МАТЕ МАТИ КА

БРОЙ 3
2016 г.
ГОДИНА LV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

 ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Отбележете верните отговорите на задачите от 1. до 20. включително.

Задача 1. Най-голямото от посочените числа е:

А) 1,7 **Б)** $\sqrt[3]{5}$ **В)** $\sqrt[6]{26}$ **Г)** $\sqrt{3}$

Задача 2. Ако $a = 3^{-1}$ и $b = -5$, то стойността на израза

$$\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$$

е равна на:

А) $\frac{14}{5}$ **Б)** 3,5 **В)** $\frac{16}{5}$ **Г)** 5,3

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\sqrt[4]{\frac{3-x}{(x-2)^2}}$ са:

А) $x \in (-\infty, 3]$ **Б)** $x \in [2, 3]$

В) $x \in (3, \infty)$ **Г)** $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3]$

Задача 4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-3x+2}{9-x^2} \leqq 0$ са:

А) $x \in [-3, 1] \cup [2, 3]$ **Б)** $x \in (-\infty, -3) \cup [1, 2] \cup (3, \infty)$

В) $x \in (-3, 1] \cup [2, 3)$ **Г)** $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2] \cup [3, \infty)$

Задача 5. Стойността на израза $\frac{\log_7 40}{\log_7 8} + \log_8 0,2$ е равна на:

А) -1 **Б)** 0 **В)** 128 **Г)** 1

Задача 6. Броят на решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{array}\right.$ е равен на:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

Задача 7. Ако $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ и $\alpha\beta=-\dfrac{1}{3}$, то числата α и β са корени на уравнението:

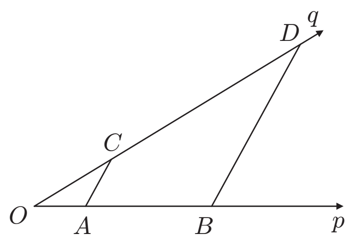
А) $6t^2-3t-2=0$ **Б)** $2t^2-3t-6=0$

В) $6t^2+3t-2=0$ **Г)** $2t^2+3t-6=0$

Задача 8. Ако $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^2\alpha+2\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ е равна на:

А) 1 **Б)** 1,75 **В)** −1,75 **Г)** 1,5

Задача 9. Върху раменете на ъгъл $\angle pOq$ са взети съответно точките A, B, C и D, такива че $AC||BD$, $OC=6$, $CD=10$ и $OB=12$. Дължините на отсечките OA и AB са съответно равни на:



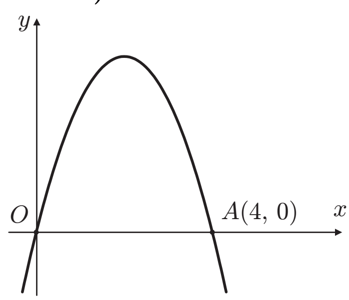
А) 4,5 и 7,5 **Б)** 3,5 и 8,5

В) 4 и 8 **Г)** 5 и 7

Задача 10. Ако основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно равни на 12 и 10, то радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:



А) $f(x)=4x+x^2$

Б) $f(x)=-4x+x^2$

В) $f(x)=-4x-x^2$

Г) $f(x)=4x-x^2$

Задача 12. Ако редицата $\{b_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ е зададена с равенствата $b_1=-3$, $b_n=b_{n-1}-1$, то шестият ѝ член е:

А) −6 **Б)** −7 **В)** −8 **Г)** 4

Задача 13. Дадена е геометрична прогресия $\div\!\div\, a_1,a_2,a_3,\ldots,$ за която $a_8=1$ и $\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{1}{4}$. Първият член на прогресията е:

А) $a_1=128$ **Б)** $a_1=128$ или $a_1=-128$

В) $a_1=256$ **Г)** $a_1=256$ или $a_1=-256$

Задача 14. Ако $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Б) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

В) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Г) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Задача 15. В края на учебната година се оказало, че всички ученици от един клас са получили годишни оценки по математика – *Добър*, *Мн. добър* или *Отличен*, по български език и литература – *Среден*, *Добър*, *Мн. добър* или *Отличен*, а по физическо възпитание и спорт - *Мн. добър* или *Отличен*. Група ученици от този клас, разглеждайки бележниците си забелязали, че няма двама от групата, които да имат едни и същи оценки и по трите предмета. Колко най-много ученици има в тази група?

А) 4 **Б)** 24 **В)** 3 **Г)** 12

Задача 16. На диаграмата са дадени резултатите от контролно по математика. Средното аритметично, модата и медианата са:

А) $3\dfrac{2}{3},\ 3,\ 3\dfrac{1}{2}$ **Б)** $3\dfrac{1}{2},\ 3,\ 3\dfrac{2}{3}$

В) $3\dfrac{1}{3},\ 4,\ 3\dfrac{1}{2}$ **Г)** $3\dfrac{2}{3},\ 3,\ 4$

Задача 17. Даден е $\triangle ABC$ с ъгли $15°$, $45°$ и $120°$, който е вписан в окръжност с радиус $R = 19\sqrt{3}$. Дължината на най-голямата страна на ΔABC е равна на:

А) $19\sqrt{6}$ **Б)** 57 **В)** $38\sqrt{3}$ **Г)** $38\sqrt{2}$

Задача 18. Даден е $\triangle ABC$, за който страната $AB = 4$, медианата $AM = 3$ и $\sphericalangle AMB = 135°$. Дължината на страната BC е равна на:

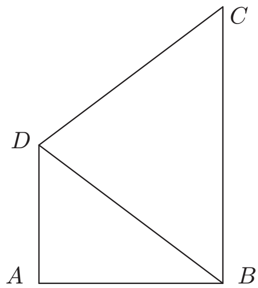
А) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ **Б)** $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

В) $BC = \sqrt{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ **Г)** $BC = \sqrt{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

Задача 19. Даден е трапец $ABCD$ $(AB||CD)$, които е описан около окръжност k. Ако $AD = BC$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $S_{ABCD} = 8$, то радиусът r на окръжността k е равен на:

А) $r = 1$ **Б)** $r = 2$ **В)** $r = 1{,}5$ **Г)** $r = \sqrt{2}$

Задача 20. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$ и диагонал $BD = 5$, в който може да се впише окръжност. Лицето S_{ABCD} и дължината на радиуса r на тази окръжност са съответно равни на:



А) $S_{ABCD} = 31,5$ и $r = 3{,}5$ **Б)** $S_{ABCD} = 27$ и $r = 3$

В) $S_{ABCD} = 22{,}5$ и $r = 2{,}5$ **Г)** $S_{ABCD} = 18$ и $r = 2$

Напишете отговорите на задачите от 21. до 25.

Задача 21. Стойността на израза

$$\frac{3^{\frac{3}{4}} + 5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} - (3 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{3^{0,25} - 5^{0,25}}{3^{\sqrt{0,25}} - 5^{\sqrt{0,25}}}\right)^{-1}$$

е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $x = \sqrt{16 - 6x - x^2} - 2$ са:

Задача 23. Финансова институция предлага годишни влогове при 10% годишна лихва с планове както за просто, така и за сложно олихвяване на внесената сума, което се извършва в края на всеки период. Съпрузи едновременно открили два влога - единият на името на жената за 1010 лв. при проста лихва, а другият на името на мъжа за 1000 лв. при сложна лихва. След колко години сумата на мъжа ще стане по-голяма от сумата на жената (по тези конкретни влогове) и с колко лева?

Задача 24. В школа по математика учат 14 деца, средната възраст на които е 12 години. След влизането на преподавателя, средната възраст на хората в стаята нараснала с 3 години. На колко години е преподавателят?

Задача 25. Даден е триъгълник ΔABC със страни $AB = 15$, $BC = 14$, $CA = 13$. Да се намери дължината на вписаната в триъгълника окръжност.

Напишете пълните решения на задачите от 26. до 28.

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} (x-y)xy^2 = 90 \\ (x+y)xy^2 = 360 \end{array} \right.$.

Задача 27. На щанд за сладолед се предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

Задача 28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.

ТЕМА 2: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

проф. д-р Ц. Дончев, доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. Триъгълникът ABC има височина $CH = 4$. На какво разстояние от връх C трябва да прекараме права, успоредна на AB, така че тя да разделя лицето на триъгълника на две равни части?

А) $2\sqrt{2}$ **Б)** 1 **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** $\frac{5}{2}$

Задача 2. Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник с дължини на катетите 3 и 4. Околните стени сключват с равнината на основата един и същ ъгъл, равен на 60°. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е равно на:

А) 10 **Б)** 11 **В)** 12 **Г)** 9

Задача 3. Най–голямата стойност на функцията $3\sin x + 4\cos x$ е равна на:

А) 7 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 1

Задача 4. Дефиниционното множество на функцията

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\lg(1 - 2x) \text{ е:}$$

А) $[-1, 1]$ **Б)** $(0, 1]$ **В)** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ **Г)** $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$

Задача 5. В растяща геометрична прогресия $a_3 = 2$ и $a_1 + a_5 = 3\sqrt{2}$. Първият член a_1 равен на:

А) $\sqrt{2}$ **Б)** 2

В) $\dfrac{3}{2}$ **Г)** друг отговор

Задача 6. Дадено е уравнението

$$(1-a)\lg^2 x + 3a\lg x - a = 0,$$

където a е реален параметър.

а) Решете уравнението, ако $a = 1$.

б) За кои стойности на a уравнението има реални корени x_1 и x_2, за които $10x_1x_2 = 10^{4a}$?

в) За кои стойности на a уравнението има точно едно решение, поголямо от 1?

Задача 7. Даден е равнобедреният триъгълник ABC, в който $AC = BC = a$ и $\sphericalangle ACB > 60^\circ$.

а) За коя стойност на отношението $\dfrac{R}{r}$ (между радиусите R на описаната и r на вписаната окръжности) лицето S_{ABC} на $\triangle ABC$ е максимално? Пресметнете S_{ABC} .

б) Ако $\dfrac{R}{r} = \dfrac{9}{4}$, пресметнете косинуса на ъгъла при основата на триъгълника ABC и тангенса на ъгъла между медианата през върха A и страната AB.

Задача 8. Всички ръбове на четириъгълната пирамида $ABCDM$ са с равни дължини и височината MH към основата $ABCD$ има дължина 1.

а) Пресметнете обема на $ABCDM$.

б) Пресметнете тангенса на двустенния ъгъл между две съседни околни стени на пирамидата.

в) Пресметнете максималния обем на цилиндър, вписан в пирамидата $ABCDM$ така, че едната му основа лежи в основата ѝ, а другата основа се допира до околните ѝ стени.

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Плевен–Русе, 1–3 април, 2016 г.

На 1-3.04.2016 г. в Плевен и Русе се проведоха Пролетните Математически Състезания (ПМС). В Плевен се състезаваха учениците от 4–8 клас, а в Русе тези от 9–12 клас. Резултатите на всички участници са на сайтовете на локалните организатори `http://www.pleven-mg.com/okon-protokol.htm` и `http://mg-babatonka.bg/news.php?item.422.5`. Ето и първенците по класове.

Четвърти клас. Давид Цаков (ЧСОУ Еспа, София) и Елена Димитрова (125 СОУ, София) – по 26 т., Михаела Петрова (7 СОУ, Варна) и Ния Димитрова (4 ОУ, София) – по 25.5 точки, Марин Христов (38 ОУ, София), Мария Русинова (6 ОУ, София) и Мария Дренчева (ЧСОУ Св. Георги, София) – по 25 т.

Пети клас. Божидар Димитров (ПМГ Силистра) – 25.5 т., Благо Гунев (СМГ) – 25 т., Никола Цачев (ПЧМГ) – 23 т., Борис Петруняшев (СМГ), Мартин Георгиев (СМГ) и Цветелина Илиева (ПМГ Бургас) – по 22 т.

Шести клас. Борислав Кирилов (ПЧМГ), Калина Николова (СМГ), Мартин Копчев (ПМГ Габрово), Мартин Димитров (125 СОУ, София), Милка Бакалов (СМГ) и Стефанка Манахова (СМГ) – по 26 т.

Седми клас. Никола Стайков (СМГ), Светлин Лалов (СМГ) и Стефан Хаджистойков (СМГ) – по 26 т., Галин Тотев (ПМГ, Бургас), Диян Димитров (СМГ), До Виет Кънг (СМГ), Иван Георгиев (СМГ) и Маргарита Стефанова (СМГ) – по 24 т.

Осми клас. Евгени Кайряков (СМГ) – 26 т., Петър Лангов (СМГ) – 25 т., Димитър Опърлаков (МГ, Варна) – 24 т., Виктор Балтин (ПМГ, Бургас), Добрин Бараков (МГ, Плевен) и Иво Петров (СМГ) – по 23 т.

Девети клас. Борис Барбов (СМГ) и Люба Конова (СМГ) – по 26 т., Борислав Антов (СМГ) – 24 т., Златина Милева (МГ, Варна), Иван-Александър Мавров (СМГ) и Чавдар Лалов (МГ, Плевен) – по 23 т.

Десети клас. Кирил Бангачев (СМГ) – 25 т., Калоян Алексиев (СМГ) – 23 т., Петър Христов (СМГ) – 21 т., Асел Исмолдаева (МГ, Варна), Васил Йорданов (СМГ), Вилиана Петрова (СМГ) и Ирина Софронова (СМГ) – по 20 т.

Единадесети клас. Костадин Гаров (ПМГ, Бургас) – 22 т., Виолета Найденова и Георги Русинов – по 19 т., Христо Папазов (СМГ) и Христо Попов (СМГ) – по 17 т., Габриел Костадинов (ПМГ, Силистра) и Димитър Ружев (СМГ) – по 16 т.,

Дванадесети клас. Даниел Атанасов (СМГ), Мирослав Маринов (ОМГ, Пловдив), Станислав Димитров (СМГ) и Станислав Славов – по 19 т., Александър Чергански (СМГ) и София Бурова (МГ, Варна) – по 17 т.

Предлагаме ви условията на задачите с кратки решения.

УСЛОВИЯ

4. клас

Задача 4.1. Аз съм роден на вълшебна дата 12.05.53 (12 май, 1953 г.), защото сборът на цифрите от деня и месеца $1 + 2 + 0 + 5 = 8$ е равен на сбора на последните две цифри от годината $5+3 = 8$. Днес е 2 април 2016 г. Намерете всички вълшебни дати до края на 2016 г.

Задача 4.2. Разполагате с шест квадратни картончета: едно със страна 1 см, две със страна 4 см, едно със страна 5 см, едно със страна 6 см и едно със страна 7 см. Подредете всички картончета плътно едно до друго без да се застъпват така, че да получите правоъгълник без празнини. Намерете обиколката на получения правоъгълник.

Задача 4.3. В умножението $P.LE = VEN$ на различните букви отговарят различни цифри. Намерете решение, при което стойността на P е:
а) най-малка; б) най-голяма.

Задача 4.4. В централното квадратче на квадратна таблица е поставено числото 4, а в другите осем квадратчета трябва да се поставят останалите едноцифрени числа без 0 така, че за всеки две съседни хоризонтални квадратчета числото в лявото квадратче да е по-малко от числото в дясното и за всеки две съседни вертикални квадратчета числото в горното квадратче да е по-малко от числото в долното. (Съседни квадратчета са тези, които имат обща страна.) Да се намерят всички възможни попълвания.

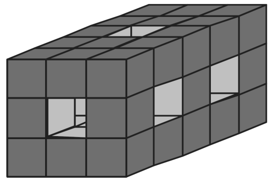
1	3	7
2	4	8
5	6	9

5. клас

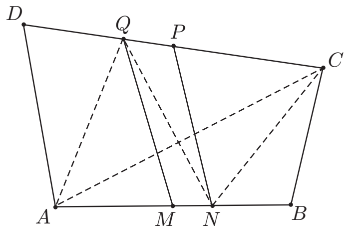
Задача 5.1. Решете ребуса

$$\begin{array}{c} *,*.6,* \\ \hline *** \\ + \\ ** \\ \hline *0,** \end{array}$$

Задача 5.2. Правоъгълен паралелепипед е съставен от еднакви по големина кубчета с ръб 1 см. В паралелепипеда са направени един вертикален и три хоризонтални отвора и е получено тялото на чертежа. Намерете обема и повърхнината на тялото.



Задача 5.3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точките M и N лежат върху страната AB, а P и Q – върху страната CD. Точката M е средата на AB и $AB = 3BN$, а точката P е средата на CD и $DC = 3DQ$. Лицето на $MNPQ$ е 1. Да се намери лицето на $ABCD$.



Задача 5.4. Дадени са 22 различни нечетни естествени числа, по-малки от 80. Да се покаже, че винаги може да се намерят две от тях, чиято сума е 82. Колко групи от по 21 различни нечетни естествени числа, по-малки от 80, можем да намерим така, че сумата на кои да е две числа от всяка група да не е 82?

6. клас

Задача 6.1. Да се намерят естествените числа, които са по-малки от $\dfrac{44^5}{55^4}$ и са по-големи от $\dfrac{44^5 - 55^4}{55^4}$.

Задача 6.2. Дължините на основните и околните ръбове на правилна четириъгълна призма са естествени числа. Да се намерят дължините на тези ръбове, ако $V + S = 228$, където V и S са числата, с които се записват съответно обемът и пълната повърхнина на призмата.

Задача 6.3. Числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 са поставени във върховете на един куб така, че сборът на всеки три числа, които са във върховете на една стена, да не е по-малък от 10. Да се намери най-малката възможност за сбора на четирите числа, лежащи във върховете на една стена.

Задача 6.4. Съществува ли естествено число, кратно на 2016, десетичният запис на което се състои от шест единици и шест двойки?

7. клас

Задача 7.1. Дадено е уравнението $|ax - 1008| = a + 1008$, където a е реален параметър. Решете уравнението и намерете за колко цели стойности на a уравнението има само цели корени.

Задача 7.2. Симетралите на страните AB и BC в остроъгълния триъгълник ABC се пресичат в точка O, като $\triangle ABO$ е равностранен. Симетралата на страната AC пресича ъглополовящата на $\sphericalangle BAO$ в точка K и правата AB в точка M, като $\sphericalangle AMO = 15^\circ$. Намерете мярката на $\sphericalangle BKO$.

Задача 7.3. На дъската са написани числата $2, 4, 6, \ldots, 2014, 2016$, т.е. всичките четни естествени числа до 2016 включително. Редувайки се, Вальо и Тошко играят следната игра – който е на ход избира едно число от написаните на дъската, и на негово място записва числото, с единица по-малко от избраното, след което изтрива нулите и равните числа, ако има такива. Първи играе Вальо. Губи този, след чийто ход на дъската не остава нито едно число. Кой от двамата ще победи при правилна стратегия?

Задача 7.4. Намерете всички естествени числа n, за които стойността на израза $A = 1 + n + \dfrac{n^2 - n}{2} - \dfrac{3n^2 - n^3 - 2n}{6}$ е степен на числото 2.

8. клас

Задача 8.1. Системата $\left| \begin{array}{l} ax + by = 24a - 4b \\ (c - 25)x + cy = 1 - a \end{array} \right.$ има безброй много реални решения. Намерете стойностите на реалните параметри a, b и c, ако едно от решенията на системата е $(x; y) = (4; 2016)$.

Задача 8.2. Даден е $\triangle A_1A_2A_3$ с медицентър G, в който P_1, P_2 и P_3 са средите съответно на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2. Нека точките G_1, G_2 и G_3 са такива, че отсечките P_1G_1, P_2G_2 и P_3G_3 имат обща точка M, като $MG_1 : P_1G_1 = MG_2 : P_2G_2 = MG_3 : P_3G_3 = 1 : m$, където $m > 1$ е реално число. Ако точките M_1, M_2 и M_3 са съответно от отсечките GG_1, GG_2 и GG_3 така, че $GM_1 : M_1G_1 = GM_2 : M_2G_2 = GM_3 : M_3G_3 = 10 : 11$, да се намерят стойностите на m, за които отсечките A_1M_1, A_2M_2 и A_3M_3 са успоредни и равни.

Задача 8.3. Естествените числа a и b са от интервала $(2016^2, 2016.2017)$. Да се докаже, че ако c дели ab, то $c = a$ или $c = b$.

Задача 8.4. Ъгловите единични квадратчета на шахматна дъска 8×8 са отстранени. Да се намери броят на правоъгълниците от единични квадратчета върху останалата част на дъската.

9. клас

Задача 9.1. Да се намерят всички двойки реални числа (a, b), за които квадратните уравнения $ax^2 + bx + 2016 = 0$ и $bx^2 + ax + 2016 = 0$ имат общ реален корен.

Задача 9.2. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, височина CH и медиана CM. Точка N от отсечката MH е такава, че $MN = NC$ и $NH = HB + BC$.

а) Да се намери $\sphericalangle BAC$;

б) Ако точка K от отсечката MC е такава, че $KB \perp NC$, да се намери $\sphericalangle KNC$.

Задача 9.3. Съществуват ли естествени числа m и n, за които

$$x^2 + (-1)^m x + 2 = 4^n + 15n$$

за някое цяло число x?

Задача 9.4. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Естествените числа от 1 до n са записани по окръжност така, че всяко от тях се дели на разликата на своите два съседа.

а) Ако n е едноцифрено, определете всичките му възможни стойности.

б) Възможно ли е $n = 2016$?

в) Възможно ли е $n = 2017$?

10. клас

Задача 10.1. Ако $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{3}{5}$, да се намери $\sin\beta$.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър $a > 2$, за които неравенството

$$(ax-1)^{6x^2-(2a+3)x+a} < 1.$$

има точно едно целочислено решение.

Задача 10.3. Даден е $\triangle ABC$ с център J на външновписаната окръжност към страната BC. Нека M е средата на страната AC и MJ пресича страната BC в точка N. Ако $AB = BN$, о да се докаже, че $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ACB$.

Задача 10.4. Дадена е редица от цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с положителна сума s. Казваме, че редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е *добра*, ако са изпълнени неравенствата

$$\begin{array}{rcl} a_1 & > & \left[\dfrac{s}{n}\right] \\ a_1 + a_2 & > & \left[\dfrac{2s}{n}\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} & > & \left[\dfrac{(n-1)s}{n}\right]. \end{array}$$

Да се намери максималния възможен брой добри редици измежду

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_2, a_3, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

(С [x] означаваме най-голямото цяло число, по-малко или равно на x.)

11. клас

Задача 11.1. Числата $a_1 = 0$, a_2, a_3, a_4 и a_5 образуват в този ред аритметична прогресия с разлика d, $0 < d < 180$. Да се намери a_2, ако числата

$$|\sin a_1^\circ|, |\sin a_3^\circ|, \sqrt{2}|\sin a_4^\circ|, \sqrt{3}|\sin a_5^\circ|$$

са различни и са последователни членове на аритметична прогресия.

Задача 11.2. В остроъгълния триъгълник ABC, $BC > AC$ е вписана окръжност k с център I. Нека CH, $H \in AB$ и CL, $L \in AB$ са съответно височината и ъглополовящата от върха C, а точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на BC, AC и AB. Ако допирната точка на k със страната AB е среда на отсечката HC_1, да се докаже, че I е център на описаната окръжност за $\triangle LA_1B_1$.

Задача 11.3. Нека A е множеството от всички четирицифрени числа, записани с цифрите 1, 2 или 3, като последната цифра не е 3. Нека B е множество от четирицифрени числа със следното свойство: за всяко число a от A съществува число b от B, което се различава от a в най-много една позиция. Да се намери най-малкия възможен брой елементи на B.

Задача 11.4. Нека n е естествено число и P_n е множеството от всички наредени двойки от естествени числа (a, b), за които $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq n$ и a и b не са взаимно прости. Означаваме

$$S_n = \sum_{(a,b) \in P_n} \binom{n}{a}\binom{n}{b} \text{ при } n > 1.$$

Съществува ли естествено число $n > 1$, което дели S_n?

12. клас

Задача 12.1. Виж задача 11.2.

Задача 12.2. Да се реши неравенството $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1 + \log_2(2+x)}{x}$.

Задача 12.3. Да се намери най-малкото просто число p от вида $8k+1$, $k \in \mathbb{N}$, за което не съществува естествено число n, такова, че $p + 2^n$ е точен квадрат.

Задача 12.4. Дадена е шахматна дъска $m \times k$, оцветена по обичайния начин. Разрешена е следната операция: да се избере поле и неговият цвят, както и цветовете на всички полета, които могат да се достигнат с ход на коня от това поле (ако има такива), да бъдат променени (от бяло в черно или обратно). Винаги ли е възможно да се се приложат краен брой от разрешените операции така, че накрая всички полета да са се сменили цвета си на противоположния?

РЕШЕНИЯ

4.1. Вълшебните дати през април са: 3.04.16, 12.04.16, 21.04.16 и 30.04.16; през май са: 2.05.16, 11.05.16 и 20.05.16; през юни са: 1.06.16 и 10.06.16.; през месеците юли, август и септември няма вълшебни дати; през октомври са: 6.10.16, 15.10.16 и 24.10.16; през ноември са: 5.11.16, 14.11.16 и 23.11.16; и през декември са: 4.12.16, 13.12.16, 22.12.16 и 31.12.16.

4.2. Сборът от лицата на шестте квадратчета е $1+16+16+25+36+49 = 143$ кв. см. Тъй като $143 = 13.11$, търсеният правоъгълник има страни 13 см и 11 см, а обиколката му е 48 см.

4.3. а) Тъй като P не може да е 0 или 1, търсим решение при $P = 2$. То е $2.74 = 148$.

б) Нека $P = 9$. Тогава E не е 0, 1, 5 или 9, защото ще имаме повтарящи се цифри. Ако E е 2, 3, 4, 6, 7 или 8, получаваме съответно $9.L2 = V28$, $9.L3 = V37$, $9.L4 = V46$, $9.L6 = V64$, $9.L7 = V73$ или $9.L8 = V82$. Във всички тези случай трябва $L = 9$, което не е възможно. Решение с $P = 8$ е например $8.47 = 376$.

4.4. Очевидно 1 е горе вляво, а 9 е долу вдясно. Тъй като 4 е в средата, то 2 и 3 трябва да са съседи на 1.

1	2	
3	4	
		9

1	3	
2	4	
		9

Имаме две възможности, като тогава 5 е горе вдясно или долу вляво. За всяко положение 5 има по три начина за допопълване на таблицата. Попълванията са общо 12.

1	3	5
2	4	8
6	7	9

1	3	5
2	4	7
6	8	9

1	3	5
2	4	6
7	8	9

1	3	6
2	4	8
5	7	9

1	3	6
2	4	7
5	8	9

1	3	7
2	4	8
5	6	9

1	2	5
3	4	8
6	7	9

1	2	5
3	4	7
6	8	9

1	2	5
3	4	6
7	8	9

1	2	6
3	4	8
5	7	9

1	2	6
3	4	7
5	8	9

1	2	7
3	4	8
5	6	9

5.1. Означаваме всяка от звездичките с буква и записваме ребуса във вида:

$$\begin{array}{r} A{,}B \,.\, 6{,}C \\ \hline D\ E\ F \\ +\qquad\quad \\ G\ H \\ \hline M\ 0{,}N\ P \end{array}$$

Ясно е, че $AB.C > AB.6$, защото първото произведение (DEF) е трицифрено число, а второто (GH) е двуцифрено. Следователно $C > 6$, т.е. $C = 7$, $C = 8$ или $C = 9$. Ако $A > 1$, то произведението на AB с 6 ще е трицифрено. Заключаваме, че $A = 1$. Тъй като $17.6 = 102$, то $B \leqq 6$.

Нека $C = 9$. Ако $B \leqq 4$, то произведението на AB и 69 не е четирицифрено число (от една страна това произведение е $M0NP$, а от друга $14.69 = 966$). Следователно $B = 5$ или $B = 6$. Чрез проверка установяваме, че за $B = 5$ произведението е 1035 и изпълнява условието, докато при $B = 6$ произведението е 1104 и условието е нарушено (втората цифра не е нула).

Нека $C = 8$. Както и по-горе, отново възможните стойности за B са 5 и 6. Съответните произведения са 1020 и 1088, като и двете изпълняват условието.

Нека $C = 7$. Възможните стойности за B са пак 5 и 6. Съответните произведения 1005 и 1072 изпълняват условието.

Окончателно, решенията на задачата са:

$$\begin{array}{r} 1{,}5.6{,}9 \\ \hline 135 \\ +\quad\ \ \\ 90 \\ \hline 10{,}35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}5.6{,}8 \\ \hline 120 \\ +\quad\ \ \\ 90 \\ \hline 10{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}6.6{,}8 \\ \hline 128 \\ +\quad\ \ \\ 96 \\ \hline 10{,}88 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}5.6{,}7 \\ \hline 105 \\ +\quad\ \ \\ 90 \\ \hline 10{,}05 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}6.6{,}7 \\ \hline 112 \\ +\quad\ \ \\ 96 \\ \hline 10{,}72 \end{array}$$

5.2. Да разгледаме тялото, „разрязано“ на хоризонтални слоеве. Горният и долният слой се състоят от по 14 кубчета, а в средния слой има само 6 кубчета. Обемът на тялото $2.14.6 = 34$ куб.см. „Открита“ ще наричаме всяка стена на кубче, която е част от повърхнината на тялото. В горния слой има 14 кубчета, като всичките са с по 3 „открити“ стени. Следователно повърхнината на горния слой е $14.3 = 42$ кв.см. Толкова е повърхнината и на долния слой. В средния слой има 6 кубчета, като всичките са с по 4 „открити“ стени. Следователно повърхнината на средния слой е $6.4 = 24$ кв. см. Общата повърхнина на тялото е $42.2 + 24 = 108$ кв.см.

5.3. По условие $DC = 3DQ$ и $AB = 3BN$. Следователно

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{3}{2} \cdot S_{ANC} + \frac{3}{2} \cdot S_{ACQ}) \\ &= \frac{3}{2} S_{ANCQ} = \frac{3}{2}(S_{ANQ} + S_{CNQ}) \\ &= \frac{3}{2}(4.S_{MNQ} + 4.S_{NPQ}) = 6.S_{MNPQ} = 6. \end{aligned}$$

5.4. Нечетните числа, по-малки от 80, могат да се разделят на 19 двойки със сбор 82 по следния начин: $3 + 79$, $5 + 77$, $7 + 75$, $\dots$, $39 + 43$. Остават две нечетни числа 1 и 41.

Да вземем 22 числа: числата 1 и 41, както и още 20 други числа от 19-те двойки. Тогава има поне две числа от една двойка, т.е. със сбор 82.

Групата от 21 нечетни естествени числа включва 1, 41 и по едно число от всяка двойка. Възможностите са $\underbrace{2.2.2\dots2}_{19 \text{ пъти}} = 524\ 288$.

6.1. Имаме

$$\frac{44^5}{55^4} = \frac{4^5.11^5}{5^4.11^4} = \frac{11^4.4^4.11}{5^4.11^4} = \frac{4^5.11}{5^4} = \frac{11264}{625} = 18\frac{14}{625}$$

и

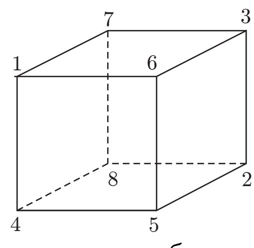
$$\frac{44^5 - 55^4}{55^4} = \frac{4^5.11^5 - 5^4.11^4}{5^4.11^4} = \frac{11^4(4^5.11 - 5^4}{5^4.11^4} = \frac{10\ 639}{635} = 17\frac{14}{625}.$$

Следователно 18 е единственото естествено число с исканите свойства.

6.2. Означаваме с b и h съответно дължините на основния ръб и височината на призмата. Имаме

$$V + S = b^2h + 2b^2 + 4bh = 228 \iff b(bh + 2b + 4h) = 228.$$

Оттук b е делител на 228. Тъй като при $b = 9$ имаме $V + S = 9(9h + 18 + 4h) = 117h + 162 > 228$, то b е най-много 8. Възможностите за b са 1, 2, 3, 4 и 6. Правим проверка за тези стойности и намираме $b = 3$; $h = 10$.



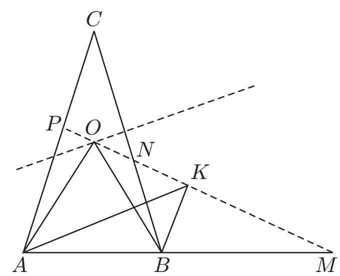
6.3. Нека числата от една стена са $a < b < c < d$. Ще докажем, че $d \geqq 6$. Наистина, ако $d \leqq 5$, то $a + b + c \leqq 2 + 3 + 4 = 9$. Следователно минималната стойност на сбора на четирите числа от всяка стена е $10 + 6 = 16$. На чертежа е показан пример със сбор 16.

6.4. Ако такова число съществува, то се дели на 9, защото сборът от цифрите му е 18. Тъй като търсеното число трябва да се дели на 32, последните му пет цифри се определят еднозначно: 22112. Числото 121112222112 удовлетворява условието на задачата.

7.1. а) Ако $a < -1008$ уравнението няма реални корени. Ако $a \geqq -1008$, имаме $ax = a + 2016$ или $ax = -a$. При $a = 0$ всяко реално число е решение, а при $a \in [-1008; 0) \cup (0; \infty)$ решенията са две $x_1 = 1 + \dfrac{2016}{a}$ и $x_2 = -1$.

б) Уравнението има само цели корени, когато $\dfrac{2016}{a}$ е цяло число, т.е. когато a дели $2016 = 2^5.3^2.7$. Броят на естествените делители на $2^5.3^2.7$ е равен на $6.3.2 = 36$. Но a може и да е отрицателно число, откъдето възможностите стават 72. От тях трябва да изключим $a = -2016$, защото $-2016 < -1008$. Случаят $x_2 = -1$ попада в изброените. Окончателно търсеният брой е 71.

7.2. Нека OM пресича AC и BC съответно в точки P (средата на страната AC) и N. От свойствата на симетралите следва, че



$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB \Longrightarrow \sphericalangle ACB = 30^\circ.$$

Тогава от сбора на ъглите в $\triangle APM$ намираме $\sphericalangle CAB = 75^\circ$, следователно $\triangle ABC$ е равнобедрен. Тъй като $\sphericalangle BAK = 30^\circ$ (AK е ъглополовяща), получаваме, че $\triangle APK$ е равнобедрен. Имаме $AP = PK = PC = \dfrac{1}{2}BC$. От теоремата за катет срещу 30° в правоъгълния получаваме, че $CN = 2PN \Longrightarrow NB = BC - CN = 2PK - 2PN = 2NK$. В $\triangle BNK$ имаме $\sphericalangle BNK = 60^\circ$ и $2NK = BN$, следователно $\sphericalangle BKP = 90^\circ$.

7.3. След всеки ход на Вальо на дъската остават нечетен брой нечетни числа, а след всеки ход на Тошко – четен брой нечетни числа. Тъй като точно преди края ще остане 1, на ход ще е Тошко и той губи независимо от развоя на играта дотогава.

7.4. След привеждане под общ знаменател и разлагане на израза получаваме, че $A = \dfrac{n^3 + 5n + 6}{6} = \dfrac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6} = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Нека $n + 1 = 2^a.a_1$ и $n^2 - n + 6 = 2^b.b_1$, където $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$ са цели числа, а a_1 и b_1 са нечетни естествени числа. За да е изпълнено равенството, трябва $a_1 b_1 = 3$ и следователно има две възможности:

Случай 1. $a_1 = 1$, $b_1 = 3$. Тогава $n = 2^a - 1$ и

$$n^2 - n + 6 = 2^{2a} - 3.2^a + 2^3 = 2^b.3 \Longrightarrow 2^{2a} + 2^3 = 3.(2^a + 2^b).$$

Оттук най-високата степен, която дели $2^a + 2^b$, е 2^3, т.е. $a \leqq 3$ или $b \leqq 3$. След проверки намираме решенията $n = 1$ (при $a = b = 1$), $n = 3$ (при $a = b = 2$) и $n = 7$ (при $a = 3$ и $b = 4$).

Случай 2. $a_1 = 3$, $b_1 = 1$. Тогава $n = 3.2^a - 1$ и

$$n^2 - n + 6 = 9.2^{2a} - 9.2^a + 2^3 = 2^b \Longrightarrow 9.2^a(2^a - 1) + 2^3 = 2^b.$$

Не е възможно a и b да са едновременно по-големи от 3. Отново след проверки намираме $n = 2$ (при $a = 0$ и $b = 3$) и $n = 23$ (при $a = 3$ и $b = 9$). Окончателно търсените стойности за n са 1, 2, 3, 7, 23.

8.1. След заместване със стойностите $(x; y) = (4; 2016)$ в системата получаваме $a = 101b$ и $c = \dfrac{1-b}{20}$. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} b(101x + y) = 2420b \\ (-b - 499)x + (1 - b)y = 20 - 2020b. \end{array} \right.$$

Разглеждаме два случая.

I случай: $b = 0$. Системата безброй много решения. За параметрите получаваме $a = b = 0$ и $c = \dfrac{1}{20}$.

II случай: $b \neq 0$. Системата приема вида

$$\left| \begin{array}{l} 101x + y = 2420 \\ (-b - 499)x + (1 - b)y = 20 - 2020b. \end{array} \right.$$

От първото уравнение $y = 2420 - 101x$ и след заместване във второто получаваме $(b - 6)x = 4(b - 6)$. Последното има безброй много решения само при $b = 6$. В този случай за параметрите получаваме $a = 606$, $b = 6$ и $c = -\dfrac{1}{4}$.

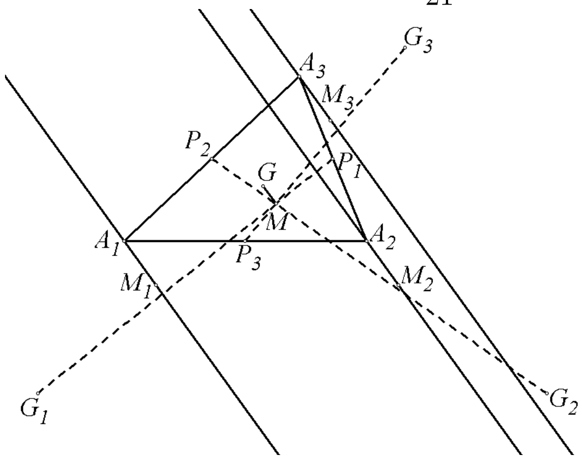
8.2. От условието следва, че $\overrightarrow{MG_1} = \dfrac{1}{m}\overrightarrow{P_1G_1}$. Оттук

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{m}{m-1}\overrightarrow{GM} - \frac{1}{m-1}\overrightarrow{GP_1} = \frac{m}{m-1}\overrightarrow{GM} + \frac{1}{2(m-1)}\overrightarrow{GA_1}.$$

От друга страна $\overrightarrow{GG_1} = \dfrac{21}{10}\overrightarrow{GM_1}$ и като заместим в предишното равенство, получаваме $\overrightarrow{GM_1} = \dfrac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM} + \dfrac{5}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1}$. Като вземем предвид, че $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{GM_1} - \overrightarrow{GA_1}$, намираме $\overrightarrow{A_1M_1} = \dfrac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM} + \dfrac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1}$. Аналогично изразяваме $\overrightarrow{A_2M_2}$ и $\overrightarrow{A_3M_3}$. Отсечките A_1M_1 и A_2M_2 са успоредни и равни тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_2M_2}$, т.е.

$$\frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1} = \frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_2} \Rightarrow (26 - 21m)(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GA_2}) = \vec{0}.$$

Тъй като не е възможно $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GA_2}$, то $m = \dfrac{26}{21}$.



8.3. От условието, че c дели ab, следва, че c дели и числото $d = (a-c)(b-c)$. Тъй като числата a, b и c са от интервал с дължина 2016, имаме $|a-c| < 2016$ и $|b-c| < 2016$. Тогава $|d| < 2016^2$ се дели на $c > 2016^2$, което означава, че $d = 0$, откъдето $c = a$ или $c = b$.

8.4. Броят на правоъгълниците в правоъгълник $m \times n$ е

$$\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2} = \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}.$$

Действително, всеки правоъгълник се определя еднозначно от две (избрани измежду $m+1$) хоризонтални линии и две (избрани измежду $n+1$) вертикални линии. В разглежданата ситуация търсеният брой е равен на удвоената сума на правоъгълниците в правоъгълник 6×8 минус броя на правоъгълниците в квадрата 6×6 (защото ги преброихме два пъти), т.е. на $\dfrac{6.8.7.9}{2} - \dfrac{6.6.7.7}{4} = 1071$.

9.1. Ако x_0 е общ реален корен на дадените уравнения, то

$$ax_0^2 + bx_0 + 2016 = bx_0^2 + ax_0 + 2016 = 0,$$

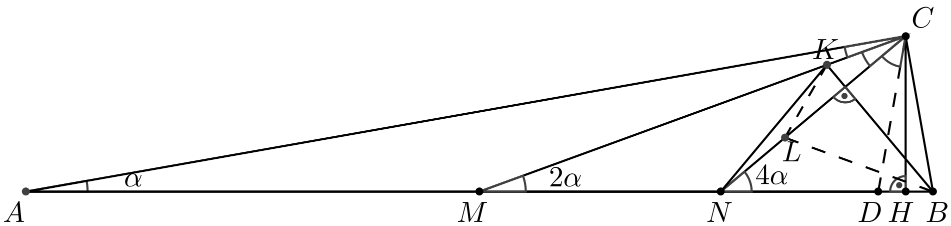
откъдето $(a-b)(x_0^2 - x_0) = 0$.

Ако $a = b \neq 0$, то двете уравнения съвпадат и остава да проверим кога общите им корени са реални. Имаме $a^2 - 8064a \geq 0$, т.е. $a \in (-\infty, 0] \cup [8064, +\infty)$. Ако $a \neq b$, то за общия корен имаме $x_0^2 - x_0 = 0$, т.е. $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$. Първата възможност отпада, а втората дава $a + b + 2016 = 0$, т.е. $b = -2016 - a$ при $a \neq -1008$.

Търсените двойки са (a, a), където $a \in (-\infty, 0) \cup [8064, +\infty)$ и $(a, -2016 - a)$ при $a \neq 0, -2016, -1008$.

9.2. а) Нека точка D от отсечката NH е такава, че $ND = BC$; тогава $DH = HB$ и $\triangle DHC \cong \triangle BHC$ по първи признак. Тогава $DC = BC = ND$ и от свойството на медианата $CM = AM = BM$. Ако $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACM = \alpha$, то $\sphericalangle CMB = 2\alpha$ като външен. Тогава $\sphericalangle MCN = 2\alpha$ и $\sphericalangle CNB = 4\alpha$ като външен, $\sphericalangle NCD = 4\alpha$ и $\sphericalangle CDB = 8\alpha$ като външен. Следователно $\sphericalangle ABC = 8\alpha$ и $9\alpha = 90^\circ$, така че $\alpha = 10^\circ$.

б) Нека точка L от отсечката NH е такава, че $\sphericalangle CBL = 60^\circ$; тогава $\triangle BCL$ е равностранен и $K \in s_{CL}$. Така $\sphericalangle KLC = \sphericalangle KCL = \sphericalangle NMC$ и следователно четириъгълникът $LKMN$ е вписан. Имаме $\triangle BLM \cong \triangle CLM$ по трети признак, така че $\sphericalangle KNC = \dfrac{1}{2}\,\widehat{LK} = \sphericalangle LMN = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BMC = 10^\circ$.



9.3. Да допуснем, че такива числа съществуват. Ще докажем с индукция по n, че $A_n = 4^n + 15n - 1$ се дели на 9 за всяко естествено n. Имаме $A_1 = 18$, $A_{n+1} = 4.4^n + 15(n+1) - 1 = A_n + 3(4^n + 5)$ и е достатъчно да забележим, че $4^n + 5 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Следователно $x^2 + (-1)^m x + 1 \equiv 0 \pmod 9$, откъдето получаваме, че $(2x + (-1)^m)^2 \equiv -3 \pmod 9$. Оттук следва, че $2x + (-1)^m$ се дели на 3 и тогава $-3 \equiv (2x + (-1)^m)^2 \equiv 0 \pmod 9$, което е невъзможно.

9.4. Нечетно число може да се намира само между числа с различна четност, така че нечетните числа са групирани по двойки, оградени с четни. Тогава броят на нечетните числа от 1 до n е четен, което изключва случаите $n = 5,\ 6,\ 9,\ 2017$.

При $n = 3$ наредбата е 1, 2, 3. При $n = 4$ наредбата е 1, 3, 2, 4. При $n = 7$ наредбата е 1, 4, 3, 7, 2, 6, 5.

Ако n се дели на 4, $n = 4k$, $k \geq 2$, то можем да подредим числата така: $2k-1$, $4k$, $2k$, $4k-2$, 1, $4k-1$, следвани от двойките числа j, $4k-j-1$ за $j \in \{2, 3, ..., 2k-2\}$. Там, където числата през едно имат разлика 1, условието явно е изпълнено. Остава да се уверим, че $2k-1$ се дели на $4k - (2k+1) = 2k - 1$, $2k$ се дели на $4k - (4k-2) = 2$, $4k-2$ се дели на $2k-1$ и че 2 се дели на $4k - 1 - (4k-3) = 2$. Това решава случаите $n = 8$ и $n = 2016$.

10.1. Нека $\sin\beta = x$. От $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ следва, че $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Тогава

$$\frac{3}{5} = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5}\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{5}x$$

и достигаме до уравнението

$$3x+3 = 4\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow 9(x+1)^2 = 16(x^2-1) \Leftrightarrow (x+1)(25x-7) = 0.$$

Остава да съобразим, че $x \in (0,1)$ и единственото решение е $x = \dfrac{7}{25}$, т.е. $\sin\beta = \dfrac{7}{25}$.

10.2. Нека $0 < ax - 1 < 1$. Тогава $x \in \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right)$. Но този интервал не съдържа цели числа. Следователно, $ax - 1 > 1$, т.е. $x > \dfrac{2}{a}$. Тогава неравенството се свежда до

$$6x^2 - (2a+3)x + a < 0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{3}\right).$$

За разположението на числата $\dfrac{2}{a}$, $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{a}{3}$ имаме следните възможности:

(i) $1/2 < a/3 \leqq 2/a$ при $a \in (2, \sqrt{6}]$;

(ii) $1/2 < 2/a < a/3$ при $a \in (\sqrt{6}, 4)$;

(iii) $2/a \leqq 1/2 < a/3$ при $a \in [4, +\infty)$.

В случай (i) няма решение. В случай (ii) имаме $x \in \left(\dfrac{2}{a}, \dfrac{a}{3}\right)$, откъдето $a \in (3,4)$. Накрая в случай (iii) $x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{a}{3}\right)$, откъдето $a \in [4,6]$. Окончателно $a \in (3,6]$.

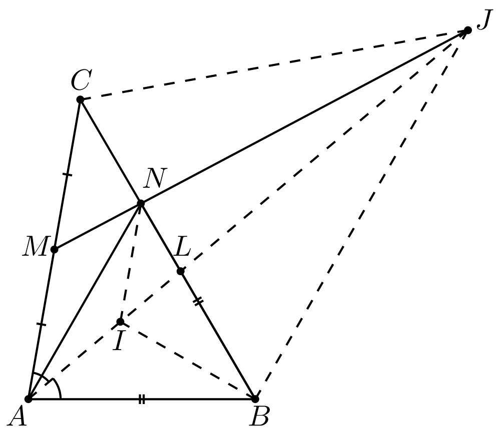
10.3. Нека I е центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. От $AM = CM$ следва, че $S_{ANJ} = S_{CNJ}$. Тогава

$$\frac{CN}{NL} = \frac{S_{CNJ}}{S_{LNJ}} = \frac{S_{ANJ}}{S_{LNJ}} = \frac{AJ}{LJ} = \frac{S_{ABJ}}{S_{LBJ}} = \frac{AB.r_a}{BL.r_a} = \frac{AB}{BL},$$

където r_a е радиусът на външновписаната окръжност към страната BC. Така достигаме до извода, че

$$\frac{CN}{NL} = \frac{AB}{BL} \Rightarrow AC \parallel IN.$$

От друга страна, BI е ъглополовяща в равнобедрения $\triangle ANB$ и следователно I лежи на симетралата на AN, но CI е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, т.е. I лежи на описаната окръжност около $\triangle ANC$. Така достигаме до извода, че $ACNI$ е трапец, вписан в окръжност, т.е. той е равнобедрен и $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle IAC = 2\sphericalangle ACB$.



10.4. Да разгледаме безкрайната редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, \ldots.$$

и научпената линия с върхове

$$(0,0), (1, a_1), (2, a_1 + a_2), (3, a_1 + a_2 + a_3), \ldots.$$

От условието следва, че ако редицата $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е добра, то начупената линия е изцяло над правата $y = sx/n$.

Ако редицата $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i-1})$ е добра, то точката (i, a_i) лежи върху начупената линия. Това означава, че търсеният брой е равен на броя на целочислените точки върху отсечката, свързваща точките $(0,0)$ и (n,s), т.е. на (s,n).

Тази стойност се достига например от следната конструкция (достатъчно е да разгледаме случая $(s,n) = 1$. Ако $s = a(n-1) - b$, където $0 \le b < n-1$, работа върши редицата $(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}, -b)$.

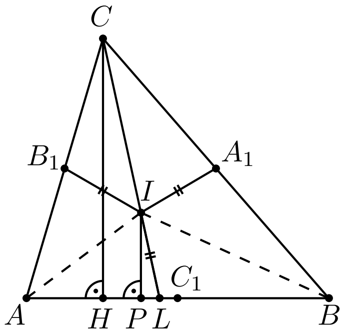
11.1. От условието следва, че $a_2 = d$, $a_3 = 2d$, $a_4 = 3d$ и $a_5 = 4d$. Тогава числата $0, |\sin 2d|, \sqrt{2}|\sin 3d|, \sqrt{3}|\sin 4d|$ са последователни членове на аритметична прогресия. Следователно $3|\sin 2d| = \sqrt{3}|\sin 4d|$, откъдето $\sin 2d(\sqrt{3} - 2|\cos 2d|) = 0$.

Ако $\sin 2d = 0$, то числата от втората прогресия не са различни. Ако $\cos 2d = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $d = 15, 75, 105, 165$. Директно се проверява, че при всяка от тези стойности на d се получава решение.

11.2. Да означим допирната точка на k и страната AB с P. При стандартни означения за триъгълник имаме $AC_1 = \dfrac{c}{2}$, $AH = b\cos\alpha$ и $AP = \dfrac{b+c-a}{2}$. Тъй като P е среда на HC_1 получаваме $AC_1 - AP = AP - AH$, откъдето намираме:

$$a - b = \frac{c}{2} - b\cos\alpha.$$

След заместване $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ получаваме $a+b=2c$. От това равенство намираме $AL = \dfrac{cb}{a+b} = \dfrac{b}{2}$ и $\triangle ALI \cong \triangle AB_1I$. Аналогично $\triangle BLI \cong \triangle BA_1I$. Следователно $IL = IB_1 = IA_1$.



11.3. Директно се проверява, че множеството:

$$\{1111, 2221, 3331, 1321, 3211, 2131, 1232, 2312, 3122\}$$

има исканото свойство.

Да допуснем, че съществува множество B с 8 числа. От принципа на Дирихле следва, че без ограничение можем да приемем, че броят на числата в B с първа цифра 3 е не повече от 2. От всяко такова число с промяна на втората, третата или четвъртата цифра можем да получим 5 други числа (втората и третата цифра могат да се променят по два начина, а третата цифра по един). Следователно число с първа цифра 3, *покрива* 6 числа (към горните пет числа прибавяме и самото число) и тъй като имаме 18 числа с първа цифра 3 получаваме, че числата с първа цифра 1 или 2 са поне $18-12=6$. Понеже в B има 8 числа заключаваме, че има две числа с първа цифра 3 и не съществува число, което се различава от всяко от тези две числа в една цифра. Без ограничение двете числа с първа цифра 3 са 3111 и 3222. Тогава в B трябва да има числа $a331, b321, c231, d132, e312, f332$ където всяко от числата a,b,c,d,e,f е 1 или 2. Тъй като $|B|=8$ получаваме

$$M = \{3111, 3222, a331, b321, c231, d132, e312, f332\}$$

Числата 1121 и 2121 могат да се различават в една цифра само от числото $b321$. Ако $b=1$ числото 2121 няма да е покрито от число от B, а ако $b=2$ числото 1121 няма да е покрито от число от B.

Следователно търсеният минимален брой е 9.

11.4. Първо ще докажем, че ако $(a,b)=1$, то n дели $\binom{n}{a}\binom{n}{b}$. Наистина, ако $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, то всяко от простите числа p_i е взаимно просто с a или с b. Ако $(p_i,a)=1$ от равенството $\binom{n}{a} = \dfrac{n}{a}\binom{n-1}{a-1}$ следва, че $p_i^{\alpha_i}$ дели $\binom{n}{a}$.

Да допуснем, че n дели S_n. Тогава от

$$(2^n-1)^2 = \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}\right)^2$$

и от горното твърдение следва, че n дели $(2^n-1)^2$. Оттук следва, че n е нечетно число и нека p е най-малкия прост делител на n, а α е степента на p в каноничното разлагане на n на прости множители, т.е. $n=p^\alpha s$ и $p\nmid s$. Тогава p дели $(2^s)^{p^\alpha}-1$, откъдето получаваме, че p дели 2^s-1. Това означава, че $(p-1,s)\neq 1$, което е противоречие с това, че p е най-малкия прост делител на n и n е нечетно число. Следователно такова n не съществува.

12.1. Виж задача 11.2.

12.2. Неравенството има смисъл при $x\in(-2,+\infty)\setminus\{-1/2,0\}$.

Случай 1. При $x>0$ неравенството е еквивалентно на $\dfrac{4x-1}{2x+1}>\log_2(2+x)$. Тъй като $\dfrac{4x-1}{2x+1}\le 1<\log_2(2+x)$ при $x\in(0,1]$, да разгледаме $x\in(1,+\infty)$. Функцията $\dfrac{4x-1}{2x+1}$ расте от 1 до 2 в този интервал и понеже $\log_2(2+x)\ge 2$ при $x\ge 2$, остава да разгледаме $x\in(1,2)$. В този интервал имаме $\log_2(2+x)\ge\log_2\dfrac{3}{2}$, докато $\dfrac{4x-1}{2x+1}\le\dfrac{7}{5}$. Тъй като $\log_2\dfrac{3}{2}>\dfrac{7}{5}$, неравенството няма решение и в този интервал.

Случай 1. При $x\in(-2,0)\setminus\{-1/2\}$ неравенството се преобразува в $\dfrac{4x-1}{2x+1}>\log_2(2+x)$. Имаме $\log_2(2+x)<1$, докато $\dfrac{4x-1}{2x+1}>1$ при $x\in(-2,-1/2)$. Накрая, лесно се вижда,че неравенството е изпълнено за всяко x в интервала $(-1/2,0)$.

12.3. Тъй като $17+2^3=5^2$, $41+2^3=7^2$, $73+2^3=9^2$, $89+2^5=11^2$, $97+2^7=15^2$, $113+2^3=11^2$, $137+2^5=13^2$, $193+2^5=15^2$ и $233+2^7=19^2$, първият сериозен кандидат за решение е $p=241$.

Да допуснем, че $241+2^n=x^2$ за някои естествени n и x. Ако $n=2m$ е четно, то $241=(x-2^m)(x+2^m)$, откъдето лесно получаваме $x=121$ и $2^m=120$, противоречие.

Нека $n=2m+1$ е нечетно. Непосредствено се проверява, че 2^{2m+1} дава остатъци 2, 8 и 32 по модул 63 (показателят на 2 по модул 63 е 6), което означава, че $241+2^{2m+1}\equiv 21,54,60\pmod{63}$. Остава да проверим, че сравненията $x^2\equiv 21,54,60\pmod{63}$ нямат решение. За първото и третото това е очевидно, а второто води до $y^2\equiv 6\pmod 7$, което също няма решение.

12.4. Да разгледаме граф с върхове – клетките на дъската и ребро между два върха тогава и само тогава, когато двата върха са съседни с ход на коня. Тогава нашата операция е: избираме връх и го преоцветяваме заедно с всичките му съседи (ако има такива). Ще докажем с индукция по броя на върховете n, че исканото винаги е възможно.

При малките стойности на n твърдението е очевидно. Нека то е вярно за някое n и да разгледаме произволен граф с $n+1$ върха.

Да фиксираме един връх v и да приложим индукционното предположение за графа от останалите n върха, като всеки път, когато се налага, правим преоцветяване и на v. Да означим с $F(v)$ поредицата от ходове, при която сме постигнали преоцветяване на останалите върхове. Ако след тази поредица и v е сменил в крайна сметка цвета си, твърдението е доказано. Да предположим, че накрая v е отново в първоначалния си цвят, и да отбележим, че същото разсъждение може да се направи за всеки от върховете.

Ако $n+1$ е четно число, следваме следната процедура – отделяме върховете един по един и всеки път изпълняваме съответните за отделения връх операции $F(v)$. Накрая всеки връх ще е променил цвета си нечетен брой пъти и твърдението е доказано.

Ако $n+1$ е нечетно, в графа има връх от четна степен. Отделяме този връх и неговите съседи и върху всеки от останалите върхове (които са четен брой) прилагаме, както по-горе, операциите $F(v)$. В края останалите върхове ще са преоцветявани нечетен брой пъти (т.е. ще са променили цвета си), а отделените върхове ще са преоцветявани четен брой пъти и остава за тях да приложим операцията от условието за отделения връх с четна степен.

Задачите са предложени от:

Емил Карлов – 4.1., Иван Ангелов – 4.2., 4.3. и 4.4., Мариана Кьосева – 5.1., 5.2. и 5.3., Надежда Буюклиева – 5.4., Иван Тонов – 6.1., 6.3. и 6.4., Велислав Йончев – 6.2., Ирина Шаркова – 7.1. и 7.2., Петя Тодорова – 7.3 и 7.4., Стоян Ненков – 8.1. и 8.3., Сава Гроздев и Веселин Ненков – 8.2. и 8.4, Петър Бойваленков – 9.1, 9.3 и 12.3, Ивайло Кортезов – 9.2 и 9.4, Стоян Боев – 10.1 и 10.3, Иван Ланджев – 10.2 и 10.4, Емил Колев – 11.1 и 11.3, Пламен Пенчев – 11.2 (12.1) и 12.2, Александър Иванов – 11.4 и 12.4.

Коментар. Работата на Националната комисия за 4.-8. клас по съставянето на темите и проверката на работите на учениците породи голям брой гневни коментари от участници и родители в социалните мрежи. Несъстоятелността на официалното решение на Задача 7.3 не е била забелязана нито на обсъждането (ако е имало такова) на темите, нито дори при проверката на работите и се е стигнало до странни среднощни "раздавания" на точки. Официалното решение на Задача 8.4 също подсказва, че по-скоро не е имало обсъждане на темата за осми клас. Отговорност за тези проблеми носи цялата Комисия и най-вече нейният председател проф. Сава Гроздев. Своята част от отговорността трябва да поеме и МОН, което не се съобрази с предложението на Управителния съвет на СМБ за състав на комисията.

ВЕЧЕР НА МАТЕМАТИКАТА

Катерина Марчева

На 23 март 2016 в Младежки дом, Благоевград се проведе вечер на математиката. СОУИЧЕ „Св. Кл. Охридски“ организира и проведе интересно тържество в рамките на третата Седмица на математиката (21.03–27.03.2016) в града. Събитието бе посветено на 40 години от създаването на ЮЗУ „Неофит Рилски“ и 55 годишнината от учредяването на секция Благоевград към Дружеството на математиците в България (днес Съюз на математиците в България).

В хода на подготовката на математическото тържество бяха подготвени над 20 различни тематични табла с интересно съдържание – красиви фигури, изработени с използването на геометрични преобразования, любопитни факти, снимки от минали математически дейности. Изработени бяха и тела на фигури – от картон и пластмасови сламки. Изработени бяха плакат и покани. Освен учителите по математика се включиха и учители по информационни технологии и изобразително изкуство. При изработване на около 60% от таблата бе използвана GeoGebra.

Част от предварителната подготовка бе изборът на участниците в два отбора, които се състезаваха по време на вечерта. Те бяха съставени от по четири участници от различни възрасти. Във всеки отбор имаше по един представител от четвърти, пети, шести и седми клас. Учениците избраха името на известен български математик за патрон на отбора. Отборите бяха с имена „Иван Салабашев“ и „Кирил Попов“.

Наред с избора на състезателите бе избрано и жури от трима души. Всички бяха единодушни – председателят на журито трябва да е учител. Но, този учител да не е от нашето училище, а двамата членове – да са ученици от 10 клас.

В украсената зала, в присъствието на над 80 ученици, вечерта на математиката откриха двамата водещи с мисли за математиката.

Сред гостите бяха проф. Петър Бойваленков, заместник директор на ИМИ при БАН, Тодор Брънзов от ИМИ при БАН, г-жа Анна Самева от ИМИ при БАН, г-жа Първолета Лазарова, експерт в РИО – Благоевград, г-жа Керанка Иванова и ученици от 6 клас на ПМГ „Акад. Сергей Корольов“.

След представянето на журито и отборите, публиката бе запозната с факти от създаването и историята на ЮЗУ „Неофит Рилски“ и на секция Благоевград към СМБ.

Състезанието протече в три етапа. Всяка задача бе оценяване от 0 до 5 точки. Двата отбора решаваха едни и същи задачи.

На всеки етап журито обявяваше текущите резултати. В първи етап всеки ученик от двата отбора решаваха самостоятелно задачи съответно за четвърти, пети, шести и седми клас.

Докато учениците решаваха задачите и журито преглеждаше и оценяваше работите, публиката се запозна с биографиите на патроните на отборите.

Във втория етап на състезанието отборите имаха по две задачи, които се решаваха в екип от двама участници. Първи екип от 4 и 5 клас и втори екип от 5 и 6 клас.

След получаването на задачите от отборите започна викторината с публиката.

Третият етап от състезанието бе целият отбор.

Проведената бе викторина на три етапа с по 10 любопитни въпроси. Отговорилите участници от публиката получиха 30 дребни награди – линии, триъгълници и пергели.

След обявяване на резултатите от журито на отборите, водещите и журите бяха връчени награди. Наградите бяха осигурени от Фондация „Георги Чиликов“.

С много емоции и настроение в препълнената зала приключи поредната математическа вечер.

ЗА ФОРМУЛАТА НА ГЕОРГ АЛЕКСАНДЪР ПИК

Емил Карлов

Георг Александър Пик открива знаменитата си формула през 1899 година в Прага, където е професор по математика в тамошния Немски университет. През 1939 година, след като Хитлер влиза в Чехия, Георги Пик (австриец от еврейски произход) е изпратен в концентрационен лагер в град Терезин в северна Чехия, където умира през 1942 година.

Днес формулата на Пик е част от гимназиалната програма по геометрия в Германия. Всеки немски ученик знае за формулата от учебника по математика и учителят го изпитва по нея.

Това са превратностите в живота.

Да започнем с няколко определения.

(1) Всяка точка в равнината Oxy, която има цели координати, наричаме *възел*.

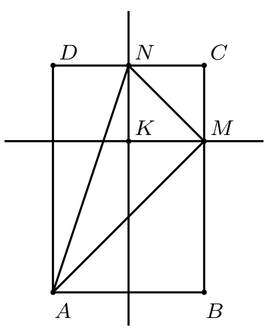
(2) Триъгълник с върхове възли от равнината, който няма вътрешен възел или възел по страните си, е *елементарен триъгълник*.

(3) Елементарен триъгълник с прав ъгъл наричаме *минимален елементарен триъгълник*.

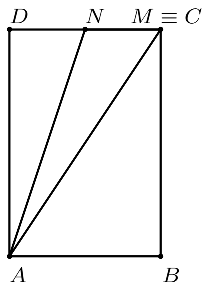
Задача 1. Всеки елементарен триъгълник има прав или тъп ъгъл.

Решение. Построяваме правоъгълник $ABCD$ с най-малко лице, който изцяло съдържа елементарния триъгълник AMN.

Ако върхът M на $\triangle AMN$ е вътрешна точка за страната BC, а върхът N е вътрешна точка за страната CD (черт. 1), тогава точката K е възел и също вътрешна точка за елементарния $\triangle AMN$. Противоречие.



Черт. 1.

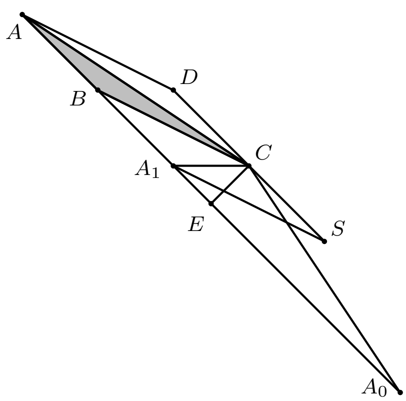


Черт. 2

Ако точката M съвпада с върха C на правоъгълника $ABCD$, тогава N е тъп или прав (черт. 2).

Задача 2. Всеки елементарен триъгълник има лице, равно на $\dfrac{1}{2}$.

Решение. Нека елементарният триъгълник ABC не е минимален и има тъп ъгъл при върха B. Точката A_1, която е симетрична на върха A спрямо върха B на триъгълника, е също точка с цели координати (черт. 3).



Черт. 3

Триъгълниците ABC и A_1BC са равнолицеви, защото CB е медиана в $\triangle AA_1C$. Точката A_0, която е симетрична на точката A спрямо петата E на височината CE към страната AB е точка с цели координати и $CA_0 = CA$. Тъй като $\sphericalangle B$ е тъп ъгъл, то, точката E е външна точка за страната AB и

$$CA_1 < CA. \qquad (*)$$

Остава да докажем, че $\triangle A_1BC$ е също елементарен триъгълник. Построяваме успоредника $ABCD$ (черт. 3). Точката D е с цели координати.

Вътре в успоредника и по страните му няма възел. (Ако допуснем, че има възел K вътре в успоредника или по страните му, то симетричната на точка K спрямо средата M на страната AC ще е вътрешен (или граничен) възел за $\triangle ABC$, а той е елементарен триъгълник.) В успоредника BA_1SC също няма възел, защото този успоредник е образ на успоредника $ABCD$ при транслация с вектор $\overrightarrow{AB}$. Следователно $\triangle A_1BC$ е елементарен триъгълник.

С други думи, неминималния елементарен триъгълник ABC с най-голяма страна AC можем да „заменим“ по посочения по-горе начин с елементарен триъгълник A_1BC със същото лице, но с по-къса най-голяма страна $(*)$. Нека отбележим, че всяка страна на цял триъгълник е корен квадратен от естествено число (защо?), т.е. процесът на „замяна“ на един елементарен триъгълник ABC с друг елементарен триъгълник A_1BC, но с по-къса максимална страна, е краен и непременно ще стигнем до елементарен триъгълник с възможно най-малка максимална страна и това е правоъгълният равнобедрен триъгълник с катет 1 и хипотенуза $\sqrt{2}$.

Този минимален елементарен триъгълник има лице $\dfrac{1}{2}$. Следователно всеки елементарен триъгълник има лице $\dfrac{1}{2}$.

Упражнение 1. Нека в цял изпъкнал четириъгълник (четириъгълник с върхове възли в равнината) няма вътрешен възел или възел по страните. Да се докаже, че този четириъгълник е успоредник.

Решение. Във всеки четириъгълник $ABCD$ има два съседни върха A и B със сума от ъглите $\sphericalangle A + \sphericalangle B \geqq 180^\circ$. Ако допуснем, че това не е вярно следва, че

$$360^\circ = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} + \frac{\sphericalangle C + \sphericalangle D}{2} + \frac{\sphericalangle D + \sphericalangle A}{2} < 4.90^\circ = 360^\circ.$$

Нека точката C е по-близко от точката D до правата AB (ако са на равно разстояние, избираме пак точка C). Построяваме успоредника $ABCE$ и точката E е възел.

Точката E не може да е вътрешна или точка по страните на успоредника. Следователно точката E съвпада с точката D и четириъгълникът $ABCD$ е успоредник.

Упражнение 2. Да се докаже, че в цял изпъкнал петоъгълник непременно има вътрешен възел.

Упражнение 3. Дадени са пет възела. Да се докаже, че поне една среда на отсечка с краища в два от тези пет възела е възел.

Решение. Има само четири възможности за координатите на петте точки:

(ч; ч) – двете координати са четни числа

(н; ч) – първата координата е нечетно число, а втората е четно число

(ч; н) – първата координата е четно число, а втората е нечетно число

(н; н) – двете координати са нечетни числа.

От принципа на Дирихле има две точки A и B от един и същи вид. Например, от вида (н; ч), т.е. точките $A(\text{н}_1;\ \text{ч}_1)$ и $B(\text{н}_2;\ \text{ч}_2)$ са с координати от този вид. Тогава средата $S\left(\dfrac{\text{н}_1+\text{н}_2}{2}; \dfrac{\text{ч}_1+\text{ч}_2}{2}\right)$ на отсечката AB очевидно е възел.

Забележка. Обяснете защо решението на това упражнение не решава упражнение 2.

Упражнение 4. Да се докаже, че удвоеното лице на цял триъгълник е цяло число.

Упътване. Постройте правоъгълник с минимално лице, който да съдържа дадения триъгълник и пресметнете лицето на триъгълника като разлика от лицето на правоъгълника и лицата на правоъгълните триъгълници с върхове върховете на правоъгълника.

Ако върховете на триъгълника са с координати $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ и $C(c_1;c_2)$, то лицето S на триъгълника е равно на

$$S=\left|\frac{(a_1-c_1)\,(b_2-c_2)-(a_2-c_2)(b_1-c_1)}{2}\right| \qquad (**)$$

т.е. $2S$ е цяло положително число.

Упражнение 5. (Р. Хайнацки, 2013 г.) Дадени са пет цели точки. Да се докаже, че има поне три триъгълника с върхове в тези точки с лице цяло число.

Решение. Целият триъгълник ABC с върхове с координати $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ и $C(c_1;c_2)$ „заменяме“ с целия триъгълник A_1BC с върхове с координати $A(a_1\mp 2;a_2\mp 2)$, $B(b_1;b_2)$ и $C(c_1;c_2)$ (ако числото a_1 е положително число, по-голямо от 1, изваждаме 2; ако числото a_1 е отрицателно число, по-малко или равно на (-1), прибавяме 2. Същото и за втората координата a_2). При тази „замяна“ лицето на $\triangle A_1BC$ е цяло число само ако лицето на $\triangle ABC$ е цяло число (вижте формулата $(**)$).

Последователно променяме координатите на точката A до достигане на координатите на точка $A_i(1;0)$, ако A е от вида A(нечетно; четно).

Отново имаме само четири възможности за крайно положение на петте дадени точки и те са $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ и $(0;1)$. Нека точките A и B да попадат след горната „трансформация“ в точката $(1;0)$. Следователно триъгълниците ABC, ABD и ABE са с лице нула, т.е. те са били първоначално с целочислени лица.

Задача 3. За всеки многоъгълник M има диагонал, който е изцяло вътре в многоъгълника.

Решение. За изпъкнал многоъгълник M твърдението е очевидно.

Нека многоъгълникът M да не е изпъкнал т.е. многоъгълникът M има ъгли по-големи от 180°.

Избираме възможно най-големия ъгъл A измежду тези, които са по-големи от 180° и построяваме ъглополовящата AL, като точка L е точка от първата страна на многоъгълника M, „посрещнала“ ъглополовящата. Въртим ъглополовящата AL около точката A, докато стигнем до най-близкия връх на многоъгълника M.

Така построяваме „вътрешен“ диагонал на многоъгълника M.

Задача 4. Всеки n-ъгълник M може да се нареже от непресичащи се диагонали на $n-2$ триъгълника.

Упътване. Използвайте задача 3. и математическа индукция.

Задача 5. Нека в целия многоъгълник M има B на брой вътрешни възли, Γ на брой възли по страните му (включително върховете). Лицето S_M на многоъгълника M е равно на

$$S_M = B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \quad \text{(формула на Пик)}.$$

Решение. Нарязваме многоъгълника M чрез непресичащи се диагонали на $n-2$ триъгълника. Ако в някой от тези триъгълници има вътрешен възел или възел на страната му, свързваме тази точка с върховете на триъгълника. По този начин „нарязваме“ многоъгълника на елементарни триъгълници. Да намерим броят P на елементарните триъгълници.

Всеки триъгълник има ъгли със сума от 180°, следователно $180^\circ.P$ е сумата на ъглите на всички триъгълници. Същата сума е равна на $B.360^\circ$ плюс $\Gamma_1.180^\circ$ (Γ_1 е броят на точките по страните на многоъгълника M без върховете на многоъгълника M, т.е. $\Gamma = \Gamma_1 + n$), плюс сумата от ъглите на многоъгълника M, която е $180^\circ.(n-2)$.

Приравняваме и делим на 180°. Получаваме

$$P = 2.B + \Gamma_1 + n - 2 = 2.B + \Gamma - 2.$$

Знаем от задача 2, че всеки елементарен триъгълник има лице $\frac{1}{2}$ и умножаваме двете страни по $\frac{1}{2}$, т.е.

$$S_M = B + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Упражнение 6. В полето A_1 на шахматна дъска е поставен цар. След 64 хода царят е обходил всички полета, без да повтаря никое поле и се е върнал отново в полето A_1, като пътят му е описал несамопресичаща се начупена линия. Намерете лицето, което може да огради начупената линия, ако страната на едно квадратче от шахматната дъска е равно на 1 см.

Упражнение 7. На цяла отсечка AB с дължина $\sqrt{5}$ няма нито една цяла точка. Намерете на какво разстояние от AB се намира най-близката до AB цяла точка.

Упражнение 8. Даден е остроъгълен неравнобедрен цял триъгълник, за който знаем, че центърът на описаната му окръжност е възел. Да се докаже, че има поне три възела във вътрешността на този триъгълник.

Упражнение 9. Във вътрешността на цял триъгълник е разположен цял четириъгълник. Да се докаже, че във вътрешността на триъгълника има поне още един възел.

Упражнение 10. Във вътрешността на изпъкнал многоъгълник M (възможно и да не е цял) има поне $m^2 + 1$ възли. Да се докаже, че има поне $m + 1$ възли, които са разположени на една права.

Упражнение 11. Докажете, че сред 9 възела могат да се намерят три така, че медицентърът им да е възел.

Упражнение 12. Да се докаже, че лицето на цял осмоъгълник е по-голямо от лицето на 12 елементарни триъгълника.

ЕДНА ЗАДАЧА НА ВЕНЕЛИН ФЛОРОВ НА СТРАНИЦИТЕ НА CRUX

Йордан Табов

Българската олимпиада по математика е една от най-старите национални олимпиади по математика в света, а на провежданите до сега вече над половин век международни олимпиади по математика българските ученици успяха да покажат високото качество на онова, което наричаме „извънкласна работа по математика“ в българското образование.

Сред математиците, оставили светла следа в славната история на нашето „олимпийско движение“, е Венелин Флоров[1]. Илюстрация на нивото на математическото творчество на Венелин Флоров е интересната съдба на една негова задача. Задачата на Флоров е публикувана в немското списание Praxis der Mathematik и явно е предизвикала интерес сред математическата колегия, защото я намираме и на страниците на Crux.

1501. *Proposed by J.T. Groenman, Arnhem, The Netherlands.*

Two circles K and K_1 touch each other externally. The equilateral triangle ABC is inscribed in K, and points A_1, B_1, C_1 lie on K_1 such that AA_1, BB_1, CC_1 are tangent to K_1. Prove that one of the lengths $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ equals the sum of the other two. (The case when the circles are internally tangent was a problem of Florow in *Praxis der Mathematik* 13, Heft 12, page 327.)

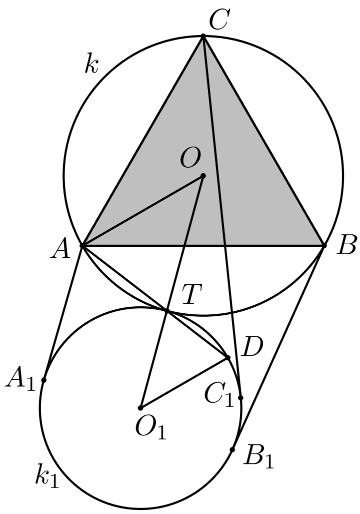
В брой 1 от 1990 г. на канадското списание Crux Mathematicorum холандският математик Якоб Грьонман, като цитира Венелин Флоров, предлага задача 1501.

Задача 1501. Две окръжности k и k_1 се допират външно. Равностранният триъгълник ABC е вписан в k и точките A_1, B_1 и C_1 от k_1 са такива, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се допират до k_1. Да се докаже, че една от отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 е равна на сбора на другите две.

Решението на задачата е публикувано в брой 2 от 1991 г. Негов автор е Марчин Кучма – полски математик, който през 1992 г. заедно с Мартин Гарднер и Мъри Кламкин получава Хилбертовата награда на WFNMC.

[1] Вж. статията „Три имена от ранната история на българските олимпиади по математика: Будуров, Флоров и Владимир Заимов“ в сп. „Математика“, 2/2014.

Решение. Да означим с T допирната точка на окръжностите $k(O;\ r)$ и $k_1(O_1;\ r_1)$. За определеност ще приемем, че точката T лежи на по-малката дъга $\overset{\frown}{AB}$.



По теоремата на Птолемей за вписания четириъгълник $ATBC$ следва, че $AT.BC + BT.CA = CT.AB$ и тъй като триъгълникът ABC е равностранен, получаваме известното равенство

$$AT + BT = CT. \tag{1}$$

Нека правата AT пресича k_1 за втори път в точката D. Равнобедрените триъгълници AOT и TO_1D са подобни с коефициент на подобие $r : r_1$, следователно

$$\frac{AD}{AT} = \frac{r + r_1}{r}.$$

Оттук изразяваме

$$AA_1 = \sqrt{AT.AD} = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, AT.$$

Аналогично имаме $BB_1 = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, BT$ и $CC_1 = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, CT$. От последните три равенства и (1) следва желаното равенство $AA_1 + BB_1 = CC_1$.

Това решение може да се приложи и за първоначалната задача на Венелин Флоров в случая, когато двете окръжности се допират вътрешно. Предлагаме на любознателния читател да се убеди в това самостоятелно.

ДЕВЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 11. И 12. КЛАС

Стефка Буюклиева, Иванка Минчева, Галя Накова

На 13 март 2016 г. се проведе деветият Математически турнир на Великотърновския университет „Св. св. Кирил и Методий" за ученици от 11. и 12. клас, организиран съвместно с Регионалния инспекторат по образованието и секция „Великотърновски университет" към Съюза на математиците в България.

В турнира взеха участие 141 ученици от градовете Велико Търново, Горна Оряховица, Габрово, Лясковец, Трявна, Ловеч, Разград, Русе, Свищов, Червен бряг, Дупница, Бургас, Стара Загора. Бяха наградени 11 участници, които получиха медали. Златен медал спечелиха Здравко Пенчев Хвърлингов, ученик в 12. клас на ПГЕЕ „М. В. Ломоносов", гр. Горна Оряховица и Мартин Добринов Иванов, ученик в 11. клас на ПМГ „Васил Друмев", гр. ВеликоТърново. Наградата на Журито бе присъдена на Мартин Добринов Иванов, ученик в 11. клас на ПМГ, гр. Велико Търново.

Общият максимален брой точки е 120 като резултатът на всички участници се преобразува в оценка по шестобалната система. За учениците от 11. клас тази оценка е валидна за кандидатстване през 2017 година, а за учениците от 12. клас оценката е валидна за кандидатстване през 2016 и 2017 година за специалностите ***Приложна математика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки*** и ***Софтуерно инженерство*** на факултет „Математика и информатика" на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий".

Темата се състоеше от 21 задачи – 20 по формата за кандидатстудентски изпит по математика–тест и една допълнителна задача. Решилите допълнителната задача се състезават за наградата на Журито. Задачите от 1. до 20. са от три типа:

• **дванадесет** тестови задачи от затворен тип с четири възможни отговора, от които само един е верен.

• **пет** тестови задачи със свободен отговор, на които кандидат-студентът записва само отговора.

• **три** задачи, чиито решения с необходимите обосновки се представят в писмен вид.

Допълнителната задача (задача 21) е от тип, който е прието да се дава на математически състезания за ученици от 11. и 12. клас.

Различните начини на решение (при наличие на такива) се оценяват равностойно. При наличие на повече от един начин на решение на дадена задача в писмената работа на участника се зачита само един от тях.

Решаването на темата не предполага използването на помощни изчислителни средства. Не се разрешава използването на учебни пособия. На участниците в турнира се предоставя справочен списък с основните математически формули.

Беше изтеглена следната тема:

1. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$ е равна на:

А) $1-\sqrt{2}$ **Б)** $\sqrt{2}-1$ **В)** $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **Г)** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

2. Равенството $5^{\log_5(2x+1)}.6^{\log_6(2x-1)}=4x^2-x$ е вярно за:

А) $x=0$ **Б)** $x=1$ **В)** $x=2$ **Г)** $x=3$

3. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{4-x}}+\sqrt{x+2}$ е:

А) $x\in(-\infty;2)$ **Б)** $x\in[1;2)$ **В)** $x\in[1;2]$ **Г)** $x\in[-2;4)$

4. Дадено е уравнението $x^2-4x+a=0$ с корени x_1 и x_2, където a е реален параметър. Ако $x_1^2+x_2^2=16$, то стойността на a е равна на:

А) 4 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** -2

5. Решенията на системата уравнения $\left|\begin{array}{l} x^2+3y^2=4 \\ x+y^2=2 \end{array}\right.$ са:

А) $(1;1),(2;0)$ **Б)** $(1;1),(2;0),(1;-1)$

В) $(2;0)$ **Г)** $(1;-1)$

6. Решенията на неравенството $2x^2-3x\leq 0$ са:

А) $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ **Б)** $x\in\left[-\dfrac{3}{2};-1\right)$

В) $x\in[-1;\infty)$ **Г)** $x\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

7. Частното на геометрична прогресия е $q=2$, а сумата на първите ѝ четири члена е 30. Шестият член на прогресията е равен на:

А) 64 **Б)** 128 **В)** 32 **Г)** 12

8. Ако средното аритметично на числата $a_1, a_2, \ldots, a_6, a_7$ е равно на 1, а средното аритметично на числата $a_1, a_2, \ldots, a_6$ е равно на -1, то числото a_7 е равно на:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 8 **Г)** 13

9. Ако $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ и $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е равна на:

А) $-\dfrac{15}{17}$ **Б)** $-\dfrac{240}{289}$ **В)** $\dfrac{240}{289}$ **Г)** $\dfrac{15}{17}$

10. Дължината на окръжността, описана около триъгълник ABC със страна $BC = 4$ и $\sphericalangle BAC = 135^\circ$, е:

А) $4\sqrt{2}\pi$ **Б)** 12π **В)** $8\sqrt{3}\pi$ **Г)** 3π

11. Лицето на ромб $ABCD$ с диагонал $AC = 4\sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ е равно на:

А) $2\sqrt{3}$ **Б)** 8 **В)** $6\sqrt{3}$ **Г)** $8\sqrt{3}$

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $a = 8$ cm и лице на пълна повърхнина $S = 144$ cm^2. Дължината на височината на пирамидата е равна на:

А) 5 cm **Б)** 3 cm **В)** 6 cm **Г)** 4 cm

13. Да се реши уравнението $\sqrt{3x^2 + 7x + 5} = 2x + 1$.

14. Три числа, сборът на които е 2, образуват аритметична прогресия. Сборът от квадратите на тези числа е $\dfrac{14}{9}$. Да се намери най-голямото от трите числа.

15. В равнобедрения триъгълник ABC $(AC = BC)$ центърът на вписаната окръжност O дели височината CD $(D \in AB)$ в отношение $CO : OD = 5 : 2$, а основата AB е с 3 cm по-малка от бедрото. Да се намери периметърът на триъгълника ABC.

16. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 9\,cm$ и $AD = 6\,cm$. През върха A е построена права, перпендикулярна на BD, която пресича страната CD в точка M. Да се намери дължината на отсечката CM.

17. Призма с обем 1680 cm^3 е с основа трапец с основи 21 cm, 7 cm и бедра 13 cm, 15 cm. Да се намери височината на призмата.

18. Да се реши неравенството $\log_x \dfrac{4x + 5}{6 - 5x} < -1$.

19. В окръжност с радиус R е вписан трапецът $ABCD$ $(AB \| CD)$ с $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 45^\circ$. Да се намери лицето на трапеца.

20. Основата на пирамида $ABCM$ е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Всички околни ръбове са равни на l. Околната стена MBC сключва с основата на пирамидата ъгъл β. Да се намери обемът на пирамидата, ако $\sphericalangle MAB = \alpha$.

21. Допълнителна задача. Дадени са функцията

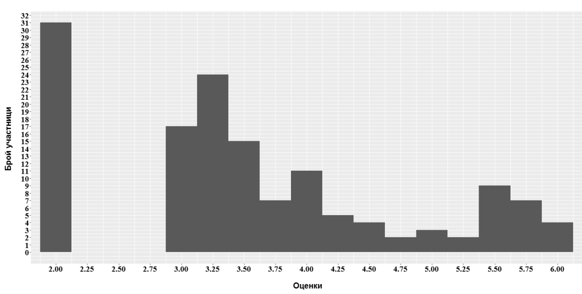
$$f(x) = x^{2016} - 10x^{2015} + 10x^{2014} - \ldots + 10x^2 - 10x - 1,$$

параболата $\pi : y = \dfrac{1}{4}x^2$ и правата $g : x - 2y - 3 = 0$. Въведени са следните означения: A е точката от π, в която допирателната към π е успоредна на g ; B и D са пресечните точки на g съответно с абсцисната ос Ox и с ординатната ос Oy на правоъгълната координатна система Oxy ; C е пресечната точка на правата AB с Oy.

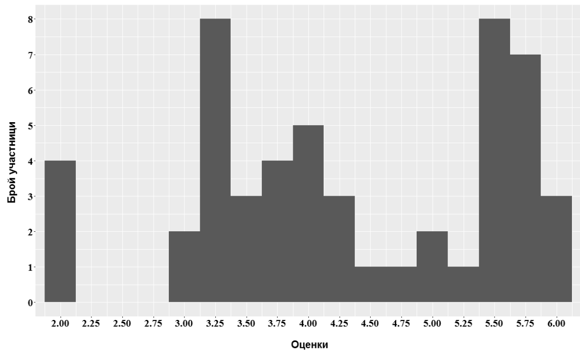
а) Ако P е точката от π с абсциса $\dfrac{-f(9)}{5}$, да се намерят разстоянията от A до P и от A до g.

б) Нека M е точката от g с ордината $\dfrac{f'(0)}{5}$, а N е точка от отсечката CM, такава че $CN : NM = 3 : 2$. Да се докаже, че правите MA, CD и BN се пресичат в една точка.

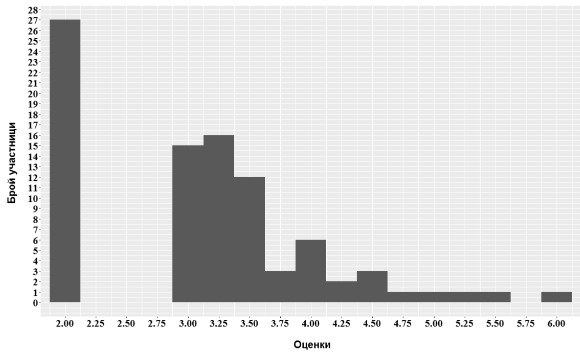
Резултатите на участниците в турнира са представени на Фигури 1, 2 и 3.



Фиг. 1. Резултати на всички участници



Фиг. 2. Резултати на участниците от природо-математически гимназии



Фиг. 3. Резултати на участниците от училища без профилирано обучение по математика

Отговори на задачи от 1. до 12.

1. А; **2.** Б; **3.** Г; **4.** В; **5.** Б; **6.** Г; **7.** А; **8.** Г; **9.** В; **10.** А; **11.** Г; **12.** Б.

Отговори на задачи от 13. до 17.

13. 4; 14. 1; **15.** 42 cm; **16.** 5 cm; **17.** 10 cm.

Отговори на задачи от 18. до 20.

18. $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$; **19.** $S = \dfrac{3R^2}{2}$; **20.** $V = \dfrac{2l^3 \sin^2 \alpha \cos \beta}{3 \sin^2 \beta} \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}$.

Отговори на задача 21.

а) $d(A, P) = \dfrac{5}{4}$; $\quad d(A, g) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

ТЕСТ

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Тонка Михова, Максим Вълкачовски

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Ако $c > 0$ и $a < 0$ изразът $\sqrt{32a^2b^4c^3}$ е равен на:

А) $4ab^2|c|\sqrt{2c}$ **Б)** $4ab^2c\sqrt{2c}$ **В)** $-4ab^2c\sqrt{2c}$ **Г)** $-4b^2|ac|\sqrt{2c}$

2. Стойностите на x, за които е вярно неравенството

$$|-x^2 + 5x - 6| > 2\sqrt{2} - 3,$$

са:

А) $(-\infty; +\infty)$ **Б)** $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$

В) $[3; +\infty)$ **Г)** $[2; 3]$

3. Ако $a = -\dfrac{1}{2}$, то стойността на израза $\log_{2a+3} \dfrac{1}{4} + \log_{|a|} a^2$ е равна на:

А) -2 **Б)** не може да се определи

В) $\dfrac{2}{3}$ **Г)** 0

4. Стойността на израза $\cos \dfrac{\pi}{12} - \sin \dfrac{5\pi}{12}$ е равна на:

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Г)** 0

5. Координатите на върха на параболата $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ са:

А) $(-1; 10)$ **Б)** $(1; -2)$ **В)** $(0; 1)$ **Г)** $(1; 10)$

6. Ако $\log_a 5 > \log_a 6$, то:

А) $a = 1$ **Б)** $a < 1$ **В)** $0 < a < 1$ **Г)** $a > 1$

7. Функцията $f(x)$ е такава, че $f(x + 7) = -3x + 1$. Да се пресметне $f(4)$.

А) $f(4) = -11$ **Б)** $f(4) = 10$ **В)** $f(4) = -32$ **Г)** $f(4) = 0$

8. Корените на уравнението

$$\frac{1}{x-3} = \frac{3x}{9-x^2} + 1$$

са:

А) 2 и -6 **Б)** $1 \pm \sqrt{7}$ **В)** 6 и -2 **Г)** $x \in \varnothing$

9. Най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + 4x - 5$ в интервала $[0; 1]$ е равна на:

А) 10 **Б)** 1 **В)** -5 **Г)** 0

10. Решенията на неравенството

$$\frac{9x^2+6x+1}{x^2-x-6} \geqq 0$$

са:

А) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$ **Б)** $(-2;3)$

В) $(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{1}{3};3\right)$ **Г)** $(-\infty;-2)\cup\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup(3;\infty)$

11. Кое число трябва да се присъедини към статистическия ред 1, 21, 7, 3, 15, 20, 12 така, че медианата му да е равна на 11?

А) 11 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** друго число

12. Четвъртият и шестият член на растяща геометрична прогресия са съответно 24 и 96. Да се намери сумата на първите десет члена на прогресията.

А) -1023 **Б)** 3069 **В)** -1533 **Г)** 1533

13. Ако корените на уравнението $2x^2+17x+c-1=0$, са такива, че $\frac{1}{x_1}=x_2$, то:

А) $c=2$ **Б)** $c=3$ **В)** $c=-17$ **Г)** $c=-34$

14. Правоъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус R. Диагоналите на правоъгълника са с дължини:

А) $R\sqrt{3}, R\sqrt{2}$ **Б)** $2R, 2R$ **В)** $R\sqrt{3}, R\sqrt{3}$ **Г)** $R\sqrt{5}, R\sqrt{5}$

15. В равнобедрен трапец е вписана окръжност, която дели бедрото на отсечки с дължини 8 cm и 2 cm. Радиусът на окръжността е равен на:

А) 4 cm **Б)** 6 cm **В)** 5 cm **Г)** 3 cm

16. В $\triangle ABC$ страните AC и BC са съответно равни на 5 cm и 3 cm, а CL ($L \in AB$) е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Отношението на лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle LBC$ е:

А) 8 : 3 **Б)** 5 : 3 **В)** 15 : 8 **Г)** 5 : 1

17. Ако в равнобедрен триъгълник ABC дължината на основата AB е 12 cm и $\cos\sphericalangle ABC=\frac{3}{5}$, то лицето на триъгълника е:

А) 24 cm^2 **Б)** 12 cm^2 **В)** 10 cm^2 **Г)** 48 cm^2

18. Около равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC=BC$) е описана окръжност с център O. Правата AO пресича бедрото BC в точка D, като $BD=7$ и $CD=9$. Да се намери радиусът на описаната около триъгълника окръжност.

А) 11 **Б)** 9,6 **В)** 8 **Г)** 8,5

19. В окръжност с радиус 2 cm е построена хорда AB така, че сборът от разстоянията от точка B до допирателната в точка A и до точката A е 3 cm. Дължината на хордата AB е равна на:

А) 2 cm **Б)** 2,5 cm **В)** $2\sqrt{2}$ cm **Г)** 1 cm

20. В правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) е вписан квадрат $CDEF$ ($D \in AC$, $E \in AB$, $F \in BC$). Да се намери страната на квадрата, ако $AC = 12$ cm и $BC = 20$ cm.

А) 6 cm **Б)** 8 cm **В)** 10 cm **Г)** 7,5 cm

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. В турнир по футбол са проведени 30 срещи, като всеки два отбора играят по два мача (гост и домакин). Колко са отборите, участващи в турнира?

22. Да се реши уравнението $\log_x 9x^2 . \log_3^2 x = 4$

23. Да се намерят страните на правоъгълен триъгълник, ако разстоянията от центъра на вписаната окръжност до върховете на острите му ъгли са $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$.

24. Да се намери най-малката стойност на израза $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

25. В триъгълника ABC точката O е вътрешна и такава, че

$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BCO = \sphericalangle CAO.$$

Да се намери радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако R_1, R_2 и R_3 са радиусите на описаните около триъгълниците ABO, BCO, CAO окръжности.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Нека x и y са реални числа, такива че $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на израза $A = x - y$.

27. В тенис турнир по двойки участват 6 мъже и 8 жени. По колко начина могат да се съставят 4 смесени двойки?

28. Основите на трапец са с дължини a и b. Да се намери дължината на отсечката, успоредна на основите и разполовяваща лицето му.

ОТГОВОРИ

1. В); **2.** А); **3.** Г); **4.** Г); **5.** Б); **6.** В); **7.** Б); **8.** В); **9.** В); **10.** Г); **11.** В); **12.** Б); **13.** Б); **14.** Б); **15.** А); **16.** А); **17.** Г); **18.** Б); **19.** А); **20.** Г); **21.** 6; **22.** $\dfrac{1}{9}$ и 3; **23.** 3, 4, 5; **24.** $\dfrac{1}{2}$; **25.** $\sqrt[3]{R_1R_2R_3}$;

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Полагаме $x - y = t$. Тогава

$$(y+t)^2 + y^2 - 4(y+t) + 10y + 20 = 0$$

$$2y^2 + 2(t+3)y + t^2 - 4t + 20 = 0$$

и понеже има реални корени, трябва

$$D = -t^2 + 14t - 31 \geq 0 \ \Leftrightarrow t \in [7 - 3\sqrt{2};\ \ 7 + 3\sqrt{2}].$$

Следователно най-малката стойност на $x - y$ е равна на $7 - 3\sqrt{2}$, а най-голямата стойност е равна на $7 + 3\sqrt{2}$.

27. Тъй като всяка комбинация на 6 мъже от четвърти клас може да се съчетае с всяка вариация на 8 жени от четвърти клас, при което се получават различни 4 различни смесени двойки, то търсеният брой е $C_6^4.V_8^4 = 25200$. Или аналогично $C_8^4.V_6^4 = 25200$.

28. Нека $MN = x$ е отсечката, успоредна на основите на трапеца $ABCD$ и разполовяваща лицето му. През точката N построяваме права, успоредна на AD, която пресича продължението на CD в точка P, а AB в точка Q. Нека $NF \perp CP$, $NT \perp QB$. От подобните триъгълници NPC и NQB имаме

$$\frac{NF}{NT} = \frac{x-b}{a-x} \tag{1}$$

От условието, че MN разполовява лицето на трапеца, получаваме

$$\frac{x+b}{2}.NF = \frac{a+x}{2}.NT$$

т.е.

$$\frac{NF}{NT} = \frac{a+x}{x+b} \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме $\dfrac{x-b}{a-x} = \dfrac{a+x}{x+b} \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 + b^2$ и следователно $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

ПЪРВИ МОДУЛ
ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $1,2 - m(2,7 + m)$ при $m = -0,2$ е:

А) $2,5$ **Б)** $0,7$ **В)** 1,7 **Г)** 1,78

2. Ако $16^2 + A.16 + 14^2 = 900$, числото A е:

А) 14 **Б)** -14 **В)** 28 **Г)** 32

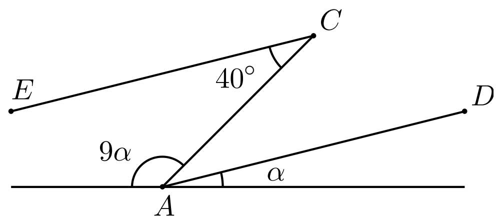
3. Ако $k + 1 = 5$, то $k^2 + 2k + 2$ е равно на:

А) 7 **Б)** 11 **В)** 25 **Г)** 26

4. От произведението на числата m и 0,4 извадили $\dfrac{1}{4}$ и получили 4. Кое е числото m?

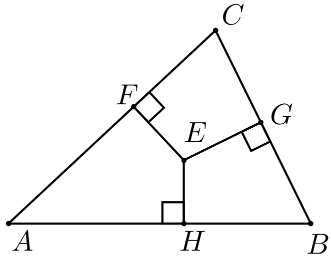
А) $10,625$ **Б)** $9,375$ **В)** $1,7$ **Г)** $1,5$

5. Ако $AD||EC$, да се намери мярката на ъгъл α от чертежа.



А) 10° **Б)** 12°

В) 14° **Г)** 16°



6. На чертежа точката E е вътрешна за $\triangle ABC$, а EF, EG, EH са перпендикулярни на съответните страни на $\triangle ABC$. Кое от твърденията НЕ Е вярно?

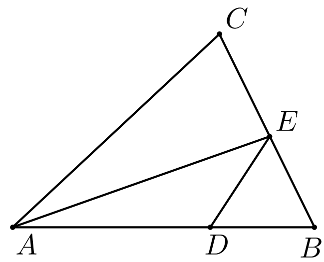
А) Ако $EF = EG$, то CE е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Б) Ако $BG = GC$, то $\sphericalangle ECG = \sphericalangle EBG$.

В) Ако AE е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$ и $EH = EG$, то CE е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Г) Ако AG е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$, то G е среда на BC.

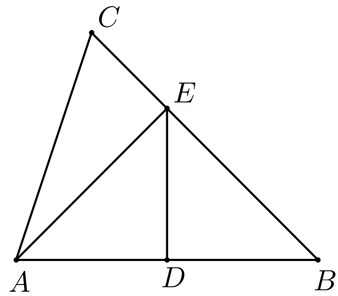
7. На чертежа отсечката AE е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, а ED е ъглополовяща на $\sphericalangle AEB$. Ако $\sphericalangle ACB = 76^\circ$ и $\sphericalangle BDE = 68^\circ$, да се намери $\sphericalangle ABC$.



А) 66° **Б)** 64°

В) 46° **Г)** 44°

8. Симетралата на страната AB в триъгълника ABC пресича страната BC в точката E. Ако $\sphericalangle ACB = 35^\circ$ и $\sphericalangle BAE = 2\sphericalangle EAC$, да се намери $\sphericalangle ABC$.



А) 54° **Б)** 56°

В) 58° **Г)** 60°

9. Асен направил два теста по математика. На първия тест получил n точки, а на втория – 80% от точките на първия. Средноаритметичното на двата резултата е:

А) $\dfrac{n}{2} + 40$ **Б)** $0,9n$ **В)** $\dfrac{n}{2} + 0,4$ **Г)** $1,4n$

10. Изразът $(2a+3)^2 - (3a-2)^2$ е тъждествено равен на:

А) $-5a^2 + 5$ **Б)** $a^2 + 13$

В) $-5a^2 + 12a + 13$ **Г)** $-5a^2 + 24a + 5$

11. Изразът $4a^2 - 9b^2 - 4a + 6b$ е тъждествено равен на:

А) $(2a - 3b)(2a + 3b - 2)$ **Б)** $(2a + 3b)(2a - 3b + 2)$

В) $(2a - 3b)(2a + 3b + 2)$ **Г)** $(2a + 3b)(2a + 3b - 2)$

12. Уравнението $(2x+1)^2 = x(3+4x)$ е еквивалентно на:

А) $x = 1$ **Б)** $3x = 1$ **В)** $x = -1$ **Г)** $2x = 1$

13. Решенията на неравенството $\dfrac{3-y}{4} \leqq \dfrac{y-4}{3}$ са:

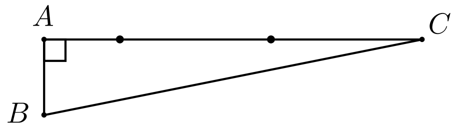
А) $y \geqq \dfrac{25}{7}$ **Б)** $y \leqq 2,6$ **В)** $y \geqq 25$ **Г)** $y \geqq 1$

14. Автомобил изминал определено разстояние със скорост 80 km/h. На връщане изминал същото разстояние за 80% от времето на отиване. С каква скорост се е движил автомобилът на връщане?

А) 96 km/h **Б)** 100 km/h **В)** 120 km/h **Г)** 144 km/h

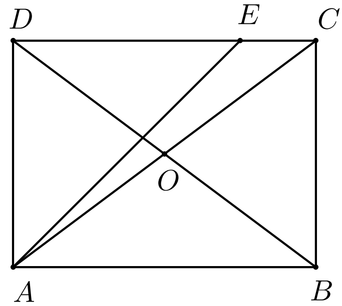
15. На катета AC на правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) с лице 72 cm^2 са избрани точки P и Q така, че $BP > BQ$. Ако $AP = 16$ cm,

$PQ = 12$ cm и $QC = 20$ cm, да се намери AB.



А) 6 cm **Б)** 4 cm **В)** 3 cm **Г)** 1,5 cm

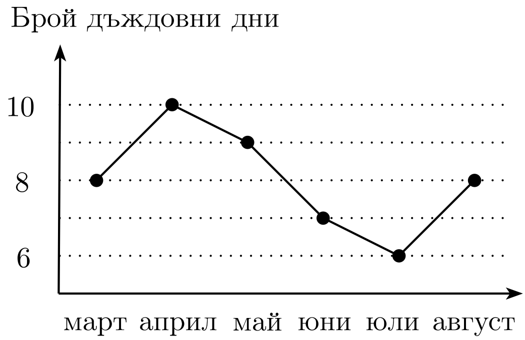
16. Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в точката O, а ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$ пресича CD в точката E. Ако периметърът на $\triangle AOB$ е 9 cm, периметърът на $\triangle ABD$ е 12 cm и $EC = 1$ cm, да се намери лицето на трапеца $ABED$.



А) 9 cm^2 **Б)** 10 cm^2 **В)** 10,5 cm^2 **Г)** 11 cm^2

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. На графиката е показан броят на дъждовните дни в Добрич през пролетните и летните месеци.



А) Колко дъждовни дни е имало в Добрич през месец май?

Б) Средно по колко дъждовни дни на месец е имало през пролетно-лятното полугодие в Добрич?

В) Приблизително колко процента от летните дъждовни дни са през месец юли (с точност до цяло число)?

Г) Какво е отношението на дъждовните и сухите дни в Добрич през месец април?

18. Да се намери коренът на уравнението

$$\frac{2x+3}{2}+(x-3)^2=(2+x)(x-2)-\frac{x-1}{4}.$$

19. Точката D е средата на основата AB на равнобедрения триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 52^\circ$), а точката E лежи на отсечката CD, като $CE = 3$ cm и $AE = 4$ cm. Точката F е такава, че $CEBF$ е успоредник.

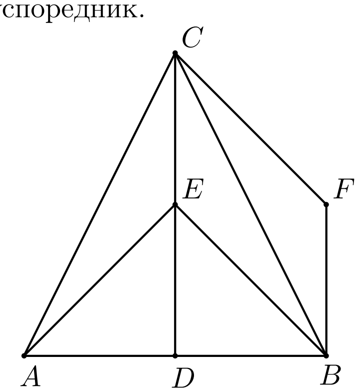
Попълнете пропуснатия текст.

А) Според страните си, $\triangle ABE$ е ...

Б) Дължината на отсечката BF е ... cm.

В) Дължината на отсечката CF е ... cm.

Г) Мярката на $\sphericalangle CBF$ е ...



20. Даден е равностанният триъгълник ABC. На страната BC е избрана точка D и е построен равностранният триъгълник CDE. На отсечката CE е избрана точката F и е построен равностранният триъгълник CFG.

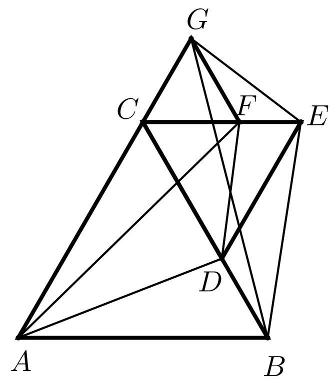
Попълнете пропуснатия текст.

А) Триъгълникът, еднакъв на ADC, е ...

Б) Отсечката, равна на DF, е ...

В) Отсечката, равна на AF, е ...

Г) Триъгълникът, еднакъв на ADF, е ...



ВТОРИ МОДУЛ

21. ПРЕД ЛЕКАРСКИЯ КАБИНЕТ

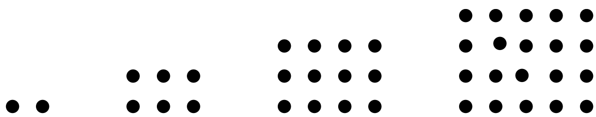
Направено е проучване за времето, което пациентите прекарват в чакане пред кабинета на д-р Хикс, преди да бъдат прегледани. Резултатите са обобщени и представени в таблица.

Време за чакане	Брой пациенти
0 минути	2
15 минути	5
30 минути	7
45 минути	9
60 минути	17

А) Колко пациенти са участвали в това проучване?
Б) Колко пациенти са чакали повече от половин час?
В) Колко процента от пациентите са били прегледани веднага?
Г) Средно по колко минути чакат пациентите, за да бъдат прегледани?

22. ПРАВОЪГЪЛНИ ЧИСЛА

Правоъгълни се наричат числата, които са равни на произведението на две последователни естествени числа. Най-малкото правоъгълно число е $2 = 1.2$, следващото е $6 = 2.3$ и т.н.



$1.2 = 2$ $2.3 = 6$ $3.4 = 12$ $4.5 = 20$

А) Кое е 15-тото правоъгълно число?
Б) Запишете в нормален вид израз за n-тото правоъгълно число (в зависимост от n).
В) Разликата между две последователни правоъгълни числа е 2016. Колко е сборът на тези числа?

Указание. **На задачи 23. и 24. напишете пълните решения с необходимите обосновки.**

23. Решете уравнението $2(x + 3a) = 3(x - 2a)$ с параметър a. Коя е най-голямата цяла стойност на параметъра a, при която коренът на уравнението е решение на неравенството $(x - 2)(2 - x) < (3 - x)(3 + x)$?

24. От върха C на правоъгълника $ABCD$ е спуснат перпендикуляр CH към диагонала BD. Ъглополовящата на $\sphericalangle ACH$ пресича AB в точката M, като $\sphericalangle OMC = 30°$. Да се докаже, че триъгълникът MBC е равнобедрен и да се намери $\sphericalangle AOB$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. В; **2.** А; **3.** Г; **4.** А; **5.** В; **6.** Г; **7.** Б; **8.** В; **9.** Б; **10.** Г; **11.** А; **12.** В; **13.** А; **14.** Б; **15.** А; **16.** В. **17.** (А) 9; (Б) 8; (В) 29%; (Г) 1 : 2; **18.** $x = 3$; **19.** (А) равнобедрен; (Б) 3; (В) 4; (Г) 26; **20.** (А) BCE; (Б) GE; (В) BG; (Г) BEG.**21.** (А) 40; (Б) 26; (В) 5%; (Г) 42,75; **22.** (А) 240; (Б) $n^2 + n$; (В) 2032128.

23. Даденото уравнение има корен $x = 12a$. Решенията на неравенството са $x < \dfrac{13}{4}$. Коренът на уравнението е решение на неравенството, когато $12a < \dfrac{13}{4}$, т.е. $a < \dfrac{13}{48}$. Най-голямото цяло решение е $a = 0$.

24. Нека O е пресечната точка на диагоналите. В правоъгълния триъгълник BCD отсечката CO е медиана, а CH е височина към хипотенузата. Затова $\sphericalangle DCO = \sphericalangle BCH$. Това означава, че ъглополовящата на $\sphericalangle ACH$ разполовява и $\sphericalangle DCB$. Оттук $\sphericalangle MCB = 45^\circ$, т.е. правоъгълният триъгълник MBC е равнобедрен и $MB = BC$. От $BM = BO$ следва, че $\triangle MBO$ е равнобедрен и $\sphericalangle MBO = 180^\circ - 2.75^\circ = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle AOB = 120^\circ$.

ОТГОВОРИ НА ТЕСТА ЗА 7. КЛАС ОТ БРОЙ 2/2016

1. А; **2.** Г; **3.** Г; **4.** В; **5.** Б; **6.** Г; **7.** Г; **8.** А; **9.** А; **10.** В; **11.** Б; **12.** В; **13.** Б; **14.** Г; **15.** В; **16.** В. **17.** $x = 2$; **18.** (А) 24; (Б) 3; (В) 6; (Г) 3; **19.** $\triangle AFD \cong \triangle CEB$, $\triangle FED \cong \triangle EFB$, $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ и още три двойки триъгълници, съставени от някои от изброените; **20.** (А) 60°; (Б) 3; (В) 75°; (Г) разностранен; **21.** (А) $\dfrac{5}{7}$; (Б) 88 200 лв.; **22.** (А) 90°, 108°, 120°; (Б) 720°; 1080°; 1440°; (В) 12.

23. Неравенството е равносилно на $x \leqq -\dfrac{24}{19}$ и $b = -1,5$ е негово решение.

24. От равенството $QN = NB = NM$ следва, че триъгълникът QBM е правоъгълен и $\sphericalangle BQM = 90^\circ$. Тогава триъгълникът BQC е правоъгълен и равнобедрен и $\sphericalangle QCB = \sphericalangle QBC = 45^\circ$. Тъй като $\sphericalangle AMC$ е външен за $\triangle BMC$, то $\sphericalangle ABC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ и $\sphericalangle ABQ = 30^\circ$. Получаваме, че $\triangle MNQ$ е равностранен и от еднаквостта $\triangle AMQ \cong \triangle BNQ$ следва, че $AQ = QB$, както и $\sphericalangle AQM = 30^\circ$. В равнобедрения триъгълник AQC намираме $\sphericalangle ACQ = 75^\circ$. Окончателно, $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 45^\circ$.

СРЕДНИ СТОЙНОСТИ

Едни от най-често решаваните в ежедневието математически задачи са свързани с намирането на средноаритметично. Има толкова много примери: говорим за средна възраст на населението, среден успех на ученика, средна скорост на автомобил и т.н. Навярно всеки знае, че *средноаритметичното на няколко числа се намира, като сборът им се раздели на техния брой.*

Задачите за *намиране на средноаритметично* са едни от най-лесните, които срещаме в тестовете.

1. През първия срок оценките на Ани по математика са 6, 5, 6, 4 и 6. Колко е средният успех на Ани по математика за срока?

А) 5 **Б)** 5,2 **В)** 5,4 **Г)** 5,5

Решение. Ани е получила 5 оценки по математика и средноаритметичното им е равно на $\frac{6+5+6+4+6}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$.

2. В събота Ани решила n задачи, а в неделя решила $3n-2$ задачи. Средно по колко задачи на ден е решавала Ани през почивните дни?

А) $4n-1$ **Б)** $2n-2$ **В)** $n-1$ **Г)** $2n-1$

Решение. Средноаритметичният на двата израза е

$$\frac{n+3n-2}{2} = \frac{4n-2}{2} = \frac{2(2n-1)}{2} = 2n-1$$

По-интересни са тези задачи, при които средната стойност се определя, като се интерпретира *таблица, графика или диаграма.*

3. В таблицата са показани оценките по математика на учениците от един клас. Колко е средният успех на класа?

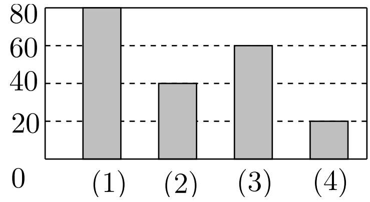
Оценка	3	4	5	6
Брой ученици с тази оценка	3	6	7	4

Решение. Броят на учениците в класа е $3+6+7+4=20$, а сборът на оценките им е $3.3+4.6+5.7+6.4=92$. Средният успех на класа е средноаритметичното на двадесетте оценки и е $92:20=4{,}6$.

4. Диаграмата показва броя продадени книги на един щанд през четирите дни на панаира.

а) Средно по колко книги на ден са продавани по време на панаира?

б) С колко процента продажбите през първия ден са повече от средния брой продадени книги през останалите три дни?



Решение. а) На щанда са продали общо $80+40+60+20=200$ книги за четирите дни, средно по $200:4=50$ книги на ден.

б) Средният брой продадени книги през последните три дни е равен на $\dfrac{40+60+20}{3}=40$. През първия ден са продадени 80 книги, което е със 100% повече от 40.

Друга формулировка на задачите за средноаритметично е свързана с *намиране на неизвестно число.*

5. В три последователни игри Ани спечелила 100, 120 и 88 точки. Колко точки трябва да спечели Ани в четвъртата игра, за да бъде средният й резултат 130 точки?

А) 222 **Б)** 145 **В)** 202 **Г)** 212

Решение. Да означим с x резултата от четвъртата игра. Средноаритметичното на 100, 120, 88 и x е 130, т.е.

$$\frac{100+120+88+x}{4}=130 \iff 308+x=520 \iff x=212.$$

6. Иво трябва да направи пет теста по математика. На първите три теста той получил 63, 84 и 96 точки. Колко трябва да е средният му резултат от оставащите два теста, за да събере средно 85 точки от всички тестове?

Решение. Да означим средния резултат от последните два теста с x. Тогава от двата теста той е събрал общо $2x$ точки. Имаме

$$\frac{63+84+96+x+x}{5}=85 \iff 2x+243=425 \iff x=91.$$

На практика често се проследява *промяната на средната стойност* при определени условия. Промяната на средното може да се намери като средна стойност на промените.

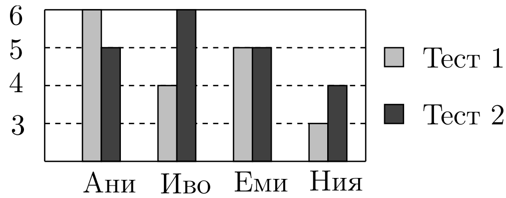
7. Диаграмата представя оценките на четирима ученици при два последователни теста. По сравнение с първия тест, средният успех на учениците при втория тест е:

А) с 0,5 по-висок

Б) с 0,5 по-нисък

В) непроменен

Г) с 1 по-висок



Решение. Да проследим как се променят оценките на всеки от учениците. Оценката на Ани се е намалила с 1, т.е. се е променила с -1. Оценката на Иво се е увеличила с 2, т.е. промяната е $+2$. Оценката на Емо не се е променила, значи пормяната е 0, а при Ния промяната е $+1$. Следователно средният успех на четиримата се е променил с $\dfrac{-1+2+0+1}{4} = 0{,}5$. Това означава, че средният успех на учениците при втория тест е с 0,5 по-висок, отколкото при първия.

8. Във фирма работят 15 сътрудници със средна възраст 36 години. Как ще се промени средната възраст във фирмата, ако се назначи нов сътрудник на 20 години?

Решение. Общата възраст на петнадесетте сътрудници е $15.36 = 540$ години. След идването на новия сътрудник средната възраст на шестнадесетте работещи във фирмата става $\dfrac{15.36+20}{15+1} = \dfrac{560}{16} = 35$, т.е. средната възраст намалява с една година.

Специално внимание заслужава понятието на *средна скорост.* Тя е равна на частното на пътя и времето за неговото изминаване.

9. Планински преход включва три етапа: спускане, равна местност и изкачване. Приблизителното време и скорост за преодоляване на всеки етап са дадени в таблицата. Да се определи средната скорост при прехода.

	Време (ч)	Скорост (км/ч)
Етап 1	1	6
Етап 2	3	5
Етап 3	2	3

Решение. Преходът се изминава за $1+3+2=6$ часа и е дълъг общо $1.6+3.5+2.3=27$ км. Средната скорост е равна на $\dfrac{27}{6} = 4{,}5$ км/ч.

10. Иво вървял от дома си към училище с 3 км/ч, но като стигнал, веднага хукнал с 6 км/ч да си вземе чантата от къщи. С каква средна скорост Иво е изминал пътя от дома си до училище и обратно?

Решение. Да означим с x ч. времето, за което Иво се е върнал от училище до дома си. Тогава разстоянието от дома му до училище е $6x$ км. Оттук намираме, че Иво е отишъл до училище за $6x : 3 = 2x$ ч. Пътят от дома му до училище и обратно е $2.6x = 12x$ км и щом Иво го е изминал за общо $2x + x = 3x$ часа, средната му скорост е $(12x) : (3x) = 4$ км/ч.

Продължението следва!

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2015/16 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, за които числата $12n - 119$ и $75n - 539$ са точни квадрати.

Задача 2. При $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ да се докаже неравенството

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Задача 3. Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните му в точки A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че центърът на описаната около триъгълника ABC окръжност лежи на правата на Ойлер на триъгълника $A_1B_1C_1$. (За всеки триъгълник центърът на описаната окръжност, медицентърът и ортоцентърът лежат на една права, която се нарича права на Ойлер.)

Срокът за представяне на решенията е 30.06.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 1/2016 г.

Задача 1. Да се докаже, че за неотрицателни числа a, b, c и d, за които $a+b+c+d=1$, е изпълнено неравенството

$$abc+bcd+cda+dab \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

Решение. Ако $c+d-\frac{176}{27}cd<0$, то имаме

$$A=ab\left(c+d-\frac{176}{27}cd\right)+cd(a+b)\leqq cd(a+b)\leqq\left(\frac{c+d+(a+b)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Ако $c+d-\frac{176}{27}cd \geqq 0$, то

$$A\leqq\frac{1}{4}\left(a+b-\frac{1}{4}\right)\left(c+d-\frac{176}{27}cd\right)+cd\left(\frac{1}{4}+\left(a+b-\frac{1}{4}\right)\right).$$

Следователно е достатъчно да докажем неравенството за $a_1=\frac{1}{4}$, $b_1=a+b-\frac{1}{4}$, $c_1=c$ и $d_1=d$. Продължавайки по същия начин, свеждаме задачата до случая, когато две от числата a_1, b_1, c_1, d_1 са равни на $\frac{1}{4}$, след това три от тях са равни на $\frac{1}{4}$, и накрая когато всички числа са равни на $\frac{1}{4}$. Директно се проверява, че когато всички числа са равни на $\frac{1}{4}$, се достига равенство.

Задача 2. За естествено число n с $\varphi(n)$ означаваме функцията на Ойлер (броят на естествените числа, по-малки от n и взаимно прости с него). Дадени са $l=\frac{\varphi(n)}{2}+1$ естествени числа $a_1,a_2,\ldots,a_l$, които са по-малки от n и са взаимно прости с n. Да се докаже, че за всяко естествено число $0<r<n$, което е взаимно просто с n, съществуват числа a_i и a_j, за които a_ia_j-r се дели на n.

Решение. Да означим с Φ множеството на естествените числа, които са по-малки от n и са взаимно прости с n. Тогава $|\Phi|=\varphi(n)$, като е известно, че $\varphi(n)$ е четно при $n>2$.

Нека $\mathcal{A}=\{a_k \mid 1\leq k\leq l\}$. За всяко $a_k\in\mathcal{A}$ съществува $b_k\in\Phi$, за което

$$a_kb_k\equiv 1 \pmod{n}.$$

Ако $\mathcal{B} = \{rb_k \pmod n \mid 1 \le k \le l\}$, то

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = l.$$

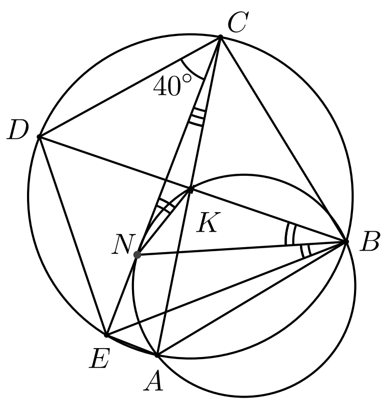
Ако $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, то $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = 2l = \varphi(n) + 2$, противоречие. Следователно съществуват i и j, за които

$$rb_i \equiv a_j \pmod n.$$

Тогава $r \equiv a_i a_j \pmod n$, което трябваше да се докаже.

Задача 3. Петоъгълникът $ABCDE$ е вписан в окръжност. Отсечките AC и BD се пресичат в точка K. Отсечката CE се допира до описаната около триъгълник ABK окръжност в точка N. Да се намери $\sphericalangle CNK$, ако $\sphericalangle ECD = 40^\circ$.

Решение. Да означим $\sphericalangle CNK = \varphi$ и $\sphericalangle ECA = \alpha$.



Тогава $\sphericalangle NBK = \sphericalangle KNC = \varphi$ и $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ECA = \alpha$. Освен това

$$\sphericalangle ABN = \sphericalangle AKN = \varphi + \alpha,$$

откъдето получаваме

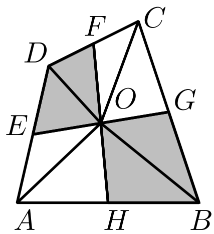
$$\sphericalangle EBN = \sphericalangle ABN - \sphericalangle EBA = \varphi.$$

Следователно $2\varphi = \sphericalangle EBD = \sphericalangle ECD = 40^\circ$, т.е. $\varphi = 20^\circ$.

конкурсни задачи

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 1/2016 г.

Задача 1. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Точките E, F, G и H са средите съответно на AD, DC, CB и BA. Ако O е пресечната точка на EG и FH, да се докаже, че сборът от лицата на $AHOE$ и $CFOG$ е равен на сбора от лицата на $BGOH$ и $DFOE$.



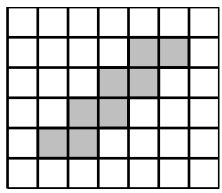
Решение. Да свържем точката O с върховете на четириъгълника $ABCD$. В триъгълника ABO отсечката OH е медиана, следователно

$$S_{AHO} = S_{BHO}.$$

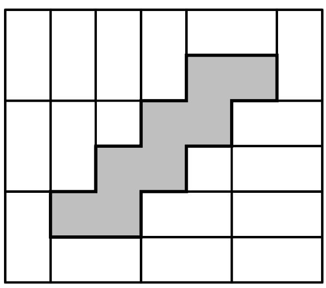
По същия начин $S_{BGO} = S_{CGO}$, $S_{CFO} = S_{DFO}$, $S_{DEO} = S_{AEO}$. Тогава

$$\begin{aligned} S_{AHOE} + S_{CFOG} &= S_{AHO} + S_{AEO} + S_{CGO} + S_{CFO} = \\ &= S_{BHO} + S_{DEO} + S_{BGO} + S_{DFO} = S_{BGOH} + S_{DFOE}. \end{aligned}$$

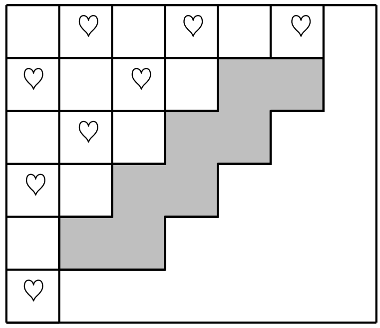
Задача 2. На дъска 7×6 са поставени четири плочки домино, както е показано на чертежа. Най-много още колко плочки домино могат да се поставят на дъската, без да се застъпват? (Доминото е правоъгълник 1×2 и може да се постави хоризонтално или верикално.)



Решение. Броят на непокритите квадратчета на дъската е $6.7 - 4.2 = 34$. Затова да опитаме да поставим $34 : 2 = 17$ домина на непокритата част от дъската. Но както и да ги разместваме, ще успеем да поставим най-много 16 домино, например по следния начин.



Да обясним защо е невъзможно да се постави седемнадесетото домино. Да разделим дъската на две еднакви части – едната вляво или над оцветените полета, а другата – вдясно или под тях. В полетата от първата част да поставим шахматно сърца, както е показано на чертежа.



В тази част полетата със сърца са 8, а полетата без сърца са 9. Всяко домино покрива поле със сърце и поле без сърце. Освен това домино, което покрива някое от деветте полета без сърце, покрива и някое от осемте полета със сърце. Следователно поне едно от полетата без сърце ще остане непокрито. Това означава, че не е възможно да се покрият всичките свободни полета на дъската, т.е. могат да се поставят най-много 16 домино.

Задача 3. В кутия има два вида бонбони, ягодови и портокалови, които са опаковани еднакво. Известно е, че 25% от бонбоните са ягодови. Карлсон взел $a\%$ от бонбоните в кутията и се оказало, че $b\%$ от тях са портокалови (a и b са естествени числа). След това в кутията останали 1,5 пъти повече портокалови, отколкото ягодови бонбони. Колко процента от бонбоните е взел Карлсон? Да се намерят всички възможности.

Решение. Портокаловите бонбони на Карлсон са $a\%.b\%$ от бонбоните в кутията, а ягодовите му бонбони са $a\% - a\%.b\%$ от бонбоните в кутията. Като изразим останалите бонбони от двата вида, получаваме равенството

$$75\% - a\%.b\% = 1,5(25\% - a\% + a\%.b\%) \iff a(b-60) = 1500.$$

Произведението на естествените числа $b - 60 \leqq 40$ и $a < 100$ е равно на $1500 = 2^2.3.5^3$. Това е възможно при $a = 50$ и $b = 30$, при $a = 60$ и $b = 25$, при $a = 75$ и $b = 20$ (проверете!). Карлсон е взел или 50%, или 60%, или 75% от бонбоните в кутията.

математическа ракла

В тази рубрика ще представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

РИЦАРИ И *МОШЕНИЦИ* – МОЖЕМ ЛИ ДА ГИ РАЗПОЗНАЕМ С МАЛКО ЛОГИКА?

Има цяла серия от логически задачи, свързани с това да отгатнем дали даден човек е *рицар* или *мошеник* с подходящо зададен въпрос (с отговор ДА или НЕ) и логически разъждения. Понятията *рицар* – за човек, който винаги казва истината, и *мошеник* – за такъв, който винаги лъже, са въведени от Реймънд Смълян[2], виден американски математик-логик, илюзионист и пианист.

Любима моя задача от въпросната серия е тази за тайнствен остров, обитаван от *рицари* и *мошеници* (в смисъла на Смълян), който бива посетен от американски пътешественик-логик. Гостът среща двама туземци – висок и нисък, и пита високия: *Ти истината ли говориш?* Високият отговаря: *Тарабара*, а ниският допълва: *Той каза ДА, но е голям лъжец.* Какво е успял да заключи логикът?

Отговорът, публикуван в известно американско списание по развлекателна математика, гласял: *„Тарабара“ означава ДА. Действително, независимо какъв е високият, мошеник или рицар, той би трябвало да отговори на въпроса на логика с ДА. Тогава първата част от допълнението на ниския* (Той каза ДА) *е истина, следователно и втората* (но е голям лъжец) *е вярно твърдение. Следователно ниският е рицар, а високият - мошеник.*

Един читател на въпросното списание толкова харесал задачата, че я казал на жена си с цел да ѝ докаже колко трудна е логиката за жените… Наистина, след кратък размисъл тя дала точно противоположния отговор. Когато съпругът ѝ се изсмял и цитирал отговора от списанието, тя заявила: *Не е вярно!* Тарабара *не може да значи ДА, защото* високият не е

[2]Предлагаме ви да се поразходите се с него в света на логиката и музиката: www.youtube.com/watch?v=P8VBeGl9Law. Rambles, Reflections, Music and Readings е документален филм, в който Смълян споделя как е спечелил бъдещата си жена с логическа задача, свири Бах, Скарлати, Бетовен, разказва анекдоти за велики музиканти и чете свои миниатюри.

разбирал английски. Следователно той е казал нещо от сорта на: *Не разбирам!* или *Добре дошли в Бонго-Бонго!* Тогава разсъжденията се обръщат и правата съм аз!!!

Възмутеният съпруг привел нейните доводи в писмо до редактора и получил следния отговор: *Вашата съпруга е напълно права. Все пак, задачата би имала предложения от нас отговор, ако направим уточнението, че логикът знаел, че* тарабара е *или* да *или* не, *но не знаел кое от двете.*

Подобни задачи можете да намерите в забележителните книги на Смълян *Как се казва тази книга?* (*What is the Name of This Book?*) и *Загадките на Шехеразада* (*The Riddle of Scheherazade*).

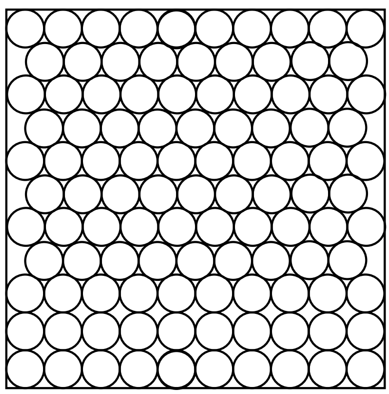
Една верси на тези задачи бе популяризирана във филма *Лабиринт* (1986 г) (`http://www.imdb.com/title/tt0091369/`). В него двама пазачи (рицар и мошеник) охраняват две врати (едната води до замък, а другата – до смъртна опасност). Задачата на героинята Сара е да зададе само един въпрос на някой от пазачите и да разбере коя врата води към замъка. Тя успава да стори това с въпроса: *Дали другият пазач ще каже, че твоята врата води до замъка?*

А сега ето и задачата за вас, драги читатели.

Преброяване на истинските мошеници

Двадесет души чакат на опашка. Всеки от тях е или *рицар* или *мошеник*, т.е или винаги казва истината или винаги лъже. Запитани каква информация могат да дадат за „искреността“ на опашката, всички (освен първия, който останал безмълвен) казали: *Всички, които са пред мен, са мошеници.* Колко всъщност са мошениците в тази опашка?

Павиране с кръгли плочки



В предишния брой на списанието стана дума, че ако имате квадрат със страна 10, лесно може да разположите в него 100 кръгли плочки с диаметър единица. Ако използвате не квадратна, а шестоъгълна мрежа, може да подобрите този брой на 105. Но както се вижда от фигурата, това не е рекордът – ако комбинирате двата метода, може да разположите цели 106 плочки.

Този тип задачи са свързани с проблемите за оптимално разкрояване от областта *Операционни изследвания* и са много приложими в производството – при разкрояване на ламарина, плат и т.н.

МАТЕМАТИЧЕСКА РУЛЕТКА

Ивайло Кортезов

Най-утвърдената игра на математическите лагери, която се провежда още от първите им издания, е Математическата рулетка. Въпреки името, в нея нищо не се върти (освен, може би, кръжащите лястовички, за които ще стане дума след малко); всъщност тя се нарича така заради наличието на залози. Математическата рулетка е отборно състезание, в което всеки отбор има определен начален капитал (100 точки) и лист за нанасяне на отговорите и залозите. На общото игрално табло се вижда текущият капитал на всеки от отборите. На всеки ход се прожектира задача, чийто отговор е цяло неотрицателно число[1]. Всеки отбор трябва да реши задачата и да нанесе на листа си своя отговор и залог; залогът трябва да е естествено число, не по-голямо от половината на текущия капитал на отбора (но ако капиталът е само 1 точка, тя може да бъде заложена). Забележете, че отборът е длъжен да заложи поне една точка дори и да не е успял да реши задачата. Разбира се, в повечето случаи отборите предполагат, че са се справили със задачата, поради което залагат максималния допустим залог, но не винаги предположенията се покриват с реалността, заради което е и ограничението в залозите. Когато листът е попълнен, капитанът вдига ръка и долита лястовичка, която отнася листа при водещия. Когато поне два отбора са предали листовете си, започва да се отчита времето[2] до края на залозите, което типично е 1 минута от този момент. При изтичане на времето на общото игрално табло се нанасят отговорите и залозите на отборите, при което напрежението в залата расте. При разкриване на верния отговор, автоматично капиталът на отборите, дали този отговор, нараства със стойността на залога им, а сгрешилите отбори губят своите залози. Понякога се прожектират няколко задачи, като трябва да се пресметне сборът от отговорите им; това налага отборът да разпредели усилията си за бързо намиране на верния резултат. Също така, на лагерите с международно участие условията се прожектират на два или три езика, така че да има подходящ за всеки от участниците.

[1] Задачи с друг тип отговор лесно се адаптират към това условие.

[2] В опеделени ситуации водещият има право да включи хронометъра и по-рано.

А сега да видим с какъв капитал ще се сдобиете на следната рулетка (Лагер на турнира „Черноризец Храбър“, Слънчев бряг 2014; дадени са само условията на български език). Отговорите са в края. Съществена част от задачите са по материала от лекциите от същия лагер.

Задача 1. Ако $a+b+c+d+e = 2014$ и $a > b > c > d > e$ са естествени числа, колко най-много може да е a?

Задача 2. Ако $a+b+c+d+e = 2014$ и $a > b > c > d > e$ са естествени числа, колко най-малко може да е a?

Задача 3. Намерете $A + B + C$.

- Яна трябвало да раздели две числа A и B, а вместо това ги извадила и така получила 259 вместо верния отговор 8.
- Имам карти с цели числа. Числото C е равно на най-малкия брой карти, които трябва да взема без да гледам, за да е сигурно, че сред тях има 4 карти с четен сбор.

Задача 4. Намерете $A + B$.

- 81 квадратчета със страна 2 см са долепени едно до друго така, че да се получи голям квадрат. След това четирите квадратчета в средите на страните на големия квадрат са махнати. Обиколката на получената фигура е A см.
- B е най-малкото естествено число, което НЕ е делител на 360360.

Задача 5. Намерете $A + B$.

- Една ламя има три глави. Ако изяде един юнак, главите ѝ се увеличават двойно. Ако пийне жива вода, главите ѝ се увеличават тройно. Ако обаче има над пет глави и в такъв момент кихне, губи пет от главите си. Най-голямото двуцифрено число, което не може никога да бъде брой на главите на тази ламя, е A.
- B е най-малкото естествено число, което НЕ е делител на 720720.

Задача 6. Намерете $A + B$.

- Имам карти с написани на тях цели числа. Трябва да изтегля най-малко A карти, без да гледам, за да съм сигурен, че сборът на числата на някои три от тях се дели на три.
- Ако седем души се ръкуват всеки с всеки, ще има B ръкувания.

Задача 7. Намерете $A + B$.

- В магазин се продават само блузи по 9 лв. и панталони по 10 лв. A е най-голямото цяло число лева, което НЕ МОЖЕ да бъде цена на направена покупка в този магазин.
- Десет различни прави линии могат да имат най-много B пресечни точки.

Задача 8. Намерете $A + B + C$.

- A и B са най-голямото и най-малкото трицифрени естествени числа, всички цифри на които са различни.
- Ако 12 отбора играят всеки с всеки по два мача, ще има общо C мача.

Задача 9. Намерете $A + B$.

- Пакет вафли струва 3 лв. и 12 ст. в лавката, а в магазина се продава по 2 лв. и 87 ст. Ако купя пет пакета вафли от магазина вместо от лавката, ще спестя общо A стотинки.
- Има B възможни подредби на буквите З, А, М, Ъ, К.

Задача 10. Намерете $A + B$.

- Дани посадила 25 рози в редица, на разстояние 3 м една от друга. Редицата е дълга A метра.
- Има B възможни подредби на буквите S, U, M, M, E, R.

Задача 11. Намерете $A + B$.

- На паркинг са спрели коли и мотоциклети, общо A на брой. Общият брой на колелата им е 80, а колите са с 11 повече от мотоциклетите.
- Има B възможни подредби на буквите S, E, A, S, I, D, E.

Задача 12. Намерете $A + B$.

- Сборът на 53 поредни четни числа е 2014. Най-голямото от тях е .
- Редица от B коли е дълга 91 метра. Колите са дълги по 3 метра и са спрели на разстояние по 1 метър една зад друга.

Задача 13. Намерете $A + B$.

- В редицата $1, 2, 4, 10, 42, \ldots$ всяко ново число е с 2 по-голямо от произведението на двете предишни (например $42 = 4.10 + 2$). Последната цифра на 99-тото число в редицата е A.
- Цилиндричен аквариум с лице на основата 72 кв.см е частично пълен с вода. В него потопили изцяло правоъгълен паралелепипед с обем 252 куб.см. С колко **мм** се е повишило нивото на водата?

Отговори

1) 2004;	**2)** 405;	**3)** 338;	**4)** 104;	**5)** 112;
6) 26;	**7)** 116;	**8)** 1221;	**9)** 245;	**10)** 432;
11) 1283;	**12)** 113;	**13)** 43.		

за по-малките задачи

4. клас

31. Кое число, увеличено 16 пъти, е равно на 2016 – 16.16?

32. Една от страните на правоъгълник е 12 см и е 10 пъти по-малка от обиколката му. Да се намери лицето на правоъгълника.

33. Ида има червени и жълти лалета, общо 270. Тя ги натопила в няколко червени и жълти вази, като във всяка червена ваза поставила по 5 жълти и 4 червени лалета, а във всяка жълта ваза – по 4 жълти и 5 червени лалета.

а) Ако в червените вази са натопени общо 108 лалета, колко са всички жълти лалета?

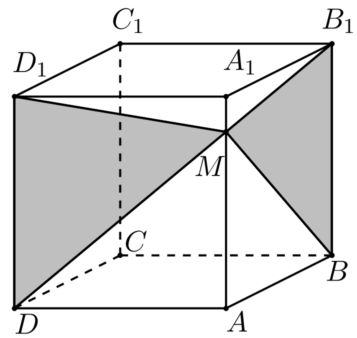
б) Ако червените лалета са общо 137, колко са жълтите вази?

34. Таня нахранила няколко котки и два пъти повече кучета с общо 90 кренвирша. Всяко куче получило по два кренвирша, а всяка котка – по един кренвирш. Колко животни е нахранила Таня?

5. клас

35. Колко е разликата на най-голямата и най-малката от дробите

$$\frac{7}{8};\quad 1,02;\quad \frac{7}{6};\quad \frac{8}{9};\quad 1,1;\quad \frac{7}{5}\ ?$$



36. Правоъгълният паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има обем 960 куб.см и ръб $AA_1 = 10$ см. На ръба AA_1 е избрана точка M. Ако лицето на триъгълника MBB_1 е 40 кв.см, да се намери лицето на триъгълника MDD_1.

37. Най-малкото общо кратно на две двуцифрени числа е 2016, а най-големият им общ делител е 3. Колко е разликата на тези числа?

38. Да се намери неизвестното число в равенството

$$\left(\frac{3}{2} + 3,2\right).x + 2,3 = 60 - 10 \cdot \frac{3}{5}.$$

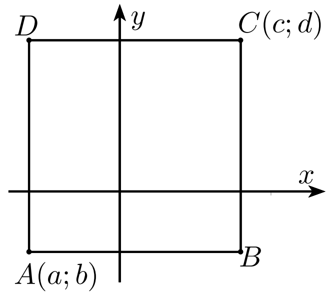
6. клас

39. Колко пъти противоположното на най-голямото от числата $2,5$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{5}{2}$, $5,2$ е по-голямо от реципрочното на най-малкото от тях?

40. Да се намери стойността на израза

$$\frac{2^{13}-2^{10}}{2^{11}+2^{10}}\cdot(2^8+2^5).$$

41. В правоъгълна координатна система е построен квадратът $ABCD$ със страни, успоредни на координатните оси. Върховете $A(a;b)$ и $C(c;d)$ имат целочислени координати и са съответно в трети и в първи квадрант. Да се намери страната на квадрата, ако $a.c=-12$ и $b.d=-10$. (Мерната единица е 1 см.)

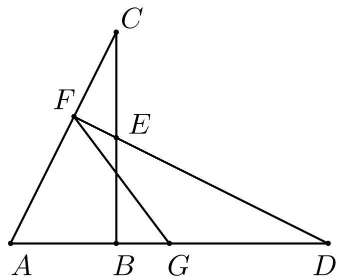


42. Преди две години възрастите на Иво, Любо и Тони бяха в отношение 1 : 2 : 3. Днес отношението на възрастите на Иво и Тони е 2 : 5. На колко години е Любо в момента?

7. клас

43. С колко процента по-големият корен на уравнението $|x-25|=5$ е по-голям от по-малкия му корен?

44. На чертежа триъгълниците ABC и BDE са еднакви ($AB=BE=1$ и $BC=BD=2$), а точките A, B и D лежат на една права. Колко е разстоянието от средата G на отсечката AD до пресечната точка F на правите AC и DE?



45. Да се намерят числата a, b и c, за които е изпълнено равенството

$$a^2+5b^2+9c^2+4ab-20b-30c+125=0.$$

за по-малките решения

на задачите от бр. 2/2016

16. Да се намерят x, y и z, ако $(x : 17 - 95).130 + 666 = 1316$,

$$y = 1247.54 + 54.753 \quad \text{и} \quad z = (13.120 - 36) : 12 - 6.$$

Решение. Намираме $x = ((1316 - 666) : 130 + 95).17 = 1700$,

$$y = (1247 + 753).54 = 2000.54 = 108000,$$

$$z = 13.(120 : 12) - 36 : 12 - 6 = 130 - 3 - 6 = 121.$$

17. Катя купила в книжарницата 9 молива и 12 тетрадки и заплатила 15 лв. и 66 ст. Цената на една тетрадка е 84 ст. Да се намери цената на бои за рисуване, ако те са 5 пъти по-скъпи от цената на един молив.

Решение. Цената на един молив е $(1566 - 12.84) : 9 = 62$ ст., а на боите – $5.62 = 310$ ст., т.е. 3 лв. и 10 ст.

18. Ваня, Галя и Нина са ученички от 4а, 4б и 4в клас, като никои две не са в един и същ клас. От кой клас е всяка от тях, ако Ваня и ученичката от 4в не живеят на една и съща улица, а ученичката от 4б е роднина на Ваня, но дружи с Галя.

Решение. Ваня не е в 4в и не е в 4б, значи е в 4а клас. Галя не е в 4б, значи е в 4в клас и остава Нина да е в 4а клас.

19. При строеж на ограда около правоъгълен участък били забити 128 стълба на разстояние 36 дм един от друг. Решили да заменят стълбовете с нови, които поставили на разстояние 32 дм един от друг. Колко стълба повече са използвани при замяната?

Решение. Обиколката на правоъгълния участък е 128.36 дм, затова след замяната са поставени $(128.36) : 32 = 144$ стълба, т.е. със $144 - 128 = 16$ повече.

20. В плувен басейн с размери 50 м и 20 м има 100 тона вода. Може ли в този басейн да се проведе състезание по плуване?

Решение. Височината на водата в басейна е $100000 : (500.200) = 1$ дм, следователно не може да се плува в този басейн.

21. Равнобедрен трапец има обиколка в милиметри, равна на НОК(48, 80). Намерете бедрото на трапеца, ако той има лице 0,21 кв.дм и височината му, измерена в сантиметри, е равна на НОД(102, 285).

Решение. Намираме НОК$(48, 80) = 240$ и НОД$(102, 285) = 3$. Лицето на трапеца е 21 кв.см, а височината му е 3 см, следователно сборът на основите му е $2.21 : 3 = 14$ см. Тъй като обиколката е 240 мм, т.е. 24 см, то бедрото е равно на $(24 - 14) : 2 = 5$ см.

22. Да се намерят четири естествени числа, сумата и произведението на които е 8.

Решение. За числата 1, 1, 2 и 4 е изпълнено $1.1.2.4 = 1+1+2+4 = 8$.

23. В плен на индианци попаднали трима мъдреци. Индианският вожд казал, че им дава възможност да спасят живота си, ако проявят известна съобразителност.

Пленниците били вързани един зад друг на три стълба на „мъченията“ така, че третият можел да вижда втория и първия, вторият – първия, а първият не виждал своите приятели. Вождът им показал 5 пера – 3 червени и 2 бели. После завързал очите на тримата и на челото на всеки поставили по едно червено перо, а белите пера скрили. След като развързали очите им, вождът обявил, че ще бъдат пощадени, ако един от тях отгатне цвета на перото на челото си.

Известно време и тримата мълчали, после един от тях заявил, че на челото му има червено перо. Кой е той и как е разсъждавал?

Решение. Първият разсъждава: „Ако третият виждаше две бели пера, щеше да се обади, че неговото перо е червено. Щом не се обажда, значи не вижда две бели пера. Вторият също е съобразил това. Значи ако вторият вижда на главата ми бяло перо, ще знае, че неговото е червено и ще се обади. Но той не се обажда, значи перото на главата ми е червено.“ Така първият разбира, че неговото перо е червено.

24. Да се опрости изразът $A = \dfrac{(-xy)^{-3}\,.\,(-5xy)^2}{(-2x)^2\,.5y^{-1}}$ и да се намери числената му стойност за

$$x = -3.\,|3 - 8 : (-2)| + |-11| \quad \text{и} \quad y = -2.\,(2 - (x - 2)) + 3.\,(2 - 3.\,(x - 1))\,.$$

Решение. Изразът $A = -\dfrac{5}{4x^3}$ зависи само от x и при $x = -10$ има стойност 0,00125. (Да отбележим, че $y = 77$.)

25. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(0; -4)$, $B(3; -4)$, $C(3; 0)$, $D(2; 2)$ и $N(-1; 4)$. Точката M е симетрична на D относно Oy. Да се намери лицето на триъгълника DMN и на $ABCD$, ако единичната отсечка е 1 .

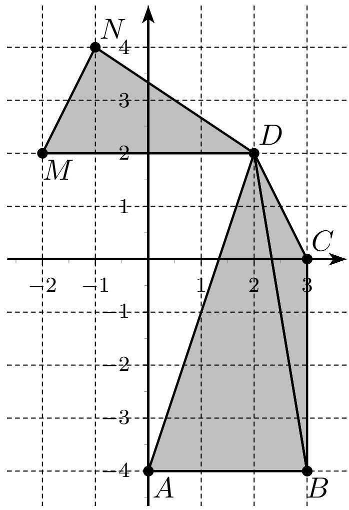
Решение. Симетричната точка на $D(2;2)$ относно Oy е $M(-2;2)$. Намираме

$$S_{DMN} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ см}^2.$$

Лицето на $ABCD$ представяме като сбор

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 11 \text{ см}^2.$$



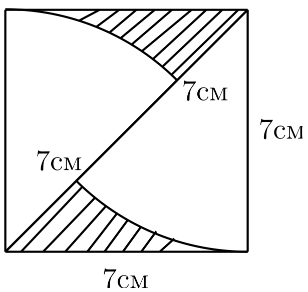
26. Правоъгълен триъгълник с катети 12 см и 16 см и хипотенуза 20 см е завъртян на 360 градуса около хипотенузата си. Да се намери повърхнината и обемът на полученото тяло.

Решение. Като изразим по два начина лицето на правоъгълния триъгълник

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16,$$

намираме $h = 9,6$ см. При завъртането на триъгълника около хипотенузата се получава тяло, съставено от два конуса с обща основа. Радиусът на основата е равен на височината $h = 9,6$ см. Повърхнината на тялото е $S_1 = \pi.9,6.12 + \pi.9,6.16 = 268,8\pi$ см^2, а обемът му е

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9,6^2\cdot h_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9,6^2\cdot h_2 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9,6^2\cdot(h_1+h_2) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9,6^2\cdot 20 = 614,4\pi.$$



27. Да се намери лицето на защрихованата част от дадения квадрат, ако страната му е 7 см.

Решение. Защрихованата част се получава, като от квадрата се изреже четвърт кръг с радиус 7 см. Лицето на защрихованата част е равно на $7^2 - \frac{1}{4}\pi.7^2 \approx 49 - \frac{1}{4}\cdot\frac{22}{7}\cdot 49 = 10,5$ см^2.

28. Ако $A = (x+3)^2 - (-x-2)^2 - 6$ и $B = (2-x)^2 - 3(1-x)(x+1)$, да се реши уравнението $A^2 = A - B$.

Решение. Намираме $A = 2x - 1$ и $B = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$. Тогава

$$A^2 = A - B \iff (2x-1)^2 = (2x-1) - (2x-1)^2 \iff (2x-1)(4x-3) = 0,$$

откъдето $2x - 1 = 0$ или $4x - 3 = 0$. Решенията са $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = \dfrac{3}{4}$.

29. Даден е остроъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 60^\circ$). Точката O е среда на AB, а AQ и BP са височини. Да се докаже, че:

а) триъгълник POQ е равностранен;

б) $P_{ABC} = 2.P_{PQC}$.

Решение. Да означим $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. От сбора на ъглите в триъгълника ABC получаваме $\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

В правоъгълния триъгълник ABP отсечката PO е медиана към хипотенузата, следователно $PO = AO = BO$. Оттук триъгълникът AOP е равнобедрен и $\sphericalangle APO = \sphericalangle OAP = \alpha$, а тогава $\sphericalangle AOP = 180^\circ - 2\alpha$.

По същия начин намираме, че $QO = AO = BO$ и $\sphericalangle BOQ = 180^\circ - 2\beta$. Следователно $PO = QO$. Намираме

$$\begin{aligned}\sphericalangle POQ &= 180^\circ - (\sphericalangle AOP + \sphericalangle BOQ) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) = \\ &= 2(\alpha + \beta) - 180^\circ = 2.120^\circ - 180^\circ = 60^\circ.\end{aligned}$$

Това означава, че триъгълникът POQ е равнобедрен с ъгъл 60°, следователно е равностранен.

б) От а) имаме $PQ = PO = \dfrac{1}{2}AB$. Триъгълникът AQC е правоъгълен и $\sphericalangle CAQ = 30^\circ$, следователно $CQ = \dfrac{1}{2}AC$. По същия начин, триъгълникът BPC е правоъгълен и $\sphericalangle CBP = 30^\circ$, следователно $CP = \dfrac{1}{2}BC$. Тогава

$$P_{PQC} = PQ + CQ + CP = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}P_{ABC},$$

което трябваше да докажем.

30. Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг за това време свършва 75% от нея. В началото работил само вторият, след което се включил и първият и за 6 дни работа заедно довършили работата. Колко дни е работил вторият?

Решение. За един ден първият работник свършва $\dfrac{1}{15}$ от работата, а вторият – $75\%.\dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{20}$ от работата. За 6 дни двамата работници заедно свършват

$$6\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right) = \frac{7}{10}$$

от работата. Следователно вторият работник е изработил $1 - 0,7 = 0,3$ от работата сам. Той е работил сам $0,3 : \dfrac{1}{20} = 6$ дни и още 6 дни с първия работник, общо 12 дни.

ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

Сигурно сте чували парадокса на Ръсел за бръснаря, който можел да бръсне онези и само онези, които не могат да се бръснат сами. Та проблемът, пред който се изправил този бръснар, бил дали може да се обръсне. Ако може, значи не може, защото бръсне само онези, които не могат сами. И обратно, ако не може, значи може, както току що се видя… Именно на този парадокс стъпва Ернст Цермело (1871–1956) в съперничеството си с ръководителя на факултета по математика Феликс Клайн (1849–1925) в Гьотингенския университет. По това време Цермело бил доцент по математическа логика (без да заема щатна длъжност). Той дал на студентите си следната задача:

> *Математиците в Гьотингенския университет** *се делят на два класа:*
> (1) *математици, които не харесват тематиката, по която работят, но тя харесва на Клайн;*
> (2) *математици, които харесват тематиката си, но тя не харесва на Клайн.*
> *Към кой клас принадлежи самият Феликс Клайн?*

Към който и клас да причислим Клайн, ще стигнем до противоречие – ще заключим, че той едновременно не харесва и харесва тематиката, по която работи. Нищо чудно, че никой от студентите не можал да реши задачата.

Големият физик Вофганг Паули разказва тази история в мемоарите си и завършва: *Тогава Цермело се изправил пред студентите си и казал: „Но, господа, отговорът е толкова прост – Феликс Клайн не е математик!“* И добавил под линия: *Цермело не получил постоянна длъжност в Гьотингенския университет.*

Накрая да добавим, че единственото заключение, което Цермело е имал право да направи, е: *Клайн не е математик от Гьотингенския университет!* Явно обаче за него тези две твърдения са били еквивалентни…

---

*Едно от най-големите висши училища в Европа през 18 в.

Хумор в къси панталонки

Учителката: *Колко е* 9×6*?*
Марийка: 54.
Учителката: *Браво! А кой ще каже колко е* 6×9*?*
Иванчо: 45.

***

Учителката: Да предположим, че броят на конете е x.
Иванчо: Г-жо, ами ако броят на конете не е x?

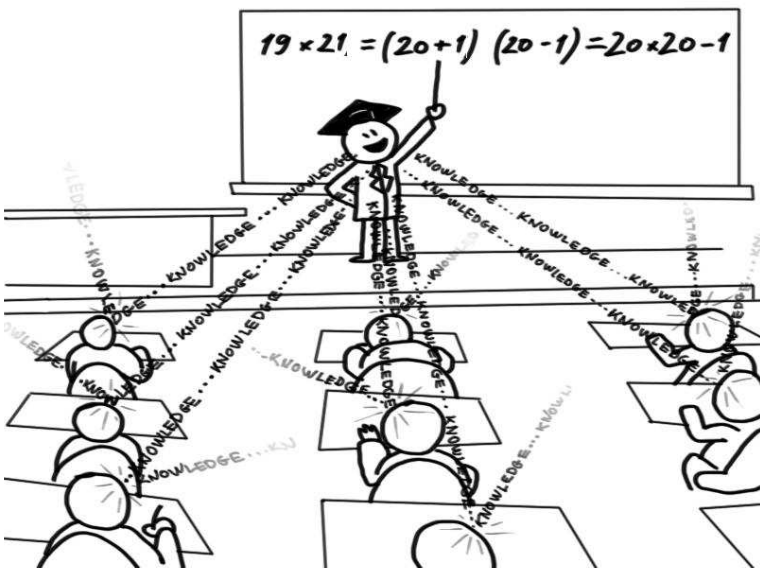
***

Майка (към учителката): Моят син умножава 6 цифрени числа за секунди, а Вие му пишете двойки...

Учителката: Така е, много бързо смята, само че не знае кога да умножи, а кога да събере...

***

Професор по математика дава на студентите си тест от 50 въпроса, чиито отговори са ДА или НЕ. Скоро той забелязва, че един от студентите, седнал на последния ред, подхвърля монета и попълва теста. Това продължава дори и след като останалите студенти вече са предали работите си и са напуснали стаята. Тогава професорът идва при студента и му казва: *Знам, че не сте готов и налучквате отговорите с помощта на ези-тура. Това, което не разбирам, е защо работите толкова дълго.* Студентът се възмутил: *Моля, не ми пречете. Проверявам отговорите!*



ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 2/2016 г.

ТЕМА 1

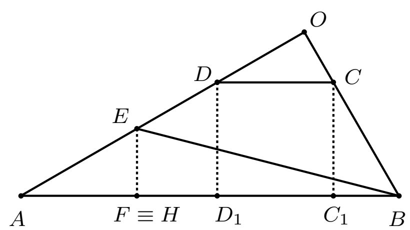
1. Неравенството има смисъл за $x \in (-\infty, 4] \cap (5, \infty)$ и тогава е еквивалентно на $(x-3)(x-7) \leq 0$. Решенията на последното неравенство са $x \in [3, 7]$. Окончателно $x \in [3, 4] \cup (5, 7]$.

2. Имаме $c = 2R = 39$ и $a + b = 51$ $\left(r = \dfrac{a+b-c}{2}\right)$. Оттук и от питагоровата теорема получаваме $\left|\begin{array}{l} a \ + b \ = 51 \\ a^2 + b^2 = 1521 \end{array}\right.$, откъдето $ab = 540$ и $a = 36$ и $b = 15$.

3. Тъй като $\operatorname{tg} \alpha < 0$, то $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, и $\cos\alpha < 0$. От формулата $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, получаваме $\cos^2\alpha = \dfrac{24^2}{25^2}$ и тогава $\cos\alpha = -\dfrac{24}{25}$.

От формулите $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ получаваме $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = 49$. Отчитайки, че $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имаме $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} > 0$. Окончателно $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 7$.

4. Нека бедрата на трапеца се пресичат в точката O. Тогава $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ и $AO = AB\cos 30^\circ = \dfrac{9}{2}\sqrt{13}$, $BO = AB\sin 30^\circ = \dfrac{3}{2}\sqrt{39}$. Тъй като $\dfrac{AB}{CD} = 3$, то $\dfrac{S_{AOB}}{S_{COD}} = 3^2 = 9$.



Ако означим с S лицето на триъгълника COD, то $S_{ABCD} = 8S$ и $S_{ABE} = S_{EBCD} = 4S$. От тук $S_{EBO} = 5S$, $\dfrac{OE}{EA} = \dfrac{S_{EBO}}{S_{ABE}} = \dfrac{5}{4}$ и $OE = \dfrac{5}{9}AO = \dfrac{5}{2}\sqrt{13}$. Окончателно, от питагоровата теорема за триъгълника EBO, получаваме $BE = \sqrt{OE^2 + BO^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} \cdot 39 + \dfrac{25}{4} \cdot 13} = 13$.

5. Неравенството има смисъл за $25-x^2>0$, $25-x^2\neq 16$ и $24-2x-x^2>0$, т.е. $x\in(-5,-3)\cap(-3,3)\cap(3,4)$. За тези стойности на x неравенството е еквивалентно на $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right)>\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{25-x^2}{16}\right)$.

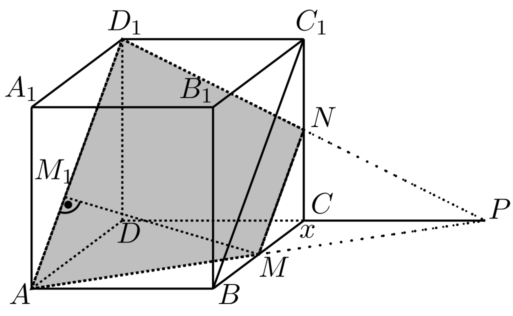
I. При $\dfrac{25-x^2}{16}\in(0,1)$, т.е. $x\in(-5,-3)\cap(3,4)$, неравенството е еквивалентно на $\dfrac{24-2x-x^2}{14}<\dfrac{25-x^2}{16}$. Решенията на последното са $x\in(-\infty,-17)\cap(1,\infty)$. Отчитайки интервала, който разглеждаме, решението е $x\in(3,4)$.

II. При $\dfrac{25-x^2}{16}>1$, т.е. $x\in(-3,3)$, неравенството е еквивалентно на $\dfrac{24-2x-x^2}{14}>\dfrac{25-x^2}{16}$. Решенията на последното са $x\in(-17,1)$. Отчитайки интервала, който разглеждаме, решението е $x\in(-3,1)$.

Окончателно, $x\in(-3,1)\cup(3,4)$.

6. Нека точка H е средата на отсечка AB и $CH=h$. От условието имаме, че $CH\leq CM$, т.е. $h\leq 5$. От питагорова теорема за $\triangle AHC$ получаваме $AH=\sqrt{13^2-h^2}$ и тогава $AB=2\sqrt{169-h^2}$. За лицето на триъгълника имаме $S_{\triangle ABC}=S(h)=\dfrac{AB.CH}{2}=h\sqrt{169-h^2}$, $h\in[0,\ 5]$. За производната получаваме $S'(h)=\dfrac{169-2h^2}{\sqrt{169-h^2}}>0$ за всяко $h\in[0,\ 5]$. Тогава функцията $S(h)$ расте в интервала $[0,\ 5]$ и максималната си стоиност достига за $h=5$. При $h=5$ дължината на основата е $AB=24$.

7. Нека пресечната точка на правата AM с правата CD е точката P и пресечната точка на D_1P с CC_1 е N. Тогава сечението на куба с равнината α е $AMND_1$ и $V_{ADD_1MCN}=V_{ADD_1P}-V_{MCNP}$.

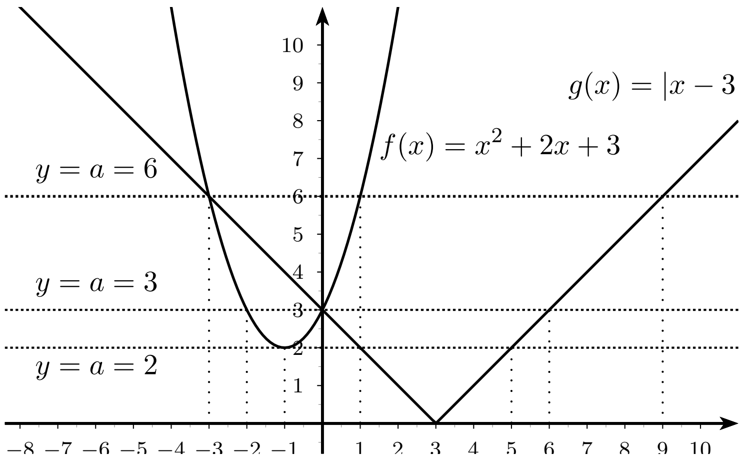


Триъгълникът MCP е подобен на триъгълника ADP, откъдето $CP=\dfrac{2x}{2-x}$ и $V_{ADD_1MCN}=\dfrac{1}{3}(x^2+2x+3)$ ($M\not\equiv B$ и $x\neq 2$). От отношението на обемите намираме, че $x=1$. Тогава $CP=2$, $PM=PN=\sqrt{5}$ и $MN=\sqrt{2}$.

Лицето на триъгълника MNP е $\dfrac{3}{2}$, а той е подобен на триъгълника AD_1P с коефициент на подобие 2. Така $S_{AD_1P} = 2^2 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$ и $S_{AD_1NM} = S_{AD_1P} - S_{MNP} = \dfrac{9}{2}$.

8. Построяваме графиките на функциите $f(x) = x^2+2x+3$ и $g(x) = |x-3|$. От свойства на квадратната функция имаме, че $f(x)$ намалява за $x < -1$ и расте за $x > -1$. Най-малката стойност на $f(x)$ се достига за $x = -1$ и е равна на 2. От свойства на абсолютната стойност имаме, че $g(x)$ намалява за $x < 3$ и расте за $x > 3$. Най-малката стойност на $g(x)$ се достига за $x = 3$ и е равна на 0. Пресечните точки на двете графики са две. Те са решенията на уравнението $x^2 + 2x + 3 = |x - 3|$ и са $x = -3$ и $x = 0$.

Като прекарваме хоризонтални прави с уравнения $y = a$, определяме общия брой пресечни точки на тези прави и обединението от графиките на двете функции. По този начин намираме броя на различните решения на изходната задача. Вижда се, че за $a = 2,\quad 3,$ и 6 имаме точно три пресечни точки. Отговорът е $a = 2,\quad 3,\ \ 6.$



ТЕМА 2

1. Б; **2.** В; **3.** Б; **4.** Г; **5.** В.

6. След полагането $\lg x = t$ получаваме уравнението

$$(k+1)t^2 - 3kt + k = 0,$$

с дискриминанта $D = 5k^2 - 4k$, неотрицателна извън интервала $(0, \dfrac{4}{5})$.

а) При $k = 1$ получаваме $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$ и съответно $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = 10$.

б) От формулите на Виет и условието $\frac{3k}{k+1} = t_1+t_2 = 4k-1$, откъдето $k = -\frac{1}{2}$.

в) Трябва да се разгледат случаите $k+1=0$, $D=0$ и $t_1t_2<0$, които водят до $k \in [-1,0] \cup \{\frac{4}{5}\}$.

7. а) В правоъгълния $\triangle OCE$ (виж в)) $OC = 4OE = 4r$, където r е радиусът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност.

б) Да означим $\sphericalangle ACF = \varphi$. Със синусова теорема за $\triangle AFC$ имаме $CF = \frac{AC\sin 30^\circ}{\sin(\varphi+30^\circ)} = \frac{4AC}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)} = \frac{4a}{\sqrt{5}+1}$.

в) Аналогично на б) $AF = \frac{2a}{\sqrt{5}+1}$ и

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}AF.AC.\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}.$$

Също така $S_{\triangle COE} = \frac{1}{2}r.r\sqrt{15} = \frac{a^2\sqrt{15}}{24}$ и търсеното лице е $S_{AFEO} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}(2\sqrt{5}-3)$ като разлика от получените лица.

8. а) Означаваме за краткост BC с x, а AD – с y, $y > b$. Тъй като $BC \| MN \| M_1N_1$, то $\frac{x}{MN} = \frac{y}{y-b}$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AMN}}{MN^2}x^2$. Ясно е, че обемът $V = const.\frac{y^3}{(y-b)^2}$. Изследвайки стандартно тази функция на y, получаваме, че най-малката ѝ стойност се достига за $y = AD = 3b$.

б) Нека BP е успоредна и равна на AC. Тогава търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle PBD$, а исканото разстояние d – височината през върха A в пирамидата $BDPA$. Последователно се получава $BP = BC = \frac{3\sqrt{2}b}{2}$, $PD = \frac{3\sqrt{6}b}{2}$ и тъй като $\sphericalangle BPD$ е прав (защо?), то $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi = 60^\circ$.

За разстоянието d изразяваме обема на пирамидата $BDPA$ по два начина: $3V_{BDPA} = S_{APB}.AD = S_{BDP}.d$, откъдето $d = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по . . .

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 22.04.2016 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.