срещу друг. Пет минути след срещата те са на 12 км и 500 м един от друг. Ако скоростта на единия автомобил е 1400 м/мин, намерете скоростта на другия автомобил в км/ч.

А) 60 **Б)** 78 **В)** 72 **Г)** 66

10. Правоъгълникът на чертежа е разделен на 25 малки правоъгълника, някои от които са защриховани. Колко са всички правоъгълници, съдържащи един защрихован правоъгълник и един или повече незащриховани правоъгълници?



А) 24 **Б)** 34 **В)** 28 **Г)** 32

11. Експресът Бургас – София спира на три междинни гари. Един ден, тръгвайки от София, кондукторът преброил 56 пътници във вагона първа класа. На първата гара от този вагон слезли няколко пътници, а 3 други се качили. На втората гара слезли 8 пътници, а се качили два пъти повече от слезлите на първата гара. На третата гара слезлите били с 11 повече от качилите се. В Бургас пристигнали 50 пътници. Колко са пътниците слезли на първата гара?

А) 8 **Б)** 12 **В)** 10 **Г)** 6

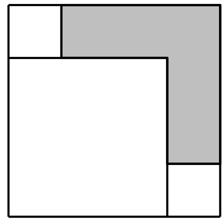
12. Мишо преброил колко общо са цифрите на всички числа от 5 до 710 включително. Кое число е получил?

А) 2017 **Б)** 2018 **В)** 2015 **Г)** 2014

13. Колко числа от 106 до 206 включително имат произведение на цифрите, равно на 0?

А) 28 **Б)** 24 **В)** 27 **Г)** 20

14. Квадрат със страна 12 см съдържа три квадрата, както е показано на чертежа. Обиколката на оцветената част е 40 см. Колко сантиметра е обиколката на най-малкото квадратче?



А) 4 см **Б)** 8 см

В) 12 см **Г)** 16 см

15. Работниците в една ферма са или земеделци, или пастири. След като един земеделец станал пастир, двата вида работници станали по равно. След това още трима земеделци станали пастири и тогава пастирите станали два пъти повече от земеделците.

Колко работници има във фермата?

А) 13 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 24

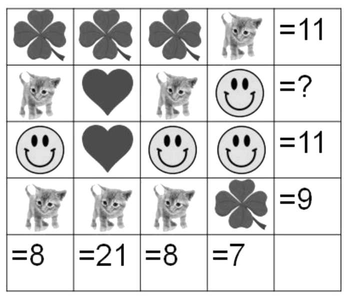
16. В ребуса $АБВ + ГДЕ = 1000$ на различните букви отговарят различни цифри и всички цифри са различни от нула.

Намерете сбора $А + Б + В + Г + Д + Е$.

17. Цветна градина с правоъгълна форма е засята с лалета, зюмбюли и нарциси. Едната им страна е 30 м. Лалетата заемат половината градина. Площта, засята със зюмбюли, е 600 кв.м, а нарцисите заемат четвъртинката от цялата градина.

Колко метра е дължината на оградата на тази градина?

18. Казват, че инженерите решават тази задача за 3 минути, архитектите – за 3 часа, а докторите – за 6 часа. Това, разбира се, е шега.
На колко е равен сборът на фигурите на втория ред?



19. В група от 40 четвъртокласници е проведена анкета за любимите им филми. Оказало се, че 21 деца харесват „Спящата красавица“, като 3 от тях харесват и „Пепеляшка“, 6 от тях харесват и „Красавицата и звяра“, а едно дете харесва и трите филма. Филмът „Пепеляшка“ има 13 фена, 5 от които имат по два любими филма.

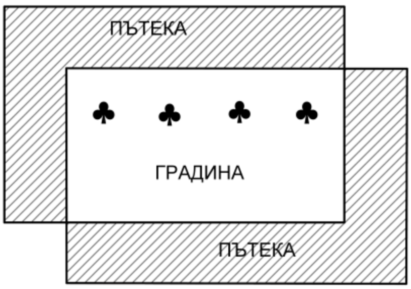
Ако знаете, че две деца не обичат да гледат филми, колко четвъртокласници са фенове на „Красавицата и звяра“?

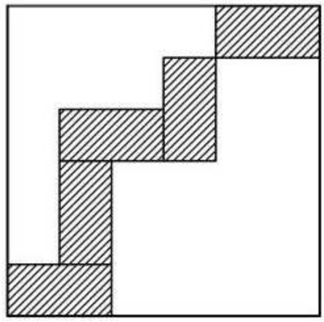
20. Ако разделим едно число на друго, ще получим частно 29 и остатък 20. Ако съберем двете числа, ще получим 920. На колко е равна разликата на тези числа?

Задача 1. Правоъгълна цветна градина е с дължина и ширина естествени числа в метри. Около градината има пътека с ширина 1 метър, която изглежда по показания начин.

А) Ако лицето на градината е 24 кв.м, колко квадратни метра най-малко и колко най-много може да е площта на пътеката?

Б) Ако лицето на градината е 24 кв.м и площта на пътеката е възможно най-малка, колко квадратни плочки със страна 2 дм ще са нужни за нейното покриване? Колко подови лампички на разстояние 50 см ще са необходими за осветяване на пътеката по външната ѝ обиколка?





В) В друга градина с форма на квадрат наредили пет декоративни правоъгълни плочки по показания начин. Ако лицето на градината е 36 кв.м, намерете размерите на правоъгълните плочки.

Задача 2. Ангел, Борис, Веско и Галин предали хартия на вторични суровини. Всеки получил банкнота от 2 лева. Купили си по парче пица на цена 1 лв. 60 ст. Оказало се, че всеки получил рестото си от 40 ст. по различен начин в монети от 20 ст., 10 ст. или 5 ст.

А) Покажете всички възможни начини за получаване на рестото с различен брой монети от 20, 10 или 5 ст.

Б) Ангел и Борис имали еднакъв брой монети. Веско и Галин също имали еднакъв брой монети. Какъв брой монети общо има в рестото на четирите момчета?

В) С парите, които им останали, те си купили общо 30 еднакви топчета (разбира се, пак им останали малко пари). Всяко дете взело поне по едно топче, като броят им бил различен. Оказало се, че топчетата на Галин били 2 пъти по-малко от общия брой на топчетата на Борис и Веско, а топчетата на Ангел били 2 пъти повече от общия брой на топчетата на Борис и Галин. Колко топчета е взел Ангел?

ОТГОВОРИ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Отговор	Б	Г	А	В	А
Задача	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Отговор	Г	Г	В	Г	Б
Задача	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Отговор	В	Б	Г	Б	В
Задача	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Отговор	28	220	13	17	860

Задача 1. А) Разглеждаме различните възможности.

Размери на градината	Лице на пътеката
1 м и 24 м	$2 + 2.(1 + 24) = 52$ кв.м
2 м и 12 м	$2 + 2.(2 + 12) = 30$ кв.м
3 м и 8 м	$2 + 2.(3 + 8) = 24$ кв.м
4 м и 6 м	$2 + 2.(4 + 6) = 22$ кв.м

Най-малката възможна площ е 22 кв.м, а най-голямата е 52 кв.м.

Б) Плочките са $2200 : 4 = 550$. Външната обиколка на пътеката е $2.(6 + 8) = 28$ м и тъй като лампичките се поставят през половин метър, те са $28.2 = 56$.

В) Квадратната градина има страна 6 м, а плочките – 2 м и 1 м.

Задача 2. А) Възможни начини за получаване на рестото с различен брой монети от 20, 10 или 5 ст. са показани в таблицата.

	по 20 ст.	по 10 ст.	по 5 ст.
1	2	0	0
2	1	2	0
3	1	1	2
4	1	0	4
5	0	4	0
6	0	3	2
7	0	2	4
8	0	1	6
9	0	0	8

Б) Две от момчетата са имали по 4 монети всяко, а другите две – по 5 монети всяко; общо 18 монети.

В) Ангел има 18 топчета, Борис – 5, Веско – 3, Галин – 4.

конкурсни задачи

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 2/2017 г.

Задача 1. Колко са тройките от естествени числа $(a;b;c)$, за които НОК$(a;b) = 200$, НОК$(b;c) = 500$ и НОК$(c;a) = 1000$?

Решение. В разлагането на всяко от числата a, b и c може да участват само простите множители 2 и 5.

Да разгледаме как може да се разпределят двойките. НОК$(a;b) = 200$ се дели на $2.2.2 = 8$, а НОК$(b;c) = 500$ не се дели на 8, следователно a се дели на 8, а b и c не се делят на 8. Но НОК$(b;c)$ се дели на $2.2 = 4$, следователно поне едно от числата b и c се дели на 4. Получаваме следните 5 възможни разпределения на двойките в разлагането на a, b и c:

a	2.2.2				
b	2.2	2.2	2	2.2	–
c	2.2	2	2.2	–	2.2

a	5.5	5	5.5	–	5.5
b	5.5	5.5	5	5.5	–
c	2.2.2				

По същия начин разбираме, че c се дели на $5.5.5 = 125$, а поне едно от числата a и b се дели на $5.5 = 25$, т.е. възможните разпрепределения на петиците са отново 5.

Следователно броят на двойките и петиците в разлагането на a, b и c може да се избере по $5.5 = 25$ начина; толкова са търсените тройки числа.

Задача 2. Правоъгълен паралелепипед $a \times b \times c$ е построен от $a.b.c$ еднакви единични кубчета, всяко от които е червено, зелено или жълто. Във всеки слой $1 \times b \times c$ (успореден на стената $b \times c$) има точно 9 червени, 12 зелени и няколко жълти кубчета. Във всеки слой $a \times 1 \times c$ има точно 20 зелени, 25 жълти и няколко червени кубчета. Да се намери най-малкият възможен обем на паралелепипеда.

Решение. Ще покажем, че обемът на паралелепипеда е равен най-малко на 180 кубчета (куб.ед.).

Тъй като във всеки слой $1 \times b \times c$ има точно 9 червени и 12 зелени кубчета, то в паралелепипеда броят на червените кубчета е $9a$, а броят на зелените е $12a$.

По същия начин, щом във всеки слой $a \times 1 \times c$ има точно 20 зелени и 25 жълти кубчета, то в паралелепипеда броят на зелените кубчета е $20b$, а броят на жълтите е $25b$.

Зелените кубчета са преброени по два начина, следователно

$$12a = 20b, \quad \text{т.е.} \quad 3a = 5b.$$

Оттук $a = 5k$, $b = 3k$, където k е естествено число. Броят на жълтите кубчета е $25b = 75k$, на зелените е $20b = 60k$, а на червените е $9a = 45k$; общо кубчетата са $180k$. Следователно обемът на паралелепипеда е най-малко 180 кубчета при $k = 1$; тогава $a = 5$, $b = 3$ и $c = 12$.

Паралелепипед $5 \times 3 \times 12$ лесно може да се сглоби от цветните кубчета така, че да е изпълнено условието. Например, първо може да се подреди блок $5 \times 3 \times 4$ от зелени кубчета, над него блок $5 \times 3 \times 5$ от жълти кубчета, а най-отгоре блок $5 \times 3 \times 3$ от червени кубчета.

Задача 3. Едно число наричаме *красиво*, ако се записва само с една цифра, но не е едноцифрено. Например, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 444 и 1111 са красиви числа със сбор 2017. По колко различни начина 2017 може да се представи като сбор на различни красиви числа? (Редът на събираемите в сбора не е от значение.)

Решение. Красивите числа $\overline{nn}$, $\overline{nnn}$, $\overline{nnnn}$ са равни на произведението на n съответно с 11, 111, 1111. Затова като групираме множителите с един и същ брой цифри в представянето на 2017 като сбор на красиви числа, ще получим равенството

$$2017 = 1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c,$$

където всяко от числата a, b и c е от 0 до $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ (тъй като събираемите са различни). Това равенство може да запишем във вида

$$183.11 + 4 = 11(101a + 10b + c) + b,$$

откъдето следва, че b дава остатък 4 при деление на 11, т.е. е 4, 15, 26 или 37. Ако запишем $b = 4 + 11k$, имаме $k = 0, 1, 2$ или 3. Като заместим в последното равенство и съкратим, получаваме

$$183 = 101a + 10b + c + k \iff 143 = 101a + 111k + c.$$

Оттук a е 1 или 0. При $a = 1$ намираме $k = 0$, т.е. $b = 4$ и $c = 42$. При $a = 0$ получаваме $k = 1$, т.е. $b = 15$ и $c = 32$.

За да получим търсените представяния, трябва да запишем всяко от получените числа b и c като сбор на различни събираеми от 1 до 9 (включваме и сборовете с едно събираемо). В първия случай

$$b = 4 = 3 + 1, \quad c = 3 + 4 + \cdots + 9 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 9,$$

т.е. има $2.2 = 4$ представяния. Във втория случай има 17 различни сбора $b = 15$ на числа от 1 до 9 и 13 различни сбора $c = 32$ (проверете!), т.е представянията са $17.13 = 221$. Общо получаваме $4 + 221 = 225$ представяния на 2017 като сбор на различни красиви числа.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2016/17 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Числата x, y, z удовлетворяват равенството

$$x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz = \frac{1}{2}.$$

Да се докаже, че поне едно от тях е равно на $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Да се докаже, че измежду четириъгълниците с дадени дължини на диагоналите и даден ъгъл между диагоналите най-малка обиколка има успоредникът.

Задача 3. Около кръгла маса са насядали гости, някои от които се познават. Всеки двама имат поне един общ познат. За всеки гост неговите познати и той самият седят на равни разстояния един от друг. (За различните хора тези разстояния може да са различни.) Докажете, че всички гости се познават.

Срокът за представяне на решенията на задачите е 30.08.2017 г.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ СЪСТЕЗАНИЕТО MATHCOUNTS

4. клас

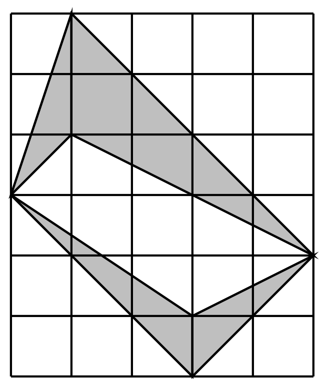
46. В математическо състезание лагер се включили 96 момичета и 54 момчета, като 68 от участниците тях били от трети клас, а останалите – от четвърти. Ако момичетата от трети клас били 40, колко момчетата от четвърти клас са участвали в състезанието?

47. В 2:58 часа цифрите на електронния часовник имат свойството, че втората от тях е с толкова по-голяма от първата, с колкото е по-малка от третата. След колко минути на часовника отново ще се появят цифри с това свойство?

48. Ани и Боби събрали един и същ брой точки на математическо състезание с 25 въпроса. Всеки верен отговор носи 5 точки, всеки грешен отговор намалява резултата с една точка, а за непосочен отговор не се прибавят или отнемат точки. Ани отговорила на всички въпроси, но 12 от нейните отговори се оказали грешни. Боби нямала нито един грешен отговор. На колко въпроса Боби не е посочила отговор?

49. Произведението на 13 и моята възраст (в години) е с 3 повече от сбора на утроената ми възраст след 3 години и увеличената 6 пъти възраст, на която ще съм след 6 години. На колко съм години?

5. клас



50. Да се намери лицето на оцветената фигура на чертежа, ако страната на квадратчетата е 1 см.

51. Кое е най-малкото кратно на 9 естествено число, в чийто запис участват само цифрите 1 и 3 (всяка от тях поне по веднъж)?

52. Цената на пътуване в едно такси се определя по следния начин: 2,25 лв. за първата $\frac{1}{2}$ миля и по 0,75 лв. за всяка следваща $\frac{1}{4}$ миля. Колко струва пътуване от 3 мили в това такси?

53. За футболен мач продали 100 билета. Цената на билет за възрастни е 13,50 лв, а билетът за ученици е с 20% по-евтин. Приходите от продадените билети са на стойност 1161 лв.

а) Колко ученически билета са продадени?

б) Приблизително колко процента от приходите са от продажбата на ученически билети?

6. клас

54. Да се пресметне стойността на израза $(5^{-1}+6^{-1})^{-1}$.

55. Колко килограма робуста трябва да се прибавят към 100 kg кафе, в което са смесени робуста и арабика в отношение 3 : 2, за да се получи смес, в която отношението на робуста и арабика е 4 : 1?

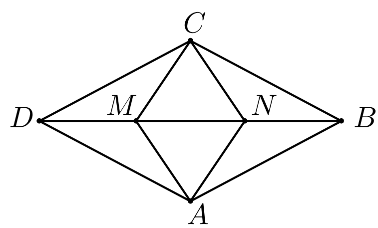
56. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(-7,4)$ и $B(13,-11)$. Точката P от отсечката AB я разделя в отношение $AP:PB=2:3$. Да се намерят координатите на точката P.

57. Фирма предлага бисквити в цилиндрични кутии. Проучване показало, че по-добре се продават кутии с по-голям даиметър. Ако обемът на кутията се запази и диаметърът се увеличи с 27%, приблизително с колко процента трябва да се намали височината на кутията?

7. клас

58. Иво направил седем пробни теста и пресметнал, че средноаритметичният му резултат е 80 точки. Ако средният резултат от първите три теста е 60, колко е средното аритметично на резултатите от последните четири теста?

59. Да се намери x, ако $16^{x+3}=2^{5x}$.



60. В ромб $ABCD$ са отбелязани точките M и N така, че $AM=AN=CM=CN=DM=BN=1$.

А) Ако $\sphericalangle BAD=140^\circ$, да се намери $\sphericalangle MCN$.

Б) Ако $\sphericalangle BAD=\sphericalangle AMC$, да се намери MN.

В) Ако $MN=AC$, да се намери $\sphericalangle ADC$.

за по-малките решения

на задачите от бр. 3/2017

31. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

7	·		=	1001
		+		
1001	−		=	777
		=		
333	+		=	?

Решение. Числото е

$$333 + 1001 : 7 + (1001 - 777) = 700.$$

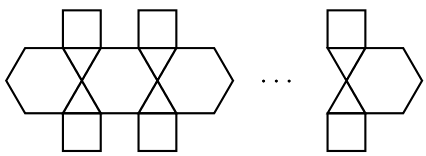
32. Правоъгълник е сглобен от четири квадрата, три от които са еднакви, а четвъртият има страна 33 см. Колко сантиметра е обиколката на целия правоъгълник?

Решение. Трите еднакви квадратчета имат страна $33 : 3 = 11$ см. Страните на правоъгълника са 33 см и $33 + 11 = 44$ см, а обиколката му е 154 см.

33. В планината джуджетата изкопали 2 пъти повече диаманти, отколкото изумруди, както и много рубини. Половината от всички диаманти и още 7 диаманта те подарили на Снежанка, а останалите 71 диаманта задържали за себе си. Снежанка получила и половината от изумрудите, а също и част от рубините. Тя забелязала, че нейните рубини са с толкова повече от нейните изумруди, с колкото са по-малко от диамантите ѝ. Общо колко диаманти, изумруди и рубини е получила Снежанка?

Решение. Половината от диамантите са $71 + 7 = 78$, т.е. диамантите са общо $78.2 = 156$, а Снежанка е получила 85 диаманта. Изумрудите са 78 и Снежанка получила $78 : 2 = 39$ изумруда. Рубините на Снежанка са $39 + (85 - 39) : 2 = 62$. Тя е получила общо $85 + 39 + 62 = 186$ скъпоценни камъка.

34. Фигурата на чертежа е сглобена от шестоъгълни, триъгълни и квадратни плочки със страна 1 см. Всички плочки – шестоъгълни, триъгълни и квадратни, са общо 1001. Колко сантиметра е обиколката на цялата фигура?



Решение. Ако махнем последния шестоъгълник, фигурата се разделя на групи от по 5 фигури (шестоъгълник, два триъгълника и два квадрта-та). Броят на тези групи е $(1001 - 1) : 5 = 200$. Квадратите са $2.200 = 400$, а шестоъгълниците са $200 + 1 = 201$. Обиколката на фигурата е равна на $4 + 201.2 + 400.3 = 1606$ см.

35. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

6	:		=	1,2
		+		
3,2	−		=	2,3
		=		
10	·		=	?

Решение. Търсеното число е

$$10.(6 : 1,2 + 3,2 - 2,3) = 59.$$

36. Коко, Чоко и Боко си купили кашон с бонбони и си ги разпределили, като Коко взел 30% от бонбоните. Бонбоните на Чоко били с 30% повече от бонбоните на Коко и с 32 повече от бонбоните на Боко. Колко бонбона е взел Чоко?

Решение. Коко е взел 30% от бонбоните, Чоко – $130\% \,.\, 30\% = 39\%$, следователно Боко е взел 31%. Следователно $39\% - 31\% = 8\%$ от бонбоните са 32 бонбона. Оттук бонбоните са $32 : 0,08 = 400$ и Чоко е взел $39\% \,.\, 400 = 156$ бонбона.

37. Коко получил плик с бонбони, от които $\dfrac{2}{3}$ били ягодови, а останалите – ментови. Той изял $\dfrac{1}{4}$ от ягодовите и $\dfrac{3}{4}$ от ментовите бонбони и останали 35 бонбони. Колко бонбони е получил Коко?

Решение. Коко изял $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{12}$ от бонбоните, а останалите $\dfrac{7}{12}$ са 35 бонбона. Общо бонбоните са били $35 : \dfrac{7}{12} = 60$.

38. В пещерата на планинския цар има съкровище от скъпоценни камъни. Известно е, че $\dfrac{7}{20}$ от скъпоценните камъни са рубини, $\dfrac{7}{16}$ от скъпоценните камъни са изумруди, а останалите са диаманти. Ако общият брой на скъпоценните камъни е двуцифрено число, колко диаманти има в съкровището на планинския цар?

Решение. Броят на скъпоценните камъни се дели на 20 и на 16, т.е. на НОК $(20, 16) = 80$, и е двуцифрено число. Следователно скъпоценните камъни са точно 80. Рубините са $\dfrac{7}{20}.80 = 28$, изумрудите са $\dfrac{7}{16}.80 = 35$, а диамантите са $80 - (28 + 35) = 17$.

39. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

6	:		=	−3
		+		
−7	−		=	2
		=		
−5	·		=	?

Решение. Търсеното число е

$$-5.(6 : (-3) + (-7 - 2)) = 55.$$

40. За кое положително число a е вярно равенството

$$\frac{a^{n-1}.\ a^{n+2}}{a^{n+1}.\ a^{n-2}} = \frac{(-2)^{12}.\ 6^{16} +\ 12^{15}}{12^{11}.\ 2^7 + (-48)^5.\ 6^6}?$$

Решение. Опростяваме $\dfrac{a^{n-1}.\ a^{n+2}}{a^{n+1}.\ a^{n-2}} = \dfrac{a^{2n+1}}{a^{2n-1}} = a^2$ и пресмятаме

$$\frac{(-2)^{12}.\ 6^{16} +\ 12^{15}}{12^{11}.\ 2^7 + (-48)^5.\ 6^6} = \frac{2^{12}.\ 2^{16}.\ 3^{16} + 2^{30}.\ 3^{15}}{2^{22}.\ 3^{11}.\ 2^7 - 2^{20}.\ 3^5.\ 2^6.\ 3^6} =$$

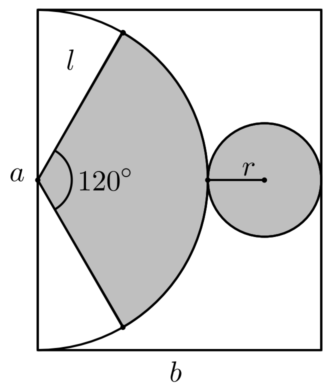
$$= \frac{2^{28}.\ 3^{16} +\ 2^{30}.\ 3^{15}}{2^{29}.\ 3^{11} -\ 2^{26}.\ 3^{11}} = \frac{2^{28}.\ 3^{15}\left(3 +\ 2^2\right)}{2^{26}.\ 3^{11}\left(2^3 - 1\right)} = \frac{2^2.\ 3^4.7}{7} = 2^2.\ 3^4$$

Следователно $a^2 = 2^2.\ 3^4 = \left(2.\ 3^2\right)^2 = 18^2$, т.е. a е 18.

41. На правоъгълен лист с размери a cm и b cm е начертана развивка на конус с образуващата l и радиус r, както е показано на чертежа. Развивката на околната повърхнина на конуса е сектор с ъгъл 120°.

а) Ако $a = 12$ cm, намерете l, r и b.

б) Намерете отношението $a : b$ при произволна стойност на a.



Решение. а) При $a = 12$ cm намираме $l = 6$ cm, $r = 2$ cm, $b = 10$ cm.

б) Имаме $l = \dfrac{1}{2}a$. Дължината на окръжността в основата е равна на

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi l = 2\pi r \Longrightarrow r = \frac{1}{3}l = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a.$$

Накрая $b = l + 2r = \dfrac{1}{2}a + 2 \cdot \dfrac{1}{6}a = \dfrac{5}{6}a$. Следователно $a : b = 6 : 5$.

42. В пещерата на планинския цар имало съкровище от 2017 скъпоценни камъни – рубини, изумруди и диаманти. Докато разглеждал съкровището, царят установил, че броят на рубините е с 20% повече от броя на изумрудите и с 25% по-малко от броя на диамантите и веднага заповядал на да се намерят изгубените камъни. Най-малко колко скъпоценни камъни са изгубени?

Решение. Да означим с x броя на изумрудите, които царят е намерил в съкровищницата. Рубините, които е намерил, са $1,2x$. Ако намерените диаманти са y, имаме $1,2x = 0,75y$. Следователно $y = 1,2x : 0,75 = 1,6x$. Общият брой на камъните, които царят е намерил, е $x+1,2x+1,6x = 3,8x$. Този брой е естествено число, следователно x се дели на 5. При $x = 5k$ общият брой на камъните е $19k$. Но $2017 = 19.106 + 3$. Следователно поне 3 камъка са изгубени.

43. Числата a, b, c са такива, че $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2ab + 4b + 6c - 13$. На колко е равен сборът $a + b + c$?

Решение. Равенството може да се запише във вида

$$(a - b)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 0.$$

Следователно $a = b$, $b = 2$ и $c = 3$, откъдето $a + b + c = 2 + 2 + 3 =7$.

44. Ефективността на автомобилните двигатели най-често се измерва с количеството гориво, необходимо за изминаване на 100 km. Разходът на гориво се различава съществено при шофиране в града и извън града. В табицата са предствени показателите за разход на гориво на един автомобил.

Разход (в града)	8,0 l / 100 km
Разход (извън града)	5,6 l / 100 km
Разход (комбиниран)	6,4 l / 100 km

А) С колко процента разходът на гориво при пътуване извън града е по-малък от разхода на гориво при движение в града при дадения автомобил?

Б) Комбинираният разход на гориво се пресмята по формулата

$$c = (1 - k)c_{град} + kc_{магистрала}$$

където $c_{град}$ е разходът в града, а $c_{магистрала}$ е разходът извън града. Да се определи коефициентът k.

В) Шофьор разполага с 40 лв. на седмица за закупуване на гориво. Той зарежда дизелово гориво с цена 2,60 лв. за литър. През всеки от петте работни дни шофьорът изминава средно 15 km в града, а в почивните дни планира пътуване извън града. На какво най-голямо разстояние от града може да се отдалечи той, като се върне отново в града, без да надхвърли планираната сума за гориво? Отговорете с точност до цяло число километри.

Г) В някои страни ефективността на двигателите на автомобилите се измерва чрез разстоянието, което може да се измине с 1 l гориво. Колко километра изминава с 1 l гориво даденият автомобил при комбиниран разход на гориво?

Решение. А) Разходът на гориво при пътуване извън града е с $\dfrac{8,0-5,6}{8}=30\%$ по-малък от разхода на гориво в града.

Б) Като заместим в дадената формула с $c_{град}=8$, $c_{магистрала}=5,6$ и $c=6,4$, получаваме уравнението

$$6,4=(1-k)8+5,6k \Leftrightarrow 2,4k=1,6 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}.$$

В) Необходимото гориво за петте работни дни е $5.\dfrac{15.8}{100}=6$ l. Ако търсеното разстояние е x km, за да го измине в двете посоки, шофьорът трябва да има $\dfrac{2x.5,6}{100}=0,112x$ l гориво. Цента на горивото за седмицата е $2,6(6+0,112x)$. Финансовите ограничения са

$$2,6(6+0,112x)\leq 40 \Leftrightarrow x\leq \frac{7625}{91}\approx 83,8.$$

Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е 83. Следователно шофьорът трябва да пътува най-много на 83 km от града.

Г) При комбиниран разход автомобилът изминава 100 km с 6,4 l гориво. Ако означим с x km разстоянието, което изминава с 1 l гориво, то

$$\frac{x}{100}=\frac{1}{6,4} \Leftrightarrow x=\frac{100}{6,4}=15,625,$$

т.е. с 1 l гориво могат да се изминат приблизително 15,6 km.

45. В пещерата на планинския цар има съкровище от скъпоценни камъни. Както и да избере 77 скъпоценни камъни от съкровището, сред тях има поне 19 рубини, поне 18 изумруди и поне 17 диаманти. Най-много колко са скъпоценните камъни в съкровището?

Решение. Да означим броя на рубините, изумрудите и диамантите съответно с a, b и c. Ако $a+b>60$, като изберем 77 скъпоценни камъка, между които са всички рубини и изумруди, няма да имаме 17 диаманти. Следователно $a+b\leqq 60$. По същия начин получаваме $b+c\leqq 58$ и $c+a\leqq 59$. Като съберем тези три неравенства, получаваме $2(a+b+c)\leqq 177$, откъдето следва, че цялото число $a+b+c$ е най-много 88. Например, при $a=30$, $b=29$ и $c=29$, условието на задачата е изпълнено и $a+b+c=88$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 4/2017 г.

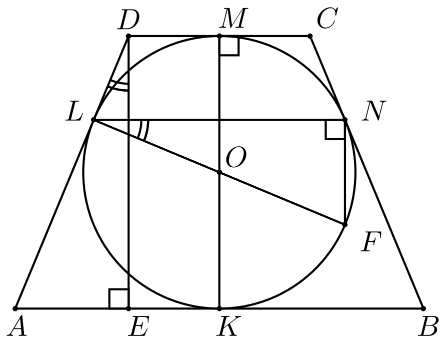
1. Г); **2.** Б); **3.** Г); **4.** А); **5.** В); **6.** А); **7.** Б); **8.** В); **9.** Г); **10.** А); **11.** В); **12.** Б); **13.** $\dfrac{b}{a}$; **14.** $\log_5 7 \leq x \leq 2$; **15.** $\dfrac{2p^2-q^2}{p}$; **16.** $\dfrac{b(2a+b)}{a+b}$; **17.** $a \in [-1; 1]$.

18. При $x \geqq 0$ полагаме $2^{\sqrt{x}} = y > 0$ и получаваме $y - \dfrac{2}{y} = 1$. Оттук $y^2 - y - 2 = 0$ и $y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Тъй като $y > 0$, получаваме $2^{\sqrt{x}} = 2$, откъдето $\sqrt{x} = 1$ и намираме $x = 1$.

19. От $S = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot h$ и $AB + DC = AD + BC$ следва $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot h$. Понеже $OK \perp AB$ и $OM \perp DC$, то $MK = h = 2R$. Построяваме диаметъра LF и $DE \perp AD$. От $\triangle ADE \sim \triangle FLN$ ($\sphericalangle E = \sphericalangle N = 90^\circ$ и $\sphericalangle ADE = \sphericalangle FLN$ като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене) следва, че

$$\frac{AD}{DE} = \frac{LF}{LN} \iff \frac{AD}{2R} = \frac{2R}{b} \iff AD = \frac{4R^2}{b}.$$

Аналогично $BC = \dfrac{4R^2}{b}$ и получаваме $S = \dfrac{8R^2}{b} \cdot 2R2 = \dfrac{4R^3}{b}$.



20. Допустимите стойности са $x^2 - 4y^2 \geqq 0$. От $x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0$ получаваме, че $x = 0$ или $x = 2y$ или $x = -2y$.

Ако $x = 0$, от допустимите стойности следва, че $y = 0$, което не е решение на системата.

Ако $x = 2y$, от първото уравнение получаваме $2y - y = 2$, т.е. $y = 2$ и решението е $(4;\ 2)$.

Ако $x = -2y$, от първото уравнение получаваме $-2y - y = 2$, т.е. $y = -\dfrac{2}{3}$ и $y = \dfrac{4}{3}$ решението е $\left(\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви две от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Софтуерно инженерство“

Подготвя специалисти по разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер за цялата област на компютърните приложения. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер; аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрола на качеството, консултанти в бизнес организации или в публичната администрация; преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и други.

Бакалавърска програма „Статистика“

Подготвя аналитични специалисти с умения за прилагане на методите на математическата статистика, съчетани със задълбочена подготовка по математика и информационни технологии. Учебният план осигурява фундаментални познания по основните дисциплини, свързани със стохастиката. Реализация като статистици, актюери в банки и застрахователни компании, консултанти и експерти в научни институти, преподаватели във висши учебни заведения и други.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 19.04.2017 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.