

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

2

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

ПРОФ. ДМН ПЕТЪР БОЙВАЛЕНКОВ – главен редактор

НЕВЕНА СЪБЕВА – зам. главен редактор

ЧЛ.-КОР. ПРОФ. ДМН ГЕНЧО СКОРДЕВ

ЧЛ.-КОР. ПРОФ. ДМН НИКОЛАЙ НИКОЛОВ

ПРОФ. ДМН ЕМИЛ КОЛЕВ

ПРОФ. Д-Р ИВАН ТОНОВ

ПРОФ. Д-Р СТАНИСЛАВ ХАРИЗАНОВ

ДОЦ. Д-Р ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА

ДОЦ. Д-Р ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

ЕМИЛ КАРЛОВ

ТАТЯНА ПАРХОМЕНКО – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

ПРОЛЕТНОТО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

НЕ Е МАСОВО СЪСТЕЗАНИЕ

НЕВЕНА СЪБЕВА, ИМИ-БАН

На 30 март 2024 г. се проведе Пролетното математическо състезание за ученици от 5.–7. клас. Домакин беше 119 СУ „Академик Михаил Арнаудов“, София.

В състезанието взеха участие 295 ученици от 5. клас, 223 ученици от 6. клас и 152 ученици от 7. клас. Най-добри резултати в своята възрастова група постигнаха:

5. клас

1 място: **Ирина Янакиева** (СМГ, 25,75 т.)

2 място: **Ивелина Шилова** (НПМГ, 25,25 т.)

3 място: **Боян Беляшки** (МГ, Варна, 24,5 т.)

I награда: **Борис Маринов** (ПЧМГ, 24 т.), **Асен Илиев** (ПЧМГ, 23,5 т.), **Адриан Ву Нгуен** (СМГ, 23,5 т.), **Иван Любенов** (ПЧМГ, 23 т.), **Борис Велев** (СМГ, 22,75 т.), **Александър Силгиджиян** (СМГ, 21,75 т.), **Мария Георгиева** (СМГ, 21,25 т.), **Мартин Хартарски** (СМГ, 21 т.), **Борис Астарджиев** (ПЧМГ, 20,5 т.)

II награда: **Теодор Лалов** (СМГ, 19,75 т.), **Ана Дачева** (СМГ, 19,5 т.), **Вячеслав Рупски** (МГ, Пловдив, 19 т.), **Лориан Янкова** (СМГ, 19 т.), **Иво Митрев** (МГ, Пловдив, 18 т.), **Мартин Захариев** (МГ, Варна, 17,5 т.), **Даниел Петров** (МГ, Пловдив, 17,5 т.), **Габриела Томова** (ППМГ, Бургас, 17,5 т.), **Никола Иванов** (СМГ, 17,5 т.), **Карина Аргирова** (МГ, Варна, 17,25 т.), **Мария Хаджиева** (СМГ, 17 т.)

III награда: **Андрей Калинов** (СМГ, 16,5 т.), **Виктор Золев** (СМГ, 16 т.), **Яков Младеновски** (СМГ, 15,75 т.), **Божидар Стойков** (СМГ, 15 т.), **Георги Младенов** (СМГ, 15 т.), **Калина Цолова** (СМГ, 15 т.), **Арсений Павлович** (ЧСУ Наука за деца, 14,75 т.), **Владимир Маринов** (НПМГ, 14,75 т.), **Лъчезар Томов** (ППМГ, Бургас, 14,5 т.), **Димитър Миневски** (СМГ, 14,5 т.), **Нихал Мехмед** (СМГ, 14,5 т.), **Сандрина Панайотова** (НПМГ, 14,25 т.), **Цветозар Бангачев** (ПЧМГ, 14 т.), **Беатрис Матакиева** (СМГ, 14 т.), **Ема Байлова** (СМГ, 14 т.), **Матей Апостолов** (СМГ, 14 т.)

6. клас

1 място: **Филип Недялков** (ПЧМГ, 26 т.)

2 място: **Дамян Русев** (ПЧМГ, 24 т.)

3 място: **Християн Тотевски** (МГ, Варна 22,5 т.)

I награда: **Мати Джеймисън** (ПЧМГ, 22 т.), **Георгия Михалева** (ППМГ, Бургас, 20 т.), **Сияна Стамова** (ППМГ, Бургас, 20 т.), **Евгени Иванов** (СМГ, 20 т.), **Борис Иванов** (МГ, Варна, 19,5 т.), **Ивайло Арбалов** (ПЧМГ, 19,5 т.), **Михаил Иванов** (СМГ, 19,5 т.), **Александър Стайков** (СМГ, 19 т.)

II награда: **Петър Коев** (ППМГ, Бургас, 18,5 т.), **Виктор Добриков** (ПЧМГ, 18,5 т.), **Иван Сирмов** (МГ, Пловдив, 18 т.), **Георги Митов** (МГ, Пловдив, 18 т.), **Алекс Омаров** (СМГ, 18 т.), **Елена Чешмеджиева** (СМГ, 18 т.), **Иван Стамболийски** (СМГ, 18 т.), **Николай Георгиев** (СМГ, 18 т.), **Панайот Панайотов** (СМГ, 18 т.), **Калоян Ангелов** (ППМГ, Бургас, 17,5 т.), **Николай Величков** (ПЧМГ, 17,5 т.), **Димитър Богданов** (МГ, Варна, 17 т.)

III награда: **Светлозар Еленков** (СМГ, 16,5 т.), **Кристиян Атанасов** (125 СУ, 16 т.), **Мирослав Дичев** (МГ, Варна 16 т.), **Данаил Гатев** (СМГ, 16 т.), **Симеон Стоянов** (СМГ, 16 т.), **Даниел Караманов** (СМГ, 15,5 т.), **Васил Василев** (Френски лицей 15,5 т.), **Невена Тонева** (125 СУ, 15 т.), **Дарина Трендафилова** (ППМГ, Бургас 15 т.), **Иван Тодоров** (ППМГ, Бургас 14,5 т.), **Илиян Георгиев** (СМГ, 14,5 т.)

7. клас

1 място: **Кирил Зулямски** (СМГ, 26 т.)

2 място: **Стоян Балтов** (ППМГ Бургас, 22,5 т.)

3 място: **Бижо Бижев** (СМГ, 21 т.)

I награда: **Марина Георгиева** (СМГ, 20,5 т.), **Яни Мишев** (ППМГ, Бургас, 20 т.), **Мартин Чавдаров** (СМГ, 20 т.), **Теа Тодорова** (НПМГ, 19,25 т.), **Боян Бояджиев** (ЧОУ Света София, 18,5 т.), **Александър Петров** (СМГ, 18,5 точки)

II награда: **Сияна Бандрова** (СМГ, 18,25 т.), **Борис Георгиев** (ПЧМГ, 18 т.), **Даниел Тодоров** (ПЧМГ, 17,5 т.), **Мартин Висулчев** (СМГ, 17 т.), **Рая Ночева** (СМГ, 17 т.)

III награда: **Стела Младенова** (МГ, Варна, 16,75 т.), **Калоян Киков** (МГ, Пловдив, 16,75 т.), **Янилия Терпо** (ППМГ, Бургас, 16,5 т.), **Виктория Катеринчева** (ПЧМГ, 16,5 т.), **Анелия Филипова** (МГ, Варна, 16 т.), **Велина Тодорова** (НПМГ, 16 т.), **Марина Маринова** (МГ Русе, 16 т.), **Никола Костов** (СМГ, 16 т.)

Предлагаме ви условията на задачите с отговори, кратки решения и коментари.

Тема за 5. клас

Задача 1. Дари написала компютърна програма, която съставя редица от числа по следния начин.

1. В началото Дари въвежда първото и второто число в редицата.
2. На всяка стъпка, след последните две числа a и b в редицата, програмата пресмята и изписва на екрана следващото число, равно на $2 \cdot \frac{b}{a}$.
3. Програмата спира, когато за първи път сборът на всички числа на екрана (включително въведените от Дари), стане по-голям от 1000.

Дари въвела първо числото $1\frac{1}{2}$. След като въвела и второто си число, на екрана се изписало третото число в редицата: 1,6.

- а) Кое е второто число, което е въвела Дари?
- б) На колко е равен сборът на първите 95 числа в редицата?
- в) Колко числа ще има в редицата, когато програмата спре?

Невена Събева

Задача 2. Децата в летен лагер говорят немски или английски и никой не говори и двата езика. Известно е, че 40% от немскоговорящите са момичета, 30% от момчетата говорят немски и 20% от англоговорящите са момчета.

- а) Колко процента от децата са момчетата, които говорят английски език?
- б) Колко процента от момчетата говорят немски език?

Таня Стоева

Задача 3. Най-малкото общо кратно на естествените числа a и b е 360. Ако a се намали с 20% и b се намали с 25%, се получават две взаимнопрости естествени числа. Намерете a и b , ако е известно, че тяхната разлика се дели на 7.

Таня Стоева

Задача 4. В галактиката на Малкия принц има пет планети. На първата планета има един град, на втората има два града и т.н., на петата планета има 5 града. Малкият принц планира пътешествие между градовете на тези планети така, че да не посети нито един град повече от веднъж (възможно е да пропусне някои градове). Той тръгва от града на първата планета към втората, след това към третата и така нататък, като пътешествието му свършва в някой град на петата планета. На всяка планета Малкият принц посещава поне един град, като избира в кой град да кацне, кои градове да посети и в какъв ред, а след това отлита към следващата планета.

а) Колко са различните маршрути, по които може да пътешества Малкият принц?

б) Преди началото на пътешествието, един от градовете бил затворен за посещение. Малкият принц пресметнал, че му остават 332 800 възможни маршрути. На коя планета е затвореният град?

Невена Събева

Тема за 6. клас

Задача 1. Сравнете числата

$$A = 8 \cdot 7 - 8 \cdot 7^2 + 8 \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^4 + \dots - 8 \cdot 7^{98} + 8 \cdot 7^{99} \quad \text{и}$$

$$B = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot 4^{124}.$$

Таня Стоева

Задача 2. Пипи пазарувала в магазина за бонбони. Оказало се, че:

о В магазина има само шоколадови, ментови и ягодови бонбони, като броят на ментовите е с 25% повече от броя на шоколадовите.

о Ако Пипи, без да гледа, вземе един от бонбоните в магазина, с вероятност 25% този бонбон ще е шоколадов.

о Бонбон от всеки вид струва цяло число стотинки. Цената на 30% от ментовите бонбони в магазина се отнася към цената на 25% от шоколадовите бонбони както 2 : 3.

а) Определете отношението на цените на един шоколадов бонбон и на един ментов бонбон.

б) Пипи купила всички бонбони в магазина и платила 20,72 лв. Ако един ягодов бонбон струва 13 ст., то общо колко бонбони е купила Пипи?

Павлина Парушева

Задача 3. В четириъгълника $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O . Точка M е от отсечката AO , а N е от отсечката BO и $S_{ADM} : S_{ANM} = S_{BNM} : S_{BNC}$.

а) Докажете, че триъгълниците DMN и DMC имат равни лица и правите DM и CN са успоредни.

б) Ако $S_{ABCD} = 2024 \text{ cm}^2$, $S_{DOC} = 44 \text{ cm}^2$ и

$$S_{MOD} : S_{BCN} : S_{ONC} = 1 : 2 : 4,$$

намерете отношението на лицата на триъгълниците AMD и MBN .

Павлина Парушева

Задача 4. Най-малкото общо кратно на естествените числа a и b е 2024. Ако a се увеличи с 25% и b се намали с 50%, се получават две взаимнопрости естествени числа.

а) С колко процента се увеличава най-малкото общо кратно на числата след тази промяна?

б) Намерете a и b , ако е известно, че тяхната разлика се дели на 7.

Таня Стоева

Тема за 7. клас

Задача 1. Ако $|2x^2 - |5x^2 + 48x - y|| = x^2$, намерете:

- а) за кои цели числа x стойността на y е 2024;
- б) за кои стойности на x стойността на y е най-малка.

Боянка Савова

Задача 2. В декартова координатна система xOy с единична отсечка 1 cm са дадени точките $A(-6; 0)$, $B(4; 0)$, C и $D(0; 9)$ така, че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник. Правата BC пресича оста Oy в точка F , а през точка F е построена права g , перпендикулярна на BC . Правата g пресича оста Ox в точка E .

- а) Намерете координатите на точките C , F и E .
- б) Ако ъглополовящата на $\sphericalangle ADF$ пресича правата BC в точка P , намерете дължината на отсечката FP .

Таня Стоева

Задача 3. Даден е равностраничен триъгълник ABC . На правата AB е избрана точка D така, че B е между A и D . Симетралата на отсечката AD пресича страната BC на триъгълника в точка E .

- а) Да се докаже, че $BD = CE$.
- б) Ако $\sphericalangle BAE = 45^\circ$ и P е пресечната точка на DE и AC , да се докаже, че

$$PE : DE = AP^2 : 2AD^2 \quad \text{и} \quad 2 \cdot AB = AP + 4 \cdot BD.$$

Боянка Савова

Задача 4. В малко село в Средната земя живеят хобити и джуджета. Всички хобити са в приятелски отношения помежду си, а всяко джудже се е скарало с точно пет джуджета.

Тръгвайки на пътешествие, вълшебникът Гандалф решил да покани двама хобити и две джуджета да го придружат. Той установил, че възможностите за избор на двама хобити са точно толкова, колкото са възможностите за избор на две джуджета, които не са скарани.

- а) Колко са хобитите и колко – джуджетата?
- б) Всеки хобит и всяко джудже имат отделен дом. Домовете са разположени така, че никои три не лежат на една права. Някои домове са свързани с пътеки, като всяка пътека е отсечка и никои две пътеки не се пресичат във вътрешна точка (но може да имат общ край). Най-много колко пътеки свързват домовете в това село?

Невена Сѐбева

Отговори и кратки решения

5.1. а) Нека второто въведено число на Дари е X . От равенството

$$2 \cdot X : 1\frac{1}{2} = 1,6 \text{ намираме } X = 1,2.$$

б) Началото на редицата е

$$1\frac{1}{2}; 1,2; 1,6; \quad 2 \cdot 1,6 : 1,2 = \frac{8}{3}; \quad 2 \cdot \frac{8}{3} : 1,6 = \frac{10}{3}; \quad 2 \cdot \frac{10}{3} : \frac{8}{3} = \frac{5}{2}; \\ 2 \cdot \frac{5}{2} : \frac{10}{3} = 1\frac{1}{2}; \quad 2 \cdot 1\frac{1}{2} : \frac{5}{2} = 1,2 \dots$$

Следователно в редицата периодично се повтарят първите шест числа $1\frac{1}{2}$, $1,2$, $1,6$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$. Сборът на тези шест числа е

$$1\frac{1}{2} + 1,2 + 1,6 + 2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = 12,8.$$

Тъй като $95 : 6 = 15$ (ост. 5), сборът на първите 95 числа в редицата е

$$16 \cdot 12,8 - 2\frac{1}{2} = 204,8 - 2,5 = 202,3.$$

в) Тъй като $1000 : 12,8 = 78\frac{1}{8}$, то в редицата ще са записани 78 пъти шестте числа $1\frac{1}{2}$, $1,2$, $1,6$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{2}$. Така ще са записани $78 \cdot 6 = 468$ числа със сбор $78 \cdot 12,8 = 998,4$.

При записване на следващото, 469-то число, сборът ще стане $998,4 + 1,5 = 999,9$. При записване на 470-тото число, сборът ще стане $999,9 + 1,2 = 1001,1$, ще надхвърли 1000 и програмата ще спре.

Забележка. Типична грешка е да се намерят числата в редицата до седмото число (без осмото), и да се направи заключение, че нататък числата в редицата се повтарят. Това следва едва когато има два последователни числа в редицата, които съвпадат съответно с първото и второто.

5.2. Нека немскоговорящите са x ; от тях $0,4x$ са момичета и $0,6x$ са момчета. Тези $0,6x$ немскоговорящи момчета са 30% от момчетата, следователно всички момчета са $0,6x : 0,3 = 2x$. Тогава англоговорящите момчета са $2x - 0,6x = 1,4x$. Тези $1,4x$ англоговорящи момчета

са 20% от англоговорящите. Следователно децата, които говорят английски, са $1,4x : 0,2 = 7x$. Следователно момичетата, които говорят английски, са $7x - 1,4x = 5,6x$.

	момчета	момичета	общо
Английски	$1,4x$	$5,6x$	$7x$
Немски	$0,6x$	$0,4x$	x
общо	$2x$	$6x$	$8x$

а) Търсим колко процента от всички деца ($8x$) са момичетата, които говорят английски ($5,6x$), или

$$\frac{5,6x}{8x} = 70\%.$$

б) Търсим колко процента от момичетата ($6x$) са момичетата, които говорят немски ($0,4x$), или

$$\frac{0,4x}{6x} = \frac{40}{6.100} = \frac{20}{3}\% = 6\frac{2}{3}\%.$$

5.3. След намаление на a с 20% се получава $\frac{4}{5}a$, което трябва да е естествено число, т.е. a се дели на 5. Нека $a = 5n$, където n е естествено число. След промяната получаваме $\frac{4}{5} \cdot 5n = 4n$.

След намаление на b с 25% се получава $\frac{3}{4}b$, което трябва да е естествено число, т.е. b се дели на 4. Нека $b = 4m$, където m е естествено число. След промяната получаваме $\frac{3}{4} \cdot 4m = 3m$.

От условието $\text{НОД}(4n, 3m) = 1$ следва, че m и n са взаимнопрости, m не се дели на 2 и n не се дели на 3.

Имаме $\text{НОК}(5n, 4m) = 360 = 2.2.2.3.3.5$. Тъй като n не се дели на 3, то 3.3 участва в разлагането на m . Тъй като m не се дели на 2, то 2.2.2 участва в разлагането на n .

Възможни са следните два случая.

	n	m	$a = 5n$	$b = 4m$
1.	2.2.2	3.3	40	36
2.	2.2.2	3.3.5	40	180

Разликата на a и b се дели на 7 само при $a = 40$, $b = 180$.

5.4. За планета с номер n Малкият принц може да посети само един град по n начина; точно два града по $n(n-1)$ начина; ... всички градове по $n.(n-1).(n-2) \dots 3.2.1$ начина.

За всяка планета пресмятаме броя на маршрутите на нея.

Планета	Брой маршрути
1	1
2	$2 + 2.1 = 4$
3	$3 + 3.2 + 3.2.1 = 15$
4	$4 + 4.3 + 4.3.2 + 4.3.2.1 = 64$
5	$5 + 5.4 + 5.4.3 + 5.4.3.2 + 5.4.3.2.1 = 325$

Броят на възможните маршрути е $1.4.15.64.325 = 1\,248\,000$.

б) Ако затвореният град е на n -тата планета, $n > 1$, броят на маршрутите на нея е равен на броя на маршрутите на $n-1$ -та планета.

Тъй като 332 800 не се дели на 3, то в произведението $1.4.15.64.325$ множителят 15, който е кратен на 3, трябва да се замени с 4. И наистина, $1.4.4.64.325 = 332800$. Затвореният град е на третата планета.

6.1. Представяме всяка осмица в A като $7+1$ и разкриваме скобите:

$$\begin{aligned}
 A &= 8.7 - 8.7^2 + 8.7^3 - 8.7^4 + \dots - 8.7^{98} + 8.7^{99} = \\
 &= (7+1).7 - (7+1).7^2 + (7+1).7^3 - (7+1).7^4 \dots - (7+1).7^{98} + (7+1).7^{99} \\
 &= 7^2 + 7 - 7^3 - 7^2 + 7^4 + 7^3 - 7^5 - 7^4 \dots - 7^{99} - 7^{98} + 7^{100} + 7^{99}.
 \end{aligned}$$

Получаваме $A = 7 + 7^{100}$.

Представяме всяка тройка като $4-1$ и разкриваме скобите:

$$\begin{aligned}
 B &= (4-1).4 + (4-1).4^2 + (4-1).4^3 + \dots + (4-1).4^{124} \\
 &= 4^2 - 4 + 4^3 - 4^2 + 4^4 - 4^3 + \dots + 4^{125} - 4^{124}.
 \end{aligned}$$

Получаваме $B = 4^{125} - 4 = 2^{250} - 4$.

От $7^2 > 2^5$ следва, че $7^{100} > 2^{250}$. Следователно

$$A = 7 + 7^{100} > 7 + 2^{250} > 2^{250} - 4 = B \implies A > B.$$

6.2. Нека броят на шоколадовите бонбони е x , където x е естествено число. Ментовите бонбони са $125\%x = \frac{5}{4}x$ и броят им също е естествено число; следователно x се дели на 4. Нека $x = 4y$, където y е естествено число. Тогава ментовите бонбони са $125\%.4y = 5y$.

Тъй като вероятността да се избере шоколадов бонбон е 25%, то броят на шоколадовите бонбони е 25% от броя на всички бонбони. Следователно всички бонбони са $4.4y = 16y$. Ягодовите са

$$16y - (4y + 5y) = 7y.$$

а) Нека цената на ментов бонбон е a ст., а цената на шоколадов бонбон е b ст. Тогава

$$(30\% \cdot (5y \cdot a)) : (25\% \cdot (4y \cdot b)) = 2 : 3,$$

откъдето получаваме, че

$$\frac{1,5a}{b} = \frac{2}{3} \implies \frac{a}{b} = \frac{4}{9}.$$

Цената на шоколадов бонбон се отнася към цената на ментов бонбон, както $b : a = 9 : 4$. Следователно $a = 4n$, $b = 9n$, където n е естествено число.

б) Цената на всички бонбони в стотинки е

$$5y \cdot 4n + 4y \cdot 9n + 7y \cdot 13 = 2072.$$

Стигаме до равенството $56yn + 7 \cdot 13y = 2072$. Като разделим на 7, получаваме

$$(8n + 13)y = 296.$$

Тук $8n + 13$ е нечетен делител на $296 = 2^3 \cdot 37$ и $8n + 13$ е не по-малко от 21. Следователно $8n + 13 = 37$, т.е. $n = 3$, а $y = 8$. Пипи е купила $16 \cdot y = 16 \cdot 8 = 128$ бонбони.

6.3. а) Ще използваме, че лицата на триъгълници с общи височини се отнасят както съответните страни:

$$S_{AMD} : S_{MOD} = AM : MO = S_{AMN} : S_{MON}.$$

Следователно $S_{AMD} : S_{AMN} = S_{MOD} : S_{MON}$.

Аналогично $S_{MBN} : S_{BNC} = S_{MON} : S_{CON}$. От условието следва, че

$$S_{MOD} : S_{MON} = S_{MON} : S_{CON}.$$

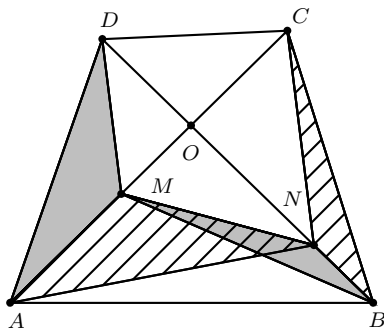
Разглеждаме четириъгълника $MNCD$. В него O е пресечна точка на диагоналите и $S_{MOD} : S_{MON} = OD : ON = S_{DOC} : S_{CON}$ (триъгълници с общи височини към OD и ON съответно.) Следователно

$$S_{MOD} : S_{MON} = S_{MON} : S_{CON} = S_{DOC} : S_{CON},$$

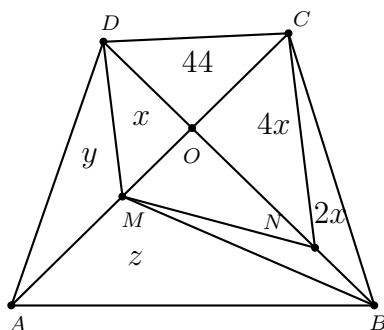
т.е. $S_{MON} = S_{DOC}$. Следователно

$$S_{DMN} = S_{DMO} + S_{MON} = S_{DMO} + S_{DOC} = S_{DMC}.$$

Но $\triangle DMN$ и $\triangle DMC$ имат обща страна DM и равни лица. Следователно височините към страната DM са равни. А това означава, че върховете N и C лежат на права, която е успоредна на DM .



б) Нека $S_{MOD} = x$, съответно $S_{BCN} = 2x$, $S_{ONC} = 4x$. От доказателството на а) следва, че $S_{MON} = S_{DOC} = 44 \text{ cm}^2$.



От $S_{MOD} : S_{MON} = S_{DOC} : S_{CON}$ следва, че $x : 44 = 44 : 4x$, откъдето $x = 22 \text{ cm}^2$, т.е. $S_{MOD} = 22 \text{ cm}^2$, съответно $S_{BCN} = 44 \text{ cm}^2$, $S_{ONC} = 88 \text{ cm}^2$.

$$\text{От } ON : NB = S_{MON} : S_{MNB} = S_{CON} : S_{CNB} = 4 : 2 = 2 : 1$$

намираме $S_{MNB} = 22 \text{ cm}^2$.

Нека $S_{AMD} = y$, а $S_{AMB} = z$. От

$$AM : MC = S_{AMD} : S_{MDC} = S_{AMB} : S_{MBC},$$

намираме $y : (22 + 44) = z : (22 + 44 + 44 + 88)$, т.е. $z = 3y$. От

$$S_{ABCD} = S_{AMD} + S_{MDC} + S_{AMB} + S_{MBC} = 4y + 66 + 198 = 4y + 264 = 2024$$

получаваме, че $y = 440 \text{ cm}^2$. Търсеното отношение е

$$S_{AMD} : S_{MBN} = 440 : 22 = 20 : 1.$$

6.4. а) След увеличение на a с 25% се получава $\frac{5}{4}a$, което трябва да е естествено число, т.е. a се дели на 4. Нека $a = 4m$, където m е естествено число. След промяната получаваме $\frac{5}{4} \cdot 4m = 5m$.

След намаление на b с 50% се получава $\frac{1}{2}b$, което трябва да е естествено число, т.е. b се дели на 2. Нека $b = 2n$, където n е естествено число. След промяната получаваме n .

Имаме, че

$$\text{НОК}(4m, 2n) = 2024 = 2.2.2.11.23 \text{ и } \text{НОД}(5m, n) = 1.$$

От условието $\text{НОД}(5m, n) = 1$ следва, че m и n са взаимнопрости и 5 не дели n .

От $\text{НОК}(4m, 2n) = 2024 = 2.2.2.11.23$ следва, че

$$\text{НОК}(2m, n) = 2.2.11.23.$$

Тъй като m и n са взаимнопрости, възможни са следните два случая.

Първи случай. $m = 2k$, като n и k са нечетни взаимнопрости числа. Тогава

$$\text{НОК}(5m, n) = \text{НОК}(10k, n) = 10kn.$$

Освен това,

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(8k, 2n) = 8kn.$$

Тогава НОК се увеличава с $\frac{10kn - 8kn}{8kn} = \frac{2kn}{8kn} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Втори случай. $n = 4p$, като p и m са нечетни взаимнопрости числа. Тогава

$$\text{НОК}(5m, n) = \text{НОК}(5m, 4p) = 20mp.$$

Освен това,

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(4m, 8p) = 8mp.$$

Тогава НОК се увеличава с $\frac{20mp - 8mp}{8mp} = \frac{12mp}{8mp} = \frac{3}{2} = 150\%$.

б) Ще разгледаме двата случая от а).

Първи случай. $a = 8k$, $b = 2n$. Получихме, че $\text{НОК}(a, b) = 8kn = 2024$, следователно $kn = 11.23$.

	k	n	$a = 8k$	$b = 2n$	$ a - b $
1.	1	253	8	506	498
2.	11	23	88	46	42
3.	23	11	184	22	162
4.	253	1	2024	2	2022

Разликата на a и b се дели на 7 само при $a = 88$, $b = 46$.

Втори случай. $a = 4m$, $b = 8p$. Получихме, че $\text{НОК}(a, b) = 8mp = 2024$, следователно $mp = 11.23$.

	m	p	$a = 4m$	$b = 8p$	$ a - b $
1.	1	253	4	2024	2020
2.	11	23	44	184	140
3.	23	11	92	88	4
4.	253	1	1012	8	1004

Разликата на a и b се дели на 7 само при $a = 44$, $b = 184$.

Получихме два отговора: $a = 88$, $b = 46$ и $a = 44$, $b = 184$.

7.1. а) Тъй като $x^2 \geq 0$, даденото равенство е изпълнено, ако

$$2x^2 - |5x^2 + 48x - 2024| = x^2 \text{ или } 2x^2 - |5x^2 + 48x - 2024| = -x^2, \text{ т.е.}$$

$$|5x^2 + 48x - 2024| = x^2 \text{ или } |5x^2 + 48x - 2024| = 3x^2.$$

Последните равенства са изпълнени при

$$5x^2 + 48x - 2024 = x^2 \text{ или } 5x^2 + 48x - 2024 = -x^2 \text{ или } 5x^2 + 48x - 2024 = 3x^2 \text{ или } 5x^2 + 48x - 2024 = -3x^2, \text{ т.е.}$$

$$4x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или } 6x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или } 2x^2 + 48x - 2024 = 0 \text{ или } 8x^2 + 48x - 2024 = 0.$$

От $AD \parallel BC$ следва, че

$$S_{ADF} = S_{ADB} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DO = 45 \text{ cm}^2.$$

Но $S_{ADF} = \frac{1}{2} AO \cdot DF$, следователно $DF = 15 \text{ cm}$, $OF = 6 \text{ cm}$ и $F(0; -6)$.

Да означим $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABF = \alpha$ (кръстни). От $\triangle BEF$ изразяваме $\sphericalangle BEF = 90^\circ - \alpha$. Така получаваме, че $\triangle FOE \cong \triangle AOD$ ($AO = OF$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle EOF = 90^\circ$, $\sphericalangle ADO = \sphericalangle OEF = 90^\circ - \alpha$). Следователно $OE = OD = 9$ и намираме $E(-9; 0)$.

б) От $\sphericalangle ADP = \sphericalangle FDP$ и $\sphericalangle ADP = \sphericalangle DPF$ (кръстни), следва, че $\sphericalangle DPF = \sphericalangle FDP$, т.е. триъгълникът PDF е равнобедрен и

$$PF = DF = 15 \text{ cm}.$$

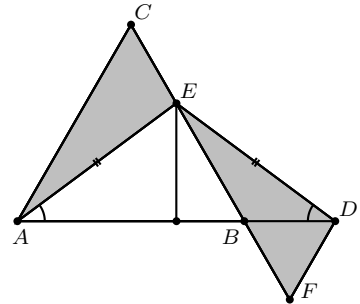
7.3. От $E \in s_{AD}$ следва, че $EA = ED$, откъдето $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \alpha$.

а) *Първо решение.* Да построим равностраничен триъгълник BFD , както е показано на чертежа. Имаме

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ABE + \sphericalangle BAE = 60^\circ + \alpha$$

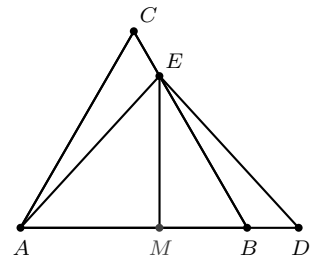
(външен ъгъл за $\triangle ABE$) и

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDB + \sphericalangle BDE = 60^\circ + \alpha.$$



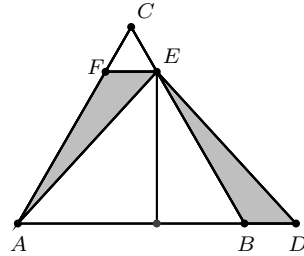
Тогава $\triangle ACE \cong \triangle EFD$ ($AE = DE$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F = 60^\circ$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle FDE = 60^\circ + \alpha$). Следователно $FD = CE$, т.е. $BD = CE$.

Второ решение. Нека означим страната на равностраничния триъгълник с a и $BD = b$. Ако $s_{AD} \cap AB = M$, то $AM = MD = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2}(a + b)$. Тогава $MB = AB - AM = a - \frac{a + b}{2} = \frac{a - b}{2}$. В правоъгълния триъгълник MBE имаме $\sphericalangle MEB = 30^\circ$, следователно $BE = 2 \cdot MB = 2 \cdot \frac{a - b}{2} = a - b$. Тогава $CE = a - BE = a - (a - b) = b$, което трябваше да докажем.

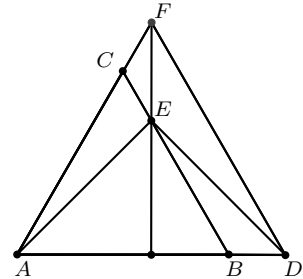


Трето решение. Да построим равностранния триъгълник CEF , както е показано на чертежа. От равенството $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EFC = 60^\circ$ следва, че $EF \parallel AB$. Триъгълниците BDE и AFE са еднакви по втори признак:

1. $EA = ED$
 2. $\sphericalangle AFE = \sphericalangle DBE = 120^\circ$
 3. $\sphericalangle AEF = \sphericalangle DAE$ (кръстни), а $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ADE$ ($\triangle ADE$ – равнобедрен)
- Следователно $DB = EF = CE$.

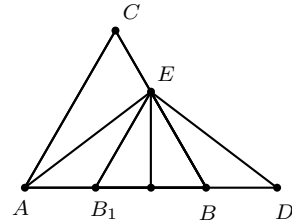


Четвърто решение. Да построим равностранния триъгълник ADF , както е показано на чертежа. Тъй като $AF = FD$ и $AE = ED$, то $EF \equiv s_{AD}$, следователно EF е и ъглополовяща в равностранния триъгълник ADF , т.е. $\sphericalangle AFE = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle CEF = \sphericalangle ACB - \sphericalangle CFE = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, следователно $CF = FE$. От друга страна, $CF = AF - AC = AD - AB = BD$.



Пето решение, на Бижо Бижев. Построяваме $B_1E \parallel AC$, както е показано на чертежа. Триъгълниците BB_1E и ABC са равностранни, следователно $AB_1 = CE$.

Тъй като OE е симетрала на AD и на B_1B , то $AO = OD$ и $OB_1 = OB$, следователно $AB_1 = BD$. Така получаваме, че $BD = CE$.



б) Тъй като $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAE = 45^\circ$ (от а)), то $\sphericalangle AED = 90^\circ$. Ако M е средата на хипотенузата AD в равнобедрения правоъгълен триъгълник ADE , то $EM = \frac{AD}{2}$, $EM \perp AD$ и

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{AD}{2} = \frac{AD^2}{4}.$$

Триъгълникът APE също е правоъгълен ($\sphericalangle AEP = 90^\circ$) и изразяваме $\sphericalangle PAE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Ще използваме, че в правоъгълен триъгълник с ъгъл 15° височината към хипотенузата е равна на $\frac{1}{4}$ от хипотенузата. (Ако K е

средата на AP , то медианата към хипотенузата в $\triangle APE$ е $EK = KP = PA$; триъгълникът AKE е равнобедрен и външният му ъгъл срещу основата е $\angle EKT = 2\angle EAK = 30^\circ$. Ако ET е височина в триъгълника APE , то $\triangle KTE$ е правоъгълен с ъгъл 30° , следователно $TE = \frac{1}{2} \cdot EK = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{2} = \frac{AP}{4}$.)

Тогава

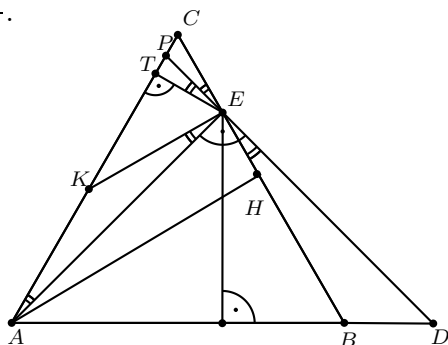
$$S_{APE} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot ET = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot \frac{AP}{4} = \frac{AP^2}{8}.$$

Следователно

$$\frac{S_{APE}}{S_{ADE}} = \frac{AP^2}{8} : \frac{AD^2}{4} = \frac{AP^2}{2AD^2}.$$

От друга страна,

$$\frac{S_{APE}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot PE}{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE} = \frac{PE}{DE}.$$



От двете последни равенства следва, че $\frac{PE}{DE} = \frac{AP^2}{2AD^2}$.

За да докажем второто равенство, да построим височината AH в равнострания триъгълник ABC ; тя е медиана и ъглополовяща, т.е. $BH = CH = \frac{BC}{2}$ и $\angle BAH = \angle CAH = 30^\circ$. Тъй като $\angle CAE = 15^\circ$, то AE е ъглополовяща на $\angle CAH$. От свойството на ъглополовящата следва, че $EH = ET$. Но $ET = \frac{AP}{4}$, а $EH = CH - EC = \frac{BC}{2} - BD$, следователно

$$\frac{BC}{2} - BD = \frac{AP}{4} \iff 2 \cdot AB = AP + 4 \cdot BD.$$

Второ решение, на Стела Младенова.

Забелязваме, че $\angle CEK = 90^\circ$ и в правоъгълния триъгълник CKE с $\angle CKE = 30^\circ$ имаме $CK = 2CE$. Медианата към хипотенузата в правоъгълния триъгълник APE е $KE = \frac{1}{2}AP$. Следователно

$$AC = AK + KC = \frac{1}{2}AP + 2CE \iff$$

$$AP = \frac{1}{2}AP + 2BD \iff 2AB = AP + 4BD.$$

7.4. а) Нека хобитите са n , а джуджетата са m на брой. От условието следва, че $n \geq 2$ и $m \geq 7$ (защото ако джуджетата са само 6, всеки две ще са скарани и няма възможност за избор на две нескарани джуджета).

Възможностите за избор на двама хобити са $\frac{n(n-1)}{2}$. Възможностите за избор на две джуджета, които не са скарани, са $\frac{m(m-6)}{2}$.

Получаваме равенството

$$\begin{aligned} n(n-1) &= m(m-6) \iff 4n^2 - 4n = 4m^2 - 24m \iff \\ (2n-1)^2 - 1 &= (2m-6)^2 - 36 \iff (2m-6)^2 - (2n-1)^2 = 35 \iff \\ (2m+2n-7)(2m-2n-5) &= 35. \end{aligned}$$

От условието следва, че $2m+2n-7 \geq 2.7+2.1-7=9$. Това означава, че

$$2m+2n-7=35, \quad 2m-2n-5=1,$$

откъдето намираме $m=12$ и $n=9$.

б) Върху картата на селото да отбележим домовете на хобитите и джуджетата с точки, а пътеките с отсечки. Нека изпъкналата обвивка на полученото множество от $12+9=21$ точки е k -ъгълник K ; $3 \leq k \leq 21$. Останалите $21-k$ точки са вътрешни за K .

Като построим максималния възможен брой непресичащи се отсечки, които свързват тези точки, ще получим триангулация на K (т.е. ще разделим K на триъгълници). Нека тези триъгълници са t на брой. Ако съберем ъглите на тези триъгълници, ще получим ъглите на K и по 360° във всяка от отбелязаните $(21-k)$ вътрешни точки. Следователно

$$180^\circ t = 180^\circ(k-2) + 360^\circ(21-k) \iff t = 40 - k.$$

Остава да преброим отсечките. От t триъгълника получаваме $3t$ отсечки, като в този брой вътрешните участват в два триъгълника и са броени 2 пъти, а страните на K участват по веднъж. Вътрешните отсечки са

$$\frac{3t-k}{2} = \frac{3(40-k)-k}{2} = 60-2k,$$

следователно всички отсечки са $k+60-2k=60-k$.

Отсечките са най-много, когато k е възможно най-малко, т.е. при $k=3$. Получаваме, че възможно най-големият брой отсечки (пътеки) е 57.

Пример с 57 пътеки може да се построи лесно, като се изберат първо три точки и се свържат, а всяка следваща точка се избира да е вътрешна за някой триъгълник и се свързва с трите му върха; така отсечките стават $3 + (21 - 3) \cdot 3 = 57$.

Някои въпроси и задкулисни размишления

Тази година големият брой (852) записани участници в Пролетното математическо състезание затрудни изключително много организацията му. Ръководството и преподавателският състав на елитното 119 СУ бяха ангажирани със седмици. А проверката продължи два дни и беше истинско изпитание за издръжливостта на журито: **проф. Иван Тонов, доц. Таня Топова, Боянка Савова, Таня Стоева, Димитър Димитров, Павлина Парушева, Галя Пенчева, Даниела Петрова, Дима Слабакова, Василена Лазарова, Иво Кортезов, Руслан Капелев и Ивайла Радкова.**

Ситуацията беше извънредна, а извънредните ситуации поставят директно въпросите, които обикновено отлагаме.

Какви са целите на математическите състезания?

Математическото състезание по замисъл е празник за любителите на математиката. В някакъв смисъл е приключение, среща с непознати задачи, в която човек да изпита силите си. То е и възможност да се срещнеш със съмишленици, да се вдъхновиш и мотивираш. А успехите или неуспехите са само стъпала по пътя на израстването.

Това разбиране доста често е изместено от амбицията за превъзходство и утвърждаване на егото. И ако последната цел не е постигната, се реагира с агресия. Или задачите не са добри, или проверяването не е справедливо, или училището е виновно.

Защо има толкова много математически състезания?

Има различни математически състезания. Също като при спортните, и тук някои са масови, а за други е необходима подготовка – многогодишна и целенасочена.

Масовите състезания в тестов формат са подходящи за учениците от 3. – 6. клас, които още не са развили умението да излагат логически последователно и аргументирано решението си. В техните представи получаването на верен отговор често е равносилно на решена задача. (Това не е учудващо – седми клас е времето, когато в учебниците се появява думата *доказателство*.) И ако тези деца, неподготвени, отидат на състезание от различен формат, с нестандартни задачи, и получат една от седем точки за необоснован отговор, те остават с чувството, че са ошетени. Но истината е, че те не са подготвени за участие в такова състезание.

Какво е Пролетното математическо състезание?

Пролетното математическо състезание не е масово състезание. Една от неговите цели е ранното откриване на математически таланти. Дългогодишна традиция беше участието да е на квотен принцип, да се прави предварителна селекция в училище и да се участва с отбор. Но в последните години криворазбраният принцип за равнопоставеност е довел до абсурдната ситуация, в която всеки може да участва.

Резултатите на седмокласниците от това състезание са един от критериите при определяне на националния отбор за Младежката Балканиада. Това е изключително високо ниво! А не контролна работа по математика, в която да се включи целият випуск на едно училище.

Как се оценяват решенията?

Оценяването на всяка задача става на основата на предварително обсъдена маркинг-схема по ясни критерии. Алтернативните и нестандартни подходи се обсъждат с интерес от журито.

Журито се състои от учители с дългогодишен опит при подготовка на състезатели и от доскорошни състезатели. Всеки оценява така, както би искал да бъде оценяван той или да бъдат оценявани неговите ученици, т.е. добронамерено, с разбиране и с уважение към всеки постигнат напредък.

Какво се случва по време на контестации?

Най-неприятната за мен част от едно състезание е времето за контестации (възражения по получените резултати). Те със сигурност имат смисъл в случаите, когато е станала техническа грешка при въвеждане на резултатите. Често възраженията изразяват неразбиране на изискванията за записване на решенията или критериите за оценяване.

За съжаление, има и трети вид контестации, осъзнато неоснователни, при които се сблъскваме с арогантно-агресивно отношение. *Коя част от моето решение не разбрахте?*, беше попитал неотдавна един състезател (който не беше решил задачата и се надяваме, че разбра това). Но математиката е област, в която трудно се лъже – грешното не може да се интерпретира като вярно; а проверяващите имат достатъчно познания и опит, за да оценят точно. Този вид *борба за точката* е силно отблъскващ, встрани от замисъла на състезанията и в много случаи води дори до промяна на регламента така, че въобще да не се приемат контестации.

Споделям тези кратки размисли с цел да предизвикам градивна дискусия сред колегите. Ще се радвам, ако ми напишете вашата гледна точка.

Добре е да завършим с усмивка и се сещам за крилатата фраза на Димитър Попов, *За Бога, братя, не купувайте* (произнесена по време на инфлация). Бих казала: *За Бога, деца, не ходете на математически състезания, преди да се подготвите за тях!*

ВЪРХУ ЗАДАЧА 6 ОТ RMM 2024

ДРАГОМИР ГРОЗЕВ

Увод

Ще разгледаме задача шеста от тазгодишното състезание Romanian Master of Mathematics. Една много трудна задача, която нито един от състезателите не успя да реши по време на състезанието. Това не означава, че решението по-долу е трудно за разбиране, просто има три момента, до които човек трудно би могъл да достигне в реално време.

Да припомним, че авторът на тази задача беше предложил друга подобна, влязла в шортлиста на RMM 2020 като A1 ([2]). Тя е със същата степен на трудност; това, че е A1, може би е шега!? По мое мнение, и двете предложения не са подходящи за ученически олимпиади, въпреки че ми допадат, защото са от реални математически изследвания, а не са странни неравенства или функционални уравнения тип „ръчни тук – ръчни там“.

Постановката е следната. Имате клас от полиноми, например полиноми от определена степен, с коефициенти ± 1 . Искате да разберете каква част от тях са неразложими над целите числа. Оказва се, че преобладаващата част са такива. С други думи, ако вземете произволен полином от степен n , вероятността да улучите разложим става все по-малка, когато n расте ([5]). Това беше задача A1 от шортлиста на RMM 2020 ([2], [6]).

Нека сега вземем друг клас полиноми – такива с коефициенти 0 или 1, като свободният член е 1 – да ги наречем *двоични полиноми*. Дали вероятността да улучим разложим такъв (над $\mathbb{Z}$) пак клони към нула, когато n расте? Хипотезата (A. Odlyzko, виж [1]) е, че това е така, но все още никой не знае със сигурност – това е отворен проблем. Обаче, ако стесним кръга на разложимите полиноми и обявим за *лош* такъв полином, който освен че е разложим, в неговото разлагане присъства квадрат на друг полином, то тогава отговорът е положителен. Вероятността да улучим такъв лош полином клони към нула, когато степента расте. Това всъщност е задача 6 от RMM 2024 и е един резултат на Filaseta и Konyagin, [1].

В тази статия е използван по-елементарен подход от този в [1], базиран на идеи, взети от обсъждането на тази задача във форума на AoPS [4]. В последната част е използван метод, който има приложение при други комбинаторни задачи [3].

РММ 2024, задача 6

Задача 6. Един полином P с цели коефициенти наричаме свободен от квадрати, ако е невъзможно да бъде представен във вида $P = Q^2R$, където Q and R са полиноми с цели коефициенти и Q не е константа. За всяко цяло положително число n , нека P_n е множеството от всички полиноми от вида

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \text{ където } a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}.$$

Докажете, че съществува естествено число N , такова че за всички естествени числа $n \geq N$, поне 99% от полиномите от P_n са свободни от квадрати.

(Navid Safaei, Иран)

Трябва да докажем, че ако вземем случаен полином от P_n , вероятността той да е от вида Q^2R , $\deg(Q) \geq 1$ (да има квадрат в разлагането му) клони към 0, когато $n \rightarrow \infty$.

Оттук нататък, Q и R **означават полиноми с цели коефициенти**, като $\deg(Q) \geq 1$. Полиноми от P_n , които са от вида Q^2R , наричаме **лоши** полиноми, а тези, които са свободни от квадрати, наричаме **добри**. И така, ще докажем, че ако изберем случаен полином от P_n , вероятността той да е лош клони към 0, когато $n \rightarrow \infty$. Планът ни се състои от три основни стъпки/твърдения.

- **Стъпка 1.** Доказваме, че ако вземем естествено число d , вероятността да изберем лош полином P от P_n от вида $P = Q^2R$ и такъв, че $\deg(Q) \geq d$, може да бъде направена толкова малка, колкото искаме, стига d да е достатъчно голямо.
- **Стъпка 2.** Доказваме, че ако фиксираме d , има само краен брой полиноми Q от степен по-малка от d , за които съществува двоичен полином P , без значение от каква степен, такъв че $Q \mid P$.
- **Стъпка 3.** Доказваме, че за всеки зададен полином Q , вероятността случайно избран полином $P \in P_n$ да се дели на Q клони към 0, когато $n \rightarrow \infty$.

Да допуснем, че вече сме доказали горните три точки. Втората точка ни осигурява съществуването само на краен брой целочислени полиноми $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ със степени, по-малки от d , които биха могли да делят някой двоичен полином (m зависи само от d). За фиксирано

естествено число n избираме случаен полином $P \in P_n$ и нека въведем следните вероятностни събития. Както споменахме, Q означава полином с цели коефициенти.

$$E := (P \text{ е лош})$$

$$E_1 := (P \text{ е лош и съществува } Q, \deg(Q) \geq d, \text{ така че } Q^2 \mid P)$$

$$E_2 := (P \text{ е лош и ако } Q^2 \mid P \text{ то } \deg(Q) < d)$$

$$E'_2 := (\text{съществува } i, 1 \leq i \leq m \text{ такова че } Q_i \text{ дели } P)$$

$$E'_2(i) := (Q_i \text{ дели } P)$$

Ясно е, че

$$E = E_1 \cup E_2,$$

$$E_2 \subset E'_2 = \bigcup_{i=1}^m E'_2(i),$$

което означава

$$\mathbb{P}(E_2) \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E'_2(i)).$$

Да фиксираме $\varepsilon > 0$. Първото твърдение показва, че може да изберем достатъчно голямо d , такова, че при $n \geq d$ е изпълнено $\mathbb{P}(E_1) < \varepsilon$. Съгласно твърдение 3, можем да изберем числа $N_i, i = 1, 2, \dots, m$, такива, че при $n \geq N_i$ да е в сила $\mathbb{P}(E'_2(i)) < \varepsilon/m$. Следователно при $n > \max\{d, N_i : 1 \leq d \leq m\}$ ще е изпълнено

$$\mathbb{P}(P \text{ е лош}) \leq \mathbb{P}(E_1) + \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E'_2(i)) \leq 2\varepsilon.$$

С това показахме, че вероятността да улучим лош полином от P_n може да бъде направена толкова малка, колкото искаме, стига да изберем достатъчно голямо n . Това решава задачата. Дотук добре! Остава да дадем доказателства на всяко от трите твърдения.

Стъпка 1. Двоичните полиноми, съдържащи големи квадрати, са малко.

Да вземем естествено число d . Както споменахме, Q и R означават полиноми с цели коефициенти, а P е двоичен полином от степен n . Да допуснем, че $P = Q^2 R$, където $\deg(Q) = s \geq d$. Правим редукция

на полиномите P, Q, R по модул 2. Заменяме всеки техен коефициент с остатъка му по модул 2, т.е. 0 или 1, и получаваме съответно полиномите $P, \overline{Q}, \overline{R}$ (P си остава същия, защото коефициентите му са нули и единици). Ясно е, че

$$P = (\overline{Q})^2 \overline{R} \quad (1).$$

Може да предпологаеме, че старшият коефициент на Q е единица, така че $\deg(\overline{Q}) = \deg(Q) = s$. И така, $\deg(\overline{R}) = n - 2s$. Забележете че $\overline{Q}$ има $s + 1$ двоични коефициенти, а $\overline{R}$ има $n - 2s + 1$ такива. Всички възможни комбинации на такива полиноми са $2^{s+1} \cdot 2^{n-2s+1} = 2^{n-2s+2}$. Следователно, броят на полиномите $P \in P_n$, които удовлетворяват (1), е най-много 2^{n-2s+2} . И така,

$$\mathbb{P}(P = Q^2 R, \deg(Q) = s) \leq \frac{2^{n-2s+2}}{2^n} = 4 \cdot 2^{-s}.$$

Като сумираме по стойностите на $s \geq d$, получаваме

$$\mathbb{P}(E_1) \leq 4 \sum_{s \geq d} 2^{-s} = \frac{1}{2^{d-3}},$$

с което приключва с доказателството на Твърдение 1.

Стъпка 2. Само краен брой „малки“ полиноми биха могли да делят двоичен полином

Нека P е двоичен полином от степен n . Първо ще докажем, че всички корени на P са в кръга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Да допуснем противното. Нека $P(z) = 0$ и $|z| \geq 2$. Тогава

$$\begin{aligned} |z|^n &= |a_n z^n| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i z^i| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < |z|^n, \end{aligned}$$

противоречие.

Нека сега $Q \mid P$, $\deg(Q) = s \leq d$ и старшият коефициент на Q е 1. Да означим със $z_1, z_2, \dots, z_s$ корените на Q . Всички те са с модули, по-малки от 2. Като използваме формулите на Виет (и неравенството

на триъгълника), виждаме, че коефициентите на Q са по-малки от израз, който зависи само от d . Тъй като тези коефициенти са цели числа, възможните стойности на всеки от тях са краен брой, което означава, че възможните такива полиноми Q са краен брой. Те са ограничени от някаква константа, която зависи от d , но не и от n .

Стъпка 3. Вероятността двоичен полином от висока степен да се дели на даден полином, е малка

Нека $Q, \deg(Q) \geq 1$ е даден полином с цели коефициенти и да предположим че $Q \mid P, P \in P_n$. Нека ξ е корен на Q . Тогава $P(\xi) = 0$. Забележете, че $\xi \neq 0$ (това е единствената причина да поискаме $a_0 = 1$ в дефиницията на P_n). Да вземем множеството $S = \{\xi^i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Първо ще разгледаме случая, когато $|S| = n$, т.е. когато ξ не е корен на единицата. Равенството

$$-1 = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i, a_i \in \{0, 1\}$$

просто означава, че сумата от елементите на някое подмножество на S е равна на -1 .

Лема 1. Нека S е множество от n различни комплексни числа и $r \in \mathbb{C}$. Вероятността сумата на елементите на случайно избрано подмножество на S да е равна на r , е по-малка от $\frac{2}{n+1}$.

Доказателство. Да наречем едно подмножество на S *лошо*, ако сумата от елементите му е равна на r . Както обикновено, на подмножество на S може да гледаме като на двоичен вектор от нули и единици, като всеки бит означава дали съответният елемент от базовото множество S присъства или не.

Идеята е следната. За всеки двоичен вектор b , който съответства на лошо подмножество, разглеждаме единичната „сфера“ относно разстоянието на Хеминг (виж [3] за други приложения), центрирана в b . С други думи, това е множеството на всички двоични вектори, различаващи се от b само в един бит. Тъй като имаме n бита, броят на тези вектори е точно n . Ключовото наблюдение е, че никой от тях не е лош! Така че, всеки лош двоичен вектор е „заобиколен“ от n добри такива. Малко усилия са нужни, за да осигурим, че тези „сфери“ не се пресичат. Детайлите следват.

Да предположим първо, че 0 не е елемент на S .

Нека $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Асоциираме $A \subset S$ с набор от битове $b = (b_1, \dots, b_n), b_i \in \{0, 1\}$. Нека $S' := \{b \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n b_i s_i = r\}$.

За всеки двоичен вектор $b \in S'$, с $A(b)$ означаваме множеството от всички двоични вектори b' с дължина n , които се различават от b в точно един бит, като той е 0 в b и 1 в b' . По същия начин, $B(b)$ означава множеството на възможните двоични вектори, които могат да се получат от b , като сменим бит със стойност 1 на 0. Имаме

$$|A(b)| + |B(b)| = n. \quad (*)$$

Лесно се вижда, че всяка от фамилиите $\{A(b) : b \in S'\}$, респективно $\{B(b) : b \in S'\}$ се състои от непресичащи се множества. Оттук следва

$$|S'| + \sum_{b \in S'} |A(b)| \leq 2^n$$

$$|S'| + \sum_{b \in S'} |B(b)| \leq 2^n$$

Като сумираме тези неравенства и използваме $(*)$, получаваме

$$|S'| \leq \frac{2^{n+1}}{n+2}$$

И така, доказахме Лема 1 когато $0 \notin S$.

В случая $0 \in S$ да разгледаме $S_1 := S \setminus \{0\}$. За това множество, съгласно доказаното, получаваме

$$|S'_1| < \frac{2^n}{n+1}.$$

Тъй като $|S'| = 2|S'_1|$, резултатът следва. $\square$

Твърдение 3 е следствие от Лема 1, когато $|S| = n$. Остава да разгледаме ситуацията, когато S е мултисет, т.е. когато някои от елементите му са еднакви. В конкретния случай $0 \notin S$, тъй като $\xi \neq 0$. Нека k е най-малкото естествено число със свойството $\xi^k = 1$. И така, имаме мултисет S , който се състои от k групи, като във всяка от тях има около n/k елемента с еднакви стойности. Ако k е „голямо“ (например $k > \sqrt{n}$), ние използваме Лема 1 за първите елементи на

всяка група (може да ги номерираме) и получаваме, че вероятността да изтеглим лош двоичен вектор е по-малка от $\frac{2}{k+1} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$.

В случая, когато k е „малко“ ($k < \sqrt{n}$), ние вземаме групата G с най-много (еднакви) елементи, нека броят им е m , $m \geq n/k$. Да вземем сега един лош двоичен вектор b и нека броят на неговите единични битове, които съответстват на елементи от G , е s . Понеже елементите в G имат съвпадащи стойности, всеки друг двоичен вектор, който има еднакви битове с b , съответстващи на елементи извън G , и брой на единични битове, съответстващи на елементите в G , различен от s , не е лош. Това означава, че частта на лошите вектори при фиксирани битове, съответстващи на елементи извън G , е най-много

$$\frac{\binom{m}{s}}{2^m} \leq \frac{C}{\sqrt{m}},$$

където C е някаква константа. Използвахме известна оценка за най-големия биномен коефициент. И така, вероятността да попаднем на лош двоичен вектор в този случай е по-малка от $\frac{C}{\sqrt{m}} \leq \frac{C}{\sqrt[4]{n}}$.

Като комбинираме случаите, виждаме, че при зададен полином Q , вероятността случайно избран $P \in P_n$ да се дели на Q , е $O(n^{-1/4})$, т.е. тя клони към нула, когато $n \rightarrow \infty$.

Заклучение

Разгледаното решение се базира на няколко ключови момента. Може би най-трудната част, по мое мнение, е да се усетим, че вероятността един случаен полином $P \in P_n$ да бъде кратен на квадрат на полином от някаква висока степен, е малка. Тук идеята е да се направи редукция по модул 2. Това е и подходът във второто официално решение.

Следващият момент е да открием, че има само краен брой полиноми с „малки“ степени, които биха могли да делят двоичен полином, независимо от каква степен. Тук използваме факта, че техните коефициенти са ограничени. Това не е трудно да се съобрази, но то има смисъл, само ако сме направили предишното.

Третият момент е идеята, че ако фиксираме полином Q , вероятността да изберем двоичен полином от степен n , който е кратен на Q , клони към 0, когато $n \rightarrow \infty$. Това би могло да се направи в реално

време, но само ако сме извървели целия път до тук. Второто официално решение използва теоремата на Шпернер за тази част, което е подходът на П. Ердьош за доказване на едно по-силно твърдение – Littlewood–Offord lemma [7]. Това дава по-добра оценка от идеята, използвана тук, когато Q има много еднакви коефициенти, но по-лоша, когато Q има достатъчно различни коефициенти.

Да обърнем внимание на следното. Твърдение 1 и Твърдение 2 остават верни, даже ако разширим класа на „лошите“ полиноми, като включим вътре не само двоични полиноми, които „съдържат“ квадрати, а въобще всеки разложим двоичен полином. Наистина, ако проследите доказателствата, ще видите, че там никъде не се използва $Q^2 \mid P$, а само $Q \mid P$. И така, ако искаме да атакуваме със същите идеи хипотезата, за която споменах в увода – че почти всички двоични полиноми са неразложими (над $\mathbb{Z}$), – единственото, което ще спъне нещата е Твърдение 1, защото там съществено се използва, че квадрат на полином дели P , ако P е от „лошите“.

Препратки

- [1] Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1, M. Filaseta, S. Konyagin, Acta Arith., 74(3): 191-205, 1996;
<https://eudml.org/doc/206847>
- [2] A polynomial with coefficients ± 1 very likely to be irreducible. RMM 2020 Shortlist. 2] <https://dgrozev.wordpress.com/2022/12/12/a-polynomial-with-coefficients-1-very-likely-to-be-irreducible-rmm-2020-shortlist/>
- [3] <https://dgrozev.wordpress.com/2020/03/15/hamming-distance-in-olympiad-problems-part-ii/>
- [4] <https://artofproblemsolving.com/community/c6h3266703p30041456>
- [5] L. Bary-Soroker, G. Kozma, Is a Bivariate Polynomial Irreducible,
<https://arxiv.org/pdf/1602.06530.pdf>
- [6] <https://artofproblemsolving.com/community/c6h3266703p30041456>
- [7] Combinatorics : set systems, hypergraphs, families of vectors, and combinatorial probability, Bela Bollobas, 1986.
- [8] <https://dgrozev.wordpress.com>, **A Point of View** (Blog)



ГРАФИ. ПЪРВО ЗАПОЗНАНСТВО

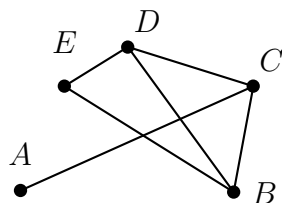
ЕМИЛ КОЛЕВ, ИМИ – БАН

1. Дефиниция. Основни свойства

Понякога е удобно да представим дадена ситуация с точки в равнината, някои от които са свързани с отсечки. В математиката такава конфигурация се нарича *граф*.

С какво се определя един граф? Най-напред това са точките, които ще свързваме с отсечки. Всяка от тези точки се нарича *върх* на графа. Някои от тези точки трябва да бъдат съединени с отсечки. Всяка от тези отсечки се нарича *ребро* на графа. При това пресечните точки на ребрата не са важни и не се разглеждат. Броят на ребрата, излизащи от един върх, се нарича *степен* на този върх.

Пример. Да разгледаме графа на фигурата вдясно. Той има 5 върха A, B, C, D и E и 6 ребра. Степените на върховете му са съответно 1, 3, 3, 3, 2.



Изследването и намирането на общи свойства на графите много често помага при решаване на конкретни задачи. Едно от най-важните свойства е следното.

Задача 1.1. Във всеки граф броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Решение. За доказване на това твърдение да означим броя на върховете на графа с n и нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са техните степени. В сбора $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ всяко ребро на графа е броено точно по два пъти (по веднъж от двата му края). Следователно

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2l,$$

където l е броят на ребрата в графа, което означава, че $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ е четно число. Но това точно означава, че измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ има четен брой нечетни числа.

Сега да видим как с помощта на това свойство можем да решим следната задача.

Задача 1.2. Някои от градовете в една държава са свързани с пътища така, че от всеки град може да се стигне до всеки друг, минавайки по прекараните пътища. При това от всеки град излизат четен брой пътища. Да се докаже, че след затваряне на произволен път отново от всеки град ще може да се стигне до всеки друг.

Решение. Най-напред ще си построим граф. Върховете му ще бъдат градовете в държавата. Между два връх ще има ребро, ако съответните градове са свързани с път. Полученият граф ще има следните свойства:

1. Степента на всеки връх ще бъде четно число.
2. От всеки връх ще може да се стигне до всеки друг, като се минава по ребрата на графа. Такъв граф се нарича *свързан*.

Сега да затворим пътя между градовете A и B . Това означава, че трябва да изтрием реброто, свързващо върховете A и B . Да допуснем, че полученият граф не е свързан. Да означим с M_A множеството на всички върхове, до които може да се стигне от върха A и съответно с M_B множеството на всички върхове, до които може да се стигне от върха B . Ако тези две множества имат общ връх, то от A можем да стигнем до B . Но това означава, че от A се попада в B , като изтрилото ребро се замества с този път. Това е противоречие с допускането, че полученият граф не е свързан.

Да разгледаме върховете в M_A . Върхът A е от нечетна степен, защото степента му е намалена с 1, докато всички останали върхове са от четна степен, защото техните степени са останали непроменени, т. е. има само един връх от нечетна степен. Но това е невъзможно, защото върховете с нечетна степен трябва да бъдат четен брой. Отново получихме противоречие, което се дължи на допускането, че графът не е свързан.

Следователно след изтриване на кое да е ребро графът остава свързан, с което задачата е решена.

Сега да докажем друго основно свойство на графите.

Задача 1.3. Във всеки граф има два върха с равни степени.

Решение. Нека графът има n върха. Тъй като всеки връх може да е свързан с най-много $n - 1$ върха (с всички останали), то степента на всеки връх е цяло число от 0 до $n - 1$ включително. Това са точно n възможности. Понеже имаме n върха, ако допуснем, че няма два върха с равни степени, трябва да имаме един връх от степен 0, един връх от степен 1, и т. н. един връх от степен $n - 1$. Да означим върхът от степен 0 с A , а този от степен $n - 1$ с B . Тъй като степента на A е 0, то A не е свързан с друг връх, в частност не е свързан с B . От друга страна степента на B е $n - 1$, което означава, че B е свързан с всички останали върхове, в частност е свързан с A .

Получихме противоречие, което се дължи на допускането, че няма два върха с равни степени. Следователно такива върхове съществуват.

Да използваме това свойство при решението на следната задача.

Задача 1.4. Да се докаже, че във всяка група от хора има двама, които имат равен брой познати.

Решение. Отново да конструираме граф. Върховете му ще бъдат хората от групата. Два върха ще свържем с ребро, ако съответните на върховете хора се познават. Получаваме граф в който, според доказаното свойство, има два върха с равни степени. Това означава, че съответните хора имат равен брой познати.

Накрая ще докажем две нестандартни задачи, използваща графи.

Задача 1.5. Дадена е група от n човека. Известно е, че няма трима, всеки двама от които се познават. Да се определи колко най-много познати може да има в тази група.

Решение. Отново да разгледаме граф, върховете на който са членовете на групата, като два върха са свързани с ребро, ако съответните хора се познават. Условието да няма трима, всеки двама от които се познават означава, че в графа няма триъгълник. Искаме да намерим максималния възможен брой ребра в този граф.

Първо ще намерим оценка за броя на ребрата в този граф и след това ще покажем, че има графи, за които тази оценка се достига. Да означим върха с най-голяма степен с A и нека неговата степен е t . Измежду върховете, свързани с A няма ребра понеже в графа няма триъгълник. От всеки от върховете, които не са свързани с A излизат най-много по t ребра. Тези върхове са точно $n - t - 1$. Следователно

ребрата са най-много

$$t + (n - t - 1) \cdot t = (n - t)t.$$

Неравенството $\frac{(x + y)^2}{4} \geq xy$ след лесни преобразувания става еквивалентно на $(x - y)^2 \geq 0$ и следователно е вярно за произволни x и y . При $x = n - t$ и $y = t$ получаваме

$$\frac{n^2}{4} \geq (n - t)t,$$

което означава, че в графа има не повече от $\frac{n^2}{4}$ ребра. Понеже броят на ребрата е цяло число, оттук заключаваме, че техния брой е не по-голям от $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ (с $[x]$ означаваме цялата част на числото x , т. е. най-голямото цяло число, не надминаващо x).

Остава за всяко n да посочим пример на граф с n върха, за който ребрата са точно $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ и няма триъгълник. При четно $n = 2k$ разделяме върховете на две групи от по k върха и свързваме всеки връх от едната група с всеки връх от другата. Получаваме точно $k^2 = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ребра.

Когато $n = 2k + 1$ е нечетно, разделяме върховете на две групи, съответно с k и $k + 1$ върха. Отново свързваме всеки връх от едната група с всеки връх от другата. Получаваме $k(k + 1)$ ребра. Остава да отбележим, че

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k^2 + 4k + 1}{4} \right\rfloor = k^2 + k = k(k + 1).$$

С това задачата е решена.

Задача 1.6. В равнината са дадени 6 точки, никои три от които не лежат на една права и между отсечките с краища в тези точки няма отсечки с равни дължини. Да се докаже, че има отсечка, която е най-голяма в някой триъгълник и в същото време е най-малка в друг триъгълник.

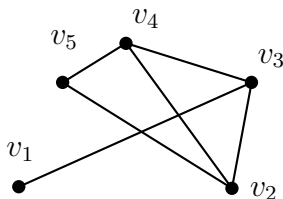
Решение. Най-напред да оцветим всички отсечки в червено. След това за всеки триъгълник да оцветим най-малката му страна в зелено. Тъй като нямаме равни разстояния, във всеки триъгълник има

най-малка страна. Ще получим граф с 6 върха, чийто ребра са оцветени в два цвята. Знаем, че в такъв граф има едноцветен триъгълник. При това, тъй като най-малката страна на всеки триъгълник е зелена, то няма червен триъгълник. Следователно този триъгълник е зелен. Неговата най-голяма страна е най-малка в някой друг триъгълник (защото е зелена). С това задачата е решена.

2. Представяне на графи. Дървета

Съществуват различни начини за представяне на един граф. Съгласно дефиницията, графът е множество от точки, някои от които са свързани с отсечки. Следователно най-естествения начин за представяне на граф е да се направи диаграма с върховете на графа и да се прекарат всичките му ребра. Този начин е удобен, когато графът има малък брой върхове или ребра. При по-големи стойности на върховете или ребрата са подходящи други начини за представяне на графите.

Един много удобен начин е използването на т. н. *матрица на съседствата*. Нека G е граф с върхове $v_1, v_2, \dots, v_n$. Матрицата на съседствата представлява квадратна таблица от нули и единици. При това в клетката в i -тия ред и j -ия стълб е записана нула, ако върховете v_i и v_j не са свързани с ребро и единица, ако те са свързани с ребро. На фигурата е представен граф и съответната матрица на съседства.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	0	0
v_2	0	0	1	1	1
v_3	1	1	0	1	0
v_4	0	0	1	0	1
v_5	0	1	0	1	0

Друг начин за представяне на граф е използването на *матрица на инцидентност*. Да разгледаме граф G с върхове $v_1, v_2, \dots, v_n$ и ребра $e_1, e_2, \dots, e_m$. Матрицата на инцидентност е матрица с n реда съответстващи на върховете на графа и m стълба, съответстващи на ребрата му. В клетката i -тия ред и j -ия стълб е записана единица, ако единият край на реброто e_j е върхът v_i и нула в противен случай.

Две от най-важните свойства за един граф са дали от всеки връх може да се стигне до всеки друг, минавайки по ребрата му и дали в графа има цикъл.

Един граф G се нарича *свързан*, когато между всеки два върха на G има път, минаващ по ребрата на G .

Граф G се нарича *дърво*, ако G е свързан и в него няма цикли.

Задача 2.1. Да се докаже, че в дърво G с n върха има $n - 1$ ребра.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по броя на върховете на G .

1. За граф с един връх твърдението е вярно, защото такъв граф няма ребра.

2. Да допуснем, че твърдението е вярно за дърво с n върха.

3. Да разгледаме дърво G с $n + 1$ върха. От произволен връх на G да започнем да се движим по ребрата му. Тъй като G е дърво, то в него няма цикли. Това означава, че при това движение никога няма да се върнем във връх, в който вече сме били. Тъй като ребрата са краен брой, ще попаднем във връх, от който движението не може да продължи. Това означава, че от този връх излиза само едно ребро. След изтриване на този връх и реброто, излизащо от него ще получим дърво с n върха и едно ребро по-малко. От индукционното допускане знаем, че такова дърво има $n - 1$ ребра. Следователно G има n ребра.

Задача 2.2. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато в G няма цикли и ребрата са $n - 1$.

Решение. Нека G е дърво с n върха. От дефиницията за дърво следва, че в G няма цикли, а според предишната задача G има $n - 1$ ребра.

Обратно, да допуснем, че в G няма цикли и ребрата са $n - 1$. Трябва да докажем, че G е свързан. Да допуснем, че G не е свързан и нека $G_1, G_2, \dots, G_k$ са свързаните му компоненти съответно с $n_1, n_2, \dots, n_k$ върха. Във всяка от тези свързани компоненти няма цикли и следователно тя е дърво. Това означава, че ребрата в графа са

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k.$$

Следователно $k = 1$, т. е. има само една свързана компонента. Това означава, че G е свързан.

Задача 2.3. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато G е свързан и ребрата са $n - 1$.

Решение. Ако G е дърво, той е свързан и ребрата му са $n - 1$.

Обратно, да допуснем, че G е свързан и има $n - 1$ ребра. Ако в G има цикъл изтриваме произволно ребро от него и получаваме свързан граф с едно ребро по-малко. Продължавайки по този начин ще получим свързан граф с n върха без цикли, т. е. дърво. Но тогава ребрата са $n - 1$, което означава, че не е изтрито нито едно ребро. Следователно в G няма цикли, т. е. G е дърво.

Задача 2.4. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато в G няма цикли и добавянето на ново ребро води до появяване на цикъл.

Решение. Да допуснем, че G е дърво. По дефиниция това означава, че в G няма цикли. Да добавим ново ребро $v_i v_j$. Тъй като G е свързан, то в G съществува път от v_i до v_j . Този път, заедно с добавеното ребро образуват търсения цикъл.

Обратно, нека в G няма цикли и добавянето на ново ребро води до появяване на цикъл. Трябва да докажем, че G е дърво, т. е. G е свързан граф без цикли. Нека v_1 и v_2 са два произволни върха на G . Ще докажем, че между тях има път. Ако между тях има ребро, твърдението е вярно. Ако между тях няма ребро, да добавим ребро $v_i v_j$. Съгласно допускането ще се появи цикъл. Това означава, че в графа G има път между двата върха. Следователно между всеки два върха има път, т. е. G е свързан. Тъй като в него няма цикли следва, че G е дърво, което трябваше да докажем.

Задача 2.5. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато всеки два върха от G са свързани с единствен път.

Решение. Ако G е дърво, то всеки два върха са свързани. Ако допуснем, че някои два върха са свързани с два различни пътя, ще получим цикъл, което е противоречие. Следователно всеки два пътя са свързани с единствен път.

Обратно, нека между всеки два върха има единствен път. Това означава, че графът е свързан и няма цикли, т. е. той е дърво.

Задача 2.6. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато G е свързан, но престава да бъде такъв след изтриване на произволно ребро.

Решение. От задача 5 следва, че между всеки два върха има единствен път. Изтриването на произволно ребро ще прекъсне поне един път и следователно графът няма да бъде свързан.

Доказаните задачи представляват необходими и достатъчни условия един граф да е дърво. Това означава, че когато е изпълнено едно от тези свойства са изпълнени всички останали.

Теорема. За граф G следните свойства са еквивалентни:

1. G е дърво, т. е. свързан граф без цикли.
2. В G няма цикли и G има $n - 1$ ребра.
3. G е свързан и G има $n - 1$ ребра.
4. В G няма цикли и добавянето на произволно ребро води до появяване на цикъл.
5. Всеки два върха от G са свързани с единствен път.
6. G е свързан, но престава да бъде такъв след изтриване на произволно ребро.

3. Ойлерови и Хамилтонови пътища. Двуделни графи

Град Калининград част от Русия (в миналото Кьонигсберг, част от Прусия) се разделя от река Прегел на 4 части. Седем моста свързват някои от тези части. При това между някои от частите имало по два моста. Жителите на града, разхождайки се по мостовете си поставили въпроса: Възможно ли е да се тръгне от някоя точка, да се направи разходка, като се мине по всеки мост точно по един път и разходката да завърши на същото място, от което е започнала.

През 1736 г. Швейцарския математик Леонард Ойлер посветил част от времето си на този проблем. Той представил отделните области като точки, а свързващите ги мостове като отсечки. Получил граф G , който има показаната матрица на съседства.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	2	1
v_2	2	0	0	1
v_3	2	0	0	1
v_4	1	1	1	0

Да отбележим, че двойките в тази таблица означават, че между съответните върхове на графа има по две ребра. Такива графи се наричат *мултиграфи*.

Решавайки получената задача Ойлер поставил началото на теорията на графите. В негова чест затворен път в граф, който минава през всички ребра точно по един път, се нарича *Ойлеров* цикъл.

Задача 3.1. Да се докаже, че в един мултиграф съществува Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато всички върхове на графа имат четна степен.

Решение. Доказателството по същество повтаря доказателството от задача 3 от Лекция 2.

Степените на върховете на графа G са 5, 3, 3, 3 и следователно не съществува Ойлеров цикъл.

Да разгледаме задачата за съществуване на цикъл, който минава през всеки връх точно по веднъж. Такъв цикъл се нарича *Хамилтонов цикъл*. Докато за съществуване на Ойлеров цикъл има лесно проверяемо условие (достатъчно е да намерим степените на всички върхове), за съществуване на Хамилтонов цикъл не са известни лесно приложими необходими и достатъчни условия.

Задача 3.2. В свързан граф G всеки цикъл е с четна дължина. Да се докаже, че върховете могат да се разделят на две групи така, че да няма ребро свързващо два върха от една и съща група.

Решение. Да фиксираме произволен връх A на дадения граф G и да го оцветим в червено. Тъй като G е свързан, от A може да се стигне до всеки от останалите върхове, като се движим по ребрата на G . За всеки връх B пресмятаме броят на ребрата, по които трябва да минем за да стигнем от A до B . Ако допуснем, че има два различни пътя с различна четност на броя на ребрата, ще получим нечетен цикъл. Да оцветим върховете на G в два цвята по следния начин. Ако разстоянието от A до дадения връх е четно число, оцветяваме този връх в червено. Ако разстоянието е нечетно число, го оцветяваме в синьо. Да разделим върховете на G в две групи, в едната група са всички червени върхове, а в другата са всички сини върхове. Ще докажем, че няма ребро, което да свързва върхове от една и съща група.

Да допуснем, че такова ребро има и нека то свързва върхове X и Y , като X и Y са едноцветни. Да разгледаме цикъл, започващ от A , минаващ през X , след това по реброто между X и Y и накрая, връщащ се от Y в A . Тъй като X и Y са едноцветни, пътищата от A до всеки един от тях са с еднаква четност. Следователно разглежданият цикъл е с нечетна дължина, което е противоречие.

Графи, притежаващи свойството от тази задача се наричат *дву-делни*.

Задача 3.3. Да разгледаме граф G , породен от куб (върховете му са върховете на куб, а ребрата му са ребрата на куба). Да се

определи матрицата на съседства за G ; да се определи дали в G има Ойлеров и Хамилтонов цикъл и дали G е двуделен граф.

Решение. Нека кубът е $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Матрицата на съседства е дадена на фигурата. Всички върхове на графа са от степен 3, което означава, че в него няма Ойлеров цикъл. Директно можем да конструираме Хамилтонов цикъл.

	A	B	C	D	A_1	B_1	C_1	D_1
A	0	1	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0	0	1
A_1	1	0	0	0	0	1	0	1
B_1	0	1	0	0	1	0	1	0
C_1	0	0	1	0	0	1	0	1
D_1	0	0	0	1	1	0	1	0

Например $ABCC_1 B_1 A_1 D_1 DA$ е Хамилтонов цикъл. За да определим дали графът е двуделен, трябва да покажем, че всички цикли са с четна дължина. Намирането на всички цикли обаче е трудоемка задача, затова е по-лесно директно да посочим как да разделим върховете на две части така, че да няма ребра свързващи върхове от една и съща част. Това разделяне е A, C, B_1, D_1 и A_1, C_1, B, D . Следователно графът е двуделен.

Задача 3.4. Ребрата на пълен граф с n върха са оцветени в два цвята. Да се докаже, че в този граф има поне $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ едноцветни триъгълника.

Решение. Директното преброяване на едноцветните триъгълници е трудно. Затова първо ще преброим триъгълниците, които не са едноцветни. Да забележим, че ако един триъгълник не е едноцветен, точно от два от върховете му излиза по едно ребро от двата цвята.

Ще преброим колко пъти даден връх A се брои като връх в разноцветен триъгълник, от който излизат две разноцветни ребра. Да допуснем, че от този връх излизат k червени и $n-k-1$ зелени ребра. Тогава A участва в точно $k(n-k-1)$ триъгълника като такъв връх. Освен това от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$\frac{n-1}{2} = \frac{k + (n-k-1)}{2} \geq \sqrt{k(n-k-1)},$$

което означава, че $k(n-k-1) \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

За да получим оценка за броят на разноцветните триъгълници остава да сумираме по всички върхове и да разделим на 2. Получа-

ваме, че броят на разноцветните триъгълници е най-много $n \frac{(n-1)^2}{8}$.

Понеже всички триъгълници са $\binom{n}{3}$, намираме, че едноцветните триъгълници са поне

$$\binom{n}{3} - n \frac{(n-1)^2}{8} = \frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Задача 3.5. В една държава всеки два града са съединени с еднопосочен път. Да се докаже, че съществува град, в който може да се стигне от всеки друг град, като се мине през най-много един междинен град.

Решение. Да разгледаме граф с върхове градовете в държавата. Всеки два върха на графа са свързани със стрелка, която показва посоката на пътя. Да разгледаме върха X с най-много влизащи стрелки и нека тези стрелки са от върховете $A_1, A_2, \dots, A_k$. Да допуснем, че има град Y от който не може да се стигне до X като се мине през най-много един междинен град. Това означава, че от Y не излизат стрелки към X или към $A_1, A_2, \dots, A_k$. Тогава в Y влизат поне $k+1$ стрелки, което е противоречие с избора на върха X .

Следователно за така избрания връх X е изпълнено условието на задачата.

Задача 3.6. Да се докаже, че за двуделен граф с n върха и e ребра е изпълнено неравенството $e \leq \frac{n^2}{4}$.

Решение. Тъй като графът е двуделен, неговите върхове могат да се разделят на две групи така, че да няма ребра, свързващи върхове от една и съща група. Нека тези две групи имат съответно a и b върха, като $a+b=n$. Тогава всички ребра са най-много ab , т. е. $e \leq ab$. Остава да приложим неравенството $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$ (което е еквивалентно на $(a-b)^2 \geq 0$), с което неравенството от условието е доказано.

4. Приложения на графите в състезателни задачи

Задача 4.1. Даден е свързан граф G с n върха. Да се докаже, че част от ребрата му могат да бъдат изтрети така, че останалата част от графа да е дърво с n върха.

Решение. Да допуснем, че в G няма цикли. Тъй като по условие G е свързан, той е дърво и можем да не изтриваме ребра.

Нека в G има цикъл. След изтриване на произволно ребро, например AB от този цикъл, графът ще остане свързан, защото от A може да се стигне до B по неизтритата част от цикъла. Продължавайки по този начин ще стигнем до момент, в който в графа няма да има цикли и той ще бъде свързан. Това означава, че сме получили дърво, с което задачата е решена.

Полученото в задача 1 дърво се нарича *покриващо дърво* за дадения граф. Покриващото дърво може да бъде избрано по различни начини.

Задача 4.2. В една компания всеки има поне един познат. Да се докаже, че компанията може да се разбие на две групи така, че всеки да има познат от другата група.

Решение. Ще покажем как могат да се образуват две групи с исканото свойство. Да изберем двама познати и да ги поставим в двете групи M и N . Да допуснем, че сме разпределили част от членовете на компанията в двете групи, така че е изпълнено условието всеки да има познат в другата група. Да изберем член, който не участва в група. Ако той познава някой от група M (съответно N), го поставяме в група N (съответно M). Ако той не познава никой от вече разпределените, то според условието той познава друг член на групата и е достатъчно тези двама познати да разпределим в различни групи.

Задача 4.3. В група от 200 човека е изпълнено следното свойство: За всеки двама непознати A и B , всеки от останалите членове на групата или е познат едновременно на A и B , или е непознат едновременно на A и B . Докажете, че в тази група или има 15 човека, никои двама от които не се познават или има 15 човека всеки двама от които се познават.

Решение. Да означим с M_1 най-голямата група от хора, между които няма познати. Ако в тази група има 15 или повече човека, задачата е решена. Нека в M_1 има $k \leq 14$ човека. Ще докажем, че всеки от членовете на M_1 познава всички извън нея. Да допуснем, че има двама $X \in M_1$ и $Y \notin M_1$, които не се познават. За произволен член $Z \in M_1$ имаме, че X и Z не се познават. Според условието на задачата Y не познава Z . Но това означава, че Y не познава нито един член на M_1 , което е противоречие с максималността на M_1 .

Да отделим групата M_1 и за останалата част да приложим същите разсъждения. Ще получим нова група M_2 от най-много 14 непознати,

като всеки от тях познава всички, които не са от M_2 .

Понеже $14^2 = 196 < 200$ по този начин ще получим поне 14 групи с горното свойство. Сега да изберем по един представител от всяка от 14-те групи и един от останалите поне 4 човека. Всеки двама от тях се познават, с което задачата е решена.

Задача 4.4. В училището, в което учат Иван и Петър те имат съответно 75 и 77 приятели. Всеки от останалите ученици има по 76 приятели в това училище. Когато един ученик научи някаква тайна, той я споделя със своите приятели. Да се докаже, че ако Иван научи тайна, след време тайната ще узнае и Петър.

Решение. Да разгледаме граф с върхове учениците от училището. Два върха от графа са свързани, ако съответните ученици са приятели. Да допуснем, че Иван научава тайна, която няма да бъде научена от Петър. Това означава, че Иван и Петър са в различни компоненти на построенния граф. Но това е невъзможно тъй като във всяка свързана компонента броят на върховете с нечетна степен е четно число, а всички останали върхове са с четна степен.

Задача 4.5. В група от 100 човека всеки има поне 67 познати. Да се докаже, че има четирима, всеки двама от които се познават.

Решение. Да означим с A произволен човек от групата. Той има 67 познати и нека B е един от тях. Понеже B също има 67 познати, от които най-много 32 не са познати на A , то общите познати на A и B ще бъдат поне $67 - 32 - 1 = 34$. Да означим множеството на общите познати на A и B с M , като $|M| \geq 34$. Нека C е произволен човек от M . Ако C няма познати в M , той има най-много $100 - |M| \leq 100 - 34 = 66$ познати, което е противоречие. Следователно съществува човек $D \in M$, който е познат с C . Това означава, че A, B, C, D е търсената четворка.

Задача 4.6. Да се докаже, че в граф G с n върха без цикли има най-много $n - 1$ ребра, като равенство се достига когато графът е дърво.

Решение. Ако допуснем, че G е свързан, ще получим, че той е дърво. Понеже всяко дърво с n върха има $n - 1$ ребра, твърдението е доказано.

Ако G не е свързан, той се разпада на няколко свързани компоненти $G_1, G_2, \dots, G_k$ с върхове съответно $n_1, n_2, \dots, n_k$, където $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Всеки от графите $G_i, i = 1, 2, \dots, k$ е свързан граф без цикли и следователно има $n_k - 1$ ребра. Тогава за ребрата в целия

граф имаме

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k \leq n - 1,$$

с което твърдението е доказано.

Задача 4.7. Даден е свързан граф с $n \geq 3$ върха. При изтриване на всички ребра от произволен цикъл графът престава да бъде свързан. Колко най-много ребра има в такъв граф?

Решение. Ще докажем, че граф с исканото свойство има най-много $2n - 3$ ребра. Да означим дадения граф с G и нека A е произволен негов връх. Да разгледаме покриващо дърво с начало връх A . Това дърво има $n - 1$ ребра. След изтриване на всичките му ребра ще получим граф G_1 , в който върхът A е изолиран и в който няма цикли (ако в G_1 има цикъл, то след изтриването му графът ще е свързан, което е противоречие с условието). Следователно в G_1 има най-много $n - 2$ ребра. Получихме, че броят на ребрата в G не надминава $2n - 3$.

Да разгледаме граф, в който два от върховете A и B са свързани с ребро, а всеки от останалите върхове е свързан и с A и с B и това са всички ребра на графа. Този граф има $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$ ребра. Всичките цикли на този граф представляват триъгълници AXB , където X е произволен връх, различен от A и B . След изтриването на такъв цикъл върхът X ще остане изолиран и следователно графът няма да бъде свързан.

Задача 4.8. Даден е триъгълник ABC и петоъгълник $PQRST$. Всички страни на триъгълника и на петоъгълника, както и всички отсечки, свързващи връх на триъгълника с връх на петоъгълника са оцветени в червено или зелено. Да се докаже, че има едноцветен триъгълник.

Решение. Ако страните на триъгълник ABC са едноцветни, задачата е решена. Ако страните на ABC не са едноцветни без ограничение можем да приемем, че AB е червена, а AC е зелена.

Да разгледаме петте отсечки AP, AQ, AR, AS, AT . Поне три от тях са едноцветни и нека те са зелени. Да забележим, че както и да изберем три точки измежду P, Q, R, S и T винаги има две съседни. Следователно без ограничение можем да приемем, че отсечките AP и AQ са зелени. Сега да разгледаме отсечките между точките C, P и Q . Ако някоя от тях е зелена, например CP , ще получим зелен триъгълник ACP . Ако и трите са червени ще получим червен триъгълник CPQ .

Задача 4.9. Дадена е правилна петоъгълна призма. Всички основни ръбове и отсечките, свързващи връх на горната основа с връх на долната основа са оцветени в зелено или червено. Да се докаже, че ако няма едноцветен триъгълник, то всички основни ръбове са оцветени в еднакъв цвят.

Решение. Нека призмата е $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$. Да допуснем, че A_1A_2 и A_1A_5 са в различен цвят. Тъй като от петте отсечки $A_1B_i, i = 1, 2, \dots, 5$ има три едноцветни, а от три върха на всеки петоъгълник има три съседни, то без ограничение можем да приемем, че от A_1 излизат три едноцветни отсечки A_1A_2, A_1B_1 и A_2B_2 . Тъй като всеки две от точките A_2, B_1 и B_2 са свързани с отсечка, лесно следва, че има едноцветен триъгълник.

Следователно отсечките върху всяка от основите са едноцветни.

Да допуснем, че основните ръбове върху долната основа са зелени, а върху горната основа са червени. Ако измежду отсечките A_1B_i за $i = 1, 2, \dots, 5$ има поне три червени, понеже измежду всеки три върха на петоъгълник има две съседни, ще има червен триъгълник. Следователно от всяка точка от долната основа излизат най-много две червени отсечки. Тогава броят на червените отсечки, свързващи точка от долната основа с точка от горната е най-много $5 \cdot 2 = 10$. Аналогично получаваме, че броят на зелените отсечки, свързващи точка от долната основа с точка от горната е най-много 10. Това е противоречие тъй като всички отсечки, свързващи точка от долната основа с точка от горната са 25. Следователно всички основни ръбове са оцветени в един и същи цвят.

КОМПОЗИЦИЯ ОТ РОТАЦИИ

ОТ НОМ'24 в Индия

Ще разгледаме следната задача от Националната олимпиада в Индия тази година.

Нека точките A_1 , A_2 и A_3 лежат на окръжността Γ в ред, обратен на часовниковата стрелка, и нека P е точка в същата равнина. За $i \in \{1, 2, 3\}$, нека τ_i означава ротация на ъгъл $\sphericalangle A_i$ с център A_i . Дефинираме

$$P_i = \tau_{i+2}(\tau_i(\tau_{i+1}(P))),$$

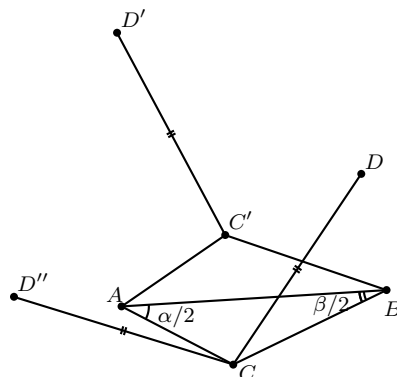
където индексите се вземат по модул 3 (т.е. $\tau_4 = \tau_1$ и $\tau_5 = \tau_2$).

Докажете, че радиусът на описаната окръжност на $\triangle P_1 P_2 P_3$ не надхвърля радиуса на Γ .

Решение. Първо ще докажем, че произведението на две ротации е ротация, т.е.

$$\rho_B^\beta \circ \rho_A^\alpha = \rho_C^{\alpha+\beta}.$$

Нека D е произволна точка, а C е неподвижната точка на композицията на двете ротации, определена както е показано на чертежа.



Тогава

$$\rho_A^\alpha : C \rightarrow C', \quad \rho_B^\alpha : D \rightarrow D' \implies CD = C'D', \quad \sphericalangle(CD, C'D') = \alpha;$$

$$\rho_B^\beta : C' \rightarrow C, \quad \rho_B^\beta : D' \rightarrow D'' \implies C'D' = CD'', \quad \sphericalangle(C'D', CD'') = \beta.$$

Следователно

$$CD = CD'', \quad \sphericalangle(CD, CD'') = \alpha + \beta \implies \rho_C^{\alpha+\beta} : D \rightarrow D''.$$

Да се върнем към задачата. Имаме

$$\rho_{A_1}^{\sphericalangle A_1} \circ \rho_{A_2}^{\sphericalangle A_2} = \rho_I^{\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2},$$

където I е центърът на вписаната окръжност, а

$$\rho_{A_3}^{\sphericalangle A_3} \circ \rho_{A_1}^{\sphericalangle A_1} \circ \rho_{A_2}^{\sphericalangle A_2} = \rho_{A_3}^{\sphericalangle A_3} \circ \rho_I^{\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2} = \rho_{T_1}^{180^\circ},$$

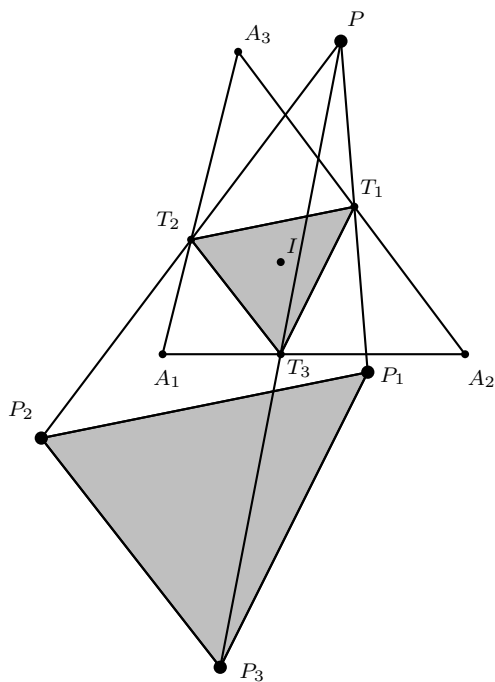
където T_1 е точка, за която

$$\sphericalangle T_1 A_3 I = \frac{1}{2} \sphericalangle A_3, \quad \sphericalangle A_3 I T_1 = \frac{1}{2} (\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2),$$

т.е. $\sphericalangle I T_1 A_3 = 90^\circ$ и T_1 е допирната точка на вписаната окръжност със страната $A_2 A_3$.

Така композицията $\rho_{A_3}^{\sphericalangle A_3} \circ \rho_{A_1}^{\sphericalangle A_1} \circ \rho_{A_2}^{\sphericalangle A_2}$ е централна симетрия с център T_1 .

Аналогичен е резултатът за другите две композиции. Получаваме следната конфигурация.



Сега виждаме, че хомотетията с център P и коефициент 2 изобразява $\triangle T_1 T_2 T_3$ в $\triangle P_1 P_2 P_3$. Това означава, че радиусът на описаната окръжност на $\triangle P_1 P_2 P_3$ е два пъти по-голям от радиуса r на описаната окръжност на $\triangle T_1 T_2 T_3$.

Така желаното неравенство следва от неравенството на Ойлер

$$2r \leq R,$$

приложено към $\triangle A_1 A_2 A_3$.



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2023 г. и бр. 1, 2 и 3 от 2024 г.

Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпращайте на e-mail: nevenasybeva@gmail.com.

* * *

Задача 1. Децата в летен лагер говорят немски или английски и никой не говори и двата езика. Известно е, че 33% от децата говорят немски, а 76% от момчетата говорят английски. В немскоговорящата група момчетата са с 20% повече от момчетата. Колко процента от децата на лагера са момчета? Колко процента от момчетата говорят английски?

Задача 2. В джоба си Пипи имала три ментови, два шоколадови и един ягодов бонбон. Без да гледа, тя извадила три бонбона от джоба си. Каква е вероятността да е извадила по един бонбон от всеки вид?

Задача 3. Дадено е множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

а) *Разредено* подмножество на множеството M наричаме такова множество, което не съдържа последователни естествени числа. Например, 1, 1, 3, 5 и 1, 7, 10 са разредени подмножества, а 1, 3, 4 не е. Колко са разредените подмножества на M ?

б) *Хубаво* подмножество на множеството M наричаме такова множество, което съдържа точно две последователни естествени числа. Например, 1, 2, 5 и 1, 3, 6, 7, 10 са хубави подмножества, а 1, 3, 5 и 1, 3, 6, 7, 8 не са. Колко са хубавите подмножества на M ?

Срокът за представяне на решенията е 31.08.2024 г.

**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 6/2023 г.**

Задача 1. Слави избрал шест от деветте цифри от 1 до 9 и записал в нарастващ ред всички трицифрени числа, които могат да се запишат с помощта избраните цифри (в запис на всяко число няма повтарящи се цифри). Оказало се, че 22-то число в редицата на Слави е 317. Кое е 60-тото число в редицата на Слави?

Решение на Кристиан Атанасов (6. клас, 125. СУ).

Нека $a < b < c < d < e < f$ са избраните цифри. Най-малките числа са от вида aXY , като цифрите X и Y могат да се изберат измежду оставащите 5 цифри по $5 \cdot 4 = 20$ начина.

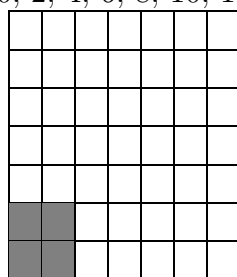
Тогава 21-то число е bac , а 22-то число е $bad = 317$. Така $a = 1$, $b = 3$, $d = 7$. Последното означава, че $e = 8$ и $f = 9$, а c е 4, 5 или 6.

А 60-тото число в редицата на Слави е най-голямото число от вида cXY , т.е. $c98$. То може да е 498, 598 или 698.

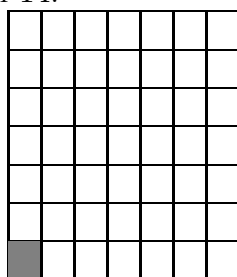
Задача 2. На дъска 7×7 някои квадратчета са оцветени в червено. Нека a е броят на редовете, в които има нечетен брой червени квадратчета, а b е броят на стълбовете, в които има нечетен брой червени квадратчета. Намерете всички възможни стойности на $a + b$ и за всяка от тях покажете примерно оцветяване на дъската.

Решение на Младен Иванов (6. клас, 125. СУ).

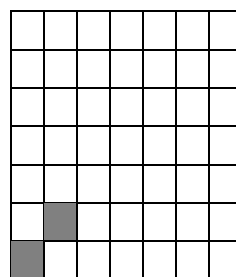
Ще покажем, че $a + b$ може да приема всички четни стойности от 0 до 14. Ако няма нито едно оцветено квадратче, във всеки ред и стълб са оцветени четен брой квадратчета и $a = b = 0$. Ако на дадена дъска оцветим още едно квадратче, то броят на оцветените квадратчета в неговия ред и стълб ще промени четността си. Това означава, че a и b ще се променят с 1. При това четността на сбора $a + b$ се запазва. Следователно $a + b$ е четно число. Примерите показват, че то може да е 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 или 14.



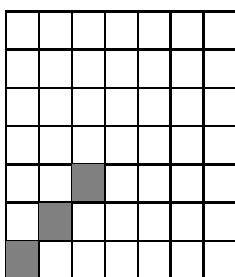
$$a + b = 0$$



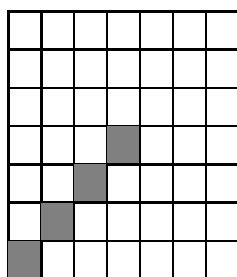
$$a + b = 2$$



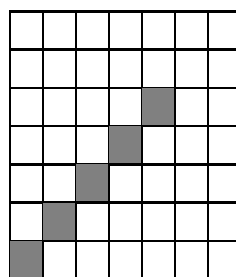
$$a + b = 4$$



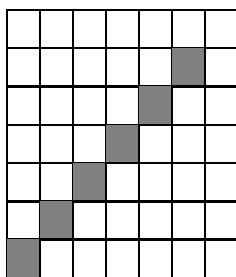
$$a + b = 6$$



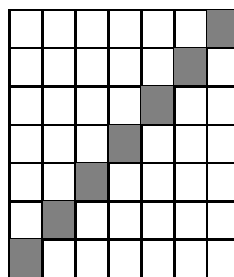
$$a + b = 8$$



$$a + b = 10$$



$$a + b = 12$$



$$a + b = 14$$

Задача 3. Ася и Иван имат дъска 8×8 . Ася оцветила всяко от 64-те квадратчета на дъската в избран от нея цвят. След това Иван избира два реда и два стълба на дъската и ако четирите им пресечни квадратчета са оцветени в един и същ цвят, той печели.

Най-малко колко цвята трябва да използва Ася, за да не може Иван да победи?

Решение. Да допуснем, че Ася може да използва само два цвята (А и В) за 64-те квадратчета на дъската. Тогава в единия цвят (нека е А) ще са оцветени поне 32 квадратчета.

Ако има k квадратчета в цвят А на един ред, те определят $\frac{k(k-1)}{2}$ двойки стълбове, за всяка от които ще проверяваме дали няма още две квадратчета от цвят А, лежащи на един ред (тогава Иван ще може да победи).

Нека на първия ред има a_1 квадратчета в цвят А, във втория – a_2 квадратчета и т.н., в осмия ред има a_8 квадратчета от цвят А. Имаме общо s квадратчета от цвят А и

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_8 \geq 32.$$

Тъй като допуснахме, че Ася може да победи, то всички двойки стълбове, които определят оцветените квадратчета по редове, трябва да са различни. Това означава, че общият им брой не надхвърля броя

на възможните двойки измежду 8 стълба, който е $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, т.е.

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_8(a_8 - 1)}{2} \leq 28.$$

Но

$$\begin{aligned} & \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_8(a_8 - 1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2) - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_8) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2) - \frac{1}{2} s \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_8)^2}{8} - \frac{1}{2} s = \\ &= \frac{1}{16} s^2 - \frac{1}{2} s, \end{aligned}$$

като използвахме неравенството между средното аритметично и средното квадратично.

Тъй като $s \geq 32$, то $s^2 - 32s = s(s - 32) \geq 0$ и тогава

$$\frac{1}{16} s^2 - \frac{1}{2} s = \frac{1}{16} (s^2 - 8s) = \frac{1}{16} (s^2 - 32s + 24s) \geq \frac{1}{16} \cdot 24s = \frac{3}{2} s \geq \frac{3}{2} \cdot 32 = 48,$$

т.е. броят на двойките стълбове, определени от квадратчета от цвят А, лежащи в един ред, с много надхвърля допустимият брой 28.

Следователно Ася трябва да използва поне 3 цвята. Пример за оцветяване в три цвята, при което Ася печели, е изпратил **Младен Иванов** (6. клас, 125. СУ).

1	2	0	2	1	1	0	0
1	2	1	0	0	2	1	0
1	1	0	1	0	2	2	2
2	1	0	2	1	0	1	2
2	0	1	1	2	0	2	0
2	0	2	1	1	2	0	1
0	1	2	2	0	0	2	1
0	0	2	0	2	1	1	1

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

ПЪРВА ЧАСТ

- Стойността на израза $3 : 0,5 - 2 : \frac{1}{2}$ е:
А) 5 Б) 2 В) 0,5 Г) -3,4
- Ако 30% от x са $\frac{1}{3}$, кое е реципрочното число на x ?
А) 10 Б) 1 В) 0,9 Г) 0,1
- Изразът $(2 - x)^3$ е тъждествено равен на:
А) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$ Б) $8 - 6x + 12x^2 - x^3$
В) $8 - 8x + 12x^2 - x^3$ Г) $-8 + 12x - 6x^2 + x^3$
- Вероятността при хвърляне на зар да се падне число x , за което $2 \leq x \leq 5$ е равна на:
А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{3}{4}$
- Изразът $9x^2 - y^2 - 6x + 2y$ се разлага на множители като:
А) $(3x - y)(3x + y - 2)$ Б) $(3x + y)(3x - y - 2)$
В) $(3x - y)(3x + y + 2)$ Г) $(3x + y)(3x - y - 3)$
- Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $13x - 15 \geq 15x - 14$ е:
А) 0 Б) -1 В) 2 Г) 1
- Коренът на уравнението $(x + 1)^2 = (x - 1)(x + 4)$ е:
А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6
- Даден е правоъгълник със страни 3 cm и 10 cm. С колко процента ще се увеличи лицето на този правоъгълник, ако увеличим всяка от страните му с 2 cm?
А) 50% Б) 60% В) 80% Г) 100%

9. Ъглите на триъгълник се отнасят както $2 : 3 : 7$. Средният по големина ъгъл на триъгълника е равен на:

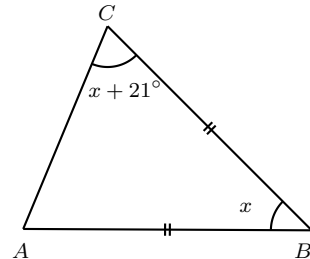
- А) 45° Б) 50° В) 60° Г) 65°

10. В $\triangle ABC$ външният ъгъл при върха B е равен на 130° и $\sphericalangle BAC : \sphericalangle BCA = 2 : 3$. Намерете външния ъгъл при върха C .

- А) 102° Б) 100° В) 90° Г) 85°

11. На чертежа $AB = BC$, $\sphericalangle B = x$ и $\sphericalangle C = x + 12^\circ$. Градусната мярка на $\sphericalangle A$ е:

- А) 62°
Б) 63°
В) 67°
Г) 70°



12. Един работник може да свърши сам дадена работа за 5 часа, а друг работник работи два пъти по-бавно от него. За колко време двамата заедно могат да свършат тази работа?

- А) 3 ч. 15 мин. Б) 3 ч. 20 мин.
В) 3 ч. 25 мин. Г) 3 ч. 30 мин.

13. В правоъгълен триъгълник височината към хипотенузата разделя правия ъгъл в отношение $1 : 4$. Колко градуса е разликата на острите ъгли в дадения правоъгълен триъгълник?

- А) 64° Б) 60° В) 54° Г) 45°

14. Два от ъглите на успоредник се отнасят както $1 : 5$, а страните му се отнасят както $3 : 2$. Ако периметърът на успоредника е равен на 100 cm, лицето на успоредника е равно на:

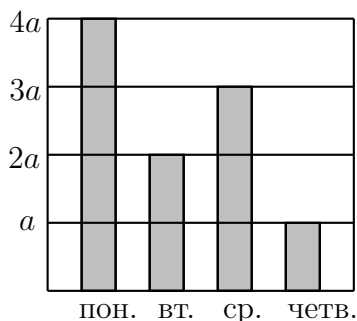
- А) 150 cm^2 Б) 200 cm^2 В) 300 cm^2 Г) 400 cm^2

15. Страната на ромб е 25 cm, а единият диагонал е с дължина 14 cm. Дължината на другия диагонал на ромба е:

- А) 24 cm Б) 30 cm В) 36 cm Г) 48 cm

16. На диаграмата е даден броят посетители в плувен басейн в четири поредни дни от седмицата. Посетителите в сряда са с 36 повече от посетителите в четвъртък. Колко е средният брой посетители за четирите дни?

- А) 30
Б) 36
В) 45
Г) 54

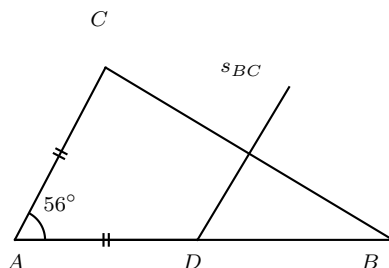


17. Сборът от корените на уравнението $10x^2 - 5x = 0$ е равен на:

- А) 2 Б) 1 В) $-\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{2}$

18. В триъгълника ABC симетралата на страната BC пресича страната AB в точка D и $AD = AC$. Ако $\angle BAC = 56^\circ$, намерете $\angle ACB$.

- А) 93°
Б) 92°
В) 91°
Г) 90°



19. Средноаритметичното на числата x , y и z е 23. Колко е средноаритметичното на числата x , y , z и 7?

- А) 17 Б) 18 В) 19 Г) 20

20. Колоездач изминал $\frac{3}{7}$ от пътя и установил, че му остават 16 километра до края на пътя. Колко километра е целия път?

- А) 28 km Б) 32 km В) 36 km Г) 40 km

ВТОРА ЧАСТ

21. а) Намерете решенията на уравнението $|5x - 7| + |7 - 5x| = 4$.

б) Намерете лицето на правоъгълен триъгълник с катети 40 cm и x cm и хипотенуза с дължина $4x + 5$ cm.

22. В 10 часа от град A към град B отпътувал търговски пътник. Ако се движи със средна скорост 80 km/h , ще закъснее с 15 min за уговорената среща, а ако средната му скорост е 90 km/h , той ще пристигне в B 20 min преди срещата. Да се намери за колко часа е уговорена срещата.

23. В правоъгълния триъгълник ABC със страни $AB = 13$, $BC = 5$ и $AC = 12 \text{ cm}$ е построена височината CH . Ако CM и CN са ъглополовящи съответно в триъгълниците ACH и BCH , да се намерят $\sphericalangle MCN$ и дължината на отсечката MN .

Решения и отговори

Задача	отговор	точки
1	Б	3
2	В	3
3	А	3
4	Б	3
5	А	3
6	Б	3
7	В	3
8	Г	4
9	А	3
10	А	3
11	Г	3
12	Б	4
13	В	3
14	В	4
15	Г	3
16	В	3
17	Г	3
18	А	3
19	В	4
20	А	4

21. а) Имаме

$$|5x - 7| + |7 - 5x| = 4 \iff |5x - 7| + |5x - 7| = 4 \iff$$

$$2|5x - 7| = 4 \iff |5x - 7| = 2,$$

откъдето $5x - 7 = 2$ или $5x - 7 = -2$, т.е. $x = 1,8$ или $x = 1$.

б) По Питагоровата теорема имаме

$$40^2 + x^2 = (4x + 5)^2 \iff 15x^2 + 40x - 1575 = 0 \iff$$

$$3x^2 + 8x - 315 = 0 \iff (x - 9)(3x + 35) = 0.$$

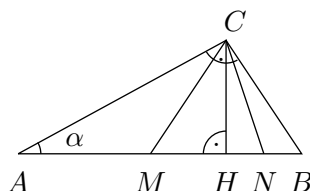
Корените на полученото уравнение са $x = 9$ и $x = -\frac{35}{3}$. Тъй като търсим дължината на катет, т.е. положителен корен, получаваме, че катетите са 9 и 40, а лицето е 180 кв.см.

22. Нека времето от тръгването до срещата е x часа. Пътникът може да измине разстоянието от A до B със скорост 80 km/h за $x + \frac{15}{60}$ h или със скорост 90 km/h за $x - \frac{20}{60}$ h. Получаваме уравнението

$$80 \left(x + \frac{1}{4} \right) = 90 \left(x - \frac{1}{3} \right),$$

откъдето $x = 5$ h, т.е. срещата е в 15 часа.

23. Да означим $\sphericalangle A = \alpha$. Изразяваме последователно: $\sphericalangle B = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BCH = \alpha$, $\sphericalangle BCN = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle ACN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Освен това $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BCN + \sphericalangle B = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. От равенството $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ACN$ следва, че $\triangle ACN$ е равнобедрен и $AN = 12$ см.



Аналогично $BM = 5$ см и $\sphericalangle ACM = \frac{\sphericalangle B}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогава

$$MN = (AN + BM) - AB = 4,$$

$$\sphericalangle MCN = 90^\circ - (\sphericalangle ACM + \sphericalangle BCN) = 45^\circ.$$

IZZI MATH CHALLENGE – КРЕАТИВНОСТ, АНАЛИТИЧНОСТ, ЛОГИКА САМО В ЕДНО СЪСТЕЗАНИЕ

ЙОАНА СИГРИДОВА, АЛЕКСАНДЪР АНГЕЛОВ, МИХАИЛ КОЦЕВ,
ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

Izzi Math Challenge – единственото състезание в България по математика със задачи от програмата на Cambridge*, се проведе през март 2024 г в сградата на гимназията на ЧСУ „Наука за деца“ в София Тех Парк. Предизвикателството бе насочено към ученици от 3. до 8. клас, които притежават добри познания по английски език, обичат логическите задачи и не се притесняват да приложат творческото си мислене при решаването им. В състезанието се включиха 120 ученици от различни училища.

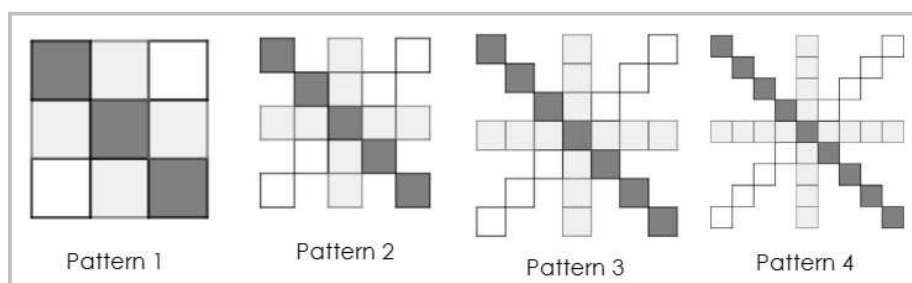
Второто издание на Izzi Math Challenge ще се проведе през учебната 2024/2025 година, като ще обхване и по-големите ученици.

Ако сте любопитни какви предизвикателства посрещнаха учениците от 5. до 7. клас, то бързае да представим нашите авторски задачи. Препоръчваме да се решават в добро настроение и с въображение.

Grade 5

Part 1

1. Below are the first few spatial patterns in a regular sequence.



Let b be the number of black tiles, w be the number of white tiles and g be the number of grey tiles. Which of the following will always be the same for all patterns in the sequence?

- A) $b + w - g$ B) $w : g : b$ C) $w + g + b$
D) $w^2 + b^2 - g^2$ E) $wb - g^2$

*Съгласно международната акредитация към University of Cambridge (<https://www.cambridgeinternational.org/>)

2. Which of the following is not a cube number?

A) 27

B) 8^4

C) $10^2 + 5^2$

D) $3^3 + 4^3 + 5^3$

E) $\sqrt[3]{64}$

3. What is the sum of the marked angles in the diagram?

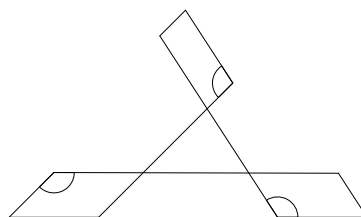
A) 180°

B) 270°

C) 360°

D) 450°

E) 540°



4. You are allowed to insert one pair of brackets into the expression:

$$14 + 84 : 7 \times 4 - 17$$

Which of the following answers is it NOT possible to obtain?

A) 39

B) -13.5

C) -142

D) 0

E) 87

5. Let A be a three-digit multiple of 77 the digits of which add up to a square number. Let B be the smallest 3 digit multiple of 35, which contains no digit 0. What is the Highest Common Factor of A and B ?

A) 35

B) 77

C) 175

D) 385

E) 1925

6. You are given the following set of 6 numbers:

$$-\frac{1}{3}, 5, -0.125, \frac{3}{8}, -12, 1\frac{2}{3}.$$

What is their median?

A) 0

B) 0.125

C) -0.125

D) $-\frac{65}{72}$

E) $\frac{65}{72}$

7. Iridium is a rare metal with many special uses in technology. It is also very dense with the volume of a kilogram of Iridium being as small as $1000/22.56 \text{ cm}^3$. Let us assume that the global production of Iridium since its discovery in 1803 has been 5.15 (correct to 2 decimal places) tonnes per year. Which of the following is closest in size to all the iridium that has ever been produced on Earth?

A) A matchbox

B) A wardrobe

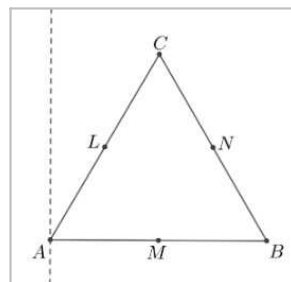
C) A room

D) A house

E) The National Palace of Culture in Sofia

8. The equilateral triangle ABC is rotated by 120° counterclockwise about point A and then the image is reflected in line l . After these transformations, which of the following points has “gone” back where it started?

- A) B B) C C) L
 D) M E) N



9. A rollercoaster ride is only for children whose ages are at least 7 years, but less than 12 years. Which of the following is not correct:

- A) A child aged 6.(9) years can go onto the ride.
 B) A child aged 11.(9) years can go onto the ride.
 C) A child aged 11.9 years can go onto the ride.
 D) A child aged 6.9 years can not go onto the ride.
 E) Any child can go onto the ride for exactly 5 years of their life.

10. A cube has 8 vertices, 12 edges and 6 faces. A square based pyramid has 5 vertices, 8 edges and 5 faces. Which of the following is NOT a description of an existing polyhedron?

- A) 4 vertices, 6 edges and 4 faces
 B) 6 vertices, 12 edges and 8 faces
 C) 6 vertices, 9 edges and 5 faces
 D) 6 vertices, 10 edges and 6 faces
 E) 8 vertices, 16 edges, 11 faces

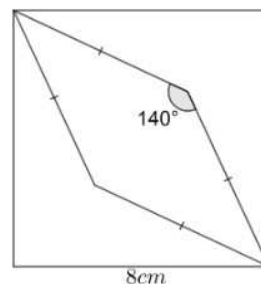
Part 2

11. Mia starts at the number 2024 and picks some consecutive multiples of 23. The mean of these multiples of 23 is 2093. What is the largest of these multiples?

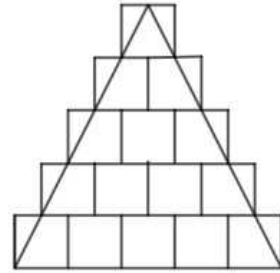
12. A shape is made up of five congruent squares, such that each square has at least one side in common with another square. The shape has a line of symmetry, but only first order rotational symmetry. Draw at least two shapes that match this description.

13. When I have drunk 40% of the water in my bottle, it has 130 mL more water left in it then it does when 40% of the water is left. What is the capacity of my water bottle?

14. Draw the following shape accurately. Write down the side length of the inscribed quadrilateral.



15. In the diagram, a triangle is inscribed in a “pyramid” of squares. Assume the side of each square is 1 cm. How will the area of the inscribed triangle change if the number of floors of the pyramid is doubled? Is it possible to add some floors to the pyramid, so that the triangle has exactly three times the area of the triangle in the diagram?



Grade 6 Part 1

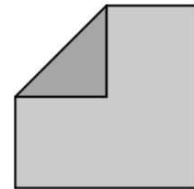
1. What is the difference between the 101-st and 202-nd terms of the following sequence: 1, 2, 3, 3, 5, 4, 7, 5, 9, 6, 11, 7, ... ?

- A) 200 B) 101 C) 99 D) 1 E) 0

2. You are allowed to insert one square root sign into the following expression: $100 - 24^2 + 49$. Which of the following values is it NOT possible to obtain?

- A) -517 B) 75 C) $\sqrt{427}$ D) 105 E) 125

3. One corner of a square is folded to its centre to form an irregular pentagon as shown in the diagram. The area of the square is 1 unit greater than the area of the pentagon. What is the area of the square?



- A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

4. Which of the following shapes does not have the same order of rotational symmetry as its number of lines of symmetry?

- A) Square B) Equilateral Triangle C) Rhombus
D) Parallelogram E) Regular Octagon

5. One side of a rectangle is 25 cm when measured to the nearest centimeter, but 2 dm when rounded to the nearest decimeter. The other side of the rectangle is 34 cm when rounded to the nearest centimeter. What is the smallest possible value for the perimeter of the rectangle?

- A) 58 cm B) 116 cm C) 59 cm D) 118 cm E) 54 dm

6. Which of the following transformations will visibly change a regular hexagon?

- A) A 180° rotation about its center
- B) A 240° rotation about its center
- C) A reflection in one of its shorter diagonals
- D) A reflection in one of its longer diagonals
- E) A reflection in the line segment through the midpoints of two opposite sides

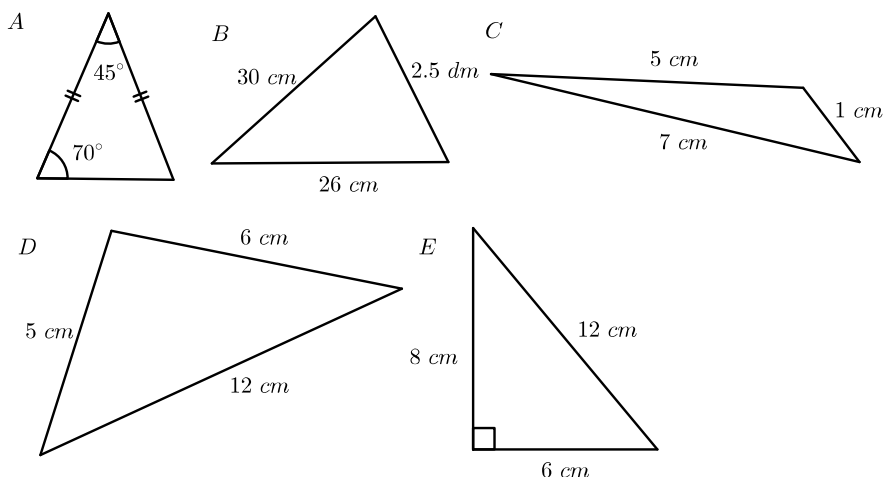
7. The price of eggs increased by 9% last year, but then decreased again by 9% this year. The price of milk decreased 12% last year, but this year it increased by $13\frac{7}{11}\%$. The price of oil doubled last year, but was reduced by 50% this year. Which of these grocery items now cost the same as they did two years ago?

- A) Eggs and milk
- B) Milk and oil
- C) Eggs and oil
- D) Only eggs
- E) Only milk

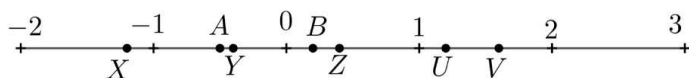
8. A number sequence starts with 3 and follows the term-to-term rule “multiply by 2 and subtract 1”. What is the median of its first 6 terms?

- A) 6
- B) 9
- C) 17
- D) 13
- E) 22

9. Only one of the triangles below can actually be drawn to scale. Which one?



10. Which of the named points on the diagram is closest to the quotient $B : A$?



- A) X
- B) Y
- C) Z
- D) U
- E) V

Part 2

11. Calculate

$$\left(\frac{1}{0.(55)} + \frac{2}{0.(65)} + \frac{3}{0.(85)} \right) : \left(\frac{2}{0.4(8)} + \frac{4}{0.5(7)} + \frac{6}{0.7(5)} \right).$$

12. I toss three fair regular dice. What is the probability that I get different numbers on each of the three dice?

13. Let A be the point where the line $y = 2x + 1$ intersects the y -axis. Let B be the point, where the line $y = 3 - \frac{x}{2}$ intersects the y -axis. Let C be the point where the lines $y = 2x + 1$ and $y = 3 - \frac{x}{2}$ intersect each other. Find the area of ABC .

14. A kite has sides 2.5 cm and 6 cm and a long diagonal of 6.5 cm. Draw the kite accurately.

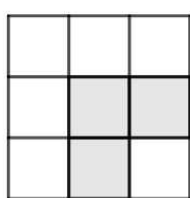
15. Solve the equation to find x :

$$3^x + 3^x = 243 - 3^x.$$

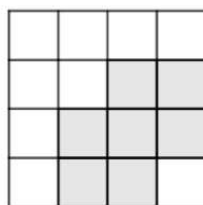
Grade 7

Part 1

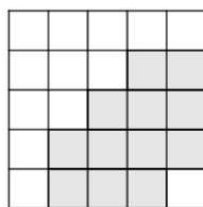
1. Below are some patterns made up of shaded and unshaded squares. The patterns progress in a regular sequence. How many squares are shaded in pattern number 11?



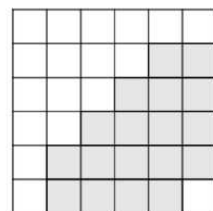
Pattern 1



Pattern 2



Pattern 3



Pattern 4

- A) 33 B) 45 C) 58 D) 88 E) 101

2. Sigmund has three fair dice – one with 6 sides, numbered 1-6, one with 8 sides, numbered 1-8 and one with 10 sides numbered 1-10. If he rolls the dice together what is the probability that he gets no prime number on any of the dice.

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{3}{20}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

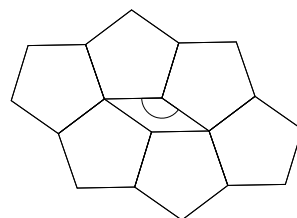
3. Consider the planes of symmetry of these solids and circle the odd one out:

- A) Pentagonal bipyramid
- B) Regular pentagonal prism
- C) Regular hexagonal pyramid
- D) Cube
- E) Regular tetrahedron

4. A sequence has position-to-term rule $n^2 - 2n + 2$. Which of the following is less than any term in the sequence?

- A) $2\frac{1}{9}$
- B) $1\frac{1}{9}$
- C) 2.1
- D) 1.1
- E) $3\frac{2}{9}$

5. All the pentagons in the following picture are regular pentagons. What is the value of the marked angle?

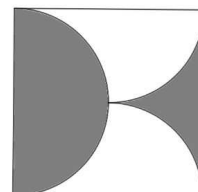


- A) 120
- B) 144
- C) 216
- D) 36
- E) 60

6. Let $a \approx 3.2$ when rounded to the nearest multiple of 0.4 and $b \approx 0.4$ when rounded to one decimal place. Which of the following has the largest maximal value:

- A) $a + b$
- B) ab
- C) $2a + 3b$
- D) $a : b$
- E) $a^2 + b^2$

7. The diagram shows a square with a side of 5 cm. The shaded area is bound by a semicircle and two quarter-circle arcs. What is the shaded area?



- A) $3.125\pi \text{ cm}^2$
- B) 12.5 cm^2
- C) $12.5\pi \text{ cm}^2$
- D) 6.25 cm^2
- E) $6.25\pi \text{ cm}^2$

8. You are given the following set of 4 numbers: 20.(24) , 20.2(4) , 20.24 and 20.(4). What is their median?

- A) 20.(14)
- B) 20.(24)
- C) 20.2(43)
- D) 20.2(43)
- E) 20.(243)

9. Let x be a number such that $6 < \sqrt{x} < 8$ and $3 < \sqrt[3]{x} < 4$. Which of the following is not a possible value for x ?

- A) 22.5
- B) 36.5
- C) 40.25
- D) 54.7
- E) 62.8

10. Below is an input-output table. Which of these functions does it represent?

input	-2	-1	0	1	2
output	0	2	1	0	2

A) $y = 2x + 4$

B) $y = x^2 + x - 2$

C) $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$

D) $y = x^2 + 1$

E) $y = 1 - x$

Part 2

11. The formula for the surface area S of a cylinder is $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, where r is the radius of the cylinder and h is its height. Re-write the formula with the radius r of the cylinder as the subject.

12. Recall that according to Pythagoras' Theorem, if a right-angled triangle has sides x and $2x$ making up the right angle, then the hypotenuse of that triangle has length $\sqrt{5}x$. Let the radius of the given circle be r . Use a straightedge and a pair of compasses to inscribe in the given circle a chord with length $\frac{\sqrt{5}r}{2}$.

13. Complete the table of values below for the function $y = x^2 - 2x - 4$.

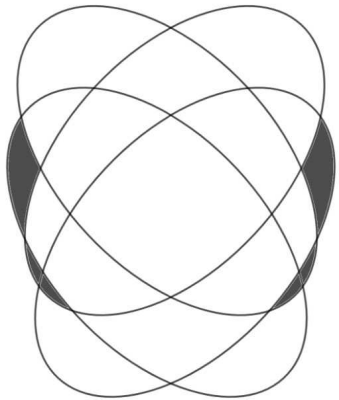
x	0	1	2	3	4
y					

Use your results to sketch a graph for the function on the coordinate grid.

14. Ten balls, each coloured green, red or blue, are placed in a bag. Ten more balls, each coloured green, red or blue, are placed in a second bag. In one of the bags there are at least seven blue balls and in the other bag there are at least four red balls. Overall there are half as many green balls as there are blue balls. Prove that the total number of red balls in both bags is equal to either the total number of blue balls in both bags or the total number of green balls in both bags.

15. Saberspark Animation Connoisseurs Club has 144 members. Last year 87 of them saw "The Boy and the Heron". 102 members of the club saw "Wish", while 90 saw "The Monkey King". 89 members of the club saw "Deep Sea". Only 2.8% (correct to one decimal place) of the club members missed all four of these films. However, only 25 of the members saw all four of these films. 15 club members only saw "Wish" and "The Boy and the Heron", which is 3 times as many as the club members who only saw "The Monkey King" and "Deep Sea". 42 club members saw "Wish" but missed "Deep Sea" and one in seven of these only saw "Wish". Half as many club members only saw "The Boy and the Heron" as those who only saw "Wish". Only one club member watched only "The Boy and the Heron" and "The Monkey King" while 8 members only missed "Wish".

The number of club members who only saw “Deep Sea” and “The Boy and the Heron” is the same as the number of those who only missed “The Monkey King”. 20 Club members missed “The Monkey King”, but watched “Deep Sea” and at least one of the remaining two films. 16 club members watched “Deep Sea” but neither “Wish” or “The Monkey King”. All club members who saw both “Wish” and “Deep Sea” saw at least one more film. A total of 20 members of the club saw only one of the four films and those who saw only “Deep Sea” were one more than those who only saw “The Monkey King”. Complete the Venn Diagram below labeling one ellipse for each of the four films.



Answers

Grade 6. 1. A; 2. E; 3. C; 4. B; 5. A; 6. B; 7. C; 8. E; 9. B; 10. E; 11. 2162; 13. 650 mL; 15. 12.5 cm^2

Grade 6. 1. D; 2. B; 3. C; 4. D; 5. B; 6. C; 7. B; 8. D; 9. B; 10. B; 11. 0.44; 12. 59; 13. 0.8 cm^2 ; 15. 4

Grade 7. 1. D; 2. A; 3. D; 4. D; 5. B; 6. E; 7. B; 8. E; 9. A; 10. C; 11. $r = \sqrt{\frac{2S + h^2\pi}{4\pi}} - \frac{h}{2}$; 14. There can only be either 4 green, 8 blue and 8 red balls or 5 green, 10 blue and 5 red balls.

В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ

Лице на триъгълник

Задача 1. Намерете лицето на правоъгълен триъгълник с катети a cm и b cm, където $a : \frac{4}{7} = 2 : 1\frac{1}{6}$ и $10\frac{2}{3} - b = 6 : \frac{2}{3}$.

Задача 2. Намерете височината към хипотенузата на правоъгълен триъгълник със страни a cm, b cm и c cm, където

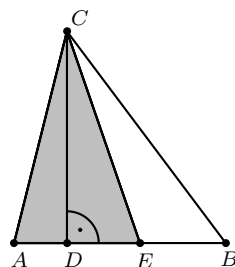
$$a = 1,23 + 1\frac{9}{19} + 7,77 + 1\frac{10}{19}, \quad b = 3,2 \cdot 3,87 + 3,2 \cdot 1,13, \quad c = 2,4 : 0,4 + 0,5 \cdot 28.$$

Задача 3. Намерете обиколката на триъгълник с височини 21 cm, 28 cm и 60 cm и лице 1050 cm^2 .

Задача 4. Лицето на $\triangle AEC$ на чертежа е равно на 18 cm^2 , а $CD = 7,2$ cm.

а) Намерете дължината на отсечката AE .

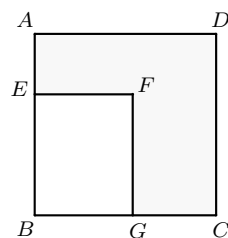
б) Ако отсечката BE е равна на 80% от AE , намерете лицето на триъгълника ABC .



Задача 5. Даден е квадрат $ABCD$ с обиколка 60 cm. На чертежа точката G е такава, че отсечката BG е равна на 60% от BC , точката E е такава, че отсечката AE е равна на 25% от BE , а $BGFE$ е правоъгълник.

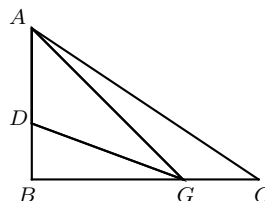
Намерете лицето на:

- правоъгълника $BGFE$;
- оцветената част от чертежа;
- триъгълника AEG ;
- триъгълника CGE ;
- триъгълника AFD ;
- триъгълника CFD .



Задача 6. Правоъгълният триъгълник ABC на чертежа има катети $AB = 6$ cm и $BC = 10$ cm. Лицето на $\triangle ACG$ е равно на 20% от лицето на $\triangle ABC$.

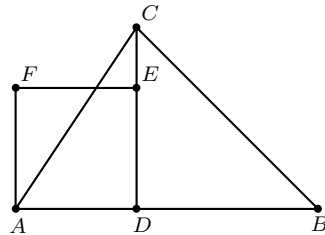
а) Намерете отсечките CG и BG .



б) Лицето на триъгълника ADG е с 20% по-голямо от лицето на триъгълника ACG . Намерете отсечките AD и BD .

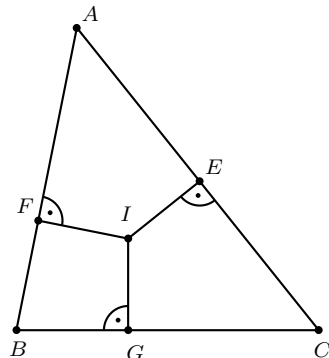
Задача 7. На чертежа ABC е триъгълник с височина CD , а $ADEF$ е квадрат с лице 144 cm^2 .

Ако $BD = \frac{4}{7} \cdot AB$ и $CE = \frac{1}{3} \cdot CD$, намерете:



- страната на квадрата;
- страната AB , височината CD и лицето на триъгълника ABC ;
- лицата на триъгълниците ACE и FCE ;
- лицата на триъгълниците FAB и EAB ;
- колко процента от лицето на BDF е лицето на BEF ;
- с колко процента лицето на ADE е по-голямо от лицето на BCE .

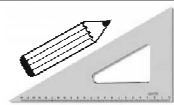
Последните три задачи се отнасят за следния чертеж. Точката I е вътрешна за триъгълника ABC и се намира на равни разстояния от страните му (т.е. $IE = IF = IG = r$).



Задача 8. Ако $AB = 13 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$, $CA = 21 \text{ cm}$ и $r = 4\frac{2}{3} \text{ cm}$, намерете лицето на триъгълника ABC .

Задача 9. Ако $AB = 13 \text{ cm}$, $BC = 14 \text{ cm}$, $CA = 15 \text{ cm}$ и лицето на триъгълника ABC е 84 cm^2 , намерете r .

Задача 10. Ако $BC = 15 \text{ cm}$, $CA = 17 \text{ cm}$ и лицето на триъгълника ABC е 60 cm^2 и $r = 3 \text{ cm}$, намерете AB .



ПРОЛЕТНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

за ученици от IV клас

30 март 2024 г.

Задача 1. Намерете a , b и x , ако

$$a = (102\,345 : 15 - 102.56) : 11, \quad b = (158.85 + 158.58 - 143.144) : 22,$$

а x е неизвестното число в равенството

$$1098 + 7654 : (x : 5 + 68) = 32.37.$$

Томи имал a стикери, Аника имала b стикери, а Пипи имала x стикери. Пипи и Томи дали част от своите стикери на Аника и така и тримата имали по равен брой стикери. Колко стикера е дала Пипи на Аника?

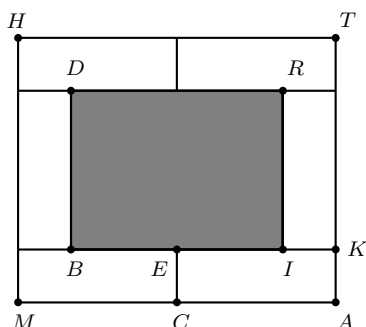
Задача 2. Правоъгълникът $MATH$ на чертежа е сглобен от шест еднакви бели правоъгълни плочки и сивата правоъгълна плочка $BIRD$.

Обиколката на правоъгълника $MATH$ е равна на 1 м 14 дм 12 см, а страната му AT е равна на 58 см.

а) Намерете обиколката на белия правоъгълник $CAKE$.

б) Намерете лицето на сивия правоъгълник $BIRD$.

в) Белите плочки са пластмасови, а сивата е метална и тежи 10 пъти повече, отколкото една бяла плочка. Целият правоъгълник $MATH$ тежи 2 кг 80 г. Колко грама тежи сивият правоъгълник $BIRD$?



Задача 3. а) Пипи опекла палачинки. Тя почерпила Томи и Аника с третината от палачинките и още 2 палачинки. След това дала на коня половината от останалите палачинки без 2 палачинки.

Накрая останали 10 палачинки за нея. Колко палачинки е опекла Пипи и колко от тях е дала на Томи и Аника?

б) Пипи, Томи и Аника решили да изплетат еднакви плитки на гривата на коня. Пипи може да изплете 18 плитки за 30 минути. Томи може да изплете 14 плитки за 35 минути, а Аника може да изплете 20 плитки за 25 минути. Кой от тях плете най-бързо? За колко време тримата ще изплетат 36 плитки, ако започнат да плетат заедно?

Задача 4. Пипи Дългото Чорапче пазарува в магазина. Там има общо 36 пасти от четири вида: шоколадови, сметанови, карамелени и ягодови. Шоколадовите пасти са 5 пъти по-малко на брой от сметановите, а карамелените са 3 пъти повече от шоколадовите. В магазина има повече сметанови пасти, отколкото ягодови.

а) По колко пасти от всеки вид има в магазина?

б) Пипи купила всички пасти в магазина. Известно е, че:

- 2 шоколадови и 4 ягодови пасти струват 38 крони,
- 1 ягодова, 2 сметанови и 3 карамелени пасти струват 25 крони,
- 1 шоколадова, 2 ягодови и 5 сметанови пасти струват 44 крони.

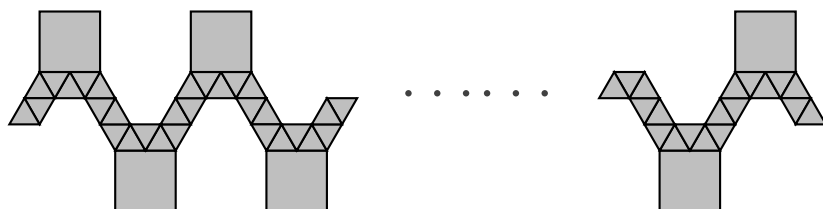
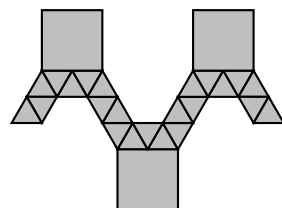
Общо колко крони е платила Пипи?

Задача 5. Фигурата на чертежа вдясно е образувана от 3 квадрата и няколко равно-странни триъгълника.

Обиколката на фигурата е 222 см.

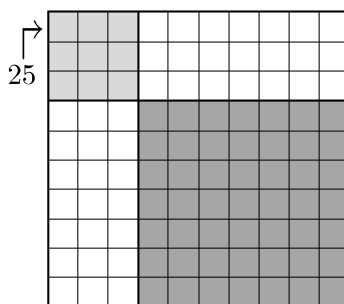
а) Намерете страната на квадрата.

б) Фигурата на следващия чертеж е образувана от същите по размер триъгълници и квадрати, но се състои от 15 квадрата. От колко триъгълника е образувана фигурата? Намерете обиколката на тази фигура.



Задача 6. Във всяка клетка на таблица с 10 реда и 10 стълба е написано по едно число (различно от 0) така, че във всеки ред и във всеки стълб сборът на числата е един и същ.

Сборът на числата в горния ляв квадрат 3×3 е 25.



а) Покажете, че не е възможно сборът на числата в долния десен квадрат 7×7 да е 85.

б) Ако сборът на числата в долния десен квадрат 7×7 е 89, намерете сбора на всички числа в таблицата.

Отговори и решения

1. Намираме

$$a = (102\,345 : 15 - 102 \cdot 56) : 11 = (6823 - 5712) : 11 = 1111 : 11 = 101.$$

$$b = (158 \cdot 85 + 158 \cdot 58 - 143 \cdot 144) : 22 = (158 \cdot (85 + 58) - 143 \cdot 144) : 22 = \\ = (158 \cdot 143 - 143 \cdot 144) : 22 = (143 \cdot 14) : 22 = 2002 : 22 = 91.$$

За x последователно получаваме

$$1098 + 7654 : (x : 5 + 68) = 1184, \quad 7654 : (x : 5 + 68) = 1184 - 1098 = 86$$

$$x : 5 + 68 = 7654 : 86 = 89, \quad x : 5 = 89 - 68 = 21, \quad x = 5 \cdot 21 = 105.$$

Всеки от тримата след подялбата има $(101 + 91 + 105) : 3 = 297 : 3 = 99$ стикери. Пипи е дала на Аника $105 - 99 = 6$ стикера.

2. а) Обиколката на $MATH$ е $1\text{ м } 14\text{ дм } 12\text{ см} = 100 + 140 + 12 = 252\text{ см}$. Намираме $MA = 252 : 2 - 58 = 126 - 58 = 68\text{ см}$, $MC = CA = 68 : 2 = 34\text{ см}$. Тогава $KA = (58 - 34) : 2 = 12\text{ см}$ и $P_{CAKE} = 2 \cdot (12 + 34) = 92\text{ см}$.

б) Намираме $BI = 68 - 2 \cdot 12 = 44\text{ см}$ и $IR = 34\text{ см}$, следователно $S_{BIRD} = 34 \cdot 44 = 1496\text{ кв.см}$.

в) Правоъгълникът $MATH$ тежи $2\text{ кг } 80\text{ г} = 2080\text{ г}$. Той тежи колкото $6 + 10 = 16$ бели плочки. Бялата плочка тежи $2080 : 16 = 130\text{ г}$. Сивата метална плочка тежи $130 \cdot 10 = 1300\text{ г}$, или $1\text{ кг } 300\text{ г}$.

3. а) Раздаването на палачинките се илюстрира със следната схема.

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+2} \boxed{10}$$

Попълваме последователно квадратчетата отзад напред:

$$\boxed{27} \xrightarrow{:3} \boxed{9} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{18} \xrightarrow{-2} \boxed{16} \xrightarrow{:2} \boxed{8} \xrightarrow{+2} \boxed{10}$$

Пипи е опекла 27 палачинки. Томи и Аника са получили общо $27 : 3 + 2 = 11$ палачинки.

б) Пипи може да изплете $18 : 6 = 3$ плитки за $30 : 6 = 5$ минути, Томи $14 : 7 = 2$ плитки за $35 : 7 = 5$ минути и Аника $20 : 5 = 4$ плитки за $25 : 5 = 5$ минути. За 5 минути Аника изплита най-много плитки, следователно тя плете най-бързо. Заедно могат да изплетат $3 + 2 + 4 = 9$ плитки за 5 минути. За 36 плитки, т.е. за 4 пъти повече плитки, ще са им необходими $4 \cdot 5 = 20$ минути.

4. Нека шоколадовите пасти са x на брой, тогава сметановите са $5.x$, а карамелените са $3.x$. Нека ягодовите пасти са y . По условие те са по-малко от $5.x$. Получаваме, че $9.x + y = 36$.

Тъй като $9.x$ е по-малко от 36, то x може да е 1, 2 или 3. Разглеждаме всеки от тези случаи.

шоколадови	ягодови	сметанови	карамелени
x	y	$5.x$	$3.x$
1	27	5	3
2	18	10	6
3	9	15	9

Сметановите пасти са повече от ягодовите само в последния случай. Следователно шоколадовите са 3, ягодовите са 9, сметановите са 15 и карамелените са 9.

б) Щом две шоколадови и четири ягодови пасти струват общо 38 крони, то една шоколадова и две ягодови пасти струват наполовина, т.е. 19 крони.

Тъй като една шоколадова, две ягодови и 5 сметанови пасти струват общо 44 крони, то 5 сметанови пасти струват $44 - 19 = 25$ крони, т.е. цената на сметановата паста е 5 крони.

Тъй като една ягодова, две сметанови и три карамелени пасти струват общо 25 крони, то една ягодова и три карамелени пасти струват общо $25 - 2.5 = 15$ крони.

Получихме, че една шоколадова и две ягодови пасти са 19 крони, а една ягодова и три карамелени пасти са 15 крони. Като съберем двете покупки, получаваме, че една шоколадова, три ягодови и три карамелени пасти струват общо $15 + 19 = 34$ крони.

Те са третината от наличните в магазина пасти от тези видове. Намираме, че 3 шоколадови, 9 ягодови и 9 карамелени пасти струват общо $34.3 = 102$ крони.

Остава да прибавим 15 сметанови пасти по 5 крони. Общо всички пасти струват $102 + 15.5 = 177$ крони.

5. а) Фигурата се състои от 23 триъгълника. Нека страната на един триъгълник е x см. Страната на квадрата е $2.x$ см.

В обиколката участват:

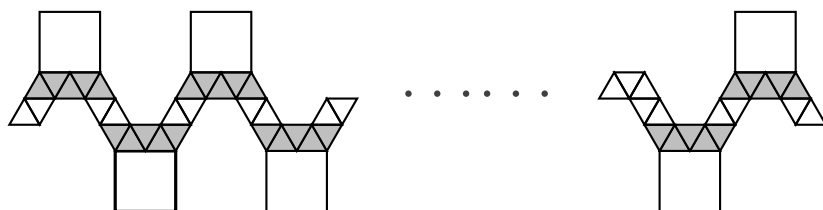
- по 3 от страните на квадратите, т.е. $9.2.x = 18.x$;
- по две страни на първия и последния триъгълник, т.е. $4.x$;
- по една страна от останалите триъгълници, без първия, последния и тези два, над (под) които има квадрати, т.е. $(21 - 6).x = 15.x$.

Следователно

$$18.x + 4.x + 15.x = 222,$$

т.е. $37.x = 222$ или $x = 222 : 37 = 6$ см. Страната на квадрата е $6.2 = 12$ см.

б) Разделяме триъгълниците на групи по 5, разположени под (над) всеки квадрат и свързващи ги звена от по 2 триъгълника.



Групите от 5 триъгълника са колкото квадратите, т.е. 15 на брой, а свързващите ги звена са 16. Следователно триъгълниците са общо

$$15.5 + 16.2 = 75 + 32 = 107.$$

Както в подусловие а), обиколката на фигурата се състои от:

- по три страни на всеки квадрат: $15.3.12 = 540$ см;
- по две страни на първия и последния триъгълник:
 $4.6 = 24$ см;
- по една страна на останалите триъгълници без първия, последния и тези два, разположени под (над) всеки квадрат:
 $(105 - 15.2).6 = 450$ см.

Обиколката на фигурата е равна на $540 + 24 + 450 = 1014$ см.

6. Нека сборът на числата в един ред (стълб) е a и сборът на всички числа в десния правоъгълник 3×7 е x .

а) Сборът на числата, записани в първите три реда е

$$25 + x = 3a.$$

Ако в квадрата 7×7 сборът на числата е 85, то сборът на числата в последните 7 стълба е

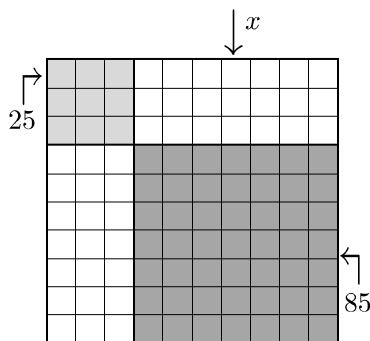
$$85 + x = 7a.$$

Следователно $4a = 85 - 25 = 60$, т.е. $a = 15$. Тогава $x = 3.15 - 25 = 20$. Но в правоъгълника 3×7 има 21 клетки и сборът на числата в тях е най-малко 21. Следователно не е възможно в квадрата 7×7 сборът от числата да е 85.

б) Както в подусловие а) имаме

$$25 + x = 3a, \quad 89 + x = 7a.$$

Следователно $4a = 89 - 25 = 64$, т.е. $a = 16$. Тогава $x = 3.16 - 25 = 23$. Възможно е сборът на числата в правоъгълника 3×7 да е 23 (в две от клетките е числото 2, а в останалите има 1). Сборът на числата в таблицата е $10.16 = 160$.





СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Новоразкритата бакалавърска програма „**Анализ на данни**“, която стартира за първи път през учебната 2022/2023 година, е първа по рода си в България и ще се осъществява съвместно между Софийския университет и Техническия университет – София. Цел на обучението в тази специалност е придобиването на умения и знания свързани с обработка и анализ на големи масиви от данни, с акцент върху познаването и разработката на необходимия за целта софтуер. Нуждата от такъв вид специалисти в съвременния бизнес и индустрия са големи, което е и предпоставка за наличието на много добри перспективи за реализация на завършилите специалността.

2. Бакалавърската програма „**Информатика**“ подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и компании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цветознание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg



ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ "НЕОФИТ РИЛСКИ" БЛАГОЕВГРАД

Югозападен университет „Неофит Рилски“ – знание за бъдещето и утвърдени традиции в Югоизточна Европа

КОИ СМЕ НИЕ?

Близо пет десетилетия Югозападният университет „Неофит Рилски“ – Благоевград е притегателен образователен, научноизследователски и академичен център за развитие на съвременни методи на преподаване, технологии и тяхното ефективно приложение в сферата на висшето образование.

Университетът е предпочитан от кандидат-студентите – както от завършващите зрелостници, така и от вече успешно реализираните в публичния и частния сектор кадри, което представлява реално приложение на концепцията за учене през целия живот. Понастоящем при нас се обучават над 8000 студенти, от които повече от 500 са чуждестранни студенти от над 20 страни по света.

ЮЗУ „Неофит Рилски“ е висшето училище, предлагащо обучение в най-голям брой професионални направления и образователни програми в Република България. Акредитиран е с максимална оценка от Националната агенция за оценяване и акредитация, като следва да подчертаем, че системата за управление на качеството на университета е в съответствие с изискванията на стандарт ISO 9001:2015 с обхват организация и обучение на студенти. Това е безспорна гаранция за качество на предлаганата образователна услуга в 84 бакалавърски и магистърски програми след средно образование, 137 магистърски програми след завършено висше образование и 86 докторски програми.

ЗАЩО ТРЯБВА ДА ИЗБЕРЕТЕ ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“ – БЛАГОЕВГРАД?

Университетът предоставя изключително атрактивни възможности за реализиране на студентска мобилност с цел обучение и студентска мобилност с цел практика в над 120 университета в Европа и други страни по света по Програма „Еразъм+“. Югозападният университет е отличен с „Академичен Оскар“ за качествено изпълнение на проекти по Програма „Еразъм+“ в сектор „Висше образование“.

Ускорената дигитализация налага една динамична научна и образователна среда във висшето училище, в която приложението на съвременните образователни технологии се осигурява чрез изграждането и развитието на STEM центрове. Първият университетски STEM център в Република България е изграден в Югозападния университет и е разположен във Факултета по педагогика. В два от факултетите – Природо-математически и Технически факултет, са създадени STEM центрове по природни науки – математика, информатика, физика, химия и биология и STEM център по мехатроника. Изключително признание за Университетът е, че бе определен за един от трите регионални STEM центъра от Министерството на образованието и науката.

В университета са акредитирани 12 нови магистърски програми, част от които са: „Регионален мениджмънт и градска икономика“, „Аутсорсинг и киберсигурност“ и „Корпоративна сигурност“, чието обучение се провежда съвместно с други две висши училища от страната.

Благодарение на сключените договори, в ЮЗУ „Неофит Рилски“ се предлага финансово стимулиране на студенти, обучаващи се в конкретни професионални направления, под формата на стипендии, които се предоставят от заинтересовани страни, представители на бизнеса и потребители на кадри.

Югозападният университет се отличава с разнообразна и с чудесни характеристики материална база и инфраструктура. В непосредствена близост до учебните корпуси на университета са разположени студентските общежития, които предстои да бъдат изцяло реновирани, както и студентският стол. Университетската библиотека е модерно оборудвана и изключително уютна. Разполага със 161 читателски места и 48 компютъризирани работни места. Предоставя достъп до научна информация от бази данни по абонамент, свободен достъп до научни и образователни списания и разнообразен книжен фонд. Библиотечните услуги са напълно безплатни и се предоставят на студентите след регистрация. Богатата материална база включва още многофункционален спортен комплекс, както и Университетски научноизследователски и спортно-възстановителен център „Бачиново“. Учебният студентски експериментален театър „УСЕТ“ е неделима част от духовната среда на Благоевград и представя университетския ни град като специфичен театрален център.

Университетът разполага с изградена инфраструктура за реализация на практически обучения, тренинг сесии и експерименти, включваща: Европейски документационен център, Лаборатория по национална сигурност, Учебна съдебна зала, Лаборатория по иконометрични изследвания, Научноизследователски център „Обсерватория Икономика“, Център за изследвания и квалификация, Научноизследователска лаборатория по химия на природните вещества и много други. Съгласно публично оповестени статистически данни, ЮЗУ „Неофит Рилски“ – Благоевград е висшето училище с най-голям брой успешно реализирани завършили студенти, голяма част от които получават работна заплата, която значително надвишава средната работна заплата в Република България. Това е гаранция за високо качество на обучението, което провеждаме и безспорно потвърждение, че нашите студенти инвестират в знания за бъдещето!

Избирайки ЮЗУ „Неофит Рилски“, Вие решавате да продължите Вашето образование в културния, образователен и младежки център на Югозападна България – Благоевград. Културният живот на Благоевград предлага големи възможности за ползотворно уплътняване на свободното време, за посещение на концерти, спектакли, дискотеки, различни клубове по интереси и музей. Могат да се видят спектаклите на Драматичния театър „Никола Вапцаров“, Камерната опера, Ансамбъл „Пирин“, да надникнат във възрожденския комплекс „Вароша“, да се срещнат с богатите фондове на Регионалната библиотека и на Историческия музей, да се гледат последните шедеври на световното киноизкуство в кино „Синемакс“.

Приемът на онлайн заявления за явяване на кандидатстудентски изпити в Югозападния университет „Неофит Рилски“ започва на 19 февруари 2024 г. Не забравяйте, че успехът е въпрос на избор, Вашия избор!

Инвестирайте в бъдещето, Югозападният университет „Неофит Рилски“ – Благоевград е гарант за Вашия успех!

Адрес: ул. „Иван Михайлов“ 66, Благоевград 2700

Официален уеб сайт на университета: www.swu.bg

Прием: <https://www.swu.bg/bg/prospectivestbg/admse>



ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“ БЛАГОЕВГРАД

Югозападен университет „Неофит Рилски“
Знание за бъдещето

Кандидатстудентска кампания за учебната 2024/2025 година

В Югозападния университет „Неофит Рилски“ за учебната 2024/2025 година се провеждат електронни изпити по български език, история на България, география на България, биология, английски език, математика и химия. Електронните изпити се провеждат всеки работен петък до 14 юни 2024 г. и всеки делничен ден от 17 юни 2024 г. до 5 юли 2024 г. на място в университета.

През месеците март, април и юни университетът организира практически изпити по физическа подготовка, по различни видове спорт и в областта на изкуствата. Подаването на заявления за електронен кандидатстудентски изпит на място се извършва в деня на определените дати, най-късно 1 час преди началото на изпита. Заявленията се подават на място в университета в зала 1102А, Учебен корпус No 1 или в електронната система за онлайн регистрация

<https://ksk.swu.bg/WebClient/>.

Желаещите да се обучават в Югозападния университет „Неофит Рилски“ могат да кандидатстват чрез конкурсни изпити, организирани и оценени от изпитни комисии на Университета; с резултати от държавни зрелостни изпити, валидни за съответната специалност и професионални направления, положени след 2008 г. включително; с оценки от конкурсни изпити, положени през 2024 г. в други акредитирани висши училища на Република България (удостоверени със служебна бележка) и с резултати от олимпиади, национални и регионални състезания, международни и републикански, образователно-научни, художественотворчески и спортни прояви. Информация за специалностите, необходимите документи и графика за провеждане на конкурсните изпити е публикувана на университетския сайт – www.swu.bg.

График за организация на конкурсни изпити

Дейност	Срок	Дата на изпита
Подаване на документи за явяване на изпит (Електронно изпитване)	Подаване на документи за явяване на електронен изпит на място се извършва в деня на определените дати най-късно 1 час предварително	
Подаване на документи за явяване на практически изпити през месец март 2024 г.	От 1 март 2024 г. до 15 март 2024 г.	16 март 2024 г.

Подаване на документи за практически изпити през месец април 2024 г., с изключение на празничните дни	От 08 април 2024 г. до 19 април 2024 г.	20 април 2024 г.
Подаване на документи за практически изпити през месец юни 2024 г.	От 27 май 2024 г. до 7 юни 2024 г.	08 юни 2024 г.

**График за провеждане на конкурсни изпити
(Електронно изпитване)**

Дата	Електронен конкурсен изпит	Начало на изпита
Подаване на документи за явяване на електронен изпит на място се извършва в деня на определените дати най-късно 1 час предварително.		
От 19 февруари 2024 г. до 14 юни 2024 г. всеки работен петък и от 17 юни 2024 г. до 5 юли 2024 г. всеки делничен ден	Български език История на България География на България Биология Английски език Математика Химия	13:00 ч.

График за провеждане на практически конкурсни изпити

Дата за изпит	Конкурсен изпит	Начало на изпита
Срок за подаване на заявление за практически изпити м. март – от 1 март 2024 г. до 15 март 2024 г.		
16 март (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.

16 март (събота)	Практически изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.
Срок за подаване на заявление за практически изпити м. април – от 8 април 2024 г. до 19 април 2024 г.		
20 април (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически присъствен изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.
Срок за подаване на заявление за практически изпити – от 27 май 2024 г. до 7 юни 2024 г.		
8 юни (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ПРОЛЕТНОТО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ НЕ Е МАСОВО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Н. Събева</i>	3
ВЪРХУ ЗАДАЧА 6 ОТ RMM 2024, <i>Д. Грозев</i>	22
ГРАФИ. ПЪРВО ЗАПОЗНАНСТВО, <i>Е. Колев</i>	30
КОМПОЗИЦИЯ ОТ РОТАЦИИ	45
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ.....	47
ПРИМЕРЕН ТЕСТ	51
IZZİ MATH CHALLENGE – КРЕАТИВНОСТ, АНАЛИТИЧНОСТ, ЛОГИКА САМО В ЕДНО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Й. Сигридова, А. Ангелов, М. Коцев</i>	56
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ	65
В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ	67

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230

1113 София

тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169

e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.

Дадена за печат на 9.04.2024 г.

Печат „Фастумпринт“ ЕООД

Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.