МАТЕМАТИКА

БРОЙ 6
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ИРАНСКА ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИЯ

Петър Бойваленков

На 7 септември 2017 г. в Созопол и в София се проведе дистанционно четвъртото издание на Иранската олимпиада по геометрия (ИГО). В олимпиадата се включиха ученици от повече от 40 държави. Българските ученици спечелиха 11 медала на това престижно състезание.

В групата за 7.–8. клас **Димитър Русев** (125 СОУ), **Петър Дойнов** (125 СОУ), **Милко Бакалов** (СМГ) и **Филип Тодоров** (125 СОУ) спечелиха сребърни медали.

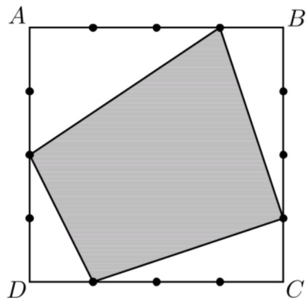
В групата за 9.–10. клас сребърен медал спечели **Светлин Лалов** (СМГ), а **До Виет Кьонг, Валери Ванков** и **Евгени Кайряков** (и тримата от СМГ) спечелиха бронзови медали.

В групата за 11.–12. клас **Кристиян Василев** (ПЧМГ), **Люба Конова** (СМГ) и **Атанас Динев** (ППМГ, Бургас) спечелиха бронзови медали.

Предлагаме Ви условията и кратки решения на някои от задачите.

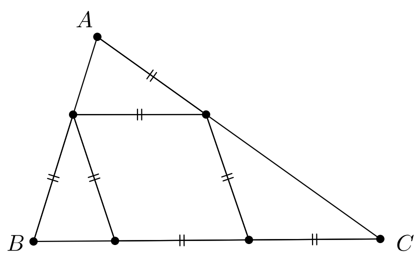
Задачи за 7.–8. клас (Elementary)

1. Квадратът $ABCD$ има дължина на страните 4 и всяка от страните му е разделена с три точки на равни части. Имаме право да изберем по една от точките върху всяка страна и да съединим избраните 4 точки последователно така, че да получим четириъгълник (един пример е посочен по-долу). На колко може да е равно лицето на този четириъгълник?
Напишете отговорите без доказателство.



Отговор. 6; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 10.

2. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, като се използват означенията на чертежа.



Отговор. $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

3. Даден е правилен петоъгълник $ABCDE$. Перпендикулярът към CD през точка C пресича AB в точка F. Да се докаже, че $AE + AF = BE$.

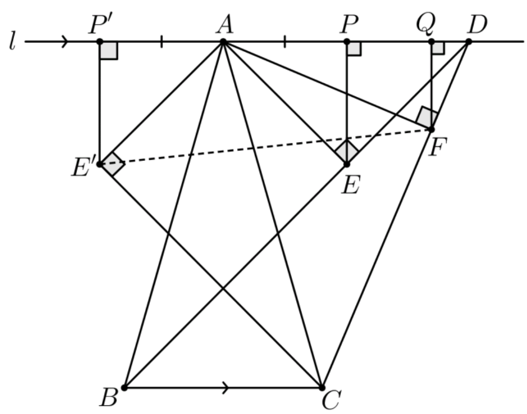
Упътване. Ако P е пресечната точка на AE и FC, докажете, че $BE = CE = PE$ и $AF = AP$.

4. В равнината са дадени 100 точки $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$, никои три от които не лежат на една права. За всеки три от дадените точки ще наричаме триъгълника с върхове тези точки *часовникарски*, ако индексите на върховете растат по посока на часовниковата стрелка. Възможно ли е броят на часовникарските триъгълници да е точно 2017?

Решение. Ако $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ са подредени по окръжност в посока обратна на часовниковата стрелка, броят на часовникарските триъгълници ще е 0. Започваме да местим точките. Когато точката P_i мине в различна полуравнина спрямо правата P_jP_k, триъгълникът $P_iP_jP_k$ ще смени вида си. Така броят на часовникарските триъгълници ще се промени с 1. Когато точките се подредят по часовниковата стрелка, този брой ще стане равен на $\dfrac{100.99.98}{6}$, което е повече от 2017. Следователно е имало момент, в който броят им е бил точно 2017.

5. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AB = AC$). Правата ℓ е успоредна на BC и минава през точка A. Нека D е произволна точка от ℓ. Нека E и F са петите на перпендикулярите от A съответно към BD и CD. Нека P и Q са петите на перпендикулярите към ℓ съответно от E и F. Да се докаже, че $AP + AQ \leq AB$.

Решение. Нека P', E' са симетричните точки на P, E спрямо симетралата на BC. Имаме $AP + AQ = AP' + AQ = QP' \leq FE' \leq AC = AB$.



Коментар. Българските участници се справиха успешно с първите три задачи. Предизвикателствата в темата бяха комбинаторната задача 4 и геометричното неравенство в задача 5. Последното затрудни и участниците от 9.–10. клас, като само Светлин Лалов представи пълно решение на задачата.

Задачи за 9.–10. клас ((Intermediate)

1. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Нека E и F са петите на височините, спуснати съответно от B и C. Да се докаже, че $CE - BF = \dfrac{3}{2}(AC - AB)$.

Решение. Като използваме, че $AE = \dfrac{1}{2}AB$, $AF = \dfrac{1}{2}AC$, имаме

$$\begin{aligned} CE - BF &= (AC - AE) - (AB - AF) = (AC - AB) + (AF - AE) = \\ &= \frac{3}{2}(AC - AB). \end{aligned}$$

2. Окръжностите ω_1 и ω_2 се пресичат в точките A и B. Права през B пресича ω_1 и ω_2 в C и D съответно. Точките E и F са избрани съответно върху ω_1 и ω_2 така, че $CE = CB$ и $BD = DF$. Нека BF пресича ω_1 в P и BE пресича ω_2 в Q. Да се докаже, че точките A, P и Q лежат на една права.

Решение. От равенствата

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle DBF = 180^\circ - \sphericalangle CBP = \sphericalangle CEP$$

$$\Longrightarrow \sphericalangle CEB + \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ + \sphericalangle QFD,$$

$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle CBE = \sphericalangle QBD = \sphericalangle QFD$$

$$\Longrightarrow \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ \Longrightarrow \sphericalangle BAP = \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ = \sphericalangle BAQ$$

следва, че A, P, Q са колинеарни.

3. Дадени са n $(n > 2)$ точки в равнината, никои три от които не лежат на една права. През всеки две от дадените точки е построена правата, която ги съединява, и е маркирана най-близката от останалите точка до построената права (точките са такива, че винаги изборът на точката, която се маркира, е единствен). Какъв е максималният възможен брой маркирани точки (в зависимост от n)?

Упътване. При $n = 3$ и $n > 4$ всяка от дадените n точки може да е маркирана (ако вземем правилен n-ъгълник и леко го деформираме така, че да изпълнява условието на задачата, всеки връх ще е най-близка точка за диагонала, свързващ двата му съседни върха). При $n = 4$ изпъкналата обвивка на точките може да е триъгълник или четириъгълник и във всеки от двата случая има най-много 3 маркирани точки.

4. Вж. задача 5 за 7.–8. клас.

5. Нека X и Y са точки от страната BC на триъгълника ABC, за които $2XY = BC$ (X е между B и Y). Нека AA' е диаметърът на описаната около триъгълника AXY окръжност. Нека P е пресечната точка на AX и перпендикуляра през B към BC, а Q е пресечната точка на AY и перпендикуляра през C към BC. Да се докаже, че допирателната през A' към описаната около триъгълника AXY окръжност минава през центъра на описаната около триъгълника APQ окръжност.

Упътване. Ако O е центърът на описаната около триъгълника APQ окръжност, а M и N са средите съответно на AP и AQ, имаме $\sphericalangle OMA = \sphericalangle ONA = 90^\circ$, т.е. $AMON$ е вписан четириъгълник. Трябва да докажем, че $\sphericalangle OA'A = 90^\circ$, а за целта е достатъчно $AMA'N$ да е вписан, т.е. $\sphericalangle A'XM = \sphericalangle A'NY$. Последното следва от подобието на триъгълниците $A'XM$ и $A'NY$.

Задачи за 11.–12. клас (Advanced)

1. Нека ω е вписаната в триъгълника ABC окръжност и нейният център е I. Нека ω се допира до BC в точката D. Правата DI пресича отсечката AC в точката X. Допирателната през X към ω (различна от AC) пресича AB в точката Y. Нека YI и BC се пресичат в Z. Да се докаже, че $AB = BZ$.

2. Дадени са шест непресичащи се две по две и външни една за друга окръжности с радиуси, не по-малки от 1. Да се докаже, че радиусът на окръжност, която пресича всичките шест окръжности, е най-малко 1.

3. Нека O е центърът на описаната около триъгълника ABC окръжност. Правата CO пресича височината през A в точката K. Нека P и M са средите съответно на AK и AC. Нека PO пресича BC в точката Y, а описаната около триъгълника BCM окръжност пресича AB в точката X. Да се докаже, че четириъгълникът $BXOY$ е вписан.

4. Окръжностите ω_1, ω_2 и ω_3 се допират до правата ℓ съответно в точките A, B и C (B лежи между A и C), като ω_2 се допира външно до другите две окръжности. Нека X и Y са пресечните точки на ω_2 с другата (т.е. различната от ℓ) обща външна допирателна на ω_1 и ω_3. Правата през B, перпендикулярна на ℓ, пресича ω_2 за втори път в точката Z. Да се докаже, че окръжността с диаметър AC се допира до ZX и ZY.

5. Сферата S се допира до дадена равнина. Нека A, B, C и D са четири точки в дадената равнина, такива че никои три от тях не лежат на една права. Нека точката A' е такава, че S се допира до стените на тетраедъра $A'BCD$. Аналогично се дефинират и точките B', C' и D'. Да се докаже, че точките A', B', C' и D' лежат в една равнина, която се допира до S.

Повече информация за ИГО може да намерите на официалния сайт `http://igo-official.ir/en`.

ЕДНО ЕЛЕМЕНТАРНО НЕРАВЕНСТВО С НЕЕЛЕМЕНТАРНИ СЛЕДСТВИЯ

Петър Попиванов

Както знаем, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}^1$ може да се вземе за дефиниция на $e^{i\varphi}$ в комплексна област. Тогава е налице следното твърдение:

Предложение 1. *Нека* $0 < r < 1$ *и* $\varphi \in \mathbb{R}^1$. *Тогава*

$$I = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})|^{-1} \geq 1. \tag{1}$$

Най-краткото известно ни доказателство на (1) се базира на използването на подходящи степенни редове. И така

$$\log I^2 = -6\log(1-r) - 4\log|1-re^{i\varphi}|^2 - \log|1-re^{2i\varphi}|^2.$$

Понеже

$$|1-re^{i\varphi}|^2 = (1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi = 1 + r^2 - 2r\cos\varphi,$$

то

$$\log I^2 = -6\log(1-r) - 4\log(1+r^2-2r\cos\varphi) - \log(1+r^2-2r\cos 2\varphi). \tag{2}$$

В този момента използваме тъждеството

$$\frac{\cos\varphi - r}{1+r^2-2r\cos\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\varphi. \tag{3}$$

То се доказва като се освободим от знаменателя $1+r^2-2r\cos\varphi$ и използваме тригонометричното равенство $2\cos\varphi . \cos n\varphi = \cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi$. Чрез интегриране по r при φ фиксирано намираме, че

$$\log(1+r^2-2r\cos\varphi) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi. \tag{4}$$

Понеже

$$\log(1-r) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n},$$

то от (2) и (4) заключаваме, че

$$\log I^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(3+4\cos n\varphi+\cos 2n\varphi) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(1+\cos n\varphi)^2 \geqq 0, \tag{5}$$

т.е. $I^2 \geqq 1 \Rightarrow I \geqq 1$.

Този резултата не е семоцелен. Още през 1896 г. Ж. Адамар и де ла Вале-Пусен доказаха, че следните твърдения (A) и (B) са еквивалентни.

(A) Нека $x \geqq 2$ и $\pi(x)$ означава броя на простите числа, ненадминаващи x. Например $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(10) = 4$. Твърди се, че

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1. \tag{6}$$

(6) наричаме асимптотичен закон за разпределението на простите числа.

Поради липса на място няма да дефинираме знаменитата дзета функция $\zeta(s)$ на Ойлер и Риман, а само ще споменем, че

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + g(s), \tag{7}$$

където $g(s)$ е аналитична функция при $\operatorname{Re} s > 0$, $s = \sigma + i\tau$. Като се използва дефиницията на $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ във вида на безкрайно произведение[1] лесно се вижда, че при $\sigma > 1$, $\tau \in \mathbb{R}$:

$$|\zeta(\sigma)(\sigma-1)|^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+i\tau)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2i\tau)| \geqq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{8}$$

Ето и твърдение (B).

(B) $\zeta(1+i\tau) \neq 0$ за всяко $\tau \in \mathbb{R}^1$, т.е. $\zeta(s)$ функцията няма нули върху правата $\operatorname{Re} s = \sigma = 1$ и има точно един полюс при $s = 1$.

Еквивалентността на (A) и (B) редуцира доказателството на (6) до проблем от теорията на аналитичните функции, а именно несъществуването на нули върху една права.

Доказателство на (B) въз основа на (7) и (8).

Нека допуснем, че $\zeta(1+i\tau_0) = 0$, $\tau_0 \neq 0$. Полагаме в (8) $\tau = \tau_0$ и правим граничен преход $\sigma \to 1$, $\sigma > 1$. Така добиваме

$$|\zeta'(1+i\tau_0)|^4 |\zeta(1+2i\tau_0)| \to +\infty, \tag{9}$$

което е абсурд, защото ζ, ζ' са аналитични около точката $1 + i\tau_0$, $\tau_0 \neq 0$.

Остава задачата да се докаже (1) без да се прибягва до редове, а само като се използват елементарни факти от теорията на комплексните числа. Нека читателят да опита да стори това.

---

[1] $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ при $\operatorname{Re} s > 1$, където произведението е по всички прости числа.

ДОМИНО ПОКРИТИЯ НА КВАДРАТНИ РЕШЕТКИ

Вълчо Милчев, Цветелина Карамфилова

Разгледани са домино покрития на квадратни решетки и perfect matchings на граф решетки. Доказана е връзка между броя на домино покритията за някои решетки. Като илюстрации са дадени и таблици за броя на домино покритията в отделните случаи. Резултатите за домино покритията са отнесени към преброяване на perfect matchings в граф решетка.

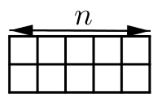
Домино покрития на квадратна решетка ще наричаме такива покрития с плочки 2×1 единични квадратчета, при което всяка домино плочка покрива точно две квадратчета на решетката, при това без да се застъпват отделните домино плочки.

Perfect matching е такова подмножество от ребра на графа, че от всеки връх излиза точно едно ребро от това подмножество. С други думи това е оцветяване на част от ребрата на графа по такъв начин, че от всеки връх да излиза точно едно оцветено ребро. Ясно е, че не за всеки граф това е възможно.

Забележка. Понякога в литературата понятията domino tilings и perfect matchings се използват и като синоними.

Домино покрития на решетка $2 \times n$ и решетка $L_2(n,k)$

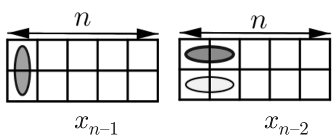
Дефиниция. Решетка $2 \times n$ наричаме квадратна решетка, която представлява правоъгълник с размери $2 \times n$, съставен от $2n$ единични квадратчета (фиг. 1).



Фиг. 1

Задача 1. Да се намери броят на различните начини, по които квадратна решетка $2 \times n$ може да се покрие с домина.

Решение. Да означим с x_n броя на различните начини, по които квадратна решетка $2 \times n$ може да се покрие с домина. Непосредствено се проверява, че $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$. Да разгледаме квадратната решетка $2 \times n$. Ако горната лява плочка е покрита с вертикално домино, то

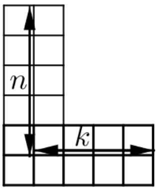


Фиг. 2

останалата част може да се покрие по x_{n-1} начина (фиг. 2). Ако горната лява плочка е покрита с хоризонтално домино, то под него също има хоризонтално домино и останалата част може да се покрие по x_{n-2} начина. Следователно $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geq 3$. Това означава, че $x_n = F_n$, т.е. числата на Фибоначи F_n ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 2$).

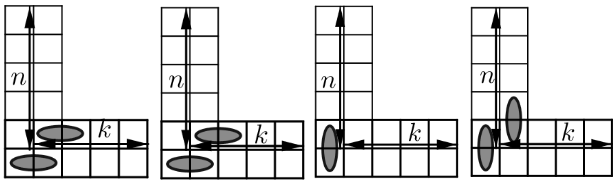
Дефиниция. Решетката, която е изобразена на фиг. 3, ще наричаме $L_2(n,k)$ решетка.

Задача 2. (Roberto Tauraso) Да се намери броят на начините, по които може да се покрие ъглова решетка $L_2\,(n,k)$ с домина.



$L_2(n,k)$

Фиг. 3



F_nF_{k-1} 0 $F_{n-1}F_k$ 0

Фиг. 4. $L_2\,(n,k) = F_nF_{k-1} + F_{n-1}F_k$

Решение. Да започнем от долния ляв ъгъл. На фиг. 4 са илюстрирани различните възможности. Ако поставим хоризонтално домино – броят на начините на покритие на останалата площ е равен на F_nF_{k-1}. Ако започнем с вертикално домино – останалата площ може да се покрие по $F_{n-1}F_k$ начина. Получаваме $L_2\,(n,k) = F_nF_{k-1} + F_{n-1}F_k$. В два случая имаме нула възможности за покритие на фигурата, защото в двете части остават по нечетен брой единични квадратчета.

Следствие. Да разгледаме решетка $2{\times}n{\times}(n{-}1)$ и означим за удобство $L_2(n,n-1) = a_n$ за $n \geq 2$. Тогава $a_n = F_nF_{n-2} + F_{n-1}^2$. Чрез формулата за числата на Фибоначи $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ намираме

$$a_n = \frac{1}{5}\,(-1)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1}$$

Получената формула (1) показва, че $\{a_n\}$ е линейно-рекурентна редица, която има характеристично уравнение $x^3-2x^2-2x+1 = 0$ и рекурентна зависимост $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}$.

В таблица 1 са поместени част от стойностите за F_n и a_n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
a_n	1	3	7	19	49	129	337	883	2311	6051

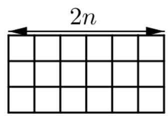
Таблица 1

Домино покрития на решетка $3 \times 2n$ и решетка $L_3\,(2n, 2k)$

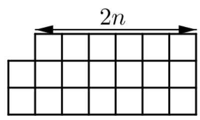
Да разгледаме квадратни решетки, които представляват фигури, съставени от ивици с ширина три единични квадратчета. Трябва да се покрият с домино плочки – без застъпване.

Дефиниция. Квадратна решетка $3 \times 2n$ ще наричаме решетка, която представлява правоъгълник с размери $3 \times 2n$, съставен от $6n$ на брой единични квадратчета (фиг. 5). Означаваме я като решетка A_n.

Разглеждаме само случаи $3 \times 2n$ – домино покрития са възможни само за квадратни решетки с четен брой единични квадратчета. Освен това решетката трябва да отговаря и на поне още едно условие, за да е възможно тя да бъде покрита без застъпване. Когато оцветим дадена решетката по подобие на шахматна дъска, тя трябва да бъде с равен брой черни и бели квадратчета.



Решетка A_n
Фиг. 5

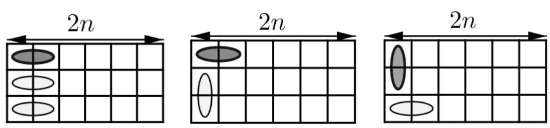


Решетка B_n
Фиг. 6

Задача 3. Да се намери броят на различните начини, по които квадратна решетка $3 \times 2n$ може да се покрие с домина.

Решение. Да означим с A_n броя на различните начини, по които квадратна решетка $3 \times 2n$ може да се покрие с домина. Директно се проверява, че за решетки 3×2 и 3×4 начините са съответно 3 и 11. Да означим с B_n броя на различните начини, по които квадратна решетка $3 \times (2n + 1)$ без едно ъглово квадратче може да се покрие с домино (фиг. 6).

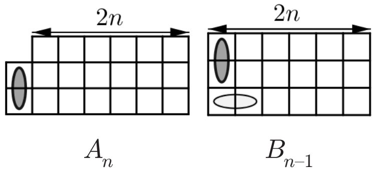
Нека горното ляво квадратче на решетката $3 \times 2n$ е покрито с хоризонтално домино (фиг. 7). Ако квадратчето под него също е покрито с хоризонтално домино, за долните две квадратчета имаме единствена възможност и в този случай останалата част може да се покрие по A_{n-1} начина. Когато квадратчето под него е покрито с вертикално, останалата част може да се покрие по B_{n-1} начина. Нека горното ляво квадратче да е покрито с вертикално домино. За долното ляво квадратче сега има единствена възможност – да е покрито с хоризонтално домино и останалата част може да бъде покрита по B_{n-1} начина. Следователно $A_n = A_{n-1} + 2B_{n-1}$.



A_{n-1} B_{n-1} B_{n-1}

Фиг. 7. $A_n = A_{n-1} + 2B_{n-1}$

Да разгледаме сега квадратна решетка $3 \times (2n + 1)$ без горното ляво квадратче. На фиг. 8 са илюстрирани начините, по които може да се покрие квадратчето под това липсващо квадратче и връзката $B_n = A_n + B_{n-1}$.



Фиг. 8. $B_n = A_n + B_{n-1}$

От равенствата $A_n = A_{n-1} + 2B_{n-1}$ и $B_n = A_n + B_{n-1}$ получаваме

$$A_n = A_{n-1} + 2B_{n-1} = A_{n-1} + 3A_{n-1} - A_{n-2} = 4A_{n-1} - A_{n-2}.$$

Следствие. Да разгледаме двете редици $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$. Те са линейно-рекурентни и можем да изведем експлицитни формули.

1) Редицата $\{A_n\}$, където $A_1 = 3$, $A_2 = 11$ и $A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2}$ при $n \geq 3$, има характеристично уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$. Неговите корени са $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Общият член има вида $A_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. От равенствата $c_1 + c_2 = 1$ и $c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = 3$ намираме $c_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$, $c_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ и формулата

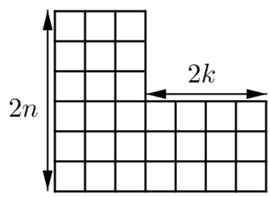
$$A_n = \frac{1}{6}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(3-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]. \tag{2}$$

2) За редицата $\{B_n\}$ намираме $B_1 = 4$, $B_2 = 15$ и $B_n = 4B_{n-1} - B_{n-2}$, $n \geq 3$. Тази редица има същото характеристично уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$. Аналогично получаваме формулата за общия член

$$B_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]. \tag{3}$$

Следват резултати за решетка $L_3\,(2n, 2k)$, което е развитие на идеята на Roberto Taurаso [1] *за L-решетки.*

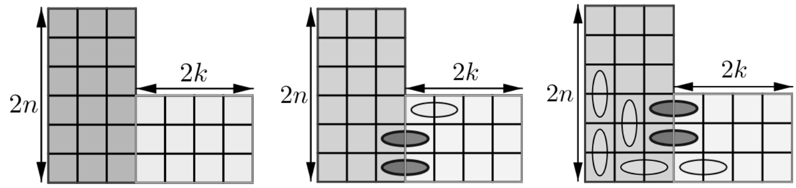
Дефиниция. $L_3\,(2n, 2k)$ решетка ще наричаме квадратна решетка с форма на прав ъгъл с размери $3 \times 2n \times 2k$, изобразена на фиг. 9.



Фиг. 9. $L_3\,(2n, 2k)$

Задача 4. Да се намери броят на начините, по които може да се покрие решетка $L_3\,(2n, 2k)$ с домина $n \geq 2$, $k \geq 1$.

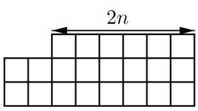
Решение. Решетка от дефинирания вид $L_3\,(2n, 2k)$ може да се покрие с домина без застъпване, защото тя е съставена от две правоъгълни решетки, които могат да се покрият с домина. Ще използваме означенията и резултатите в предишните задачи. Ако разделим решетка $L_3\,(2n, 2k)$

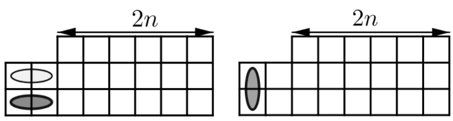


A_nA_k $C_{n-1}B_{k-1}$ $B_{n-2}B_{k-1}$

Фиг. 10. $L_3(2n, 2k) = A_nA_k + C_{n-1}B_{k-1} + B_{n-2}B_{k-1}$

на два правоъгълника – хоризонтален $3 \times 2k$ и вертикален $3 \times 2n$, заключаваме, че е възможно само четен брой домина да покриват квадратчета едновременно и от двете части – нула или две домина. При това, когато домината са две, те трябва да са съседни. Трите случая с ненулеви резултати са показани на фиг. 10. Тук C_n е броят на начините, по които може да се покрие с домина решетката, изобразена на фиг. 11 – това е решетка $3 \times (2n + 2)$, от която са премахнати две квадратчета, както е посочено на чертежа. Получаваме, че $L_3\,(2n, 2k) = A_nA_k + C_{n-1}B_{k-1} + B_{n-2}B_{k-1}$.





A_n B_n

Фиг. 11

Фиг. 12. $C_n = A_n + B_n$

За числата A_n и B_n вече изведохме формули. Ще изведем формула и за C_n. Ако поставим първото домино в долния ляв ъгъл хоризонтално,то над него също ще има хоризонтално домино и останалата част от решетката вече $3 \times 2n$ ще може да покрием по A_n начина. Ако покрием лявото долно квадратче с вертикално домино, то останалата част ще може да се покрие по B_n начина (фиг. 12). Следователно $C_n = A_n + B_n$, а оттук при $n \geq 3$ намираме $C_n = 4C_{n-1} - C_{n-2}$, $\{C_n\} = \{2, 7, 26, 97, \ldots\}$ и

$$C_n = A_n + B_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]. \tag{4}$$

Задача 5. (Crux Mathematicorum, Vol. 42(3), 2016, Problem 4128, В. Милчев и Цветелина Карамфилова). Да означим с A_n броя на домино покритията на решетка $3 \times 2n$, а с $L_3\,(2n, 2k)$ броя на домино покритията на решетка от вида, изобразен на фиг. 9, където $n \geq 2$ и $k \geq 1$ са естествени числа. Докажете, че $L_3\,(2n, 2n) = A_{2n}$.

Решение. Редицата от числа $L_3(2n, 2n)$, $n \geq 2$, има рекурентното равенство

$$L_3(2n, 2n) = A_n A_n + C_{n-1} B_{n-1} + B_{n-2} B_{n-1}.$$

Чрез намерените по-горе формули за A_n, B_n и C_n получаваме

$$L_3(2n, 2n) = \frac{1}{6}\left[(3+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^n + (3-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^n\right], \; n \geq 2. \tag{5}$$

Сега вече лесно доказваме, че

$$A_{2n} = \frac{1}{6}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \left(3-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)^{n} + \left(3-\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^{n}\right] = L_3(2n, 2n).$$

Експлицитната формула за числата $L_3(2n, 2n)$ показва,че тази редица има характеристично уравнение $x^2 - 14x + 1 = 0$ и нейната линейно-рекурентната зависимост е $L_3(n) = 14L_3(n-1) - L_3(n-2)$, $n \geq 3$. Тук закраткост е означено $L_3(n) = L_3(2n, 2n)$.

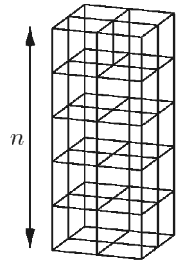
n	A_n	B_n	C_n	$L_3(2n, 2n)$
1	3	4	7	11
2	11	15	26	153
3	41	56	97	2 131
4	153	209	362	29 681
5	571	780	1 351	413 403
6	2 131	2 911	5 042	5 757 961
7	7 953	10 864	18 817	80 198 051
8	29 681	40 545	70 226	1 117 014 753
9	110 771	151 316	262 087	15 558 008 491
10	413 403	564 719	978 122	216 695 104 121

Таблица 2

Като илюстрация в таблица 2 са посочени домино покритията в отделните случаи чрез редиците $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ и $\{L_3(2n, 2n)\}$. Тя е изготвена с програма, написана от инж. Емил Райнис от Кърджали.

Изграждане на кула $2 \times 2 \times n$ с домино тухли

Разглеждаме първо задачи,в които имаме да „покрием“ кубична решетка с домино тухли – без застъпване. Началото е една конкурсна задача на реномираното списание „Квант“, Русия. В списанието вече е публикувано нейно решение. Тук е направено обобщение на тази задача. Открихме връзка с домино покритията $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, разгледани по-рано.



Кула $2 \times 2 \times n$
Фиг. 13

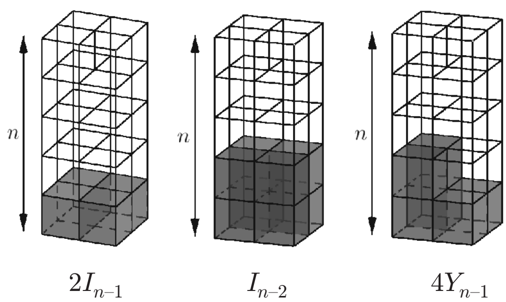
Задача 6. (Списание Квант, №3, 2016, M2425). Правоъгълен паралелепипед $2 \times 2 \times 100$ е разбит на тухли $1 \times 1 \times 2$. Докажете, че броят на начините да се направи това е точен квадрат. (При преброяването паралелепипеда не го въртим и не го преобръщаме).

Ще решим по-обща задача.

Задача 7. (Обобщение и допълнение на задача M2425.).

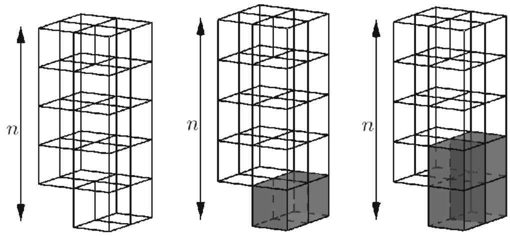
а) Да се намери броят I_n на различните начини, по която кула с размери $2 \times 2 \times n$, която има основа квадратна решетка 2×2 може да се покрие с домино тухли (фиг. 13);

б) Да се докаже, че $I_{2n} = A_n^2$ и $I_{2n-1} = 2B_{n-1}^2$, където A_n и B_n са редиците, определени с формули (2) и (3).



Фиг. 14. $I_n = 2I_{n-1} + I_{n-2} + 4Y_{n-1}$

Да разгледаме чертежите на фиг. 14. Първите две домино тухли може да поставим хоризонтално по два начина, затова броят на начините, по които може да се покрие решетката е равен на $2I_{n-1}$. Когато започнем с четири вертикални домино тухли, останалата част от кулата може да се покрие по I_{n-2} начина. Можем да започнем с едно хоризонтално и две вертикални домино тухли по четири начина, затова в този случай решетката може да се покрие по $4Y_{n-1}$ начина. Затова $I_n = 2I_{n-1} + I_{n-2} + 4Y_{n-1}$. Сега да разгледаме решетката Y_n, изобразена на фиг. 15. В началото можем да поставим една хоризонтална тухла или две вертикални тухли, затова $Y_n = I_{n-1} + Y_{n-1}$. Така получаваме $Y_n = 3Y_{n-1} + 3Y_{n-2} - Y_{n-3}$ и $I_n = 3I_{n-1} + 3I_{n-2} - I_{n-3}$.



Y_{n-1} I_{n-1} Y_n

Фиг. 15. $Y_n = I_{n-1} + Y_{n-1}$

n	I_n	n	I_n
1	2	6	1681
2	9	7	6272
3	32	8	23409
4	121	9	87362
5	450	10	326041

Таблица 3

С изведените две рекурентни зависимости е съставена таблица 3 за част от стойностите на I_n. Тази линейно-рекурентна редица има характеристично уравнение $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$. Неговите корени са $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ и $x_3 = -1$. Получаваме

$$I_n = \frac{1}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^n . \tag{6}$$

Сега намираме:

$$A_n^2 = \left\{\frac{1}{6}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(3-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\right\}^2 =$$

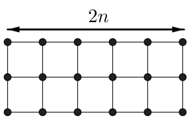
$$= \frac{1}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \frac{1}{3} = I_{2n},$$

$$2B_{n-1}^2 = 2\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\right\}^2 =$$

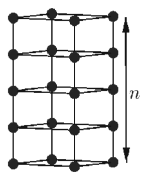
$$= \frac{1}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n} - \frac{1}{3} = I_{2n-1}.$$

Резултати за perfect matchings

Да разгледаме решетките и покритията с домино плочки по друг начин–чрез графи. В равнината центровете на квадратчетата в решетката са върхове, които са свързани с ребра със съседните квадратчета. Съседни са квадратчета, които имат обща страна. Отново имаме квадратна решетка, но домино плочките се „превръщат” в двойка върхове, свързани с ребро. В тримерното пространство центровете на кубчетата стават върхове на граф, които са свързани с ребра със съседни кубчета. Две кубчета са съседни, ако имат обща стена. Така домино тухлите стават двойка върхове, свързани с ребро. В този случай имаме пространствен граф решетка. По този начин получените резултати в предишните параграфи за домино покритията вече се отнасят за преброяване на perfect matchings.

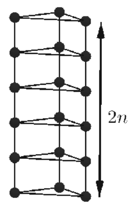


Фиг. 16



Граф $C_4 \times P_n$

Фиг. 17



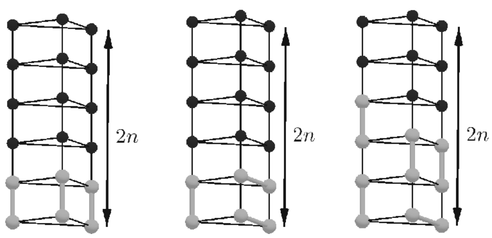
Граф $C_3 \times P_{2n}$

Фиг. 18

На фиг. 16 е посочена картината за решетка $3 \times 2n$ - броят се изразява с формула (2). За кула $2 \times 2 \times n$ е граф решетката $C_4 \times P_n$, изобразена на фиг. 17 броят е I_n.

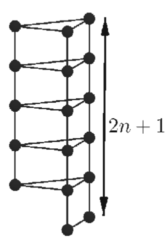
Задача 8. Да се намери броят perfect matchings за граф $C_3 \times P_{2n}$ (фиг. 18).

Решение. Ще означим с W_n броят на perfect matchings за граф $C_3 \times P_{2n}$. На фиг. 19 са илюстрирани трите случая на началното свързване (оц-



W_{n-1} $3W_{n-1}$ $3Z_{n-2}$

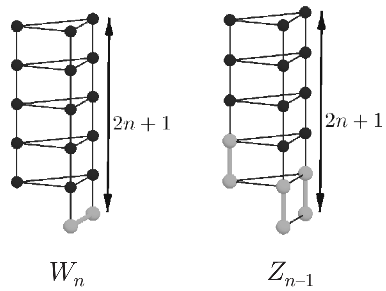
Фиг. 19. $W_n = 4W_{n-1} + 3Z_{n-2}$



Граф Z_4

Фиг. 20

ветяване). Когато започнем с три вертикални ребра, броят на останалите възможности за свързване са W_{n-1}. Да започнем с две хоризонтални ребра и едно вертикално ребро може по три начина, затова възможностите са $3W_{n-1}$. В третия случай броят възможностите за свързване е $3Z_{n-2}$. Тук Z_n е броят на perfect matchings за граф $C_3 \times P_{2n}$, на който са добавени два върха и съответните ребра (фиг. 20). Следователно $W_n = 4W_{n-1} + 3Z_{n-2}$. Да разгледаме Z_n. На фиг. 21 са посочени двете възможности за равенството $Z_n = W_n + Z_{n-1}$. От получените зависимости намираме $W_n = 5W_{n-1} - W_{n-2}$, $Z_n = 5Z_{n-1} - Z_{n-2}$.



Фиг. 21. $Z_n = W_n + Z_{n-1}$

Редицата $\{W_n\}$, където $W_1 = 4$, $W_2 = 19$ и $W_n = 5W_{n-1} - W_{n-2}$ при $n \geq 3$ има характеристично уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$. Чрез неговите корени намираме формулата

$$W_n = \frac{1}{14}\left[\left(7+\sqrt{21}\right)\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n + \left(7-\sqrt{21}\right)\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right].$$

Литература

1. Roberto Tauraso, A New Domino Tiling Sequence, Journal of Integer Sequences, Vol. 7, 2004.

2. Журнал Квант, 2016, 5-6.

3. Crux Mathematicorum, Vol. 42(3), 2016, Problem 4128.

4. http://oeis.org/, The On-Line Encyclopedia of Integer.

ХАРАКТЕРИСТИЧНИ СВОЙСТВА НА НЯКОИ МНОГОСТЕНИ

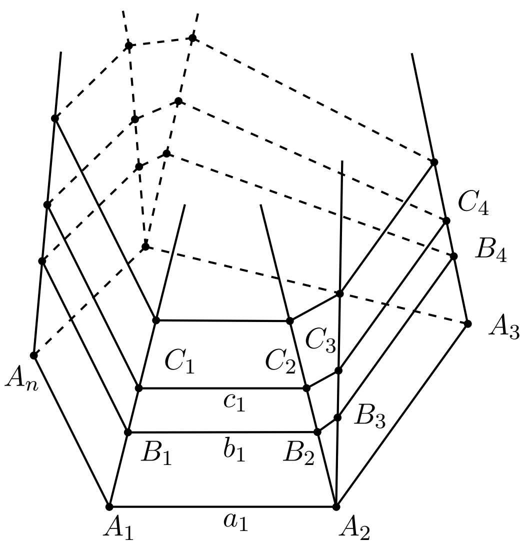
Пламен Пенчев

През 1980 г. на олимпиадата в Канада беше предложена следната задача:

Задача 1. *Паралелепипедът има следното свойство: произволно сечение, успоредно на негова стена, има периметър P, равен на периметъра на тази стена. Съществуват ли други изпъкнали многостени с това свойство?*

Ще приложим един метод за решаване на тази задача, който може да се използва и при получаването на други резултати.

Нека допуснем, че съществува изпъкнал многостен M с посоченото свойство и α е една негова произволна стена $\alpha = (A_1A_2\dots A_n)$. Да построим две сечения $B_1B_2\dots B_n$ и $C_1C_2\dots C_n$, успоредни на α по такъв начин, че между тях и α няма други върхове на многостена. Страните на $A_1A_2\dots A_n$ означаваме с $a_1, a_2, \dots, a_n$, а успоредните им от двете сечения – съответно с $b_1, b_2, \dots, b_n$ и $c_1, c_2, \dots, c_n$. Страните на сеченията, които не са успоредни на някоя страна на α (напр. B_2B_3 и C_2C_3), означаваме съответно с ℓ_i и m_i, $i = 1, 2, \dots, s$ (черт. 1). Съгласно допускането $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = P$.



Черт. 1

Ако $\dfrac{A_1C_1}{A_1B_1} = k$,

$$c_i = kb_i + (1-k)a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$m_j = kl_j$, $j = 1, 2, \ldots s$. Тогава

$$\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{j=1}^{s} m_j = \sum_{i=1}^{n} (1-k)a_i + \sum_{i=1}^{n} kb_i + \sum_{j-1}^{s} kl_j = (1-k)P + kP = P.$$

Да означим с L повърхнината, образувана от съседните за α стени. Получихме, че ако едно от сеченията на L с равнини, успоредни на α, има периметър, равен на периметъра на α, то всички сечения на L имат същия периметър.

Нека сега T_1 е най-близкият връх на M. Да допуснем, че има връх T_2, който се намира на по-голямо разстояние до α от T_1. Ако между тези два върха прекараме равнина $\beta \| \alpha$, то сечението на β с многостена M ще бъде изпъкнал многоъгълник, който се съдържа в многоъгълника, представляващ сечението на β с L. Това означава, че сечението на β с M ще има по-малък периметър от α (докажете!).

Следователно всички върхове на M, нележащи на α, лежат в равнина, успоредна на α. Тъй като това се отнася за всяка друга стена на M, лесно се установява, че всяка от стените му има не повече от четири върха (защо?). С непосредствена проверка се намира, че освен паралелепипеда, и правилният октаедър притежава посоченото свойство.

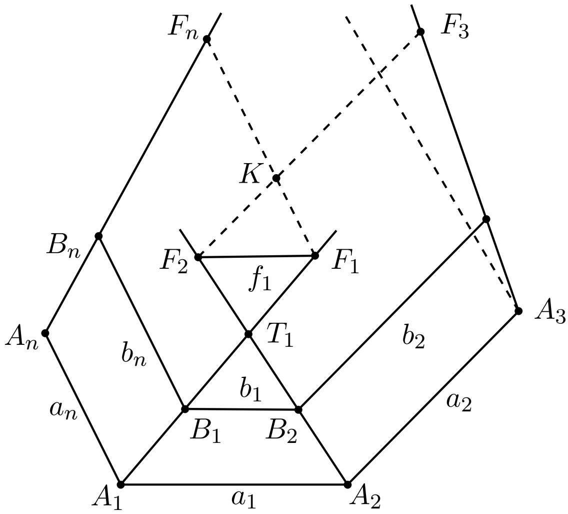
Да направим една бележка по решението на тази задача. В равенство (1) могат да настъпят промени, ако върхът T_1 образува с някой ръб на α триъгълна стена и да настъпят промени и в свойствата на сеченията на L. Да покажем, че в този случай крайните изводи не се променят.

Прекарваме сечение $\{F_1F_2 \ldots F_n\}$, успоредно на α, като върхът T_1 (Черт. 2) е единственият връх на M между това сечение и α. Ако положим $\dfrac{A_1F_1}{A_1B_1} = k$, отново имаме

$$f_i = (1-k)a_i + kb_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad f_1 = -[(1-k)a_1 + kb_1].$$

Означаваме с P' периметъра на $F_1F_2 \ldots F_n$, изключвайки отсечката $F_1F_2 = f_1$. Тогава

$$P' = \sum_{i=2}^{s} f_i = (1-k)\sum_{i=2}^{n} a_i + k\sum_{i=2}^{n} b_i = P - [(1-k)a_1 + kb_1] = P + f_1$$



Черт. 2

От друга страна за ΔKF_2F_1 е изпълнено $KF_2 + KF_1 > F_1F_2$. Следователно, ако P'' е периметърът на многоъгълника $KF_3 \dots F_n$, то

$$P'' = P' - KF_1 - KF_2 < P.$$

Но сечението на M с равнината $(F_1F_2F_n)$ е изпъкнал многоъгълник, съдържащ се в многоъгълника $KF_3 \dots F_n$, т.е. неговият периметър е по-малък от P. Случаят, когато има няколко върха, имащи свойството на T_1, е аналогичен.

Твърдението в тази задача по естествен път предполага поставянето и на други подобни задачи.

Задача 2. *Да се намерят всички изпъкнали многостени M такива, че каквото и сечение да прекараме, успоредно на произволна стена M, то сечението и стената са равнолицеви.*

Решение. При решаването на тази задача ще използваме следното

Твърдение 1. *Ако M е произволен изпъкнал многостен с n стени, S_1, S_2, $\dots$, S_n са съответните им лица, $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_n$ са вектори, перпендикулярни на съответната стена и насочени навън от многостена, такива че $\left|\vec{S}_i\right| = S_i$, за $i = 1, 2, \dots, n$, то $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots + \vec{S}_n = 0$.*

Да допълним означенията от предната задача, като лицата на стените от вида $A_1A_2B_2B_1$ и $A_1A_2C_2C_1$ ще означим съответно с S_i и S_i, а лицата на стените от вида $A_2B_3B_2$ и $A_2C_3C_2$ – съответно с P_i и P'_j, $j = 1, 2, \dots, s$. Векторите, съответстващи на тези стени, означаваме съответно с $\vec{S}_i$, $\vec{S}'_i$, $\vec{P}_j$ и $\vec{P}'_j$.

Като приложим Твърдение 1 за многостените $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_k$ и $A_1A_2\dots A_nC_1C_2\dots C_k$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i+\sum_{j=1}^{s}\vec{P}_j=0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{S'}_i+\sum_{j=1}^{s}\vec{P'}_j=0. \tag{3}$$

Освен това

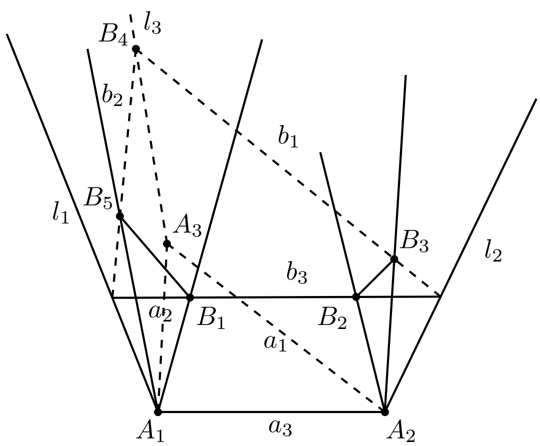
$$\vec{S'}_i=k\frac{(2-k)a_i+kb_i}{a_i+b_i}\vec{S}_i \quad \text{и} \quad \vec{P'}_j=k^2\vec{P}_j, \quad \sum_{j=1}^{1}\vec{P}_j=-\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i.$$

Заместваме в (3) и след преработка получаваме:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}\vec{S}_i=0. \tag{4}$$

От равенство (4) може да се направи извод, че ако едно сечение на повърхнината L с равнина, успоредна на $A_1A_2\dots A_n$ има същото лице, то и останалите такива сечения имат същото лице и решението на задачата не се различава по същество от това на задача 1. В крайна сметка обаче само паралелепипедът има исканото свойство.

Както и в задача 1, част от изводите, направени по-горе, няма да са в сила само при условие, че някой ръб на стената $A_1A_2\dots A_n$ образува триъгълна стена с върха T_1. Да покажем, че многостен с показаното свойство не може да има триъгълни стени (черт 3).



Черт. 3

Съгласно равенство (4)

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}\vec{S}_1+\frac{a_2}{a_2+b_2}\vec{S}_2+\frac{a_3}{a_3+b_3}\vec{S}_3=0. \tag{5}$$

Равенството (5) означава, че векторите $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ са компланарни, откъдето следва, че $\ell_1 \parallel (A_3A_2B_3B_4)$, $\ell_2 \parallel (A_1A_3B_4B_5)$ и $\ell_1 \parallel (A_1A_2B_1B_2)$, където ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 са пресечници на съответните двойки стени на многостена. Не е трудно да се забележи, че L съвпада с призматичната повърхнина, образувана от $(\mathrm{A_1A_2A_3})$ и правите ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, но многостените от този вид не притежават исканото свойство.

Задача 3. *Да се намерят всички изпъкнали многостени M със свойството: Ако a е произволна стена на M, то всеки две равнини $\alpha_1 \parallel \alpha$ и $\alpha_2 \parallel \alpha$ отсичат от M многостени, чиито обеми са пропорционални на разстоянията от α_1 и α_2.*

Решение. Да използваме следното

Твърдение 2. *Ако M е многостен, върховете на който са разположени върху две успоредни равнини, то е в сила равенството:*

$$V=\frac{1}{6}(S_1+S_2+4S)h, \tag{6}$$

където S_1 и S_2 са лицата на двете успоредни стени, h е разстоянието между тях, а S е лицето на сечението, което е успоредно на двете стени и разполовява разстоянието h.

Отново използваме черт. 1. Нека S_1, $\mathrm{S_2}$ и $\mathrm{S_3}$ са лицата на стените $\alpha=A_1A_2\dots A_n$, $\beta=B_1B_2\dots B_k$ и $y=C_1C_2\dots C_k$, h_1 е разстоянието между α и β, h_2 – между α и γ, а S_{12} и S_{13} са лицата на сеченията, успоредни на α и разполовяващи съответно h_1 и h_2.

Ако V_1 и V_2 са обемите на отсечените тела, то

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(S_1+S_2+4S_{12})h_1}{(S_1+S_3+4S_{13})h_2}=\frac{h_1}{h_2},\quad \text{т.е.}$$

$$S_2+4S_{12}=S_3+4S_{13}. \tag{7}$$

Нека δ е произволна равнина, успоредна на α. Разстоянията от α, β и γ до δ да означим съответно с h, h_1', и h_2', а обемите на многостените, заключени между двойките равнини съответно – (α,β), (β,δ) и (γ,δ) с V, V_1' и V_2'. Имаме: $h_1'=h_1-h$, $h_2^i=h_2-h$, $V_1^i=V_1-V$ и $V_2^i=V_2-V$. Тогава:

$$\frac{V_1'}{V_2'}=\frac{V_1-V}{V_2'-V}=\frac{V\frac{h_1}{h}-V}{V\frac{h_2}{h}-V}=\frac{h_1-h}{h_2-h}=\frac{h_1'}{h_2'}$$

Да прекараме две нови равнини β' и γ' съответно с лица S'_1 и S'_2 така, че разстоянията между двойките равнини (β, β') и (γ, γ') да са равни. Тогава равнината δ можем да изберем така, че сеченията с лица S_{12} и S_{13} да разполовяват и разстоянията (β', δ) и (γ', δ). Аналогично на равенството (7) получаваме:

$$S'_2 + 4S_{12} = S'_3 + 4S_{13} \quad \text{или} \tag{8}$$

$$S_2 - S_3 = S'_2 - S'_3. \tag{9}$$

Ако $X \,\|\alpha$ е произволно сечение на многостена с лице S и разстояние h до α, да означим $S = f(h)$, т.е. разглеждаме лицата на сеченията като функция на разстоянията им до α. Може да се докаже, че $f(h)$ е непрекъсната функция на h. Използвайки равенство (9), не е трудно да се види, че ако числата a, b и c образуват аритметична прогресия, то същото се отнася и за числата $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$ и, следователно, задачата се свежда до определянето на $f(h)$.

Нека първо да считаме, че $f(0) = 0$. Да разгледаме числата $x - y$, $x, x + y$. Тогава

$$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x). \tag{10}$$

Ако $x = y$ и получаваме: $f(2x) = 2f(x)$. Равенството (10) придобива вида:

$$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x) = f(2x) = f((x-y) + (x+y)). \tag{11}$$

Ако $x - y = u$, $x + y = v$, то

$$f(u) + f(v) = f(u+v). \tag{12}$$

Това е познатото уравнение на Коши и, следователно, $f(x) = px$, където p е константа. Сега ако $f(0) = S_1/S_1$ е лицето на α, то $f(h) = ph + S_1$, заместваме в (7) и получаваме:

$$Ph_1 + S_1 + 4p\frac{h_1}{2} + 4S_1 = ph_2 + S_1 + 4p\frac{h_2}{2} + 4S_1,$$

$3ph_1 = 3ph_2$, или $3p(h_1 - h_2) = 0$, откъдето поради $h_1 \neq h_2$ следва, че $p = 0$. Следователно, $f(h) = S_1$ и дадената задача се свежда до задача 2.

МАТЕМАТИЧЕСКА РАКЛА БЕЗ ПАРАДОКСИ СИ Е НАПРАВО ПАРАДОКС

Евгения Сендова

Геният е приятел на парадоксите.
Пушкин

„Да изровим“ няколко парадокса

Животът е пълен с парадокси до такава степен, драги читатели, че би било парадоксално да не се натъкнем на тях в ежедневието си. Сигурно сте попадали на обяви от типа: *Ако не можете да прочетете този текст, обадете се на специалист по очни болести на тел. 0885- 89-60-01.* Или сте получавали факс, в който се чете единствено: *Ако не получите този факс, обадете ни се по телефона.* Един път едва се разминах с падаща табелка, на която пишеше: *Пази се от падащи предмети.* Да не говорим за стените, върху които някой строго ви забранява да пишете (фиг. 1).

Фиг. 1

А когато попитах в книжарница за една прочута книга на Реймънд Смълян (фиг. 2), получих възмутен отговор: *Госпожо, щом Вие не знаете как се казва книгата, как очаквате аз да се сетя.* Не се осмелих да ѝ кажа, че втората книга на същия автор за парадоксите на ежедневието е озаглавена *Тази книга не се нуждае от заглавие.*

Фиг. 2

Сега е моментът да запитате кое точно наричаме *парадокс.* Думата е от старогръцки произход и означава *противоречащ на общоприетото мнение.* В Уикипедията намираме следното:

- *Неочаквано явление, което не съответства на представите ни.*
- М*нение, схващане, твърдение, което противоречи на здравия смисъл.*
- *Находчив израз, изграден върху две противоречиви мисли.*

Дори такива известни речници като Лонгман и Уебстър не са единодушни в дефинициите си. Според Лонгман *парадоксът е съждение, което* *изглежда глупаво или невъзможно, но съдържа някаква истина*, а в Уебстър пише, че *парадоксът е съждение, което макар и да е вярно, изглежда лъжливо и си противоречи*.

Да се обърнем към математиците за нещо по-конкретно. Един от най-добрите популяризатори на математиката, Мартин Гарднър, предлага следната класификация на парадоксите [1]:

∘ *твърдения, които изглеждат неверни, но всъщност са верни*;
∘ *твърдения, които изглеждат верни, но всъщност са неверни*;
∘ *последователност от наглед логически свързани твърдения, които водят до логическо противоречие (т. нар. погрешен извод)*;
∘ *твърдения, за които не може да се каже дали са верни или неверни*.

Да припомним сега няколко истории — първо няколко, които са документирани.

Още съвременниците на големия математик и философ Блез Паскал са цитирали с удоволствие извинението му в писмо до приятел, че писмото е станало прекалено дълго поради липса на време, за да го направи по-късо...

Ако ви се е случвало да сте ограничени в дължината на текста, който трябва да представите някъде, едва ли ще намерите горното извинение за прекалено парадоксално. Същото впрочем важи със същата сила и за устното представяне – Удроу Уилсън (американски президент от 1913 до 1921 г.) бил поздравен за съдържателните си речи, след което го запитали колко време отделя обикновено за подготовка. Вижте какво отговорил той и помислете дали това е парадокс: *Зависи от дължината на речта. Ако е десетминутна, ми трябват две седмици да я подготвя, ако е половинчасова – една седмица ми стига, ако мога да говоря колкото дълго искам, не ми трябва подготовка. Готов съм на мига!*

Продължаваме с чути истории – дори и да не са истина, биха могли да бъдат.

На лекция по математика един от аудиторията казал: *Мисля, че имате грешка в изчисленията.* Лекторът усмихнато отговорил: *В живота си съм грешил само веднъж – когато помислих, че съм сгрешил.*

Бъртранд Ръсел изразил убедеността си, че философът Джордж Едуард Мур е изъгал само веднъж в живота си – когато го запитали дали винаги е казвал истината. Тогава Мур се замислил за момент и казал: *Не.*

На парадокси се основават и много афоризми, анекдоти и карикатури. Ето няколко примера.

Великият ирландски писател Оскар Уайлд е казал: *Въпреки че изглежда парадоксално, животът имитира изкуството много повече, отколкото изкуството имитира живота.*

Станислав Йежи Лец споделя следните *невчесани* мисли в едноимен-

ната си книга:
○ *Не съм съгласен с математиката – сумата от нули е страшна величина.*
○ *Хората обичат такива мисли, които не ги карат да мислят.*
○ *Радиото е чудесно изобретение – само натискаш копчето и се възцарява тишина.*

Комикът Гручо Маркс е запомнен и с парадоксалните си изказвания:
○ *Моля приемете оставката ми – не искам да членувам в клуб, който ме е приел за член.*
○ *Телевизията допринася много за образованието ми. Всеки път, когато някой включи телевизора, аз отивам в другата стая да чета книга.*
○ *Има само един нчин да разбереш дали един човек е честен – попитай го! Ако ти каже* ***да****, ще знаещ, че е мошеник.*

А какво да кажем за един от комиксите на Фъстъчетата, в които Чарли Браун споделя с приятелката си Луси, че има нова житейска философия – да казва НЕ на всеки въпрос.

— *Да казваш НЕ на всеки въпрос*? — учудва се Луси.

— *Да, т.е. не, о-о-о, ти разруши новата ми философия* — въздъхва Чарли.

Първа порция десерт от задачи и въпроси

1. Помислете за парадокс, на който сте се натъквали в ежедневието си.

2. Опитайте се да преведете на английски език: *Това изречение на български е трудно да се преведе на английски.*

3. Разгледайте следните правила и обяснете къде се крие парадоксът във всяко от тях.
∗ Не използвай запетаи, там, където не е необходимо.
∗ Сказуемото трябва да се съгласуват с подлога.
∗ За онези непълни изречения.
∗ Да **се** не **разделят** възвратните глаголи в отрицателно-заповедна форма!
∗ Проверявайте написаното, за не пропуснете дума.
∗ Важно е да се използват „кавичките правилно“!.

4. Обогатете горния списък със свои парадоксални граматични правила.

5. Намерете или измислете парадоксални заглавия на книга, статия, помагало, стихотворение.

6. Баба Жени предложила на внука си Мариян да играят на ядец. Според правилата всеки си намисля желание и при счупване на ядеца играта приключва. Смята се, че победител е този, у когото остане лопатката от костта, и че намисленото му желание ще се сбъдне. Баба Жени си пожелала да спечели Мариян, но лопатката останала у нея. Спечелила ли е всъщност? Обяснете твърдението си.

Парадокс ли е това или не? – това е въпросът

Разбира се, нещо, което звучи парадоксално, често е резултат от недостатъчни математически познания или разсеяност. Да вземем например момченцето, което смятало с калкулатор и смаяно възкликнало: $\frac{1}{2}$ *е малко число,* $\frac{1}{4}$ *също е малко число, а гледайте* $\frac{1}{3}$ *колко голямо се получи!* (Къде е грешката в разсъжденията му?) Или пък учителят, който се оплакал: *По-голямата половина от моите ученици не знаят, че двете половини на всяко нещо са равни.* Да не говорим за разсеяния професор по математика: *Има три вида математици – тези, които знаят да броят, и тези, които не знаят.*

Даже прочутият парадокс за лъжеца [2] едва ли е правилно назован. Да припомним историята му – свързан е с името на един поет от VI век пр.н.е., Епименид, жител на остров Крит, който според легендата казал: *Всички критяни лъжат* (фиг. 3). Дълго време се смятало, че това е парадокс.

Фиг. 3

Ето как разсъждавали древните гърци (а вие се помъчете да откриете грешката в тези разсъждения). *Ако е вярно, че всички критяни лъжат, тогава Епименид казва истината, но той е критянин, а това противоречи на твърдението му. Следователно Епименид е излъгал. Ако пък твърдението на Епименид не е вярно, значи всички критяни казват истината и това важи и за Епименид. Пак се стига до противоречие с допускането, че е излъгал.* Значи излиза, че горното твърдение не може да бъде нито истина, нито лъжа. (Тук лъжата е идеализирана в смисъл, че ако някой лъже, той е честен лъжец и си лъже цял живот.)

Усетихте ли къде е грешката? Разбира се! (Да правим логическо отрицание беше едно от първите неща, на които ни учеше проф. Тагамлицки в лекциите си по диференциално и интегрално смятане.) Ако все още имате колебания, логическото отрицание на *Всички са* е *Поне един не е.* С други думи логическото отрицанието на *Всички критяни лъжат* не е *Всички критяни казват истината*, а *Съществува поне един критянин, който не* *лъже.* И така – няма парадокс. Твърдението на Епименид е лъжливо, т.е. той си е лъжец, но има критяни, които казват истината. Ако обаче разгледам твърдението *Аз лъжа*, парадоксът е налице. Наистина, ако лъжа, значи казвам истината (че лъжа). И обратно, ако казвам истината, значи лъжа (че лъжа).

Ако смятате, че вече лесно може да образувате логически отрицания, ето ви две предизвикателства:

○ *Това изречение се състои от шест думи.*

○ *Половината от присъстващите са глупаци.*

Впрочем приписват последната фраза на един лорд, член на английския парламент. Когато председателят го помолил да си вземе думите назад, за да не се налага да го изгони, лордът спокойно заявил: *Взимам си думите назад, половината от този парламент не са глупаци.*

Понякога едно съждение се превръща в парадокс поради това, че някоя дума в него изменя значението си с течение на времето. Не ви ли звучи парадоксално например фразата: *Изключенията потвърждават правилото* (лат. *Exceptio probat regulam*). Оказва се, че глаголът *probo* (лат.) има две значения – *доказвам* и *пробвам* [3]. Така че първоначалният смисъл на тази парадоксално звучаща днес фраза вероятно е бил: *Изключенията пробват (тестват) правилата.* Това вече не е парадоксално, нали?

Втора порция десерт от задачи и въпроси

7. Луси твърди, че отрицанието на $x < 10$ е $x > 10$. Права ли е? Защо?

8. Кое е логическото отрицание на следните твърдения:

○ *Всички спят.*

○ *Никой не внимава.*

○ *Някои ученици решиха тази задача.*

○ *Всички ученици в този клас са момичета.*

○ *Има поне един читател, който е стигнал дотук.*

○ *Не всички задачи са предизвикателни.*

Някои парадокси в науката

Макар да звучи странно, парадоксите играят съществена роля в развитието на голямата наука, защото тя търси налудничави (парадоксални) теории. Това се вижда и от думите на Нилс Бор, който реагирал по следния начин на доклад, изнесен от Паули и Хайзенберг: *Всички сме съгласни, че вашата теория е безумна. Въпросът е дали тя е достатъчно безумна, за да бъде вярна.*

Действително пътят на развитие на много научни области е белязан от преодолени парадокси. Редица идеи, които са изглеждали парадоксални, вече се приемат като съвсем нормални. Ето примери за „бивши“ парадокси:

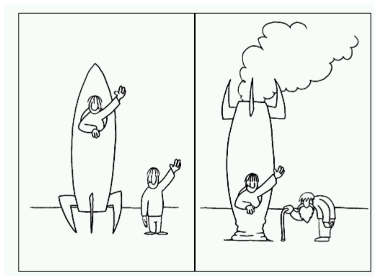
○ *Тежките предмети не падат по-бързо от леките.*

○ *Маларията се причинява от комарите.*

○ *Нечетните числа са толкова, колкото и естествените.*

Дори теорията на Айнщайн за относителността била посрещната от Ръдърфорд с думите: *Нашата работа не се нуждае от подобна теория.* (По това време Ръдърфорд вече бил световно известен физик.)

Сигурно сте чували, че идеята за относителността била илюстрирана от Айнщайн с парадокса за близнаците – ако единият от двама близнаци бъде изстрелян с ракета, колкото по-дълъг бъде полетът ѝ и по голяма скоростта ѝ, толкова по-голяма ще бъде разликата във възрастта на двамата братя при срещата им на Земята (фиг. 4).



Фиг. 4

Не случайно Харди казва: *Ако не беше Айнщайн, физическата картина на Земята щеше да бъде съвсем друга.* Най-големият парадокс в научен контекст е, че в математиката също има парадокси, отгоре на всичко – най-заплетените.

В своята история математиката е преживяла три кризи, свързани с разрешаването на парадокси. Но опитите за разрешаването им са довели до нови интересни и важни теории.

Първата криза се разразила във връзка с откритието, че страната на квадрата и диагоналът му не са съизмерими, т.е. че не могат да се измерят с една и съща мерна единица. Преодоляването на този парадокс е свързано с появата на ирационалните числа (даже наименованието им показва колко *неразумни* са изглеждали те на древните гърци).

Втората криза причинила доста проблеми на математиците от XVII и XVIII век във връзка с т.нар. *инфинитезимални* (безкрайно малки) величини. Парадоксът (да се приемат тези величини за нула и в същото време за различни от нула) бил разрешен от Коши със създаване на теорията за границите.

Последната (засега) криза (XIX и XX век) била толкова силна, че разклатила един от основните стълбове на математиката. Именитият немски логик Фреге тъкмо бил завършил книгата си *Основи на аритметиката* и вярвал, че е представил в нея съдържателна теория на множествата, която да послужи за основа на математиката. Книгата вече била приета за печат, когато Фреге получил писмо от Ръсел, в което бил изтъкнат следният парадокс на множествата: *Да разгледаме множеството от всички множества, които не принадлежат на себе си. Това множество принадлежи ли на себе си? Както и да отговорите, ще стигнете до противоречие* [1]. За да направи този парадокс разбираем за по-широка публика, Ръсел го формулирал по следния начин: *Ако един бръснар може да бръсне само онези, които не могат да се бръснат сами, може ли той да се обръсне*?

В своята теория на множествата Фреге позволявал съществуването на множество от всички множества, които не принадлежат на себе си. Както станало ясно от писмото на Ръсел, такова множество е противоречиво. Разбира се, Фреге не бил особено доволен (меко казано), но според Ръсел благодарение на стемежа да се преодолеят парадоксите *математиката станала по логична, а логиката – по-математична.*

В своята теория на типовете Ръсел направил решителна стъпка за разрешаване на парадоксите. Той систематизирал множествата в йерархия на типовете по такъв начин, че не било допустимо да се каже, че едно множество принадлежи (не принадлежи) на себе си. По такъв начин той елиминирал противоречието.

Накратко, винаги когато математиката изпитвала сериозна криза, била спасявана от нова идея, която възвръщала авторитета ѝ на непогрешима наука. Ето защо не бива да се страхуваме от парадоксите, а дори трябва да ги търсим с надеждата да разцъфне красива нова теория.

За да не остане непълен прегледът на математическите постижения, свързани с парадоксите, да припомним какво се крие зад прочутата теорема на Курт Гьодел *за непълнотата.* Можем да си я представим като вариант на парадокса на Епименид в чисто математически термини. Да разгледаме фразата: *Това твърдение не може да бъде доказано (т.е. то е недоказуемо).* Ако твърдението е невярно, следва, че то може да бъде доказано. А това означава, че е вярно и следователно е недоказуемо.

Парадоксът се дължи на това, че понятието *доказуемо* не е абсолютно. С други думи, в математическата логика не се говори за доказателство е някакъв абсолютен смисъл, а за *доказуемост в някаква система.* Нека S е дадена формална система, за която понятието *доказуемост в* S е добре дефинирано и нека тя е коректна в смисъл, че *всяко доказуемо в* S *твърдение е вярно.* Тогава фразата: *Това твърдение е недоказуемо в рамките на системата* S не е парадокс, а едно вярно твърдение, което не е доказуемо в рамките на собствената си система.

По този начин логикът Смълян (за когото стана дума в началото) дава идея за теоремата на Гьодел за непълнотата (доказана през 1931 г.). Тази теорема може да се интерпретира като формален аналог на парадокса на лъжеца. По-точно Гьодел успява да построи такова твърдение, че нито то, нито неговото отрицание може да бъде доказано в дадената система.

Съжалявам, драги читатели, че нямах достатъчно време, за да направя тази статия по-къса. Ако все пак сте стигнали дотук, бъдете спокойни, че това е последното изречение. Нали?

Трета порция десерт от задачи и въпроси

9. Помислете за вариации на парадокса на бръснаря (може да замените бръснаря с готвач, художник, робот).

10. Има много числа, които могат да бъдат наречени *интересни*, например *7 е просто, 28 е съвършено* и т.н.)
○ Мислите ли, че всяко естествено число е интересно? Опитайте се да докажете това чрез допускане на противното. Какво можете да кажете за най-малкото число, което не е интересно?
○ Модифицирайте горното твърдение за интересни и скучни хора. Можем ли тогава да твърдим, че има скучни хора?

11. Тук има три грешни твърдения.
$2 + 2 = 4$; $3 \times 6 = 17$; $8 : 4 = 2$; $13 - 6 = 5$; $5 + 4 = 9$.
Кои са те?

12. Парадокс ли е следният диалог?
Платон: *Това, което Сократ каже сега, ще бъде лъжа.*
Сократ: *Платон казва истината!*

13. Обяснете защо буквата O е била заместена с шестоъгълник в следното изречение: *Ак⬡ $\pi = 3$, т⬡ва изречение би изглеждал⬡ така.*

14. Напишете на едната страна на бяла карта следния текст: *Твърдението от другата страна на картата е истина.* На обратната страна на картата напишете: *Твърдението от другата страна на картата е лъжа.* Покажете картата на приятелите си и ги запитайте кое твърдение е вярно.

Литература

[1] Gardner, M. Aha! Gotcha – paradoxes to puzzle and delight, W. H. Freeman and Company, New York, 1995

[2] Martin, R. L. ed. The Paradox of the Liar, New Haven: Yale University Press, 1970.

[3] Goldenberg, E. P., Feurzeig, W. Exploring Language with Logo, The MIT Press, 1987, p. 170

[4] Hofstadter, D. R. Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern, Basic books, 1985

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2017 г. и бр. 1, 2 от 2018 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. В разследване на банков обир има седем заподозрени:

Атанас, с кафява коса и сини очи;
Борис, с руса коса и зелени очи;
Васил, с руса коса и кафяви очи;
Галя, с руса коса и кафяви очи;
Диана, с кафява коса и сини очи;
Емил, с кафява коса и кафяви очи;
Живка, с руса коса и сини очи.

Детективите Иван, Петър и Кирил знаят, че крадецът е един от заподозрените. След като разследвали случая, те обменили събраната информация.

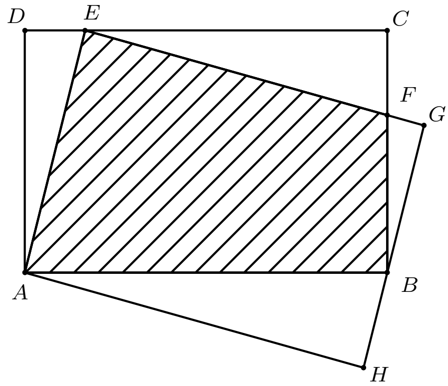
Иван: *Знам цвета на косата и цвета на очите на крадеца, но не мога да определя кой е той.*

Петър (без да чуе думите на Иван): *Знам цвета на косата, както и пола на крадеца, но не мога да определя кой е той.*

Кирил: *Първоначално знаех само пола на крадеца, но след вашите думи мога да посоча и името му!*

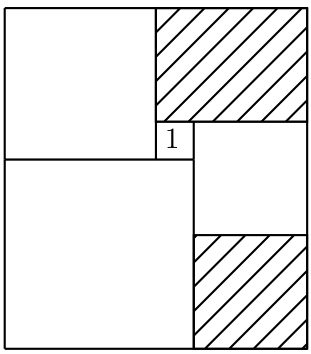
Ако детективите казват истината, кой е крадецът?

Задача 2. На чертежа правоъгълникът $ABCD$ и успоредникът $AEGH$ са разположени така, че точката E лежи на CD, а точката B лежи на GH.



Лицето на защрихования четириъгълник $ABFE$ е равно на сбора от лицата на четирите триъгълника на чертежа (ADE, CFE, BFG и ABH). Ако $DE = 20\%.CE$ и $BF = k\%.BC$, намерете k.

Задача 3. На чертежа е даден правоъгълник, сглобен от квадрат със страна 1 cm; три квадрата, чиито страни, измерени в сантиметри, са цели числа и два защриховани правоъгълника.



Сборът от лицата на защрихованите правоъгълници е 100 cm^2. Намерете размерите на дадения правоъгълник.

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2018 г.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Да се намерят целите неотрицателни решения (a, b) на уравнението

$$2017^a = b^6 - 32b + 1.$$

Задача 2. Правилният петоъгълник $ABCDE$ има център M. На отсечката MD е избрана точка $P \neq M$. Описаната окръжност около триъгълника ABP пресича отсечката AE в точките A и Q и пресича правата през P, перпендикулярна на CD, в точките P и R. Да се докаже, че $AR = QR$.

Задача 3. Дадено е множеството $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Да се намери максималното n, за което съществуват n различни подмножества на S, за всеки две от които има елемент на S, който не принадлежи на нито едно от тях.

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2018 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 4/2017 г.

Задача 1. Числата $x,\ y,\ z$ удовлетворяват равенството

$$x+y+z-2(xy+yz+zx)+4xyz=\frac{1}{2}.$$

Да се докаже, че поне едно от тях е равно на $\frac{1}{2}$.

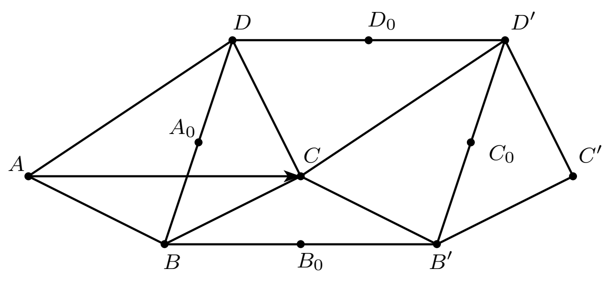
Решение. Тъй като

$$0=x+y+z-2(xy+yz+zx)+4xyz-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1),$$

то поне един от множителите $(2x-1)$, $(2y-1)$ и $(2z-1)$ е равен на 0, т.е. поне едно от числата $x,\ y,\ z$ е равно на $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Да се докаже, че измежду четириъгълниците с дадени дължини на диагоналите и даден ъгъл между диагоналите най-малка обиколка има успоредникът.

Решение. Нека $ABCD$ е четириъгълник с дадени дължини на диагоналите и даден ъгъл между диагоналите. Разглеждаме образа му $A'B'C'D'$ при транслация с вектор $\overrightarrow{AC}$. Ясно е, че $A'\equiv C$, а $BB'D'D$ е успоредник. Нека A_0, B_0, C_0 и D_0 са среди съответно на BD, BB', $B'D'$ и $D'D$. Четириъгълникът $A_0B_0C_0D_0$ е успоредник и дължините на диагоналите му и ъгълът между диагоналите му са същите като в $ABCD$ (защо?).



От друга страна, обиколката на $A_0B_0C_0D_0$ е равна на $B'D+BD'$. От неравенството на триъгълника имаме

$$BC+CD'\geq BD' \ \text{ и } \ B'C+CD\geq B'D.$$

Като съберем последните две неравенства, получаваме, че обиколката на $ABCD$ е по-голяма или равна на обиколката на $A_0B_0C_0D_0$, което искахме да докажем.

Задача 3. Около кръгла маса са насядали гости, някои от които се познават. Всеки двама имат поне един общ познат. За всеки гост неговите познати и той самият седят на равни разстояния един от друг. (За различните хора тези разстояния може да са различни.) Докажете, че всички гости се познават.

Решение. Да отбележим, че ако един от гостите има познати, седнали един до друг (или той познава някой от съседите си), то този гост познава всички останали. Ще докажем, че такъв гост има.

Нека A и B са двама съседи. Ако те не се познават, то техният общ познат C познава всички (тъй като има двама познати един до друг). Ако A и B са познати, то A познава всички.

Нека X е гостът, който познава всички останали. Тогава неговите съседи също познават всички (тъй като познават съседа си X). Съседите на съседите също познават всички и т.н., получаваме, че всички гости се познават.

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Румяна Караджова, Стойчо Стоев, СМГ

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. От числата 1,(9), $3^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 3}}$, $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$, $2^{\frac{2}{3}}$, най-малко е:

А) 1,(9) **Б)** $3^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 3}}$ **В)** $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ **Г)** $2^{\frac{2}{3}}$

2. Множеството от функционални стойности на функцията $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ е:

А) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ **Б)** $(-\infty;-2)$

В) $[2;+\infty)$ **Г)** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

3. Решенията на неравенството $\dfrac{1}{1-x}\leq 1+x$ са:

А) $(1;+\infty)$ **Б)** $(-\infty;1)$

В) $\{0\}\cup(1;+\infty)$ **Г)** 0

4. Стойността на израза $5^{\log_{0,2}0,5}+\log_{\sqrt{2}}\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\log_{0,5}\dfrac{1}{10+2\sqrt{21}}$ е равна на:

А) 2 **Б)** $10-2\sqrt{21}$ **В)** 6 **Г)** $10+2\sqrt{21}$

5. Нека $a<b<0$. Кое от следните твърдения НЕ е вярно?

А) $a^2>b^2$ **Б)** $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$ **В)** $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ **Г)** $a^3>b^3$

6. В правоъгълен триъгълник ABC с дължини на катетите $AC=3$ см и $BC=4$ см е построена височината CH към хипотенузата AB. Ако AL и CK са ъглополовящите съответно в $\triangle AHC$ и $\triangle HBC$, то стойността на AL^2+CK^2е:

А) $\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$ **Б)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ **В)** $\dfrac{45}{4}$ **Г)** $\dfrac{49}{78}$

7. Стойността на израза $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right).\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$ е:

А) $\dfrac{1}{2}$ **Б)** $\dfrac{1}{4}$ **В)** $\dfrac{1}{8}$ **Г)** $\dfrac{1}{16}$

8. В равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB=6$ и $CD=4$ е вписана окръжност с център O. Дължината на OC е равна на:

А) $\sqrt{10}$ **Б)** $\sqrt{6}$ **В)** $\sqrt{5}$ **Г)** $\sqrt{3}$

9. Ако α и β са корени на уравнението $x^2 - 12x + 6 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{1}{\alpha^3} + \dfrac{1}{\beta^3}$ е:

А) $\dfrac{1}{7}$ **Б)** 7 **В)** $\dfrac{7}{36}$ **Г)** $\dfrac{7}{18}$

10. Решенията на неравенството $(x+3)\sqrt{x^2-25} \leq 0$ са:

А) $(-\infty; -3)$ **Б)** $(-\infty; -3]$ **В)** $(-\infty; -5]$ **Г)** $(-\infty; -5)$

11. Ако $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ са корени на уравнението $x^2 - 3x - 3 = 0$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ има стойност:

А) $-\dfrac{3}{4}$ **Б)** $-\dfrac{3}{2}$ **В)** $\dfrac{3}{2}$ **Г)** $\dfrac{3}{4}$

12. Трима младежи и две девойки избират място за работа. В града има 3 строителни фирми,които набират работници само мъже, 2 шивашки фирми, които набират само жени и 2 компютърни фирми, които набират мъже и жени. По колко начина петимата могат да се разпределят между фирмите.

А) $3^5.4^2 = 3888$ **Б)** $5^3.4^2 = 2000$ **В)** $3^5.2^2 = 972$ **Г)** $5^3.2^2 = 500$

13. В окръжност са дадени две хорди $AB = 4$ см и $AC = 2$ см, които сключват помежду си ъгъл от 60°. Лицето на кръга е равно на:

А) 12π **Б)** 8π **В)** 6π **Г)** 4π

14. Графиката на функцията $f(x) = x^2 - 5x + 4$ пресича абсцисната ос в точки A и B, чиито абсциси са в нарастващ ред и ординатната ос в точка C. Права през B е успоредна на AC и пресича ординатната ос в точка D. Лицето на трапеца $ABDC$ е:

А) 32 **Б)** 30 **В)** 24 **Г)** 16

15. Най-малката стойност на функцията $f(x) = \left|-x^2 - 2x + 3\right|$ в интервала $[-2; 2]$ е:

А) 3 **Б)** -5 **В)** 0 **Г)** 1

16. В таблица са дадени резултатите от тест по математика.

точки	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
брой ученици	1	1	1	2	1	3	1	2	1	3	4	0	3	1	1

Ако M е модата, P е медианата, а S е средната стойност на статистическия ред, то стойността на израза $3.M + 2.P + S$ е:

А) 65,44 **Б)** 64,88 **В)** 63,44 **Г)** 60,88

17. Дължините на бедрата на трапец са съответно $\sqrt{5}$ и 2, а дължината на отсечката, свързваща средите на диагоналите му е $\frac{3}{2}$. Отсечката, свързваща средите на основите му има дължина:

А) 6 **Б)** 3 **В)** 1,5 **Г)** 1

18. Дадена е намаляваща аритметична прогресия, на която сумата на първия и петия ѝ член е равна на 26, а произведението на втория и четвъртия ѝ член е 160. Сумата на първите 6 члена на прогресията е:

А) 87 **Б)** 69 **В)** 29 **Г)** 21

19. От върха C на триъгълник ABC са построени вътрешната и външна ъглополовяща, които пресичат правата AB съответно в точки D и E. Ако е известно, че $AB = 5$, то дължината на радиуса на описаната около триъгълник DEC окръжност е равна на:

А) 3,5 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

20. В равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$) ъглополовящите AL и CK се пресичат в точка O. Лицата на триъгълниците COL и BOL са съответно 25 и 30. Лицето на триъгълника ABC е:

А) 176 **Б)** 166 **В)** 165 **Г)** 156

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Решенията на неравенството $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$ са:

22. Две окръжности k_1 и k_2 съответно с радиуси 4 и 5 се допират външно в точка M. От точка A от окръжността k_1 е построена допирателна AB към окръжността k_2. Намерете дължината на отсечката AB, ако $AM = 2$.

23. По колко начина могат да се разместят буквите от думата „матрос“ така, че между две гласни да има две съгласни букви?

24. Да се определи острият ъгъл на ромб, чиято страна е средно геометрична на диагоналите му.

25. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с ъгъл при върха B срещу основата, равен на 30°. Да се намери разстоянието от ортоцентъра H до върха C, ако $BC = 6$.

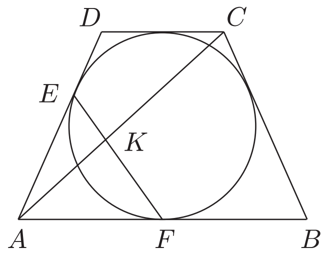
На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Иван, Ани и още три момичета и три момчета трябва да седнат около кръгла маса. Пресметнете вероятността:

а) Иван и Ани да седнат един до друг;

б) момичетата и момчетата да се редуват.

27. Равнобедрен трапец $ABCD$ е описан около окръжност, допираща бедрото AD в точка E, а основата AB в точка F. Отсечките EF и AC се пресичат в точка K. Ако $FK : KE = 2$, намерете отношението на:
а) основите на трапеца;
б) радиуса на описаната около трапеца окръжност и радиуса на вписаната в трапеца окръжност.



28. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0 \end{array} \right.$.

ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Б **2.** Г **3.** В **4.** В **5.** В **6.** В **7.** Б **8.** А **9.** Б **10.** В **11.** Г **12.** Б **13.** Г **14.** Б **15.** В **16.** А **17.** В **18.** Б **19.** Г **20.** А

6. *Упътване:* Използвайте, че ако AP е ъглополовящата на $\triangle ABC$, то $AL : CK : AP = AC : BC : AB$ от подобните триъгълници $\triangle AHC$, $\triangle BHC$ и $\triangle ABC$.

8. *Упътване:* Докажете, че триъгълник COB е правоъгълен.

21. $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$

22. 3

23. 144. Редицата от гласни букви може да се избере по 2! начина, съгласните по 4! начина. Накрая пред първата гласна може да се поставят 0, 1 или 2 съгласни. Тогава имаме $2!.4!.3 = 144$ начина за нареждане.

24. 30°. Използвайте връзката между страните a и b и диагоналите d_1 и d_2 на успоредник, а именно $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$, $a^2 = d_1 d_2$ и $\dfrac{d_1}{d_2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Получава се $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2 - \sqrt{3}$, откъдето $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

25. $6(2 - \sqrt{3})$. Докажете, че $\dfrac{C_1H}{HC} = \dfrac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\gamma}$, използвани са стандартни означения за триъгълник с височина CC_1.

26. Всички възможни разположения на момичетата и момчетата в редица са 8!, но в кръг, всяко разположение се повтаря 9 пъти и следователно около кръглата маса възможните разположения са 7!.

а) $\dfrac{2}{7}$. Разглеждаме Иван и Ани като седнали на едно място. Тогава възможните разположения на 7 човека около кръгла маса са 6!. Сега за всяко разположение на Иван и Ани седящи един до друг, има 2 възможности. Общо $6!.2$ разположения. Вероятността е $\dfrac{6!.2}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

б) $\dfrac{1}{140}$. Възможните разположения на девойките около кръглата маса са $3!$, а на момчетата са $3!$. Тогава възможните разположения на всички са $3!.3!$ като се редуват. Вероятността е $\dfrac{3!.3!}{7!} = \dfrac{1}{140}$.

27. Нека R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната окръжност за трапеца. $AB = a$, $CD = b$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle DAC = \beta$. Тогава $\sphericalangle ADC = \pi - \alpha$, $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC = \alpha - \beta$, $AD = \dfrac{a+b}{2}$.

а) От $\triangle ADC$ и синусова теорема получаваме

$$\frac{AD}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{DC}{\sin\beta} \quad \text{или} \quad \frac{AD}{DC} = \frac{a+b}{2b} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}.$$

От друга страна за лицата на триъгълниците AEK и AKF имаме

$$\frac{S_{AFK}}{S_{AEK}} = \frac{KF}{EK} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta} \quad \text{или} \quad \frac{KF}{EK} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta} = 2.$$

Следователно $\dfrac{a+b}{2b} = 2$, откъдето $\dfrac{a}{b} = 3$

б) Да забележим, че описаната окръжност около трапеца е описана и около триъгълника ABC. Следователно $\dfrac{AC}{2.\sin\alpha} = R$.

За радиуса на вписаната окръжност за трапеца се доказва $r = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$, а за диагонала на трапеца – $AC = \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + ab} = \dfrac{\sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}$. От $\dfrac{a}{b} = 3$ и получените равенства следва, че $AC = b\sqrt{7}$ и $r = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Тъй като $\sin\alpha = \dfrac{2r}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $R = b\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ и $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

28. Разлагаме лявата част на второто уравнение на множители

$$x^4 + 3x^2y - 4y^2 = x^4 - x^2y + 4x^2y - 4y^2 = \left(x^2 - y\right)\left(x^2 + 4y\right),$$

откъдето системата е еквивалентна на обединението на системите

$$\left|\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x^2 - y = 0 \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x^2 + 4y = 0 \end{array}\right. .$$

Първата система няма решение. Решения на втората системата са

$$(x; y) = \{(2; -1), (-6; -9)\}.$$

В ПОМОЩ НА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

ПОДБРАНИ ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКА

Недялка Димитрова, НПМГ

Задачите са подбрани от конкурсни изпити и състезания и са подходящи за подготовка на зрелостници и кандидат-студенти по темата *Комбинаторика*.

Във всеки конкретен пример лесно ще определите коя е нужната формула – за пермутации, вариации или комбинации, като използвате критериите *избор* и *подредба*:

Избор	Подредба
Не	Да

$\Downarrow$

пермутации

$$P_n = n! = 1.2\dots n$$

Избор	Подредба
Да	Да

$\Downarrow$

вариации

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Избор	Подредба
Да	Не

$\Downarrow$

комбинации

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Задача 1. Четири различни награди трябва да се разпределят между 4 победители в един конкурс. По колко начина може да стане това?

Отговор. $P_4 = 4! = 24$.

Задача 2. В турнир по хандбал участват 8 отбора. Има безспорен фаворит за златния медал (и той го печели). По колко начина могат да се разпределят златният, сребърният и бронзовият медал в турнира?

Решение. Златният медал е спечелен от фаворита. Остават 7 отбора, които се борят за 2 различни медала; има $V_7^2 = \dfrac{7!}{5!} = 42$ начина да се класират.

Задача 3. От 20 войници и 3 офицери се избира патрул от 3 войници и 1 офицер. Колко различни патрули могат да се съставят?

Решение. Трима войници от 20 избираме по $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{17!.3!} = 1140$ начина. Един офицер от 3 избираме по 3 начина. Трима войници и един офицер избираме по $C_{20}^3.C_3^1 = 1140.3 = 3420$ начина.

Да отбележим, че използвахме *правилото за умножение*: ако елемент a може да се избере по n начина, а елемент b – по m начина, то наредената двойка (a, b) може да се избере по $n.m$ начина.

Задача 4. В състезание по математика могат да участват отбори, състоящи се от двама, трима или четири ученици. Колко различни отбори могат да се съставят от 8 ученици?

Решение. Отбор от двама може да се състави по $C_8^2 = \dfrac{8!}{6!2!} = 28$ начина; отбор от трима по $C_8^3 = \dfrac{8!}{5!3!} = 56$ начина, а отбор от четирима по $C_8^4 = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$ начина. Отбор може да се избере по $28 + 56 + 70 = 154$ начина (използваме *правилото за събиране*).

Задача 5. Двадесет ученици от 12. клас учат английски, а останалите 5 – немски език. За участие в международна среща трябва да се изберат 6 ученици от 12. клас, точно трима от които да учат немски език. По колко начина може да стане това?

Решение. Трима от 5 ученици, изучаващи немски език, избираме по $C_5^3 = 10$ начина. При всеки избор на тримата, изучаващи немски, избираме 3 от 20, изучаващи английски, по $C_{20}^3 = 1140$ начина. Следователно изборът на 6 ученици става по $C_5^3.C_{20}^3 = 11400$ начина.

Задача 6. От 10 ученици и 6 ученички трябва да се сформират 4 смесени двойки за участие в турнир по тенис (смесената двойка се състои от едно момче и едно момиче). По колко начина може да стане това?

Решение. Избираме 4 ученици от 10 по $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!}$ начина. За всяко от изброените 4 момчета избираме момиче от 6; това става по $V_6^4 = \dfrac{6!}{2!}$ начина. Търсеният брой е $V_6^4.C_{10}^4 = \dfrac{10!.6!}{4!.6!.2!} = 75600$.

Задача 7. Разполагаме с 12 книги, две от които са от един автор, а останалите – от различни. По колко начина можем да ги подредим на един рафт така, че книгите от един автор да са една до друга?

Решение. Двете книги от един и същи автор трябва да са една до друга. Може да ги считаме за един елемент, т.е. трябва да подредим 11 елемента по $P_{11} = 11!$ начина. Но двете книги, които считахме за един елемент, могат да разменят местата си, затова възможните подредби са $2.P_{11} = 2.11!$.

Задача 8. В колко точки се пресичат 16 прави в една равнина, ако точно 2 от тях са успоредни и никои три прави не минават през една точка?

Решение. Две от 16 прави могат да се изберат по $C_{16}^{2} = 120$ начина; тъй като в една от двойките правите са успоредни, броят на пресечните точки е 119.

Задача 9. Колко е броят на страните на изпъкнал многоъгълник, ако диагоналите му са 44?

Решение. Броят на диагоналите на n-ъгълник е $C_n^2 - n = \dfrac{n\,(n-3)}{2}$ и от уравнението $\dfrac{n\,(n-3)}{2} = 44$ намираме $n = 11$.

Задача 10. От 10 математици и 5 физици се съставя 7-членна комисия. Каква е вероятността комисията да е съставена само от математици?

Решение. Да припомним, че *класичеката вероятност* на събитието A е $P\,(A) = \dfrac{n\,(A)}{n}$, където $n\,(A)$ е броят на благоприятни изходи (при които се случва събитието A), а n е броят на възможните изходи.

Ако A е събитието *Комисията е съставена само от математици*, то:

$$n\,(A) = C_{10}^{7} = \frac{10!}{3!7!}, \quad n = C_{15}^{7} = \frac{15!}{8!7!} \Rightarrow P\,(A) = \frac{C_{10}^{7}}{C_{15}^{7}} = \frac{8}{429}.$$

Задача 11. В урна има 15 червени и 12 зелени топки. Каква е вероятността три случайно извадени топки да се окажат червени?

Решение. Три от 27 топки могат да се изберат по C_{27}^{3} начина. Три от 15 червени топки могат да се изберат по C_{15}^{3} начина. Търсената вероятност е $p = \dfrac{C_{15}^{3}}{C_{27}^{3}} = \dfrac{7}{45}$.

Задача 12. Сладкарница предлага 12 вида сладолед, един от които е ягодов. Поръчах си порция с три топки, всяка от различен вид сладолед. Каква е вероятността в порцията ми да има ягодов сладолед?

Отговор. $C_{11}^{2}/C_{12}^{3} = \dfrac{1}{4}$.

Задача 13. В партида от 100 детайла 5 са дефектни. Да се намери вероятността от 3 случайно взети детайла от партидата и трите да са дефектни.

Отговор. $\dfrac{C_{5}^{3}}{C_{100}^{3}} = \dfrac{1}{16170}$.

Задача 14. Кодът на сейф се състои от три цифри. Крадец имал сведение, че трите цифри са различни и една от тях е 6. Каква е вероятността той да отвори сейфа от първия опит?

Решение. Нека A е събитието *Крадецът отваря сейфа от първия опит.* Имаме $n\,(A) = 1$. За да намерим n разсъждаваме по следния начин.

Едната цифра е 6, а другите 2 цифри избираме от останалите 9 цифри по $C_9^2 = 36$ начина. Избраните 3 цифри (6 и останалите 2 цифри) може да подредим по $P_3 = 3! = 6$ начина. Следователно $n = 6.36 = 216$ и намираме $p(A) = \dfrac{1}{216}$.

Задача 15. В урна има 10 жетона, които са номерирани с числата от 1 до 10. От урната се вадят три жетона. Каква е вероятността сборът на трите жетона да е 10?

Решение. Тъй като 10 може да се получи по 4 начина ($1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$), а ненаредена тройка от 10 числа може да се избере по $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!7!} = 120$ начина, търсената вероятност е $\dfrac{1}{30}$.

Задача 16. На картончета са написани цифрите 1,1,2,2,3,3, като на всяко картонче е написана само една цифра. Иван нарежда картончетата и образува различни шестцифрени числа, като не поставя картончетата с една и съща цифра едно до друго. Колко най-много такива шестцифрени числа може да образува Иван?

(Национален кръг на *Европейско кенгуру*, 2009)

Решение. Първите две цифри може да изберем по $V_3^2 = 6$ начина. Ако те са 1 и 2, числата са 5:

123123, 123132, 123231, 123213, 121323.

Следователно търсеният брой е $6.5 = 30$.

Задача 17. Имало 7 гьола. Във всеки имало по жаба. След кратка разходка 3 от жабите се върнали в гьоловете си, а другите 4 попаднали в чужди, но пак имало по една жаба във всеки от гьоловете. По колко различни начина може да е станало това?

(Математически турнир *Черноризец Храбър*, 2010)

Решение. Трите жаби, които знаят къде да се върнат, избираме по $C_7^3 = 35$ начина. Останалите 4 жаби се разместват така, че никоя не се връща в собствения си гьол. За да намерим броя на тези размествания, може да използваме *формулата за пълното безредие*

$$F(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right), n \geq 2$$

(която следва от принципа за включване и изключване). Имаме $F_4 = 9$ и получаваме, че седемте жаби може да се разместят по $35.9 = 225$ начина.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Диана Данова

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до месец декември.

ПЪРВИ МОДУЛ
ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $b - 2(3 - b)$ при $b = -2$ е:

А) -12 **Б)** -8 **В)** -4 **Г)** 0

2. Стойността на израза $2012^2 - 2013^2$ е равна на:

А) -1 **Б)** -4025 **В)** 4025 **Г)** 1

3. Уравнението $2x - 4x = 6x$ има за корен числото:

А) -8 **Б)** $0{,}125$ **В)** 0 **Г)** 8

4. Изразът $\left(2 - 3x^2\right)^2$ е тъждествено равен на:

А) $4 - 9x^4$ **Б)** $4 - 12x^2 - 9x^4$

В) $4 - 6x + 9x^2$ **Г)** $4 - 12x^2 + 9x^4$

5. В кой от случаите съществува триъгълник с дадените ъгли?

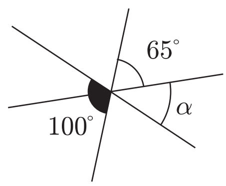
А) 30°, 50°, 90° **Б)** 80°, 40°, 80°

В) 25°, 75°, 80° **Г)** 78°, 21°, 71°

6. Мярката на α от чертежа е:

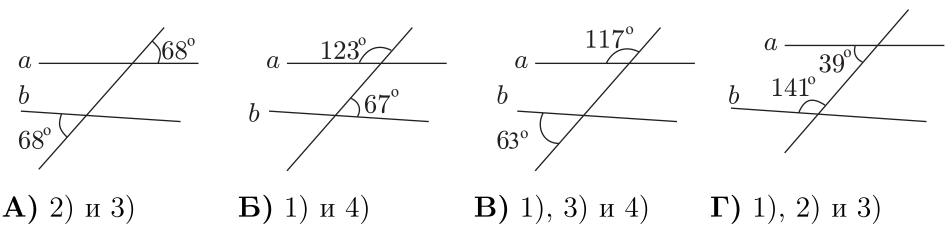
А) 15° **Б)** 35°

В) 25° **Г)** 45°



7. Фигурите, на които правите a и b са успоредни, са:

1) 2) 3) 4)



А) 2) и 3) **Б)** 1) и 4) **В)** 1), 3) и 4) **Г)** 1), 2) и 3)

8. Ученик има 5 лв. Купува 2 тетрадки по x лева и 3 химикала по y лева. Останалите пари се пресмятат чрез израза:

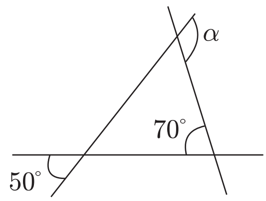
А) $5 - 2x + 3y$ **Б)** $5 - 3x - 2y$ **В)** $5 - x - y$ **Г)** $5 - 2x - 3y$

9. Коефициентът пред x в нормалния вид на многочлена

$$(-1 - x)^2 + (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 2x(x - 1)$$

е равен на:

А) -2 **Б)** 4 **В)** 2 **Г)** 0



10. Мярката на ъгъл α от чертежа е:

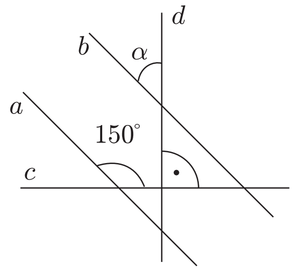
А) 60° **Б)** 130°

В) 120° **Г)** 50°

11. Обиколката на правоъгълник е 16 см. Дължината на едната страна е m см. Лицето на триъгълника е:

А) $(16 - m)m$ **Б)** $-m^2 + 8m$

В) $m^2 - 8m$ **Г)** $16m$



12. На чертежа $a \| b$ и $c \perp d$. Мярката на α е:

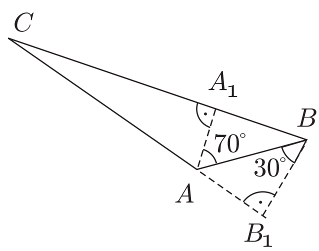
А) 30° **Б)** 80°

В) 120° **Г)** 60°

13. Дадено е уравнението $(x + 2)^2 = (x - 1)^2 + 4$. Кое от следните уравнения е еквивалентно на даденото?

А) $2x - 7 = 0$ **Б)** $2x - 1 = 0$

В) $6x + 7 = 0$ **Г)** $6x - 1 = 0$



14. Ако AA_1 и BB_1 са височини в триъгълника ABC от чертежа, то мерките на ъглите му са:

А) $100^\circ, 50^\circ, 30^\circ$ **Б)** $110^\circ, 50^\circ, 20^\circ$

В) $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$ **Г)** $130^\circ, 30^\circ, 20^\circ$

15. Допълнете изречението така, че да бъде винаги вярно твърдението: „Всеки външен ъгъл на триъгълник е …“

А) по-голям от кой да е вътрешен ъгъл на триъгълник

Б) равен на своя съседен вътрешен ъгъл

В) тъп ъгъл

Г) по-голям от несъседните на него вътрешни ъгли

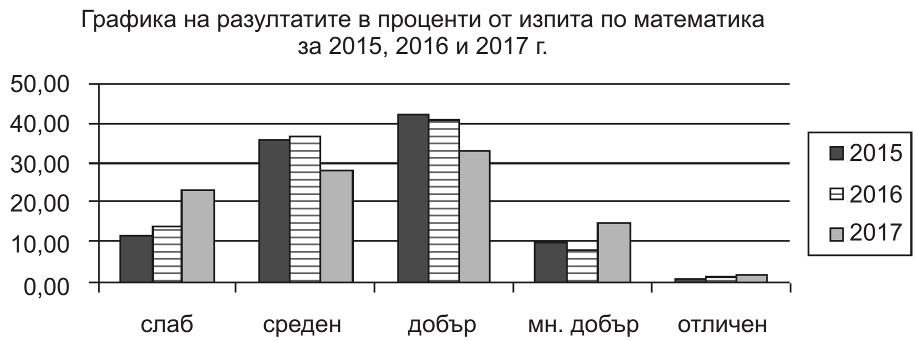
16. През първия ден Валя решила 20% от поставените ѝ за домашна работа задачи. През втория ден – 40% от останалата част. Каква част от задачите (в проценти) е решила за двата дни?

А) 52% **Б)** 60% **В)** 48% **Г)** 28%

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Ако $x + y = 375$ и $y - x = -10$, да се намери разликата $x^2 - y^2$.

18. На диаграмата са показани получените резултати по математика от националното външно оценяване през учебните 2015, 2016 и 2017 години. Разгледайте диаграмата и отговорете на следните въпроси:



1) Процентът на слабите оценки е най-голям през ...... година.
2) И през трите години най-висок е процента на учениците, оценени с ......
3) През коя година е най-малка разликата между получените оценки слаб и добър?
4) Приблизително колко процента е тази разлика?
5) През коя година отличните и много добри оценки са под 10%?

19. Ако $(x + 3)(x + 5) = 11$, да се намери стойността на $(x + 4)^2$.

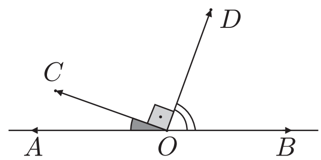
20. В правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$) ъгълът между височината AD и ъглополовящата AE през върха на правия ъгъл е с 5° по-голям от $\sphericalangle ABC$. Попълнете пропуснатото в текста:

1) Една двойка равни ъгли са ...... и ......
2) Мярката на $\sphericalangle ABC$ е ....
3) Мярката на $\sphericalangle ACB$ е ....
4) Мярката на $\sphericalangle AED$ е ....

ВТОРИ МОДУЛ

21. Местата във влак са номерирани във възходящ ред 1, 2, 3,... Във всеки вагон има равен брой купета, които също са номерирани с 1, 2, 3, ... за този вагон. Във всяко купе има по 6 места. Асен е на място номер 50 в купе номер 1, а Иво е в купе с номер 5.
А) Колко са номерата на местата в купето на Асен?
Б) Кой е най-големият номер на място във вагона преди Асен?
В) Колко е броят на купетата във всеки вагон?
Г) Кой от посочените номера на места 400, 440, 480 и 520 може да е най-голям номер във влака?

22. На чертежа $\sphericalangle AOB$ е изправен, $\sphericalangle AOC : \sphericalangle BOD = 2 : 3$, а $\sphericalangle COD$ е прав.



А) Намерете мерките на $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOD$.

Б) Намерете отношението $\sphericalangle AOC : \sphericalangle COD : \sphericalangle BOD$.

В) Ако $\overrightarrow{OL}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle COD$, намерете отношението $\sphericalangle AOL : \sphericalangle BOL$.

Запишете пълното решение на задачи 23 и 24 с необходимите обосновки.

23. От два града А и В, разстоянието между които е 84 км, едновременно тръгват един срещу друг велосипедист и мотоциклетист. Срещнали се след 1 ч. и 10 мин. и продължили със същата скорост. Мотористът пристигнал в В и след престой от 20 мин. потеглил към А. Намерете скоростите им, ако е известно че мотоциклетистът е настигнал велосипедиста един час след първата им среща.

24. Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Построени са ъглополовящите на вътрешния и външния ъгъл при върха C, които пресичат правата AB съответно в точките M и N. Ъглополовящите на $\sphericalangle NMC$ и $\sphericalangle MNC$ се пресичат в точката P. Правата NP пресича ъглополовящата на $\sphericalangle AMC$ в точката T. Да се намерят ъглите на триъгълника MPT.

Отговори

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
А	Б	В	Г	В	Б	В	Г	Б	В	Б	Г	Г	В	Г	А

17. 3750; **18.** 1) 2017 г. 2) добър; 3) 2017 г.; 4) Около 10% (За верен отговор се приема и число между 10% и 14%) 5) 2016 г.; **19.** 12;

20. 1) $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$ или $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAD$; 2) 20°; 3) 70°; 4) 65°

21. 1) 49, 50, 51, 52, 53, 54; 2) 48; 3) 8; 4) 480.

22. А) $\sphericalangle AOC = 36^\circ$; $\sphericalangle BOD = 54^\circ$; Б) $\sphericalangle AOC : COD : BOD = 2 : 5 : 3$; В) $\sphericalangle AOL : BOL = 9 : 11$.

23. Означаваме пътя на велосипедиста до срещата с x km. Пътят на мотоциклетиста до срещата е $(84 - x)$ km.

Времето от тръгването до срещата е $\dfrac{7}{6}$ часа. Оттук скоростта на велоспедиста е $\dfrac{6x}{7}$ km/h, а скоростта на мотоциклетиста е $\dfrac{6(84-x)}{7}$ km/h.

Времето на движение на мотоциклетиста от срещата до настигането е $\dfrac{2}{3}$ часа; за това време той е изминал $\dfrac{4(84-x)}{7}$ km. От срещата до настигането велосипедистът е пътувал 1 час и е изминал $\dfrac{6x}{7}$ km. Имаме

$$\frac{4(84-x)}{7} - 2x = \frac{6x}{7}$$

и оттук намираме $x = 14$ km.

Скороста на велосипедиста е 12 km/h, а скоростта на мотоциклетиста 60 km/h.

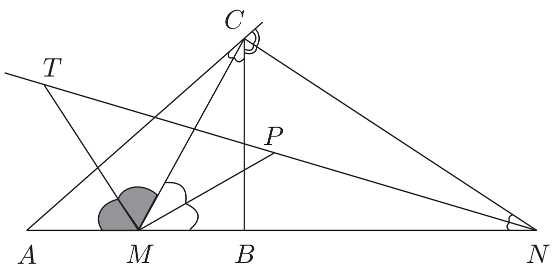
24. Ако означим $\sphericalangle ACB = \gamma$, имаме

$$\sphericalangle MCN = \sphericalangle MCB + \sphericalangle BCN = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ$$

и оттук

$$MPN = 180^\circ - (MNP + NMP) = 180^\circ - \frac{1}{2}(MNC + NMC) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}.90^\circ = 135^\circ.$$



Следователно съседният му ъгъл е $\sphericalangle TPM = 45^\circ$.

Отново използваме, че ъглополовящите на съседни ъгли са перпендикулярни и намираме, че $\sphericalangle TMP = 90^\circ$, откъдето третият ъгъл в $\triangle MTP$ е $\sphericalangle MTP = 45^\circ$.

ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА ЦЕЛИ ИЗРАЗИ

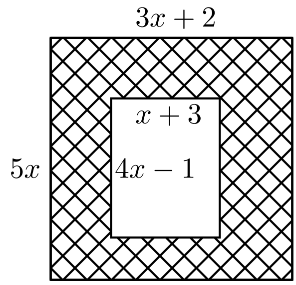
Предлагаме Ви десет задачи, с които да проверите своите знания и умения за действия с цели изрази.

Моделиране с цял израз и пресмятане на числената му стойност

Задача 1. а) Като използвате означенията на чертежа, изразете чрез x лицето S на защрихованата част от правоъгълника. Запишете многочлена S в нормален вид.

б) Пресметнете лицето S на защрихованата част при $x = 5$.

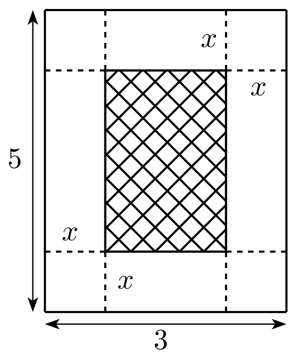
в) Ако обиколката на белия правоъгълник е 64, намерете лицето S на защрихованата част.



Задача 2. а) Като използвате означенията на чертежа, изразете чрез x лицето S на защрихования правоъгълник на чертежа. Запишете многочлена S в нормален вид.

б) Изразете чрез x обиколката P на защрихования правоъгълник и запишете многочлена P в нормален вид.

в) Ако обиколката на защрихования правоъгълник е равна на 12, намерете лицето му.



За сбора от коефициентите в нормалния вид на многочлена

Задача 3. Намерете сбора от коефициентите в нормалния вид на многочлена

$$(7x + 3)^3 + (13x - 3)^2 + (7x + 4)(3x - 2).$$

Упътване. Вместо да разкрием скобите и приведем многочлена в нормален вид, може да забележим, че *сборът от коефициентите на многочлена* $ax^3 + bx^2 + cx + d$ *е равен на* $a + b + c + d$, *което е стойността на многочлена при* $x = 1$.

Задача 4. Намерете стойността на израза

$$M = x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 66$$

при $x = -5$.

Упътване. Запишете M във вида

$$\begin{aligned} M &= (x^7 + 5x^6) + (x^6 + 5x^5) + \cdots + (x^2 + 5x) + (x + 5) + 61 = \\ &= x^6(x + 5) + x^5(x + 5) + \cdots + x(x + 5) + (x + 5) + 61 \end{aligned}$$

и заместете с $x = -5$.

Разлагане ... с полагане

Задача 5. Разложете на множители многолчена:
а) $A = y^2 - 10y + 21$;
б) $B = (x^2 + x + 1)^2 - 10(x^2 + x + 1) + 21$.

Задача 6. Намерете най-големия прост делител на числото

$$119.120.126.127 - 144.$$

Упътване. Означете $119 = n$ и разложете на множители многочлена $n(n + 1)(n + 7)(n + 8) - 144$.

Рационално смятане чрез разлагане на множители

Задача 7. Пресметнете произведението

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{99^2}\right).$$

Задача 8. Пресметнете стойността на израа

$$\frac{(2 + 3)(2^2 + 3^2)(2^4 + 3^4)\dots(2^{512} + 3^{512}) + 2^{1024}}{3^{1024}}.$$

Намиране на минимум или максимум

Задача 9. Намерете минималната стойност на многочлена

$$2x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 8x^2 + 18.$$

Задача 10. Намерете минималната стойност на израза

$$(x^2 - 2x + 6)(y^2 + 4y + 11)$$

и стойностите на x и y, за които тя се достига.

Решения и отговори

1. а) Лицето на защрихованата част се получава, като от лицето на правоъгълник със страни $5x$ и $3x+2$ се извади лицето на правоъгълник със страни $x+3$ и $4x-1$:

$$S = 5x(3x+2)-(x+3)(4x-1) = 15x^2+10x-(4x^2+11x-3) = 11x^2-x+3.$$

б) При $x = 5$ пресмятаме $S = 11.5^2 - 5 + 3 = 273$.

в) Белият правоъгълник има страни $x+3$ и $4x-1$ и обиколката му е

$$P = 2(x+3+4x-1) = 2(5x+2) = 10x+4.$$

От условието $10x+4 = 64$ намираме $x = 6$ и оттук $S = 11.6^2 - 6 + 3 = 393$.

2. а) $S = (3-2x)(5-2x) = 4x^2 - 16x + 15$; б) $P = -8x + 16$; в) $x = 0,5$, $S = 8$.

3. Сборът от коефициентите в нормалния вид на многочлена е равен на стойността му при $x = 1$ и е $(7+3)^3 + (13-3)^2 + (7+4)(3-2) = 1111$.

4. $M = 61$.

5. а) $y^2 - 10y + 21 = y^2 - 10y + 25 - 4 = (y-5)^2 - 2^2 = (y-3)(y-7)$.

б) Като означим $y = x^2 + x + 1$ и използваме разлагането от а), получаваме

$$B = (y-3)(y-7) = (x^2+x+1-3)(x^2+x+1-7) = (x^2+x-2)(x^2+x-6).$$

Тъй като $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ и $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$, разлагането е $B = (x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$.

6. Като умножим първия с четвъртия и втория с третия множител, получаваме

$$n(n+1)(n+7)(n+8) - 144 = (n^2+8n)(n^2+8n+7) - 144.$$

Ако означим $n^2 + 8n = x$, имаме

$$x(x+7) - 144 = x^2 + 7x - 144 = x^2 + 16x - (9x+144) = (x+16)(x-9),$$

откъдето даденият израз става

$$(n^2+8n+16)(n^2+8n-9) = (n+4)^2[(n+4)^2 - 25] = (n+4)^2(n+9)(n-1).$$

При $n = 119$ стойността му е $123^2.128.118 = 3^2.41^2.2^7.2.59$. Най-големият прост делител на това число е 59.

7. Всеки множител в даденото произведение е от вида $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ и се разлага на произведение на сбор и разлика: $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Произведението на всички разлики е равно на

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{98}\right)\left(1-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{98}{99}=\frac{1}{99},$$

а произведението на сборовете е

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{98}\right)\left(1+\frac{1}{99}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}=\frac{100}{2}=50.$$

Търсеното произведение е равно на $\dfrac{50}{99}$.

8. Умножаваме числителя с $(3-2)$, при което стойността му не се променя. Прилагаме последователно девет пъти формулата за произведение на сбор и разлика на две числа и получаваме

$$\begin{aligned} & (3-2)(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\ldots(2^{512}+3^{512})= \\ = \; & (3^2-2^2)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\ldots(2^{512}+3^{512})= \\ = \; & (3^4-2^4)(2^4+3^4)\ldots(2^{512}+3^{512})= \\ & \ldots \\ = \; & (3^{512}-2^{512})(2^{512}+3^{512})= \\ = \; & 3^{1024}-2^{1024}. \end{aligned}$$

Търсената стойност е $\dfrac{(3^{1024}-2^{1024})+2^{1024}}{3^{1024}}=1$.

9. Записваме многочлена във вида

$$2x^4-2x^2y^2+y^4-8x^2+18=(x^2-y^2)^2+(x^2-4)^2+2.$$

Тъй като $(x^2-y^2)^2\geqq 0$ и $(x^2-4)^2\geqq 0$, минималната му стойност е 2.

10. Имаме

$$x^2-2x+6=5+(x-1)^2\geqq 5 \quad \text{и} \quad y^2+4y+11=7+(y+2)^2\geqq 7,$$

откъдето минималната стойност на израза е 35 и се достига при $x=1$ и $y=-2$.

ЧИСЛА В ЗООЛОГИЧЕСКАТА ГРАДИНА

Емил Карлов

Котката Мър-мър тръгнала за зоологическата градина, за да разгледа животните, но забравила да попита приятеля си Светльо. По-точно, попитала Светльо може ли да отиде до зоологическата градина, но преди да получи отговор, казала *Защото, вече съм тръгнала.* А Светльо в това време ѝ заръчал да не отива, защото пазачът ще я залови и ще я заключи в последната свободна клетка и тогава не тя ще гледа животните, а другите деца ще я гледат заключена в клетка. Котката нищо не чула от думите на приятеля си Светьо, защото вече тичала към зоологическата. Не помня какво се случи нататък, приказката беше дълга, но помня, че тази приказка имаше щастлив край и в този щастлив край Светльо спаси котката от клетката.

Всъщност искам да ви кажа, че много по-добре е в клетките на зоологическата градина да има *щастливи числа*, а не тъжни животни и всяко дете, което си купи билет за зоологическата градина, да седне на пейката пред клетката и да реши задачата.

Ето я първата задача.

Задача 1. В девет еднакви квадратчета, подредени в квадрат с три реда и три стълба, са записани цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и X. Намерете X така, че сборовете на числата по редове и по стълбове да са равни на едно и също число и това число да е възможно най-малко.

Решение. Сборът на числата от 1 до 8 е 36 и ако неизвестната цифра е възможно най-малка и е 0, то сборът на числата по редове и стълбове трябва да е 12. Ето решението:

1	5	6
8	0	4
3	7	2

Въпрос за любознателните.. Може ли неизвестното число да е равно на 2?

Задача 2. В девет еднакви квадратчета, подредени в квадрат с три реда и три стълба, са записани числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и X. Намерете X така, че сборовете на числата по редове и по стълбове да са равни на едно и също число и това число да е възможно най-голямо.

Решение. Ако X е 9, то сборът на числата по редове и по стълбове трябва да е $(36+9):3=15$. Ето решението:

9	1	5
2	6	7
4	8	3

Ясно е, че неизвестното число X трябва да се дели на 3, защото сборът по редове и по стълбове е $(36+X):3=12+X:3$. Да опитаме да изберем числото X да е по-голямо от 9 и да се дели на 3, например $X=12$. Сборът по редове и стълбове трябва да е 16, но 12 може да се допълни по единствен начин до 16 (с 1 и 2), т.е. не може сборът от числата в реда и в стълба на 12 да е един и същ. По същите причини не може да да изберем X по-голямо от 12, т.е. най-голямата възможна стойност на X е 9.

Магическият квадрат с три реда и три стълба, в който са записани числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е такъв, че осемте сбора на числата по редове, по стълбове и по диагонали са равни (съставете магически квадрат!). При нас всичко е малко напротив …

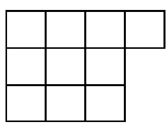
Задача 3 (*Антимагически квадрат*). В квадрат 3×3 запишете числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така, че осемте сбора на числата по редове, по стълбове и по диагонали да са осем различни числа.

Решение. В моя пример сборовете по редове са 9, 12, 24, сборовете по стълбове са 14, 13, 18, а сборовете по диагонали са 15 и 17:

2	1	6
5	4	3
7	8	9

А във вашия?

Задача 4. В квадрат 3×3 е добавено едно квадратче.



Запишете в квадратчетата числата от 1 до 10 така, че сборовете на всеки две съседни квадратчета да са различни. (Съседни са квадратчетата, които имат обща страна.)

Решение. Ето го моят отговор:

1	2	4	7
3	5	8	
6	9	10	

Задача 5. Дадени са 10 квадратчета, подредени по следния начин:

Може ли да се запишат десет естествени числа в тези квадратчета така, че сборът на всеки четири числа в четири последователни квадратчета да е нечетен, а сборът на всеки седем числа в седем последователни квадратчета да е четен?

Решение. Да допуснем, че може да се намерят десет естествени числа, които изпълняват условието на задачата:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}.$$

Тогава може да съставим таблица с четири реда и седем стълба, в която да попълним десетте намерени естествени числа по следния начин:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

В таблицата сборът на числата във всеки от четирите реда е четно число, следователно сборът на 28-те числа в таблицата е четен.

Сборът на числата във всеки от седемте стълба е нечетно число, следователно сборът на 28-те числа в таблицата, пресметнат по стълбове, е нечетен.

Получихме противоречие, значи допускането е невярно и не могат да се намерят десет естествени числа с това свойство.

Задача 6. Дадени са 9 квадратчета, подредени по следния начин:

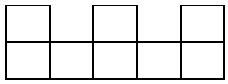
Може ли да се запишат девет естествени числа в тези квадратчета така, че сборът на всеки четири числа в четири последователни квадратчета да е нечетен, а сборът на всеки седем числа в седем последователни квадратчета да е четен?

Решение. Може, например по следния начин:

2	2	1	2	2	2	1	2	2

Сборовете на четири последователни числа са равни на 7, а на седем последователни числа са равни на 12.

Задача 7. В квадратчетата на фигурата

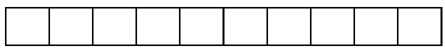


попълнете числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 така, че при всяко разрязване на фигурата на две части (като режем по страна на квадратче) сборът на числата в едната част да дели сбора на числата в другата част.

Решение. Сборът на осемте числа е 36. Сборът от числата във всяка изрязана част може да е 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 33, 34 или 35. Ето едно решение на задачата.

2		1		4
7	3	5	6	8

Задача 8. Запишете естествени числа в квадратчетата на фигурата



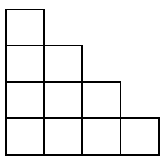
така, че сборът на всеки две числа (не задължително съседни) да е равен или на 5, или на 11, или на 8 (като се срещат и трите случая). Намерете сбора на десетте числа.

Решение. Единствената възможност (с точност до пренареждане) е

1	7	4	4	4	4	4	4	4	4

и търсеният сбор е 40.

Задача 9. В десетте квадратчета на фигурата



запишете цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така, че всяко число, което се получава по редовете, да се дели както на 7, така и на 9.

Решение. На горния ред може да стои само цифрата 0. На следващия ред е 63, единственото двуцифрено число, което се дели и на 7, и на 9. Трицифреното число, което се дели и на 7 и на 9, може да е 189, а четирицифреното число на най-долния ред е 2457 (има и други възможности).

Задача 10. Предният панел на мобилния ви телефон е правоъгълник 3×4 от 12 единични квадратчета и съдържа цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, знак *звезда* и знак *диез*. Заместете звездата и диеза с подходящи числа и подредете числата в правоъгълника така, че сборовете по редове да са равни, сборовете по стълбове да са равни и двата сбора да са възможно най-големи.

Решение. Сборът на числата

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \star + \sharp = 45 + \star + \sharp$$

трябва да се дели както на 3, така и на 4, т.е. се дели на 12. Възможните сборове на числата в панела са $48, 60, 72, 84, \ldots$

Да допуснем, че сбор 84 е възможен. Тогава сборът на числата по редове е 21. В двата реда, в които няма нито звезда, нито диез, само с числата от 0 до 9 трябва да се получи общ сбор $2.21 = 42$. Но и най-големите събираеми $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$ имат сбор, по-малък от 42. Следователно сбор 84 (и по-голям) не е възможен.

Сбор 72 е възможен, ако заместим звездата с 16, диеза с 11 и подредим числата по следния начин:

16	0	2
1	11	6
4	5	9
3	8	7

Задача 11. Запишете във всяко поле на таблица с 4 реда и 5 стълба едно от числата 0, 1 и 2 така, че сборът от числата във всеки ред се дели на 3 и сборът на числата във всеки стълб да се дели на 3. Най-много колко единици може да има в таблицата?

Решение. Сборът на числата във всеки стълб се дели на 3, значи във всеки стълб има най-много 3 единици (иначе получаваме сбор 4 в този стълб). Това означава, че в петте стълба на таблицата единиците са най-много 15.

Ако единиците са 15, във всеки стълб трябва да има точно три единици е една нула; т.е. в таблицата няма двойки. Тогава сборът от числата в един ред е най-много 5 и тъй като се дели на 3, този сбор е 3. Но в такъв случай сборът на числата в таблицата е $4.3 < 15$, противоречие.

Пример с 14 единици може да се построи:

0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2

ЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ЛАГЕР *СЛЪНЧЕВ БРЯГ* 2017

Ивайло Кортезов

В периода 28 юни – 4 юли 2017 г. в Слънчев бряг се състоя летният математически лагер за ученици от 4–7 клас, постигнали най-високи резултати в Националния математически турнир „Черноризец Храбър“ 2016. Както всяка година, учениците имаха лекции по интересни теми за подготовка за математически състезания, както и математически игри в атрактивни формати, като „От 1 до 100“, „Математическа рулетка“, „Математическа търсачка“ и „Математически конквистадор“. Предлагаме Ви част от задачите от Математическата рулетка, в която всеки отбор има определен капитал, който ползва за залози за верността на отговорите на предлаганите задачи.

1. Запишете сбора от отговорите на следните три задачи.

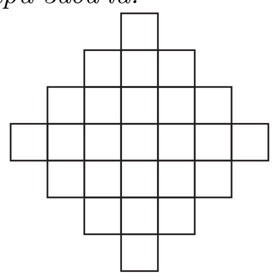
1А. Раздадох 2017 ореха на 37 деца. Всяко дете получи различен нечетен брой орехи. Колко ореха най-много може да е получило някое дете?

1Б. Колко са различните триъгълници с периметър 21 и целочислени страни?

1В. По колко различни начина може да оцветим четирите квадратчета вдясно, като квадратчетата с обща страна са разноцветни, ако разполагаме с палитра от 5 цвята?

A	B
C	D

2. Запишете сбора от отговорите на следните три задачи.



2А. Колко квадрата има на чертежа?

2Б. По колко начина може да стигнем от най-лявото до най-дясното поле на чертежа, ако от дадено поле можем да се движим към полето надясно или по диагонал нагоре-надясно или надолу-надясно?

2В. Колко са трицифрените числа с различни цифри, в които разликата на всеки две поредни цифри е поне 6?

3. Запишете сбора от отговорите на следните три задачи.

3А. Общо колко цифри 1 има в трицифрените числа, в които липсва цифрата 2?

3Б. По колко различни начина може да оцветим полетата на таблица 4×4 в бяло и/или черно, така че във всеки квадрат 3×3 да има четен брой бели полета?

3В. Дадена е таблица 7×7. Очертах по линиите няколко фигури, никоя от които не се докосва с друга или със себе си дори по ъгъл. Колко най-много може да е сборът от периметрите на тези фигури?

4. Запишете сбора от отговорите на следните две задачи.

4А. В торба има 19 шоколадови, 16 ментови и 13 ягодови бонбона в еднакви на вид опаковки. Ани иска да има поне осем бонбона от някой вид и поне три от някой друг вид. Колко най-малко бонбона трябва да вземе, за да е сигурно, че ще е успяла?

4Б. В кръг стояли 99 момчета. Между всеки две съседни момчета застанали по 99 момичета. Всяка минута си тръгвали пет стоящи подред деца. По някое време останали само три момчета. Най-малко колко момичета може да са останали в този момент?

5. Запишете сбора от отговорите на следните три задачи.

5А. В три поредни месеца имало общо 24 съботи и недели. Колко съботи и недели общо е имало в следващите три поредни месеца?

5Б. Том трябвало да събере две числа, а вместо това ги извадил и така получил 1027 вместо верния отговор 2017. Пресметнете по-малкото от тези числа.

5В. Пътувах във влак с 90 км/ч. В обратна посока за 6 секунди край мен профуча влак със скорост 72 км/ч. Колко метра е бил дълъг този влак?

Решения

1А. Отговор. 721.
Другите 36 деца имат поне $1 + 3 + 5 + \dots + 71 = 1296$ ореха, така че това с най-много орехи има най-много 721.

1Б. Отговор. 12.
Най-голямата страна е поне 7, но не повече от 10. Вариантите са $7 + 7 + 7$,

$8+8+5$, $8+7+6$, $9+9+3$, $9+8+4$, $9+7+5$, $9+6+6$, $10+10+1$, $10+9+2$, $10+8+3$, $10+7+4$, $10+6+5$.

1В. Отговор. 260.

При 4 различни цвята вариантите са $5.4.3.2 = 120$. При 3 различни цвята има 2 избора къде да са двете едноцветни квадратчета, така че вариантите са $2.5.4.3 = 120$. При 2 различни цвята вариантите са $5.4 = 20$. Общо са $120 + 120 + 20 = 260$ варианта.

2А. Отговор. 42.

Единичните квадрати са 25, квадратите 2×2 са 12, квадратите 3×3 са 5. Общо са $25 + 12 + 5 = 42$ квадрата.

2Б. Отговор. 141.

Във всяко поле на показаната част от таблицата е показан броят на пътищата, водещи до него. Той е равен на сбора от числата в полетата, от които можем да дойдем там. Пътищата, пресичащи най-дългата вертикална колона в най-горното поле, са $1.1 = 1$; в това под него са $3.3 = 9$; в това под него са $6.6 = 36$; следват $7.7 = 49$; $6.6 = 36$; $3.3 = 9$ и $1.1 = 1$. Общо пътищата са $1 + 9 + 36 + 49 + 36 + 9 + 1 = 141$.

			1
		1	3
	1	2	6
1	1	3	7
	1	2	6
		1	3
			1

2В. Отговор. 34.

Ясно е, че цифрата в средата не може да е 3, 4, 5 или 6. При средна цифра 0 другите две цифри са 6, 7, 8 или 9; има $4.3 = 12$ числа. При средна цифра 1 другите две цифри са 7, 8 или 9; има $3.2 = 6$ числа. При средна цифра 2 другите две цифри са 8 и 9 и числата са 2. При средна цифра 7 има едно число (170). При средна цифра 8 другите две цифри са 0, 1 или 2; има $2.2 = 4$ числа. При средна цифра 9 другите две цифри са 0, 1, 2 или 3; има $3.3 = 9$ числа. Общо получаваме $9 + 4 + 1 + 2 + 6 + 12 = 34$ числа.

3А. Отговор. 225.

Като цифра на стотиците 1 се среща в $9.9 = 81$ от споменатите числа; като цифра на десетиците се среща в $8.9 = 72$ от тях; като цифра на единиците – в $8.9 = 72$ от тях. Общо броят на единиците е $81 + 72 + 72 = 225$.

3Б. Отговор. 4096.

За цвета на всяко от 12-те полета на първите два реда и първите две колони има по два избора. Цветът на всяко от останалите 4 полета се определя еднозначно от условието някой квадрат 3×3 да има четен брой бели полета. Така отговорът е $2^{12} = 4096$.

3В. Отговор. 64.

Всеки от 64-те възела на таблицата участва най-много в една фигура. Периметърът на всяка фигура е равен на броя на възлите по него, така че търсеният сбор е не по-голям от 64. Пример с 64 получаваме, като вземем квадратчета, отбелязани по-долу със звездичка.

✳		✳		✳		✳
✳		✳		✳		✳
✳		✳		✳		✳
✳		✳		✳		✳

4А. Отговор. 24.
Ако Ани не е събрала осем бонбона от никой вид, то тя е взела най-много $7 + 7 + 7 = 21$ бонбона. Ако не е събрала три бонбона от втори вид, то тя е взела най-много $19 + 2 + 2 = 23$ бонбона. Следователно ако Ани вземе $23 + 1 = 24$ бонбона, и двете и желания ще са изпълнени.

4Б. Отговор. 12. След всеки ход броят момичета между всеки две съседни момчета дава остатък 4 при деление на 5 (това е вярно дори ако сред тръгналите има момче). Следователно са останали поне $3.4 = 12$ момичета. Това може да се постигне, ако в първите 96 групи присъстват махащите се момчета, след което броят на всяка група поредни момичета се сведе до 4.

5А. Отговор. 27.
В три поредни месеца има общо 24 съботи и недели само ако трите месеца имат общо 89 дни (дните не може да са по-малко, а 89 дни могат да се получат само от месеците февруари, март и април). Това значи, че в тях има 13 седмици без два дни и 1 май е събота. В следващите три месеца има общо 92 дни, което са 13 седмици и един ден (събота). Така съботите и неделите в следващите три месеца стават $13.2 + 1 = 27$.

5Б. Отговор. 495.
Търсеното число е равно на $(2017 - 1027) : 2 = 495$.

5В. Отговор. 270.
Имаме 90 км/ч = 25 м/с и 72 км/ч = 20 м/с. За 6 секунди пътникът в по-бързия влак ще измине 150 м, а по-бавният влак ще измине 120 м. Търсената дължина е разстоянието между пътника и предната част на другия влак в края на разминаването, което е $150 + 120 = 270$ м.

за по-малките задачи

Йовка Николова

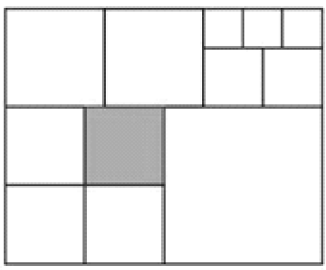
4. клас

76. През 2017 година на Мими ѝ се роди братче. Интересно е, че нейната година на раждане има същата сума от цифрите, като годината на раждане на братчето ѝ, но е предишната такава. Намерете след колко години Мими ще е точно два пъти по-голяма от братчето си.

77. Написани са две числа, първо и второ. Към първото прибавяме второто и получаваме трето, към второто прибавяме третото и получаваме четвърто и т.н. Сборът на първите шест числа е 2020. Намерете петото число.

78. На стените на зар са написани числата 6, 7, 8, 9, 10 и 11. Зарът бил хвърлен два пъти. Първият път сумата от числата на четирите му околни стени била равна на 36, а втория път – на 33. Кое число е написано на стената, срещуположна на стената, на която е числото 10?

79. Правоъгълникът на чертежа е разрязан на 12 квадрата. Ако знаете, че оцветеният квадрат има два пъти по-голяма страна от страната на най-малкия и обиколката на правоъгълника е 116 см, намерете страната на най-големия квадрат.



5. клас

80. На права са отбелязани точките A, B, C, D и E, точно в този ред. Една от тях е оцветена в червено, а друга – в синьо, като червената е вляво от синята. Разстоянието между точките A и C е 7 см, между червената точка и B е 8 см, а между синята точка и D е 9 см. Намерете разстоянието между червената и синята точки.

81. Група деца се подредили в редица. Отначало се преброили така: 1, 2, 1, 2, 1, 2, …, а после така: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, …. Ако точно 10 деца са казали 2 и при двата начина на броене, намерете колко най-много деца има в тази група.

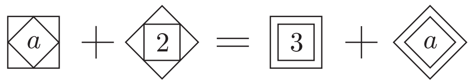
82. Хари и Пепи набрали общо 70 ябълки, круши и сливи, като $\dfrac{5}{9}$ от набраните плодове от Хари били ябълки, а $\dfrac{7}{17}$ от плодовете на Пепи били круши. Колко сливи е набрал всеки от тях, ако те двамата са набрали еднакви количества и ябълки, и сливи?

83. Нека

$$\Diamond\!\!\!\!\!\!\;\; a = 2.a + 3,$$

$$\boxed{a} = 3.a+2.$$

Намерете a, ако



6. клас

84. Послучай Никулден, деца участвали в състезание по риболов. Уловили много риби. Оказало се, че всички уловени риби, без сафрида, били два пъти повече от всички риби, без чернокопа. Всички уловени чернокопи били два пъти повече от сафрида и цацата, взети заедно. Само Ники, който имал имен ден, успял да улови единствената скумрия. Кои риби били повече – попчетата или цацата?

85. Деси, Роси и Михаела често си ходят на гости и винаги използват най-краткия път. В понеделник Деси посетила Роси, след което решила да посети и Михаела и изминала 1335 м. Във вторник Роси посетила Михаела, а след това и Деси и изминала 1513 м, а в сряда Михаела посетила Деси и след това Роси и изминала 1424 м. Ако те се движат с една и съща скорост, която измерена в метри в минута е естествено число и е възможно най-голямото такова, за колко минути Михаела може да обиколи приятелките си и да се върне у дома?

86. Тигъра живее между Мечо Пух и Йори, като къщата му е два пъти по-близо до къщата на Мечо Пух, отколкото до къщата на Йори. Мечо Пух тръгнал към Йори. В 12:00 той бил два пъти по-близо до Тигъра, отколкото до дома си, а в 12:40 отново се оказало, че бил два пъти по-близо до Тигъра, отколкото до дома си. Ако Мечо Пух не е спирал по пътя си и се е движил с една и съща скорост, намерете в колко часа е стигнал до Йори.

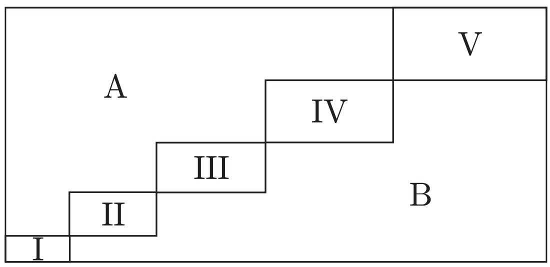
87. Колкото и странно да е, ако от двуцифрено просто число извадим двуцифреното число, записано със същите цифри, но в обратен ред (което също е просто), ще получим квадрат на естествено число. Кое е първоначалното число?

7. клас

88. Ако числото b е средното аритметично на числата a и c, а разликата $a - c$ е равна на 6, намерете стойността на израза $ab + bc - ac - b^2$.

89. Мими разряза един хартиен триъгълник на три други триъгълника. След измерване установи, че първият има ъгли 150°, 15°, 15°, вторият – 130°, 25°, 25°, а третият – 80°, 89°, 20°. Намерете ъглите на първоначалния триъгълник.

90. Във вътрешността на правоъгълник с обиколка 2000 см са начертани пет правоъгълника I, II, III, IV и V, чиито обиколки се отнасят както 1 : 3 : 5 : 7 : 9 точно в този ред. Намерете сбора от обиколките на фигурите A и B.



за по-малките решения

на задачите от бр. 5/2017

61. Купих два молива и три гуми. Платих два лева и ми върнаха 30 ст. Ако един молив струва 55 ст., колко стотинки струва една гума?

Решение. Една гума струва $(200 - 30 - 2.55) : 3 = 20$ ст.

62. Сборът от годините на 3 деца преди 7 години бил 11. Ако миналата година едното е било на 11 години, а другото е на 11 години сега, след колко години третото ще е на 11 години?

Решение. Преди 7 години едното дете е било на $11 - 6 = 5$ години, другото на $11 - 7 = 4$ години, а третото на $11 - 5 - 4 = 2$ години. Сега то е на 9, а след 2 години ще е на 11 години.

63. Пипи раздала на всеки от гостите си по 5 лимонади и 7 пасти. Общо колко пасти е раздала тя, ако раздадените лимонади са 85?

Решение. Децата са $85 : 5 = 17$ и са получили общо $17.7 = 119$ пасти.

64. Ако $\heartsuit$ и $\diamondsuit$ са числа и

$$\diamondsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 17, \quad \text{а} \quad \heartsuit + \heartsuit + \diamondsuit = 16,$$

то $\diamondsuit + \heartsuit = ?$

Решение. Ако съберем двете равенства, ще получим, че

$$3\diamondsuit + 3\heartsuit = 17 + 16 = 33.$$

Тогава $\heartsuit + \diamondsuit = 33 : 3 = 11$.

65. Двадесет и три деца написали по една дума. Някои написали КОН, други — КОКОШКА, а останалите написали СЛОН. Сред написаното буквите О били 30, а буквите К били 20. Колко деца са написали СЛОН?

Решение. В КОН и СЛОН има по една буква О, а в КОКОШКА има две букви О. Понеже има 30 букви О, а децата са 23, то 7 деца са написали КОКОШКА. Те са написали общо 14 букви К. Остават $20 - 14 = 6$ букви К, така че 6 деца са написали КОН. Останалите $23 - 7 - 6 = 10$ деца са написали СЛОН.

66. Динко и Краси играли тенис и Динко спечелил с 3 точки повече от половината точки на Краси. Ако Краси спечелила 13 точки повече от Динко, колко точки е спечелил всеки от тях?

Решение. Ако половината точки на Краси са отсечка, то Динко е спечелил отсечка и 3 точки, а Краси две отсечки. Щом Краси има 13 точки повече от Динко, то отсечката е $3 + 13 = 16$ точки. Динко е спечелил 19 точки, а Карси 32 точки.

67. Всеки ден учител по математика пише или 5 тройки, или 4 четворки, или 3 петици. За няколко дни сборът на написаните оценки е 107. Колко от тях са четворки?

Решение. Всеки ден сборът на написаните оценки се увеличава или с $3.5 = 15$, или с $4.4 = 16$. Общ сбор 107 се получава от $2.16 + 5.15$, т.е. са написани $2.4 = 8$ четворки.

68. Попитали учител по математика на колко години е и той отвърнал: *Ако увеличите първата цифра на моята възраст с 1, увеличите втората цифра с 2 и след тях допишете 3, ще получите трицифрено число, което се дели на моята възраст.* На колко години е учителят?

Решение. Ако учителяте на $\overline{ab}$ години, то $\overline{(a+1)(b+2)3}$ се дели на $\overline{ab}$. Тъй като $\overline{ab0}$ се дели на $\overline{ab}$, то и разликата

$$\overline{(a+1)(b+2)3} - \overline{ab0} = 123$$

се дели на $\overline{ab}$. Тъй като $123 = 3.41$ има единствен двуцифрен делител, учителят е на 41 години.

69. Ако $a = \dfrac{1 - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} : 1\frac{1}{3}}$, намерете неизвестното число x в равенството

$$(x + 2 : 0,2) : a = \frac{1,2.4,5}{0,2.0,75}.$$

Решение. Намираме $a = \dfrac{4}{9}$ и $x = \dfrac{4}{9} \cdot 36 - 10 = 6$.

70. Даден е трапецът $ABCD$ с основи $AB = 5,5$ cm и $CD = 4,5$ cm.

а) Намерете лицето на $ABCD$, ако лицето на $\triangle ACD$ е 9 cm^2.

б) На страната AB е отбелязана точката N така, че четириъгълникът $ANCD$ е успоредник. Колко процента от лицето на трапеца $ABCD$ е лицето на успоредника $ANCD$?

Решение. Да означим височината на трапеца с h. Лицето на трапеца $ABCD$ е $S = \dfrac{1}{2} \cdot (4,5 + 5,5) \cdot h = 5h$.

а) Лицето на триъгълника ACD е равно на $\dfrac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot h = 9$, откъдето намираме $h = 4$ cm. Лицето на трапеца $ABCD$ е $S = 20$ cm^2.

б) Лицето на успоредника $ANCD$ е $4,5h$, т.е. $\dfrac{4,5h}{5h} = 90\%$ от лицето на трапеца.

71. Турист изминал маршрут на три етапа. На първия етап изминал 20 км, на втория етап – с 14% по-голямо разстояние, отколко на първия и с 25% по-малко, отколко на третия етап. Намерете дължината на изминатия от туриста маршрут.

Решение. На втория етап туристът изминал $1,14.20 = 22,8$ км, които са 75 от пътя на третия етап. Следователно на третия етап е изминал $22,8 : 0,75 = 30,4$ км, общо $73,2$ км.

72. Запитали един математик на колко години е и той отговорил: *Ако разменя местата на цифрите на десетците и единиците в моята възраст, ще получа число, което е с 20% по-голямо от възрастта ми.* На колко години е математикът?

Решение. Ако възрастта на математика е $\overline{ab}$, имаме $\overline{ba} = \dfrac{6}{5} \cdot \overline{ab}$ (цифрите a и b са различни от 0). Оттук $\overline{ab}$ се дели на 5, следователно $b = 5$, а тъй като $\overline{5a}$ се дели на 6, то $a = 4$. Математикът е на 45 години.

73. Правоъгълен паралелепипед има измерения x, $(x-1)$ и $(x+1)$ cm.

а) Изразете лицето на повърхнината на паралелепипеда чрез x и запишете получения многочлен в нормален вид.

б) Ако лицето на повърхнината на паралелепипеда е равно на 382 cm^2, намерете обема му.

Решение. а) $S_1 = 2(x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1)) = 6x^2 - 2$.

б) От равенството $6x^2 - 2 = 382$ следва, че $x^2 = 64$, т.е. $x = 8$ cm. Намираме $V = 7.8.9 = 504$ cm^3.

74. Височината на прав кръгов цилиндър с обем 150π cm^3 е с 20% по-голяма от радиуса му. Намерете лицето на повърхнината на цилиндъра.

Решение. Като изразим височината $h = 1,2r$ и заместим във формулата за обем, получаваме равенството $r^2.1,2r\pi = 150\pi$, откъдето намираме $r = 5$ cm. Следователно $h = 6$ cm и намираме $S_1 = 2\pi.5.(5+6) = 110\pi$ cm^2.

75. Турист се изкачил до хижа Х и се върнал обратно по същия път за общо 1 час и 20 минути. Ако скоростта на изкачване на туриста се отнася към скоростта на слизане както 2 : 3, намерете колко часа туристът се е изкачвал до хижата.

Решение. Тъй като пътят, изминат на изкачване е равен на пътя на слизане, то времето за изкачване се отнася към времето за слизане както $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3} = 3 : 2$. Следователно времето за изкачване е $\dfrac{3}{5} \cdot 80 = 48$ минути.

ХумОРОСКОП – 2018

♈ Овен

Първата производна на вашата агресивност ще бъде както обикновено *строго положителна.* Новата астрологична година ще Ви донесе промяна на знака в *N-мерната сфера* на чувствата. Така *затворената Ви обвивка* ще заприлича на *множеството на Манделброт. Минимизирайте* стресовите ситуации и въведете *хармоничния ред* в семейството и в работата си.

♉ Телец

Броят на значителните професионални успехи през Новата година ще бъде N $(N > 0)$, ако не се поддадете на пасивност и скептицизъм. В последния случай ще реализирате m $(0 < m < N)$ от тях. Разчитайте на закрилата на Вашата покровителка Венера. Парите ще изтичат от портмонето Ви сякаш е *Ератостеново решето*, но за щастие имате талант не само в харченето. Разчитайте на *афинна трансформация* в духовната *сфера.*

♊ Близнаци

Кинетична Ви *N-ергия* е огромна, но потеницалната понякога Ви изневерява. Затова си организирайте екскурзия, изпълнена с *комплексни многообразия.* Ежедневен фитнес и билкови вани ще подобрят изследователския Ви потенциал и ще повишат *вероятността* да извикате: *Еврика!* (без да имате пред вид някоя фондация) …

♋ Рак

Имайте предвид, че Раците стават уязвими, ако *Хаусдорфовото* им *разстояние* до планинските красоти не клони към 0 поне веднъж седмично. Ю$\boldsymbol{\pi}$итер ще бъде благосклонен към Вас – ще получите поне $m + 1$ подаръка, където m е броят на *чекмеджетата на Дирихле.* Най-добре ще се чувствате в $\boldsymbol{\varepsilon}$*-околност*, обединяваща семейството и *същинско подмножество* на колегите Ви.

♌ Лъв

И през Новата година Слънцето *непрекъснато* ще Ви вляе *строго положително* в *сферата* на чувствата и в професионалния Ви живот. Ще *клоните равномерно* към целта си с лъвско достойнство. Внимавайте, когато се готвите за скок през **O** (*голямо*), особено ако е обвито в пламъци… Помнете теоремата на Лъв VI Философ (Мъдри): *Голямо O прескочи, голяма дума не казвай* …

♍ Дева

Меркурий, планетата, която Ви закриля, ще минимизира мярката на Вашата самокритичност и склонност към самоанализи (комплексни и реални). Родените под знака ∂Va обикновено могат да *диференцират* частните от общите проблеми и това ще ги зареди и през тази година със строго положителна *N-ергия.*

♎ Везни

Колебаете се като *синусоида*, когато се опитвате да решавате важни екзистенциални проблеми. Не се тревожете – през Новата година за $\forall$ Ваш проблем $\exists$ решение. В *хиперкуба* на чувствата Ви очакват изненади – пазете се от любовен Δ, защото връзката Ви ще заприлича на *триъгълник на Шерпински*. За да се чувствате истински щастливи, вътрешното Ви равновесие трябва да е непоклатимо като $\boldsymbol{e^x}$ при диференциране и интегриране.

♏ Скорпион

За да бъдат здрави и щастливи, родените под *интеграла* на Скорпион трябва да избягват бутилката (с изключение на бутилката на Клайн) – това твърдят традиционната астрология и верните им покровители Плутон и Марс. Вашият *идеал* не е да получите *пръстен* (дори да е *Мъобиусов*), а да бъдете независим и волен като *свободен вектор*. *Математическо очакване* за това *събитие* е достатъчно голямо през Новата година.

♐ Стрелец

Вашият покровител Ю$\boldsymbol{\pi}$итер и през Новата година година ще Ви вдъхнови за творчески подвизи в *N-мерното пространство* на професионалните Ви интереси. Огъвате лъка си, като използвате *динамиката на въртящата се конзолна греда на Ойлер-Бернули*, а стрелите Ви са като *свободни вектори*. У противоположния пол търсите съвършенства, както се търсят *нечетни съвършени числа* – проверено е, че до 10^{50} такива числа няма и все пак търсенето продължава.

♑ Козирог

Планетата Сатурн Ви зарежда и през Новата година с последователност, достойна за *редицата на Фибоначи*, и с естетика, която съперничи на *златното сечение*. Нямате комплекси дори когато работите с *комплексни числа*. Вашата *рационалност* кара хората да мислят, че рано сте влезли в *асимптотиката* си, но това Ви осигурява живот, клонящ към $\boldsymbol{\infty}$.

♒ *Водолей*

Както твърди традиционната астрология, Вашият девиз е: *Знам и мога!* (Явно не препрочитате Сократ с достатъчна *честота*.) Имате необикновенна склонност към *разходимост* от домашното огнище и разкъсване на *веригите на Марков*. Успехите Ви през тази година ще се леят като из *пресечен конус*. Нищо чудно да получите като подарък нови *Питагорови гащи* в модерен стил – протъркани, скъсани, раздърпани, с дупки с радиус $\boldsymbol{\varepsilon}$ (за произволно голямо $\boldsymbol{\varepsilon}$).

♓ Риби

Девизът на Рибите е: *Надявам се, представям си.* Живото Ви въображение се проявява особено добре при работа с *имагинерните* числа, а реализмът Ви – при работа с *реалните*. Чувствителната Ви нервна система изисква *константна* грижа от *$\boldsymbol{\varepsilon}$-околните*. Ще я получите и през тази Нова година. Очаквайте *рекурсионно* пътуване до *Ханойските кули*.

Астро-пара-психолог: Жен-И-Сен

ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ — 2017 г.

НАУЧНОПОПУЛЯРНИ СТАТИИ

ИЗВЪНКЛАСНА РАБОТА И ИНФОРМАЦИЯ

УЧЕНИЧЕСКО ТВОРЧЕСТВО

КОНКУРСИ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

ЗА ПО-МАЛКИТЕ

ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА КОНКУРСНИ ИЗПИТИ

ЗА КАНДИДАТ-СТУДЕНТА

ЗА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКА ЖУРНАЛИСТИКА

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви две от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Софтуерно инженерство“

Подготвя специалисти по разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер за цялата област на компютърните приложения. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер; аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрола на качеството, консултанти в бизнес организации или в публичната администрация; преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и други.

Бакалавърска програма „Статистика“

Подготвя аналитични специалисти с умения за прилагане на методите на математическата статистика, съчетани със задълбочена подготовка по математика и информационни технологии. Учебният план осигурява фундаментални познания по основните дисциплини, свързани със стохастиката. Реализация като статистици, актюери в банки и застрахователни компании, консултанти и експерти в научни институти, преподаватели във висши учебни заведения и други.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 20.11.2017 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.