МАТЕМАТИКА

БРОЙ 3
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн Петър Бойваленков – главен редактор
Ас. Невена Събева – зам. главен редактор
Чл.-кор. дмн Генчо Скордев
Проф. дмн Емил Колев
Проф. д-р Иван Тонов
Проф. дмн Николай Николов
Доц. д-р Евгения Сендова
Доц. д-р Ивайло Кортезов
Доц. д-р Марин Маринов
Александър Иванов
Емил Карлов
Татяна Пархоменко – графичен дизайн и предпечат
Йовко Коларов – художествено оформление

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Решенията на неравенството

$$\log_6(x-1)+\log_6(x-2)<1 \text{ са:}$$

А) $(2,+\infty)$ **Б)** $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$
В) $(-1,1)\cup(2,4)$ **Г)** $(2,4)$

Задача 2. (1 т.) Стойността на израза $\dfrac{\cos 1672^\circ}{\sin 2018^\circ}+\dfrac{\cos 1658^\circ}{\sin 2032^\circ}$ е:

А) 2 **Б)** 1
В) -1 **Г)** -2

Задача 3. (1 т.) Най-голямата стойност на функцията $f(x)=\dfrac{10}{x}-\dfrac{7}{x^2}$ в интервала $\left[\dfrac{6}{5},\sqrt{2}\right]$ е:

А) $\dfrac{125}{36}$ **Б)** $\dfrac{25}{7}$ **В)** $\dfrac{10\sqrt{2}-7}{2}$ **Г)** $\dfrac{10-7\sqrt{2}}{2}$

Задача 4. (1 т.) $\triangle ABC$ е правоъгълен и равнобедрен с хипотенуза AB. Нека правата $g\|AB$ и D е точка от g, такава, че $DB=AB$. $\sphericalangle ABD$ е равен на:

А) 30° **Б)** 60° или 120°
В) 30° или 150° **Г)** 150°

Задача 5. (1 т.) Дадена е правилна триъгълна пирамида, чиито околни стени са правоъгълни триъгълници. Тогава синусът на ъгъла между околен ръб и основата е:

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията

$$f(x) = (5 - 2^a)x^2 - 2(2^a - 1)x + 3(2^a - 1),$$

където a е реален параметър.

а) (2 т.) Да се реши уравнението $f(x) = 0$, ако $4^a - 3.2^a = 4$.

б) (1,5 т.) За кои стойности на a неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x?

в) (1,5 т.) За кои стойности на a уравнението $f(x) = 0$ има реални корени x_1 и x_2, за които $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$?

Задача 7. (5 т.) В $\triangle ABC$, $AC = BC$ и са дадени ъгълът при основата α и радиусът на вписаната му окръжност r.

а) (2 т.) Да се намери радиусът на описаната му окръжност.

б) (1,5 т.) Да се докаже, че $S_{\triangle ABC} = r^2 \operatorname{cotg}^2 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

в) (1.5 т.) При фиксирано r за кой ъгъл α това лице е най-малко?

Задача 8. (5 т.) Даден е прав кръгов конус с връх S, радиус на основата R и ъгъл α между образувателна и основата. $\triangle ABC$ е вписан в основата на конуса, като $\sphericalangle ACB$ е прав. Нека SP е тази образувателна на конуса, която е перпендикулярна на AB и точка D е среда на SP. Нека още равнините (ACD) и (BCD) сключват равни ъгли с основата на конуса.

а) (2 т.) Да се докаже, че $AC = BC$ и да се пресметне обемът на пирамидата $ABCD$.

б) (1,5 т.) Да се намери тангенсът на ъгъла между равнините (ABC) и (ACD).

в) (1,5 т.) Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите AC и SP, ако $\alpha = 45^\circ$.

ЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО ПЪТЕШЕСТВИЕ ДО ТАЙЛАНД

Елина Димова, Деан Дечев

Тайландската международна олимпиада по математика – известна като TIMO, е състезание по математика за ученици от подготвителен до 12 клас. Провежда се в два кръга: квалификационен (в средата на декември) и финал (в края на февруари).

Тестовете за квалификацията включват 25 задачи: по 5 задачи от разделите *Логическо мислене*, *Теория на числата*, *Геометрия*, *Алгебра* и *Комбинаторика*. Времето за работа е 90 минути.

На финала задачите са 30, по 6 от всеки раздел, а времето за работа е 120 минути.

На 21 февруари 2018 г. в столицата на Тайланд, в сградата на тайландска гимназия, се проведе финалът на Олимпиадата. На нея участваха 1500 ученици от 12 страни и 48 българчета от подготвителен клас до 12 клас от 13 български града, сред които бяхме и ние. Класирането за финала беше след квалификация, състояла се в България на 17 декември 2017 г.

Трима българи са шампиони на Тайландската олимпиада по математика за 2018 година. Това са:

Мартин Цветомиров Матов от 40 детска градина в София – шампион в подготвителна група;

Йордан Емилов Стоянов от Начално училище „Т. Влайков“ от Пирдоп – шампион сред първокласниците;

Ясен Пенчев от ПМГ в Габрово – шампион сред шестокласниците.

Първи подгласници на шампионите са **Рая Бонева** от подготвителна група на училище „Света София“ – София и **Давид Цаков** от 6. клас на СМГ. Втори подгласници на шампионите са **Мина Недева** от 2. клас, **Огнян Огнянов** и **Алек Ангелов** от 4. клас от училище „Света София“ – София, **Демира Недева** от 5. клас на МГ, Пловдив и **Радостин Железчев** от 6. клас на СМГ.

Своите награди получихме на 22 февруари 2018 г. на награждаването в Банкок. По време на церемонията по закриването, танцът на единадесетте старозагорчета, сред които бяхме и ние, предизвика в залата неописуем възторг.

Тайланд – страна на усмивките

Нашето пътешествие започна с 5-часов полет до Доха, Катар, откъдето след двучасов престой продължихме със 7-часов полет до Банкок, Тайланд.

Тайланд е разположен в Индокитайската часова зона, което прави 7 часа напред от Гринуичкото време и с 5 часа разлика от българското.

Наричат Тайланд *най-омагьосващата страна в света* и несъмнено тя има невиждано влияние върху всеки, който я посети. Тя не само е богата на екзотични плажове, мистични храмове и природни забележителности, но е известна като *страната на усмивките* заради сърдечните хора, които следват будистките принципи във всички аспекти на своя живот. Макар и не особено заможни, те са щастливи. Тяхната култура е много различна от западната и е силно съсредоточена върху семейството. Магията на Тайланд започва с хората и с тяхното отношение към чужденците. Поразиха ни топлината и добронамереността, с които бяхме посрещнати от местните жители.

Банкок, *градът на ангелите* – космополитен, очарователен, мистичен

Банкок е столица на Тайланд от 1782 г. На български език Банкок означава *град на ангелите*.

Още при слизането ни от самолета на летище Суварнабхуми, буквално ни обгърна тежък въздух с температура от около 35 градуса на сянка и влажност около 70%. Банкок ни посрещна както с бляскавите си небостъргачи, така и с историческите си храмове и луксозни хотели. В този град минало, настояще и бъдеще са хармонично преплетени.

За нас това е градът на контрастите. Цветни улици с безкрайни задръствания. Таксита, клаксони, шум, тук-тук колички с шофьори. Хаосът ни завладя още в самото начало. Аромат на улична храна и фрешове от различни екзотични плодове ни съпътстваха на всяка улица. Това е истинският дух на Азия!

Още първия ден посетихме храма Уат По с огромната статуя на Буда (15 метра висока и 46 метра дълга). Имахме прекрасната възможност да видим целия Банкок отгоре от най-високата сграда в града, Байоки Скай. Във ферма за слонове в Качанабури яздихме огромните животни. Не пропуснахме и нощния круиз по величествената река Чао Прая и се любувахме на красивата панорама – неслучайно наричат Банкок *Венеция на Изтока*!

След официалната част по награждаването, домакините ни подариха *Аватар шоу*. Спектакълът обединява театър и т.нар. 4D кино. Сцената е интерактивна, актьорите са облечени с невероятни костюми, а на огромен екран на заден план се представя историята на 4D. Когато театралното шоу завърши, се озовахме в гората на Химапана сред истински водопади, растения и роботизирани животни. Това е реална 360 градусова сцена, на която представлението продължи, а ние бяхме в центъра на събитията. Подаръкът от организаторите беше незабравимо преживяване!

След всичко това, се завърнахме в България щастливи. Премерихме сили с добри азиатски математици и имахме удоволствието да се докоснем до една екзотична страна с невероятно сърдечен народ.

Мястото и датата на *следващата среща* на TIMO са известни: 04 февруари 2019 г. на остров Пукет, Тайланд.

Задачите за 4., 5. и 6. клас от финала на TIMO през 2018 г.

Тестът започва с *инструкции*. Всеки участник разполага с един тест и лист за отговори, които не трябва да изнася от залата. Тестът съдържа по 6 задачи от 5 области, общо 30 задачи. Всяка вярно решена задача носи по 5 точки и не се отнемат точки за грешен отговор. Отговорите се попълват в листа за отговори. Не е позволено използването на калкулатори. Всички чертежи в теста са ориентировъчни.

ТЕМА ЗА 6. КЛАС

Логическо Мислене

1. Дадено е, че B и D са две цифри, различни от 0, и че двуцифрените числа, съставени от тези две цифри, имат следните свойства:

(a) $\overline{BD}$ се дели на 13;

(b) $\overline{DB}$ има 3 делители.

Намерете двуцифреното число $\overline{BD}$.

2. Пет числа – A, B, C, D и E, са различни естествени числа измежду числата от 1 до 9 и отговарят на следните условия:

(a) сборът на A и B е по-голям от сбора на C и 6;
(b) сборът на A и B е равен на D;
(c) сборът на C и E е равен на A;
(d) A се дели на C;
(e) сборът на A и C е по-голям от D;
(f) A е по-голямо от 6.

Намерете числото A.

3. Двадесет и едно деца, номерирани от 1 до 21, са застанали в редица по ред на номерата. Всяко дете държи по едно число. Дете номер 1 държи числото 1, дете номер 2 държи числото 2, и дете номер 3 държи числото 3. Като имате предвид, че сборът на числата на всеки 6 последователно номерирани деца е равен на 21, пресметнете сбора на всички числа, които държат децата.

4. Джон си намислил четирицифрено число и казал на Петър да го познае.

Петър попитал: „Числото 1369 ли е?“
Джон отговорил: „Не, но числото е кратно на 1369.“
Петър: „Числото дели ли се на 9?“
Джон: „Не, ако разделиш числото на 9, ще се получи остатък 4.“
Кое число си е намислил Джон?

5. В една кошница има 6 бели, 7 жълти и 8 кафяви китайски пръчици за хранене. Ако искате да вземете 2 чифта китайски пръчици за хранене с различен цвят без да гледате, колко най-малко пръчици трябва да извадите от кошницата?

6. Работниците A, B и C вършат една и съща работа съответно за 12, 18 и 36 дни. Ако тримата работят заедно, за колко дни ще свършат работата?

Аритметика

7. Пресметнете $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{11}$.

8. Пресметнете $\dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{3\times 5} + \dfrac{1}{5\times 7} + \cdots + \dfrac{1}{11\times 13}$.

9. Пресметнете $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2$.

10. Пресметнете $1234 \times 7654 + 1173 \times 2468$.

11. Превърнете 0,36(8) в обикновена несъкратима дроб.

12. Пресметнете $49\dfrac{38}{63} + 2018\dfrac{2017}{2018} + 24\dfrac{20}{63} + 26\dfrac{5}{63}$.

13. Ако 10-цифреното число $\overline{2018A0221B}$ се дели на 55, пресметнете $A+B$.

14. Ако $A = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 2017 \times 2018$, намерете последната цифра на A.

15. Представете 20 като сбор на 10 положителни цели числа и намерете възможно най-голямото произведение на тези 10 числа.

16. Ако разделим положителното цяло число K на 3, ще получим остатък 1. Ако разделим числото K на 5, ще получим остатък 2. Ако разделим числото K на 7, ще получим остатък 3. Ако $248 > K > 75$, пресметнете K.

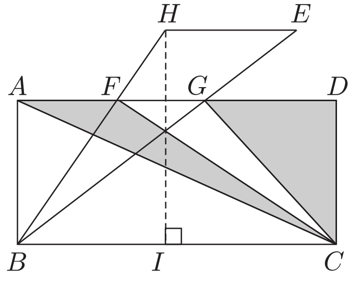
17. Колко естествени делители има числото 2018?

18. Когато едно четирицифрено число се раздели на 11, се получава остатък 10. Когато се раздели на 12, се получава остатък 11. Когато се раздели на 13, се получава остатък 12. Намерете най-голямата възможна стойност на числото.

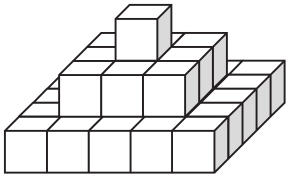
Геометрия

19. Колко са правоъгълниците на фигурата?

20. Лицето на правоъгълника $ABCD$ е 180 cm^2. В триъгълника HEB, дължината на основата HE и височината HI са съответно 9 см и 15 см. Като имате предвид, че $S_{HEGF} - S_{FGB} = 23.5$ cm^2, пресметнете лицето на оцветената част в квадратни сантиметри.

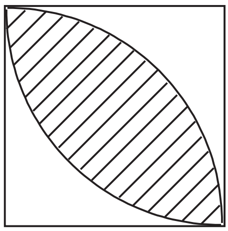


21. Тяло е съставено от кубчета с ръб 1 см, подредени по дадения модел. Ако има 8 слоя кубчета, намерете обема на тялото.



22. Ако правоъгълник с размери 27 см $\times$ 37 см е разделен на квадратчета със страна 1 см, с колко сантиметра сборът от обиколките на тези квадратчета е по-голям от обиколката на правоъгълника?

23. На чертежа е показан квадрат и защрихован участък, образуван от сечението на две припокриващи се четвъртинки от кръгове.Намерете обиколката на защрихования участък. (Приемаме, че $\pi = \dfrac{22}{7}$)*.



21

24. Лицето на един правоъгълник е 2017 cm^2. Ако дължината и широчината на правоъгълника са цели числа сантиметри, колко е възможно най-малката му обиколка?

Комбинаторика

25. Едно стълбище има 11 стъпала. Дейвид може да изкачва по едно или по две стъпала наведнъж. На четвъртото и седмото стъпало не може да стъпва, защото са повредени. По колко начина може Дейвид да се качи по стълбището?

26. Две момчета – Бенсън и Бени, и три момичета – Грейс, Глория и Джорджия, трябва да седнат в редица, като спазват следните условия:

1) момчетата да не седят до други момчета и момичетата да не седят до други момичета.

2) Бенсън не трябва да седи до Глория.

---

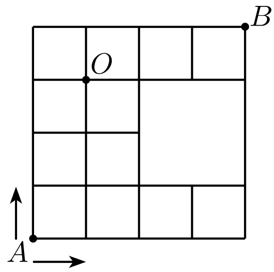
*Заб. на редакцията. Сп. Математика се разграничава от непрофесионалното π на тайландските колеги.

Ако S е числото, равно на броя на възможните подредби на местата, пресметнете S.

27. По колко начина може да разпределим 5 различни топки в 3 еднакви кутии така, че във всяка кутия да има поне по една топка?

28. Дадени са естествените числа от 1 до 2017. Колко най-малко от тях трябва да изберем на случаен принцип, за да сме сигурни, че сред тях ще има две числа, чието произведение е кратно на 5?

29. Алис трябва да се придвижи от точка до точка B, като може да се движи само нагоре или надясно по линиите на мрежата. По колко начина тя може да стигне до точка B, ако трябва да мине през точка O?



30. Голямата и малката стрелка на един часовник се застъпват в 3 часа и x минути. Като имате предвид, че x не е цяло число, пресметнете x и представите отговора като неправилна обикновена дроб.

ТЕМА ЗА 5. КЛАС

Логическо Мислене

1. Дадено е, че C и D са две цифри, различни от 0, и че двуцифрените числа, съставени от тези две цифри, имат следните свойства:

(a) $\overline{CD}$ се дели на 5;

(b) $\overline{DC}$ се дели на 6;

Намерете двуцифреното число $\overline{DC}$.

2. Пет числа – A, B, C, D и E, са различни числа измежду числата от 1 до 9 и отговарят на следните условия:

(a) сборът на A и B е по-голям от сбора на C и 6;

(b) сборът на A и B е равен на D;

(c) сборът на C и E е равен на A;

(d) A се дели на C;

(e) сборът на A и C е по-голям от D;

(f) A е по-голямо от 6.

Намерете числото A.

3. В склада на книжарница има определен брой химикали. Първия ден продали половината от тях плюс още 3. Втория ден продали със 7 химикала по-малко от половината от останалите химикали. Накрая останали 15 непродадени химикала. Колко химикала е имало първоначално в склада на книжарницата?

4. Джон си намислил едно трицифрено число и казал на Петър да го познае.

Петър попитал: „Числото 113 ли е?“

Джон отговорил: „Не, но е кратно на 113.“

Петър: „Числото дели ли се на 4?“

Джон: „Не, но е кратно на 2.“

Като имате предвид, че всички цифри в трицифреното число са различни, кое е числото, което си е намислил Джон?

5. В една стая има 15 ученици, които се ръкуват един с друг. При какъв най-малък брой ръкувания ще сме сигурни, че ще има поне двама ученици, които са се ръкували повторно един с друг?

6. Ако A работи сам, той ще свърши определена работа за 24 дни. Ако A и B работят заедно, те ще свършат същата работа за 8 дни. За колко дни B ще свърши работата, ако работи сам?

Аритметика

7. Пресметнете y, ако $\dfrac{y}{6} + 5 = 9$.

8. Пресметнете $667^2 - 333^2$.

9. Пресметнете $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots - 2016 + 2018$.

10. Пресметнете $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 11 \times 12 + 12 \times 13$.

11. Пресметнете $12345678987654321 \div 12321$.

12. Пресметнете $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 512 + 1024$.

Теория на числата

13. Ако 9-цифреното число $\overline{A2018221B}$ се дели на 11 и $B > A$, пресметнете $A + B$.

14. Намерете остатъка от делението на A на 9, ако $A = \underbrace{22 \times 22 \times 22 \times \cdots \times 22}_{2018}$.

15. Ако $a \oplus b = b \times b - a \times b + a \times a$, пресметнете $(5 \oplus 8) \oplus 7$.

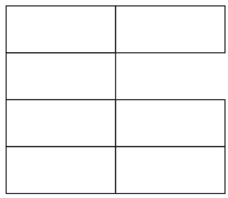
16. Сборът на двете положителни цели числа A и B е 64. Колко най-малко е произведението на A и B?

17. Колко са нечетните 3-цифрени числа, които се делят и на 5, и на 7?

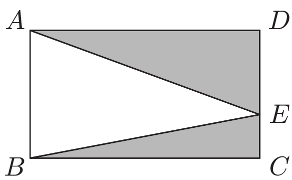
18. Кое е най-голямото 3-цифрено число, което при деление на 4, 7 и 11, дава остатък 3?

Геометрия

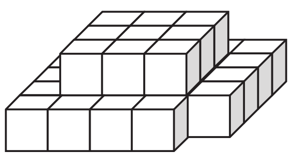
19. Колко са правоъгълниците на фигурата?



20. $ABCD$ е правоъгълник. Ако лицето на $\triangle ABE$ е 1004 см^2, намерете лицето на оцветената част в квадратни сантиметри.

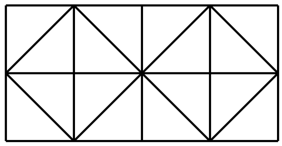


21. На фигурата има 33 кубчета с ръб 1 см. Пресметнете лицето на повърхнината на тялото в квадратни сантиметри.

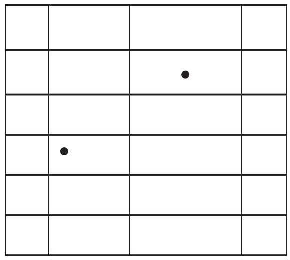


22. Правоъгълник с размери 2017×2 cm е разделен на квадратчета със страна 1 см. С колко сантиметра сборът от обиколките на тези квадратчета е по-голям от обиколката на правоъгълника?

23. Колко са правоъгълните триъгълници на фигурата?



24. Колко са правоъгълниците, в които има точно 2 черни точки?



Комбинаторика

25. Едно стълбище има 10 стъпала. Дейвид може да изкачва по 1 или 2 стъпала наведнъж. По колко начина може Дейвид да се качи по стълбите?

26. Две момчета – Боби и Бени, и две момичета – Грейс и Глория, трябва да седнат в редица,като спазват следните условия:

1) момчетата да не седят до други момчета и момичетата да не седят до други момичета.

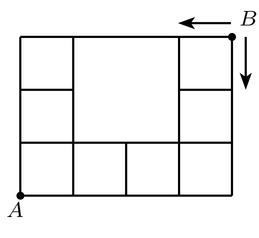
2) Боби не трябва да седи до Глория.

Ако S е числото, равно на броя на възможните подредби на местата, пресметнете S.

27. Колко трицифрени числа, съставени с различни цифри измежду цифрите 0, 2, 4, 5 и 9, се делят на 3?

28. Дадени са 85 цели числа от 1 до 85. Колко най-малко числа трябва да изберем на случаен принцип, за да сме сигурни, че сред тях ще има две числа с разлика 10?

29. Алис трябва да се придвижи от точка B до точка A, като се движи само надолу или наляво по линиите на мрежата. По колко начина тя може да стигне до точка A?



30. Имаме 100 монети, всяка от които е от 1, 2 или 5 долара. Общата стойност на 100-те монети е 216 долара. Ако общата стойност на монетите от 2 долара е със 17 долара повече от общата стойност на монетите от 1 долар, пресметнете броя на монетите от 2 долара.

ТЕМА ЗА 4. КЛАС

Логическо Мислене

1. Кое е липсващото число в редицата?

$$1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, \_\ , 9, 32, \ldots$$

2. Колко кръгчета има между първия и 300-я символ (ако броите от ляво надясно)?

○△□○△△□□○△△△□□□ . . .

3. В един магазин имало определен брой моливи. Половината от тях плюс още 6 се продали на първия ден. Половината от останалите моливи плюс още 5 се продали на втория ден. 7 от моливите останали непродадени. Колко молива е имало в магазина първоначално?

4. Джон си намислил 3-цифрено число и казал на Петър да го познае.
Петър попитал: „Числото 116 ли е?“
Джон отговорил: „Не, но числото се дели на 116.“
Петър: „Числото дели ли се на 6?“
Джон: „Не, ако разделиш числото на 6, ще се получи остатък 2.“
Кое трицифрено число си е намислил Джон, като имате предвид, че то е записано с различни цифри?

5. Общият брой на кокошките и зайците в една ферма е 44. Всички животни имат общо 110 крака. Колко са кокошките?

6. Навън започна да се съмва, затова майката на Ейми я помоли да изключи лампата. Ейми реши да се пошегува и да натисне ключа за лампата 2017 пъти. В момента лампата включена ли е или изключена?

Аритметика

7. Пресметнете $2016 \div 16 - 2016 \div 7 + 2016 \div 9$.

8. Пресметнете $333 \times 444 + 222 \times 999$.

9. Пресметнете $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$.

10. Пресметнете $1 \times 2 - 2 \times 3 + 3 \times 4 - 4 \times 5 + 5 \times 6 - 6 \times 7 +$
$+ 7 \times 8 - 8 \times 9 + 9 \times 10 - 10 \times 11 + 11 \times 12$.

11. Пресметнете $111111111 \div 333$.

12. Пресметнете $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + \cdots + 37 - 39 + 41$.

Теория на числата

13. Ако 9-цифреното число $\overline{20180221A}$ се дели на 11, пресметнете A.

14. Колко цифри има числото A, ако

$$A = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4}_{2018} \times \underbrace{25 \times 25 \times 25 \times \cdots \times 25}_{2018}?$$

15. Ако $a \oplus b = b \times b + a \times a - a \times b$, пресметнете $(26 \oplus 38)$.

16. Сборът на числата B и C е 288. B е 7 пъти по-голямо от C. Колко е B?

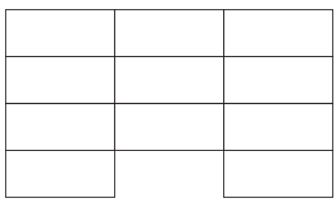
17. Кое е най-малкото четирицифрено число, което се дели и на 2, и на 7?

18. Намерете средноаритметичното на числата от редицата

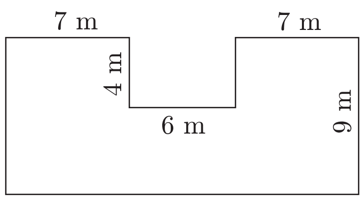
$$71, 14, 29, 24, 52, 64, 78, 51, 37, 80.$$

Геометрия

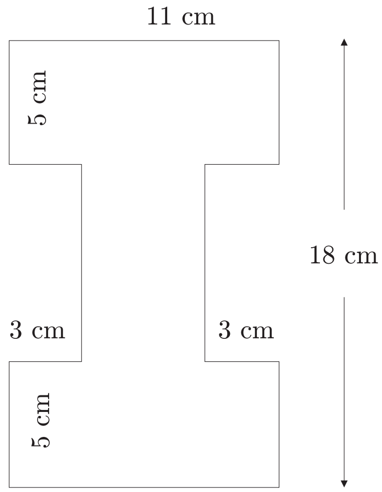
19. Колко са правоъгълниците на фигурата?



20. Намерете обиколката на фигурата в метри.

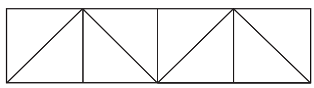


21. Намерете лицето на фигурата в квадратни сантиметри.



22. Един квадрат е съставен от 8 правоъгълника със страни 3×6 см. Намерете обиколката на квадрата в сантиметри.

23. Колко правоъгълни триъгълници има на фигурата?



24. Дадено е, че лицето на правоъгълник е 100. Широчината и дължината са цели числа. Намерете възможно най-голямата обиколка на правоъгълника.

Комбинаторика

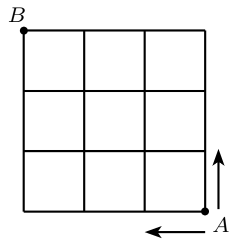
25. В една кутия има 5 черни чорапа, 7 сини чорапа, и 9 червени чорапа. Най-малко колко пъти трябва Дейвид да извади по един чорап от кутията без да гледа, за да е сигурен, че ще извади 2 чифта чорапи с различен цвят?

26. Две момчета – Петър и Бени, и три момичета – Ейми, Джени и Мери, трябва да седнат в редица така, че момчетата да не седят до други момчета и момичетата да не седят до други момичета. Ако T е числото, което представлява броя на възможните подредби на местата, пресметнете T.

27. Образувайте двуцифрени числа с различни цифри измежду цифрите 2, 3, 4, 6 и 9. Колко от тези двуцифрени числа се делят на 4?

28. Колко са двуцифрените числа, записани с различни цифри, сборът от цифрите на които се дели на 3?

29. Анди трябва да се придвижи от точка A до точка B, като може да се движи само нагоре или наляво по линиите на мрежата. По колко начина той може да стигне до точка B?



30. Учителят раздава бонбони на учениците си. Ако бонбоните се разделят поравно между 7 ученици, ще останат 4 бонбона. Ако се разделят поравно между 8 ученици, ще останат 4 бонбона. Ако се разделят поравно между 9 ученици, ще останат 4 бонбона. Колко най-малко бонбона може да има учителят?

Отговори

4. клас 1) 16; 2) 16; 3) 60; 4) 812; 5) 33; 6) включена; 7) 62; 8) 369630; 9) 2500; 10) 72; 11) 333,667; 12) 21; 13) 6; 14) 4037; 15) 1132; 16) 252; 17) 1008; 18) 50; 19) 44; 20) 66; 21) 150; 22) 48; 23) 11; 24) 202; 25) 12; 26) 12; 27) 6; 28) 26; 29) 20; 30) 4.

5. клас 1) 54; 2) 8; 3) 38; 4) 678; 5) 106; 6) 12; 7) 24; 8) 334000; 9) 1010; 10) 728; 11) 1,002,003,002,001; 12) 2047; 13) 7; 14) 7; 15) 2107; 16) 63; 17) 13; 18) 927; 19) 18; 20) 1004; 21) 80; 22) 12098; 23) 30; 24) 24; 25) 89; 26) 2; 27) 21; 28) 46; 29) 17; 30) 32.

6. клас 1) 52; 2) 8; 3) 69; 4) 5476; 5) 10; 6) 6; 7) 4094; 8) $\dfrac{6}{13}$; 9) 9455; 10) 12,340,000; 11) $\dfrac{83}{225}$; 12) $2118\dfrac{2017}{2018}$; 13) 14; 14) 8; 15) 1024; 16) 157; 17) 4; 18) 8579; 19) 115; 20) 68; 21) 706; 22) 3868; 23) 252; 24) 4036; 25) 9; 26) 4; 27) 25; 28) 1616; 29) 16; 30) $\dfrac{180}{11}$.

Бележка на гл. редактор. Както читателите вече са забелязали задачите от TIMO са значително по-лесни от тези в българските състезания (например Иван Салабашев и Черноризец Храбър)

Продължението следва в брой 4.

ИЗ СПОМЕНИТЕ НА ЛЮБОМИР ИЛИЕВ И НА КОЛЕГИ ЗА НЕГО

ПО СЛУЧАЙ 105 Г. ОТ РОЖДЕНИЕТО МУ

Акад. Любомир Илиев е роден на 20 април 1913 г. Когато говорим за него, обикновено изтъкваме забележителния му принос като математик, преподавател, международен деец, радетел на новото, създател на *Института по математика и информатика* (такъв, какъвто го знаем днес). По-трудно е да намерим точните думи, за да опишем какво представляваше той за нас (неговите студенти, колеги и последователи) като човек, който винаги се е интересувал от проблемите ни и е проявявал изключителна грижа и благородство в действията си. Но неизменно си спомняме за изключителното му чувство за хумор и благата му усмивка.

По-долу споделям с вас, драги читатели фрагменти от книгата *Акад. Любомир Илиев – човекът* (*... и математик на този свят*), в която съм събрала спомени, случки, мисли и истории за него и от него, чути, преживени, събрани, подбрани и преразказани от мен (Жен-И-Сен).

Споделено от акад. Илиев:

За логиката, истината и ... любовта

Хуморът е благоухание в интелектуална, културна атмосфера. Алипи Матеев резонираше със състава на Научния съвет на Международния математически център „Стефан Банах" във Варшава.

Той обичаше логическите парадокси. Особено резонираше с носещия същия хумор румънски логик, академик Мойсил.

При едно от поредните заседания, като се видяха, Алипи попита предизвикателно шеговито Мойсил: *Какво ново в логиката*? Седнали сме трима около една маса в бюфета. Мойсил хитро се поогледа и каза: *С логиката всичко може да се докаже, дори и истината.*

Атмосферата на „Раковски“ 108

Етажът, който обитаваха катедрите по математика в Софийския университет от 1944 до 1948 година на улица „Раковски“ 108, се състоеше от дълъг коридор, от двете страни на който имаше стаи. В дъното беше клозета. Като се влезе, отляво бяха кабинетите на Илиев, Долапчиев, Петканчин и Матеев (до клозета), а отдясно – библиотеката (в дъното до клозета срещу кабинета на Матеев). И след това в обратен ред – на Обрешков, Табаков (Манолов), Попов (Тагамлицки), Ценов и Чакалов. Срещу моя кабинет непосредствено до входа имаше малка стаичка за разсилните, а до нея в коридора на стената закачен телефон – един за всички.

Тагамлицки спазваше по изключителен начин форми на коректност. Преди да влезе чукаше на вратата на клозета, което се чуваше от стаите. Алипи беше чувствителен на шум; дразнеше се от него, когато работеше. Един път Тагамлицки чука неколкократно на вратата на клозета. Излиза от стаята Матеев и му казва: „Абе, ако има вътре човек ще ти каже ли влез; а ако няма кой ще ти отговори?“.

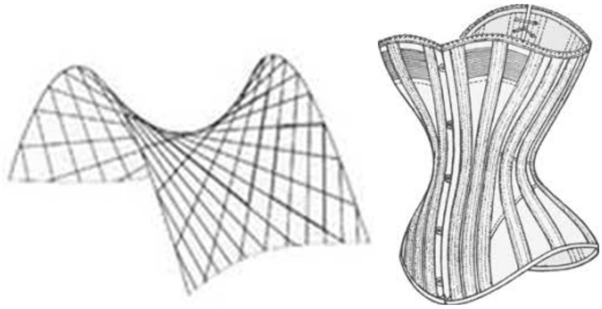
Друг път звъни дълго телефонът. Всеки в стаята си чака някой да излезе и провери кого търсят. Най-после излиза Тагамлицки и почва разговор. В това време всички ние от отделните стаи излизаме на вратите и слушаме. Тагамлицки започва разговора. Изглежда, че го питат кой е там, защото той на скоропоговорка изрича „Тагамлицки“. Необичайното име изречено бързо вероятно не е разбрано от събеседника и е запитал „Какво е това?“, защото нашият колега бавно и членувано казва: „Та-га-млиц-ки“. Това още повече обърква събеседника, който сигурно не е бил много запознат с нашата колегия и вероятно е запитал: „Кой е той?“. Тагамлицки спокойно и ясно казва: „Това съм аз“.

Женитба и логика

През същите години след 9.9.1944 година имаше стол за служителите на СУ в мазето на ректората (сега там е клубът на университета). Обикновено на една дълга маса там се събираха несемейните служители на Природо-математическия факултет. Винаги с нас седяха проф. Александър Балабанов и проф. Коста Гълъбов, които живееха като без семейства. Веднъж касиерът на факултета Георги Топалов с вълнение ни съобщи, че ще се жени и сподели подробно своята радост. Наш млад колега, тогава асистент във факултета, бе преживял наскоро развод. Слушайки Топалов, той и хумористично и състрадателно, и с тъга го запита: „Георге, ти даваш ли си сметка какво значи да се жениш?“. Тагамлицки със свойствената си усмивка го пресече: „Ама той няма да се жени за Вашата жена“.

Корсетът като математически обект

Веднъж на изпит по геометрия проф.Табаков пита една студентка на какво прилича прекрасната геометрична повърхнина „хиперболичен параболоид“. Смутено, тя стои и мънка безпомощно. Табаков се афектира и малко по народному, сливенски каза: „Ами на корсет, ма, на корсет“. В това време друг студент, също на изпит по геометрия, чертае на съседната дъска и се обръща към професора съответно: „Ама той е много старомоден корсет, господин професоре.“ Табаков го погледна слисано, поогледа се, засмя се и каза: „Ех, ние сме стари хора; такива сме виждали.“



А вие разбрахте ли коя от двете повърхнини е корсет?
Упътване: Вижте къде има копчета...

И няколко спомена за него:

Когато „госпожата не иска така“

Акад. Илиев бе изключително благороден и фин човек, но когато се разгневеше, около него *хвърчаха искри...* Говореше се, че на един научен съвет завеждащата личен състав подхвърлила предизвикателно: *Не знам какво си мислят авторите на учебниците по математика, но днес дадох задача за седми клас на двама кандидати на науките, един доктор и двама доценти и дъщеря ми все казва „Учителката не иска по този начин ...“* Всички замръзнали в очакване на справедливия гняв на академика, който по онова време бе директор на Института по математика. *Ех, Дима, вече 20 години си завеждащ личен състав и още не си разбрала коя задача на кой сектор да даваш...* – укорително заключил той.

Лесно ли се обясняват диференциални уравнения

Проф. Илиев беше невероятен лектор. Години по-късно негови студенти го питат:

— *Как успявахте да преподавате диференциалните уравнения толкова разбираемо – нямаше човек, на когото да не му е ясно...*

— *Това е толкова просто – споделям със студентите нещата така, както аз съм ги разбрал, както аз съм стигнал до тях* – отговори той с усмивка...

Ако става дума за компенсация...

Освен че бе прекрасен лектор, акад. Илиев бе ангажиран с огромен брой административни и дипломатически задачи Поради огромната си заетост, често му се налагаше да закъснява за час. Разказват, че деканът го срещнал на коридора и се обърнал към него укорително:

— *Закъснявате вече с 10 минути!*

— *–А-а-а, това не е проблем — ще компенсирам, като изляза 10 минути по-рано.*

Любомир Илиев, Боян Петканчин, Алипи Матеев, Ярослав Тагамлицки, Спас Манолов

Навярно за младите читатели на списанието ще е интересно да научат коя е първата научна публикация на академик Любомир Илиев.

Първата ни съвместна научна публикация с Алипи Матеев от студентските години

В началото на 1934 година двамата с Матеев решавахме зададената от Атанас Радев задача 109 в брой 11, година II на излизащия тогава *Физико-математически вестник.* Ние често решавахме или задавахме нови задачи за него. Решението на задача 109 сведохме до целочислените решения (x, y) на уравнението $x^2 - 2y^2 = 1$, което представлява частен случай от уравнението на Pell $x^2 - dy^2 = 1$, където d е цяло число, различно от квадрат на цяло число. Пълното решение на това уравнение се дава с методи на висшата алгебра. Поради естеството на задачата започнахме да търсим решение с елементарни средства на частния случай при $d = 2$. Постигнахме някои резултати и аз заминах през пролетната ваканция в родния си град Велико Търново. Погълнат от мисълта за решаването на уравнението, стигнах до някои изводи и ги изпратих с писмо на Алипи. По същото време получих от него писмо с други резултати. След размяната на още няколко писма решението се оформи. При срещата ни след ваканцията в София оставаше само да редактираме изследванията си. С тях се даваше нов елементарен метод за решаването на този частен случай. Изпратихме работата си в редакцията на вестника. По наше предложение, там в брой 14, година II, от наше име излезе следната

Задача 121. Да се даде елементарно пълно решение за целите корени на уравнението $x^2-2y^2 = 1$. Да не се използва общият метод за решаването на уравнението на Pell, от което даденото е частен случай.

Упътване. Може да се използва връзката, която съществува между корените на даденото уравнение и на уравнението $\xi^2 - 2\eta^2 = -1$.

В брой 16 на вестника беше поместено следното наше решение, което предавам дословно (някои неточности са отстраними).

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{1}$$

Явно е, че x е нечетно число, тъй като $x^2 - 1 = 2y^2$, т. е. има вида $4\lambda + 1$ или $4\lambda' - 1$; $(x - 1)(x + 1) = 2y^2$.

I. $x = 4\lambda + 1$. Получаваме $4\lambda(2\lambda + 1) = y^2$.

Понеже λ и $2\lambda + 1$ са взаимно прости, трябва $\lambda = \eta^2$; $2\lambda + 1 = \xi^2$ или

$$\xi^2 - 2\eta^2 = 1 \tag{2}$$

Уравненията (2) и (1) са едни и същи. Всяка система корени на (1) удовлетворява и (2). От (2) по обратен път получаваме нова система корени на (1) и т.н. От всяка система корени на даденото уравнение (1) получаваме една безкрайна редица системи (негови) корени, дето $x = 4\lambda + 1$.

II. $x = 4\lambda' - 1$.

$(x - 1)(x + 1) = y^2$; $4\lambda'(2\lambda' - 1) = y^2$, трябва $\lambda' = \eta^2$; $2\lambda' - 1 = \xi^2$ и

$$\xi^2 - 2\eta^2 = -1. \tag{3}$$

На всяка система корени от (3) отговаря една система корени на (1), дето ξ е от вида $4\lambda' - 1$. На всяка една такава система на (1) посредством (2) ще отговаря една редица стойности, дето $\xi = 4\lambda + 1$. Въпросът е да се намерят корените на (3). Лесно се проверява, че между корените на (1) и (3) съществуват следните два вида връзки:

$$\text{(I)}\ \begin{aligned}\xi &= x+2y\\ \eta &= x+y\end{aligned}\qquad \text{(II)}\ \begin{aligned}x &= \xi+2\eta\\ y &= \xi+\eta\end{aligned}$$

Забележка. Стойностите на x и y в (I) не са същите в (II), но са корени на (1). Същото се отнася и за ξ и η, които са корени на (3).

Оттук се вижда, че както корените на (3) се получават от тия на (1), така и корените на (1) се получават от тия на (3). Ако знаем най-малката система корени на (1), то можем да намерим всички корени на (1) и (3) по (I) и (II). Но най-малката система е $x = 1$, $y = 0$. От нея ще получим корените на (1):

$$(1,0),(3,2),(17,12),(99,70),(577,408),(3363,2378),\ldots$$

и корените на (2):

$$(1,1),(7,5),(41,29),(239,169),(1393,985),(8119,6731),$$

които безкрайни редици изчерпват системите цели корени на (1) и (2).

Поради това, че x и y влизат в четна степен, ограничаваме се само на положителните им стойности. Всъщност на корените x и y отговарят и решенията $(-x,\ -y)$, $(x,\ -y)$, $(-x,\ y)$.

Ал. Матеев и Люб. Илиев, студенти

Няколко седмици след излизането на това решение в едно междучасие ни казаха, че двамата ни вика професор Обрешков. Тръгнахме за кабинета на професора и го видяхме застанал на прага на вратата: висок, едър, както обикновено – в работна обстановка, облечен небрежно с разкопчана бяла престилка. Като ни видя, засмя се добродушно с обикновеното „хе, хе, хе“ и каза: „То същото бе, същото“. След първото ни смущение разбрахме, че той решавал по това време същото уравнение, намерил елементарното решение и, когато го дал за публикуване в *Списание на физико-математическото дружество*, при коректурите видял вече публикуваното от нас решение. Така и написа в забележката на статията си: „При коригирането забелязах, че аналогично решение е дадено във Физико-математически вестник“.

Нашият метод се оказа оригинален. Публикуваното решение стана наша първа и то колективна научна публикация. Тя беше веднага цитирана в статия на световно известния професор Никола Обрешков. Каква по-голяма радост за двама приятели, студенти едва втора година?

РУСКИТЕ *ЕВРЕЙСКИ* ЗАДАЧИ

Невена Събева

Изпитите с висок залог, каквито са зрелостните и кандидат-студентските изпити, както и някои математически състезания, създават стимули за злоупотреби от най-различен вид. Понякога и самият изпит по математика се превръща в инструмент за дискриминативна политика. Такъв е случаят с устния кандидат-студентски изпит във факултета по математика на Московския държавен университет през 80-те години на миналия век. По политически причини, студентите от еврейски произход там били нежелани. И тъй като в математиката е по-трудно *да кажеш на черното бяло* и да не признаеш вярно решение, се използвали по-фини методи.

На устния изпит[1] в престижния Мехмат кандидатите получавали по две или три задачи, които да обмислят и да разкажат решенията им на журито. Оказва се, че имало два варианта задачи за този изпит и кандидатите от еврейски произход получавали не обичайните, а тъй наречените *задачи – гробове*. Тези трудни задачи имали кратки решения (за да се избегнат възможни оплаквания и скандали), но били нестандартни и практически нерешими в ограниченията на изпитното време.

Сергей Брин, един основателите на Google, разказва, че специалната аудитория за евреи, в която държал изпита си в университета, се наричала на жаргон *газовата камера*.

Разбира се, *еврейските задачи* се пазели в тайна, но постепенно московските учители Борис Каневский и Валерий Сендеров, които подготвяли кандидат-студенти, събрали списък със *задачи – гробове* и го разпространили като доказателство за *интелектуален геноцид*. Интересно е да се отбележи, че те организирали неформални учебни курсове, известни като *Еврейски народен университет*, на които математици (А. Виноградов, А. Шен, В. Гинзбург, Д. Фукс и др.) обучавали безплатно и на доброволни начала неприетите в Мехмат еврейски ученици. Еврейският университет просъществувал от 1978 до 1983 г., когато Каневский и Сендеров били изпратени в затвор за антисъветска дейност, а математичката Белла Субботовская, в чийто апартамент първоначално се провеждали курсовете, загинала при неизяснени обстоятелства.

Канадското списание *Crux Mathematicorum* публикувало някои *еврейски задачи*, като поканило читателите да изпращат своите решения. Интересно е да се отбележи, че и досега в списъка с *нерешени* задачи на Crux са останали от тъй наречените *еврейски* задачи.

[1] От 2010 в МГУ не се провежда устен изпит по математика.

Да разгледаме няколко примера от колекцията с *еврейски* задачи на *проф. Йордан Табов* (по материали от Crux).

Задача 1. Съществуват ли рационални числа x, y, z, t, за които

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}?$$

Решение. Даденото равенство се преобразува стандартно и като използваме, че x, y, z, t са рационални числа, получаваме

$$xy + zt = 2, \quad x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2 = 5.$$

Сбора на квадратите може да оценим като използваме неравенството между средно аритметично и средно геометрично

$$5 = (x^2 + 2y^2) + (z^2 + 2t^2) \geqq 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{2}yz = 4\sqrt{2}.$$

Получихме противоречие; следователно такива рационални числа не съществуват.

Задача 2. Да се сравнят числата:

а) $\sqrt[3]{60}$ и $2 + \sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[3]{413}$ и $6 + \sqrt[3]{3}$.

Решение. От тъждеството

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a - b - c)[(b - c)^2 + (a + c)^2 + (a + b)^2]$$

следва, че

$$a^3 - b^3 - c^3 > 3abc \iff a > b + c.$$

а) При $a = \sqrt[3]{60}$, $b = 2$, $c = \sqrt[3]{7}$ неравенството $a^3 - b^3 - c^3 > 3abc$ става $45 > 6\sqrt[3]{60}$, което е еквивалентно на $225 > 224$ и е изпълнено. Следователно е изпълнено и равенството

$$\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}.$$

Задача 3. Да се сравнят числата $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Решение. Ще сравним всяко от дадените числа с $\dfrac{3}{2}$. Имаме

$$(2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9 > 8 = 2^3 = (2^{3/2})^2 \Longrightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2},$$

$$(3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25 < 27 = 3^3 = (3^{3/2})^2 \Longrightarrow \log_3 5 < \frac{3}{2}.$$

Следователно $\log_2 3 > \log_3 5$.

Задача 4. Да се реши системата

$$\begin{vmatrix} y(x+y)^2 = 9 \\ y(x^3 - y^3) = 7. \end{vmatrix}$$

Решение. От условието лесно следва, че $x > y > 0$.

При $y = 1$ намираме $x = 2$; ще покажем, че това е единственото решение. При $y > 1$ имаме

$$(x+1)^2 < (x+y)^2 = \frac{9}{y} < 9,$$

откъдето следва, че $x < 2$.

От друга страна,

$$\frac{9}{7} = \frac{(x+y)^2}{x^3 - y^3} > \frac{(x+1)^2}{x^3 - 1},$$

откъдето $(x-2)(9x^2 + 11x + 8) > 0$, т.е. $x > 2$; противоречие.

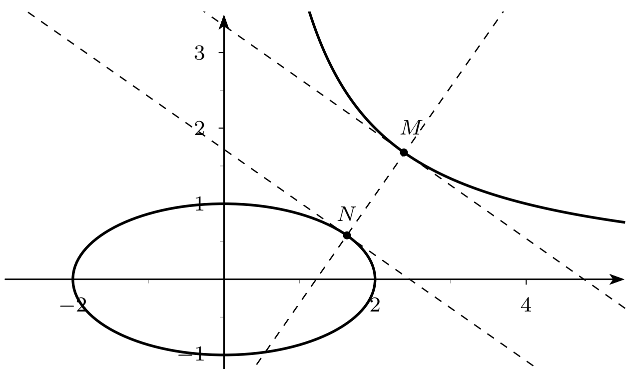
Аналогично разглеждаме случая $0 < y < 1$ и стигаме до противоречие.

Трудността на разгледаните задачи идва от използването на подходящи оценки. Най-добре ще се убедите в сложността на подобен вид задачи, като самостоятелно опитате да докажете следващото неравенство.

Задача 5. Ако $ab = 4$ и $c^2 + 4d^2 = 4$, да се докаже, че

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 1,6.$$

Решение. Да разгледаме елипсата $e: \ x^2 + 4y^2 = 4$ и хиперболата $h: \ y = \dfrac{4}{x}$. Точката $M(a;b)$ е от хиперболата, а точката $N(c;d)$ е от елипсата. Тъй като $(a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$, достатъчно е да оценим минималното разстояние между точка от хиперболата и точка от елипсата.



Заради симетрията е ясно, че е достатъчно да разгледаме задачата при $x > 0$, $y > 0$.

Ще използваме, че ако допирателните t_h и t_e съответно към хиперболата и елипсата са успоредни и нито h, нито e лежат между тези допирателни, то минималното разстояние между h и e е по-голямо или равно на разстоянието между t_h и t_e.

Досещаме се (не питайте как!), че точка $N\left(\sqrt{2};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ лежи на елипсата, а точка $M\left(2\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$ лежи на хиперболата, а допирателните в тях към съответните криви са успоредни. Уравненията на тези допирателни са

$$t_N:\ y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}, \qquad t_M:\ y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}.$$

Абсцисната ос се пресича от t_N в точка с абсциса $2\sqrt{2}$, а от t_M – в точка с абсциса $4\sqrt{2}$. Разстоянието между допирателните t_N и t_M е равно на

$$(4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{1,6}.$$

Оттук $(a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2 > 1,6$.

Забележка. Минималното разстояние се достига, когато нормалата към хиперболата в точка M съвпада с нормалата към елипсата в точка N. Това означава, че векторите

$$(c;\ 4d),\ (b;\ a)\ \text{ и }\ (a-c;\ b-d)$$

са колинеарни. Оттук се получава система с четири уравнения

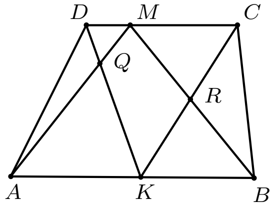
$$ab = 4, \quad c^2 + 4d^2 = 4, \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{4d} = \frac{b}{a}.$$

Решенията може да намерим с помощта на системата за компютърна алгебра *Matematika*. Минималното разстояние между хиперболата и елипсата е 1,774795... и се достига в точките

$$(a;\ b) = (2,390987\ldots;\ 1,672955\ldots), \quad (c;\ d) = (1,627227\ldots;0,581406\ldots).$$

Оценката в следващата задача може да се направи с параметризация и изследване на функция, но това решение е доста дълго и трудоемко ([3]). То може да се опрости с използване на неравенството на Бергстрьом.

Задача 6. На основата AB на трапец $ABCD$ е избрана точка K. Точката M от страната CD е такава, че сечението на триъгълниците ABM CDK има максимално лице. Да се докаже, че $DM.AB = AK.CD$.



Решение. Ако означим $AB = a$, $CD = b$, $AK = ka$, $DM = xb$, то трябва да докажем, че търсеното лице е максимално при $x = k$. Нека $AM \cap DK = Q$, $BM \cap CK = R$. Лесно изразяваме

$$S_{MQK} = \frac{kabx}{ka + xb} \cdot \frac{h}{2} = \left(ka - \frac{(ka)^2}{ka + xb}\right) \cdot \frac{h}{2}$$

и аналогично $S_{MKR} = \left((1-k)a - \dfrac{(1-k)^2a^2}{(1-k)a + (1-x)b}\right) \cdot \dfrac{h}{2}$. Лицето на четириъгълника $MQKR$ е максимално, когато сборът

$$\frac{(ka)^2}{ka + xb} + \frac{(1-k)^2a^2}{(1-k)a + (1-x)b}$$

е минимален. От неравенството $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geqq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$ следва, че

$$\frac{(ka)^2}{ka + xb} + \frac{(1-k)^2a^2}{(1-k)a + (1-x)b} \geqq \frac{(ka + (1-k)a)^2}{ka + xb + (1-k)a + (1-x)b} = \frac{a^2}{a+b}.$$

Този минимум се достига, когато $\dfrac{ka}{(1-k)a} = \dfrac{ka + xb}{(1-k)a + (1-x)b}$, т.е. при $x = k$.

А сега да сравним *еврейските* и *обичайните* задачи. Ето как би изглеждал устният изпит по математика за един благонадежден кандидат (примерите са от изпитни варианти по това време).

1. Колко са корените на уравнението $|x^2 - 2|x| + 1| = 3|2 - x| - 1$?

2. Числото $p > 4$ е просто. Да се докаже, че $p^2 - 1$ се дели на 24.

3. Да се построи графиката $y = 2^{|x-1|}$.

4. Ако x и y са вектори и векторите $x + y$ и $x - y$ имат една и съща дължина, да се докаже, че x и y са перпендикулярни.

Случаят с еврейските задачи едва ли е изолиран, но друг подобен не е описан. Причините за това навярно са същите, поради които и днес изпитните злоупотреби се покриват с мълчание.

Литература

1. A. Shen, 1994. *Entrance Examinations to the Mekh-mat.* Mathematical Intelligencer, vol 16, no 4. Springer-Verlag, New York.

2. T. Khovanova, A. Radul, 2011. *Jewish Problems.* `arxiv.org/pdf/1110.1556.pdf`

3. Ilan Vardi, 2006. *Mekh-mat entrance examination problems*, IHES preprint M/00/06 `www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/mekh-mat.html`

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

От Математическо състезание „Акад. Никола Обрешков“, 18.02.2018

Ганка Вътева и Виолета Тодорова

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $\dfrac{2018^3-8}{4040+2018^2}$ е равна на:

А) 2020 **Б)** 2018 **В)** 2017 **Г)** 2016

2. През първия час работник свършил $\dfrac{1}{5}$ от работата, а през втория час – още 40% от останалата част. Каква част от работата е свършил работникът за двата часа?

А) $\dfrac{13}{5}$ **Б)** $\dfrac{13}{25}$ **В)** $\dfrac{9}{25}$ **Г)** $\dfrac{9}{5}$

3. Едночленът $2^2.3^3xy^2z^3$ е повдигнат на степен n. Ако степента на получения едночлен е 198, то колко е n?

А) 33 **Б)** 22 **В)** 18 **Г)** 11

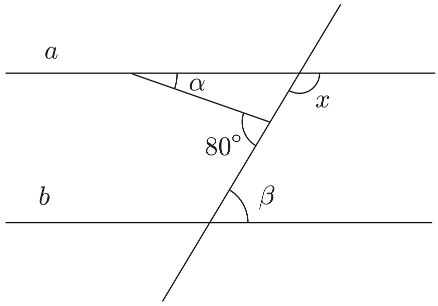
4. Колко са целите числа x, за които изразът $\dfrac{45-30x}{9-4x^2}$ приема цели стойности?

А) 2 **Б)** 6 **В)** 4 **Г)** 8

5. На чертежа правите a и b са успоредни. Каква е градусната мярка на ъгъла, означен с x, ако мерките на ъглите, означени с α и β, се отнасят както 3 : 5?

А) 150° **Б)** 80°

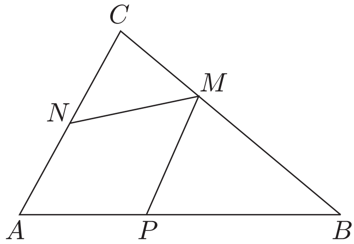
В) 130° **Г)** 170°



6. Изразът $(-1-2)^2-\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{0{,}25}{\frac{1}{3}}$ е равен на:

А) 6 **Б)** $2+\dfrac{1}{2}$ **В)** $-8^2-6-1\dfrac{1}{2}$ **Г)** $-8^2-2-2\dfrac{1}{12}$

7. В $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 52^\circ$. Точките M, N и P са съответно от страните му BC, CA и AB, като $CM = CN$ и $BM = BP$. Колко градуса е мярката на $\sphericalangle PMN$?



А) 52° **Б)** 64°

В) 116° **Г)** 27°

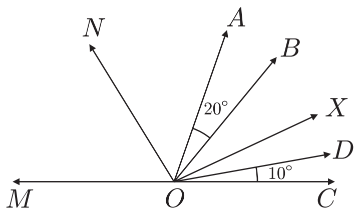
8. След сушенето на 14 кг кайсии, съдържащи 75% вода, са получени сушени кайсии, които съдържат 65% вода. Какво количество вода се е изпарило?

А) 7 кг **Б)** 6 кг **В)** 10 кг. **Г)** 4 кг

9. Да се намери броят на трицифрените числа, съставени от различни цифри и такива, че първата им цифра е равна на квадрата на частното на втората и третата цифра.

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

10. На чертежа $\sphericalangle AOB = 20^\circ$ и $\sphericalangle COD = 10^\circ$. Ъглите AOX и XOC са равни. Ъглите AON и MON също са равни. Ъгъл NOC е три пъти по-голям от ъгъл BOD.
Точките M, O, C лежат на една права. Мерките на $\sphericalangle NOC$ и $\sphericalangle AOD$ са:



А) $126^\circ;\ 62^\circ$ **Б)** $126^\circ;\ 72^\circ$ **В)** $162^\circ;\ 62^\circ$ **Г)** $162^\circ;\ 72^\circ$

11. В равнобедрен тъпоъгълен триъгълник ABC с основа AB е построена височината CH. Точката I е пресечната точка на ъглополовящите на ъглите при основата, а точката O е пресечната точка на симетралите на бедрата на дадения триъгълник, като $HI = HO$. Ако L $(L \in AO)$ е ъглополовящата в $\triangle ACO$, то колко градуса е мярката на $\sphericalangle ALC$?

А) 63° **Б)** 108° **В)** 117° **Г)** 99°

12. В $\triangle ABC$, $AC = BC$. Точка M е от страната AB, а точка K е от страната BC и са такива, че $CM = CK$ и $\sphericalangle BMK = 23^\circ$. Колко градуса е мярката на $\sphericalangle ACM$?

А) 23° **Б)** 69° **В)** 46° **Г)** 64°

13. Колко е стойността на израза $2a + b$, ако в него a и b приемат стойностите, за които изразът

$$4a^2 + b^2 + 36 + 4ab - 20a - 10b$$

е с най-малка стойност?

А) 16 **Б)** 36 **В)** 11 **Г)** 5

14. Ако през първия ден на поход туристи са изминали $\dfrac{5}{14}$ от заплануваното разстояние, а през втория ден – 5 % повече от изминатото през първия ден и $\dfrac{a}{b}$ е несъкратима дроб, показваща каква част от заплануваното разстояние им остава да изминат, то колко е $a+b$?

А) 71 **Б)** 76 **В)** 77 **Г)** 97

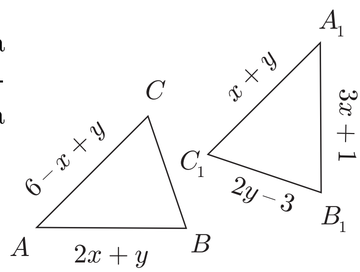
15. Ако $x^3 = 7x + 3y$ и $y^3 = 7y + 3x$ $(x \neq \pm y)$, то $x^2 + y^2$ е равно на:

А) 3 **Б)** 7 **В)** 10 **Г)** 14

16. На чертежа $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Ако са изпълнени зависимостите за дължините на страните, намерете с колко процента дължината на AC е по-голяма от дължината на B_1C_1.

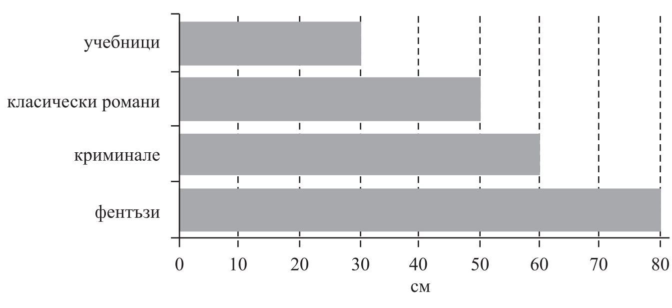
А) 25% **Б)** 60%

В) 40% **Г)** 52%



ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

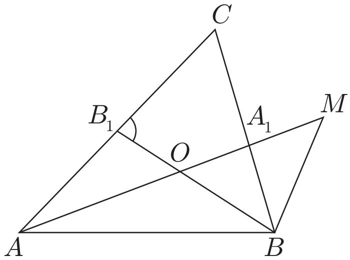
17. Иво подредил книгите си в библиотеката по теми. Подредени една до друга, гледани отстрани, книгите изглеждали като дадената диаграма. Една пета от книгите са с дебелина 2 см, 40% са с 1,5 см, а останалите – с 3 см.



А) Колко книги има Иво?

Б) Колко процента от книгите му са учебници, ако 3 от тях са с дебелина 2 см, а останалите с дебелина 3 см?

18. В $\triangle ABC$ са построени ъглополовящите AA_1 $(A_1 \in BC)$ и BB_1 $(B_1 \in AC)$, които се пресичат в точка O. Върху правата AO е избрана точка M така, че $BO = BM$, $\sphericalangle ABM = 135^\circ$ и O е между A и M. Колко градуса е големината на $\sphericalangle CB_1B$?



Представете отговора на този въпрос, като попълните липсващия текст.

Ъгъл (1) .... е външен за $\triangle AOB$ и е ъгъл при основата на равнобедрения $\triangle$ ......(2). Другият ъгъл, прилежащ на основата на същия равнобедрен триъгълник, е ъгъл (3).......... Сборът на $\sphericalangle BAM$ и $\sphericalangle AMB$ е равен на (4)........... градуса. Външният ъгъл при върха B_1 на $\triangle ABB_1$ е ъгъл (5).......... Той е сбор на ъгъл (6)....... и ъгъл (7) ...... Следователно $\sphericalangle CB_1B$ е равен на (8) .... градуса.

19. В таблицата са посочени уравнения в първата колона и корените им – във втората колона. В листа за отговори срещу буквата, означаваща съответното уравнение, запишете номера на решението му.

А) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{7+3x}{6} = \dfrac{x-1}{6} - 1$	(1) няма решение
Б) $(x-2)(x+7) = 0$	(2) всяко x е решение
В) $(x-3)^2 - x(x-6) = 21$	(3) $x = \dfrac{(-12)^3 . (-2)^2 .45}{(-3)^5 .16.2^4}$, $x = \dfrac{(-1)^{2017} - (-1)^{2018}}{-(-1)^{2016} . (-1)^0}$
Г) $\|2x-7\| - \|21-6x\| = -6$	(4) $x = 1 + 3.2^{-4} + 3.1^2.2^{-2} + 4.2^{-6}$ $x = 2,5^2 - 9.2,5 + 4,5^2$
	(5) $x = \dfrac{3^{11}+3^{10}}{3^{11}-3^{10}}$ $x = \dfrac{2.7^n + 5.7^n}{7^{n-1} - 8.7^{n-1}}$

20. От град **A** за град **B** тръгва камион. Едновременно с него от **B** към **A** тръгва лека кола. След 20 мин. те се срещат на 30 км от **B.** След още 16 минути леката кола пристига в **A**.

а) Намерете скоростите на леката кола и камиона.

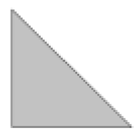
б) Намерете разстоянието между **A** и **B**.

в) След пристигането си в **A**, леката кола веднага тръгва обратно към **B**, а камионът след пристигането си в **B**, веднага тръгва към **A**. На какво разстояние от **A** ще бъде втората среща?

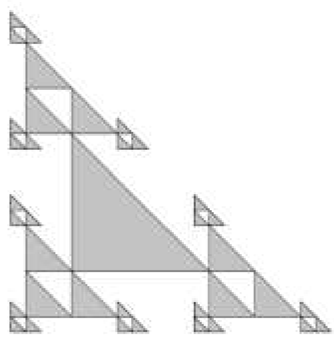
ВТОРИ МОДУЛ

21. ФРАКТАЛИ ОТ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Фракталът от триъгълници се образува последователно чрез следните стъпки:



• На първата стъпка имаме един равнобедрен правоъгълен триъгълник с катети 3 см;



• При всяка следваща стъпка във всеки ъгъл на триъгълник се появяват по три нови равнобедрени правоъгълни триъгълника, с катети, равни на една трета от катетите на предходния триъгълник.
Чертежът показва резултата след третата стъпка.

А) От колко триъгълници се състои фрактал след четири стъпки?

Б) Намерете лицето на фрактала след петата стъпка.

22. ПАРАМЕТРИЧНО УРАВНЕНИЕ

Дадено е уравнението $|a|\,x + 9 = a^2 + 3x$, където a е параметър.

А) За кои стойности на параметъра a уравнението има решение? Намерете това решение.

Б) За кои стойности на параметъра a уравнението има за корен числото $\left|-\dfrac{1}{2}+2\right|$?

В) За кои стойности на параметъра a даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $-2\,(x+1)+2=-2x$?

За задачи 23. и 24. трябва да запишете решението с необходимите обосновки.

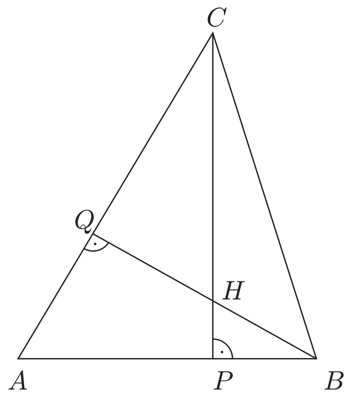
23. Една бригада от 22 мъже и 10 жени при 10-часов работен ден прибира реколтата от овощна градина за 8 дни. За колко дни друга бригада от 28 мъже и 15 жени при 12 часов работен ден, би прибрала реколтата от същата градина, ако производителността на 5 жени е равна на производителността на 4 мъже?

24. Точката H е пресечната точка на височините BQ ($Q \in AC$) и CP ($P \in AB$) в остроъгълния $\triangle ABC$ и $AQ = QH$.

А) Докажете, че $CH = AB$.

Б) Намерете мярката на $\sphericalangle ACB$.

В) Ако сборът от дължините на отсечките BQ и HQ е 17 см, намерете дължината на страната AC в сантиметри.



ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Г; **2.** Б; **3.** А; **4.** Г; **5.** В; **6.** А; **7.** Б; **8.** Г; **9.** Г; **10.** А; **11.** Г; **12.** В; **13.** Г; **14.** А; **15.** Б; **16.** В; **17.** (А) 100; (Б) 11%; **18.** (1) BOM, (2) $\triangle BOM$, (3) OMB, (4) 45°, (5) CB_1B, (6) B_1AB, (7) ABB_1, (8) 45°; **19.** (А) 2; (Б) 5; (В) 1; (Г) 3; **20.** (А) 90 km/h; 72 km/h; **21.** (А) 118, (Б) $11\dfrac{1}{6}$; **22.** (А) при $a = \pm 3$, $\forall x \in \mathbb{Q}$; при $a < 0$, $a \neq -3$, $x = 3 - a$; при $a \geq 0$, $a \neq 3$, $x = 3 + a$; (Б) $a = \pm 1,5$; (В) $a = \pm 3$.

23. Цялата работа означаваме с 1. Ако производителността на един мъж е y, то на една жена е $\dfrac{4}{5}y$. За първата бригада получаваме уравнението $\left(22y + 10.\dfrac{4}{5}y\right).10.8 = 1$. Оттук $y = \dfrac{1}{2400}$, т.е. производителността на една жена е $\dfrac{1}{3000}$.

С x означаваме дните, за които втората бригада ще прибере реколтата. От уравнението $\left(28.\dfrac{1}{2400} + 15.\dfrac{1}{3000}\right).12.x = 1$ и намираме $x = 5$ дни.

24. А) От $AQ = QH$, $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQH = 90^\circ$ и $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ACP = 90^\circ - \sphericalangle A$ следва, че $\triangle CHQ \cong \triangle BQA$ и оттук $CH = AB$.

Б) От доказаната еднаквост следва и равенството $CQ = BQ$, т.е. правоъгълният триъгълник CQH е равнобедрен, откъдето $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.

В) Имаме $AC = AQ + CQ = HQ + BQ = 17$ cm.

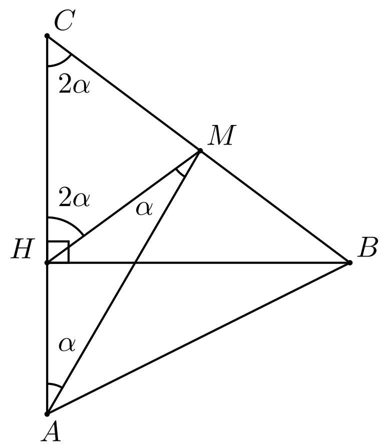
ЗА МЕДИАНАТА И ПОЛЗАТА ОТ НЕЯ

Кое е първото свойство на медианата, за което се сещате? Ако сте седмокласник, навярно то е за *медианата към хипотенузата в правоъгълния триъгълник* – тя е равна на половината от хипотенузата и разделя триъгълника на два равнобедрени триъгълника. Дори в условието на задачата да не се споменава за нея, често е полезно да си я построим. Ще илюстрираме това твърдение с няколко задачи.

Задача 1. В остроъгълен триъгълник ABC са построени медианата AM и височината BH. Известно е, че $AH = 1$ и $2\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$. Да се намери дължината на страната BC.

Решение. Ако означим $\sphericalangle MAC = \alpha$, по условие $\sphericalangle C = 2\alpha$. В правоъгълния триъгъник HBC построяваме медианата HM към хипотенузата. Имаме

$$HM = CM = MB.$$



Триъгълникът CHM е равнобедрен и

$$\sphericalangle CHM = \sphericalangle C = 2\alpha.$$

Тъй като $\sphericalangle CHM$ е външен за $\triangle AHM$, имаме

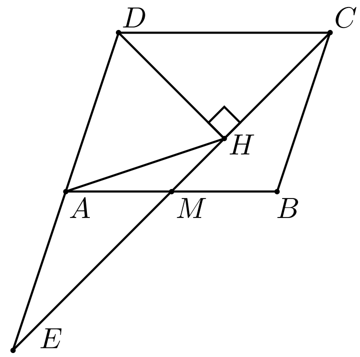
$$\begin{aligned} 2\alpha = \sphericalangle CHM &= \sphericalangle HAM + \sphericalangle AMH = \\ &= \alpha + \sphericalangle AMH. \end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle AMH = \alpha$, т.е. $\triangle AHM$ е равнобедрен и $HM = AH = 1$. Оттук $BC = 2HM = 2$.

Задача 2. В успоредника $ABCD$ точката M е среда на AB, а H е пета на перпендикуляра от D към CM. Да се докаже, че $AD = AH$.

Решение. Да продължим CM до пресичането и с правата AD в точка E. Триъгълниците EAM и CBM са еднакви по втори признак. Следователно $AE = BC$, т.е. $AE = AD$. Това означава, че AH е медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник EHD. Оттук

$$AH = \frac{1}{2}DE = AD.$$



Особено полезна е медианата към хипотенузата в задачи с два правоъгълни триъгълника с обща хипотенуза. Тогава имаме две *равни* медиани към общата хипотенуза.

Задача 3. Даден е четириъгълник $ABCD$ с $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$. Да се докаже, че $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.

Решение. Правоъгълните триъгълници ABD и CBD имат обща хипотенуза BD. Ако M е средата на BD, построяваме медианите AM и CM в ABD и CBD. Имаме

$$AM = BM = DM = CM.$$

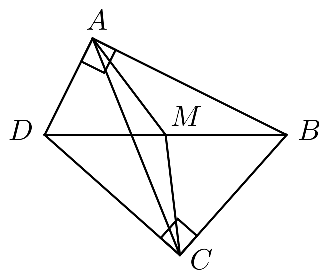
В равнобедрените триъгълници ACM и ADM означаваме съответно $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAM = \alpha$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle MAD = \beta$ и изразяваме ъглите срещу основата $\sphericalangle AMD = 180^\circ - 2\beta$, $\sphericalangle AMC = 180^\circ - 2\alpha$. Оттук

$$\sphericalangle DMC = \sphericalangle AMC - \sphericalangle AMD = 2\beta - 2\alpha.$$

Но $\sphericalangle DMC$ е външен ъгъл за равнобедрения $\triangle MBC$, следователно

$$\sphericalangle MCB = \sphericalangle MBC = \frac{1}{2}\sphericalangle DMC = \beta - \alpha$$

и оттук $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MCB + \sphericalangle ACM = \beta$.



Забележка. В решението използвахме, че $AD < AB$. В обратния случай се разсъждава аналогично (проверете). Освен това, от решението на задача 3 следва, че $\sphericalangle MAC = |\sphericalangle BDA - \sphericalangle DBC|$.

Задача 4. В успоредника $ABCD$ е взета точка P така, че $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD = 90^\circ$. Точките M и N са среди съответно на страните AB и CD. Ако $\sphericalangle DCP = \alpha$ и $\sphericalangle ABP = \beta$, да се изрази $\sphericalangle MPN$ чрез α и β, .

Решение. Без ограничение може да приемем, че P е вътрешна точка за $MBCN$. От свойството на медианата към хипотенузата в правоъгълните триъгълници ABP и CDP следва, че

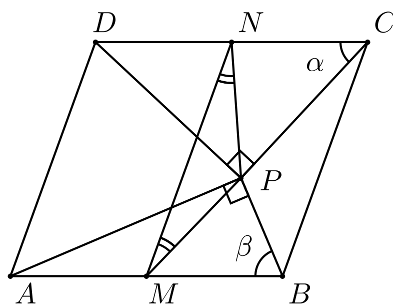
$$PM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = PN,$$

т.е. триъгълникът PMN е равнобедрен и $\sphericalangle MNP = \sphericalangle NMP = x$. Освен това, триъгълникът PNC е равнобедрен и външният ъгъл при върха му е $\sphericalangle DNP = 2\alpha$. Следователно

$$\sphericalangle DNM = \sphericalangle DNP - \sphericalangle MNP = 2\alpha - x.$$

Като използваме равенството $\sphericalangle BMN = \sphericalangle DNM = 2\alpha - x$ (кръстни ъгли), изразяваме $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BMN - \sphericalangle NMP = 2\alpha - 2x$. Тогава от сбора на ъглите в равнобедрения триъгълник MBP получаваме

$$2\beta + (2\alpha - 2x) = 180^\circ \iff x = \alpha + \beta - 90^\circ.$$



Задача 5. Даден е остроъгълен триъгълник $\triangle ABC$ с ортоцентър H и височини AA_1 и BB_1. Точката M е средата на CH, а P е средата на AB.

а) Да се докаже, че MP е симетрала на A_1B_1.

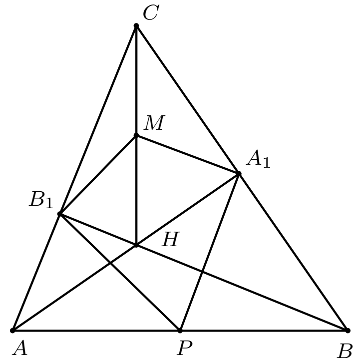
б) Ако $\sphericalangle ACB = 70^\circ$, да се намери $\sphericalangle A_1PB_1$.

в) Ако ъглополовящите на $\sphericalangle CAH$ и $\sphericalangle CBH$ се пресичат в точката O, да се докаже, че $AB = 2OP$.

Решение. а) В правоъгълните триъгълници CA_1H и CB_1H построяваме медианите към общата хипотенуза CH.

Имаме

$$(1) \qquad A_1M = B_1M = \frac{1}{2}CH.$$



В правоъгълните триъгълници ABA_1 и ABB_1 построяваме медианите към общата хипотенуза AB. Имаме

$$(2) \qquad A_1P = B_1P = \frac{1}{2}AB.$$

От (1) и (2) следва, че MP е симетрала на A_1B_1.

б) Ако в $\triangle ABC$ означим $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, имаме $\alpha + \beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. В равнобедрените триъгълници APB_1 и BPA_1 изразяваме съответно $\sphericalangle APB_1 = 180^\circ - 2\alpha$ и $\sphericalangle A_1PB = 180^\circ - 2\beta$. Тогава

$$\sphericalangle APB_1 + \sphericalangle A_1PB = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

и оттук

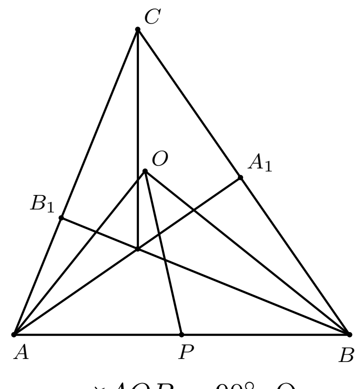
$$\sphericalangle A_1PB_1 = 180^\circ - (\sphericalangle APB_1 + \sphericalangle A_1PB) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ.$$

в) При означенията от б), от $\triangle BAA_1$ изразяваме $\sphericalangle BAA_1 = 90^\circ - \beta$ и

$$\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAA_1 = \alpha - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

За $\triangle AOB$ имаме

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAO &= \sphericalangle BAA_1 + \frac{1}{2}\sphericalangle A_1AC = \\ &= 90^\circ - \beta + \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 90^\circ) = \\ &= 45^\circ + \frac{1}{2}(\alpha - \beta).\end{aligned}$$



Аналогично $\sphericalangle ABO = 45^\circ + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Следователно $\sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 90^\circ$ и оттук $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. От свойството на медианата OP към хипотенузата в правоъгълния $\triangle AOB$ следва, че $AB = 2OP$.

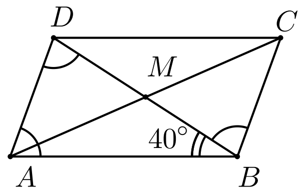
Забележка. Може да се докаже, че точка O лежи на правата MP. За целта е достатъчно да се покаже, че $\sphericalangle APO = \sphericalangle MPA$.

Друго допълнително построение, свързано с медианата, е *удвояването на медианата.* Ако на лъча $CM^{\rightarrow}$, определен от медианата CM в триъгълника ABC нанесем отсечка $CN = 2CM$, получаваме *успоредник* $ANBC$. Това *разместваа* равните отсечки и ъгли и понякога може да е полезно.

Задача 6. В триъгълника ABC медианата BM е два пъти по-малка от страната AB и сключва с нея ъгъл 40°. Да се намери $\sphericalangle ABC$.

Решение. На продължението на медианата BM след точка M да нанесем отсечка $MD = BM$. От условието

$$AB = 2BM = BD$$



следва, че триъгълникът ABD е равнобедрен. Следователно

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$

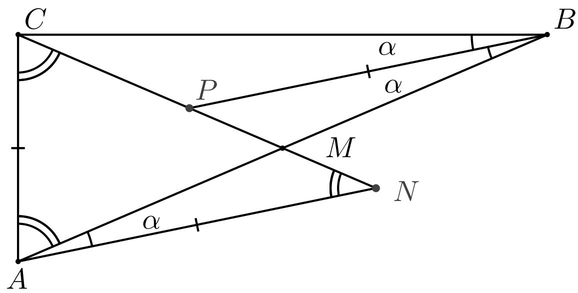
Четириъгълникът $ABCD$ е успоредник, тъй като диагоналите му се разполовяват в пресечната си точка. Оттук $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADB = 70^\circ$ и

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 110^\circ.$$

Задача 7. В правоъглния тръгълник ABC е построена медианата CM ($M \in AB$) към хипотенузата. Ъглополовящата на $\sphericalangle B$ пресича CM в точката P. Ако $BP = AC$, да се намери $\sphericalangle BAC$.

Решение. Нека $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA = \alpha$. От равенствата $AM = MC = MB$ лесно следва, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACM = 90^\circ - 2\alpha$.

Да удвоим медианата PM в триъгълника ABP, т.е. да вземем точка $N \in PM$, за която $PM = MN$.



Тогава $ANBP$ е успоредник и $PB = AN$. По условие $AC = BP$, следователно $AN = AC$. В равнобедрения триъгълник ANC имаме

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle ACN = 90^\circ - 2\alpha.$$

Като забележим, че $\sphericalangle NAB = \sphericalangle PBA = \alpha$ (кръстни), от сбора на ъглите в триъгълник ANC получаваме

$$2(90^\circ - 2\alpha) + (\alpha + 90^\circ - 2\alpha) = 180^\circ.$$

Оттук $\alpha = 18^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 54^\circ$.

Задача 8. Даден е петоъгълник $ABCDE$, в който $AE = AD$, $AC = AB$ и $\sphericalangle DAC = \sphericalangle AEB + \sphericalangle ABE$. Докажете, че CD е два пъти по-голяма от медианата AK в триъгълника ABE.

Решение. На продължението на медианата AK след точка K нанасяме отсечка $KF = AK$.

Четириъгълникът $AEFB$ е успоредник, следователно

$$BF = AE = AD$$

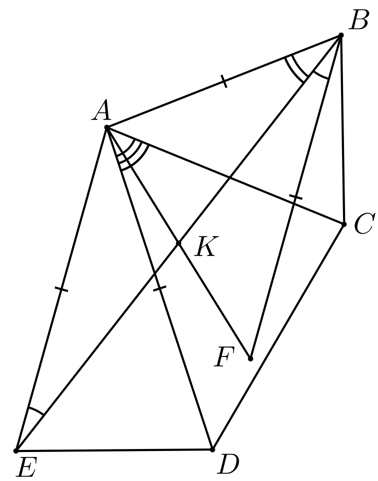
и $\sphericalangle KBF = \sphericalangle KEA$. Оттук получаваме равенството

$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABK + \sphericalangle KBF = \sphericalangle DAC.$$

Освен това $AB = AC$, следователно

$$\triangle ABF \cong \triangle CAD.$$

Оттук $CD = AF = 2AK$.



Задача 9. Даден е петоъгълник $ABCDE$, в който $AE = ED$, $BC = CD$, $\sphericalangle C = \sphericalangle E = 90^\circ$ и M е средата на AB. Да се докаже, че $EM \perp MC$.

Решение. Триъгълниците ADE и BDC са правоъгълни и равнобедрени. Нека $\sphericalangle BAD = \alpha$ и $\sphericalangle ABD = \beta$.

В триъгълника ABE удвояваме медианата EM; имаме $EM = ML$. Тогава $ALBE$ е успоредник и $BL = AE$, а $\sphericalangle ABL = \sphericalangle BAE = 45^\circ + \alpha$.

В триъгълника ABC удвояваме медианата CM; имаме $CM = MK$. Тогава $AKBC$ е успоредник и $AK = BC$, а $\sphericalangle KAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ + \beta$.

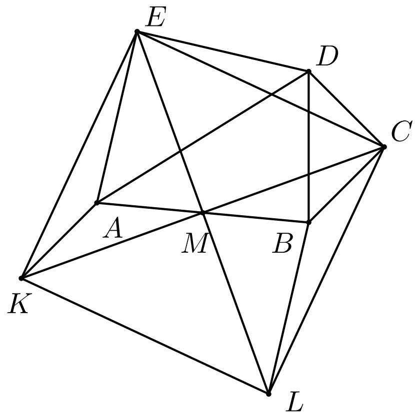
Успоредниците $AKBC$ и $ALBE$ имат общ диагонал AB, следователно и другите им диагонали KC и LE се разполовяват в средата M на AB. Това означава, че четириъгълникът $KLCE$ е успоредник.

От равенствата $AK = CB = CD$, $AE = DE$,

$$\sphericalangle KAE = 360^\circ - (45^\circ + \alpha + 45^\circ + \beta) = 270^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\sphericalangle EDC = 2.45^\circ + (180^\circ - \alpha - \beta) = 270^\circ - \alpha - \beta$$

следва, че $\triangle KAE \cong \triangle EDC$. Оттук $KE = EC$, следователно успоредникът $KLCE$ е ромб.



Тогава диагоналите му KC и LE са перпендикулярни, т.е. $EM \perp MC$.

Задачи за самостоятелна работа

1. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 90^\circ$. Да се намери $\sphericalangle A$, ако:
  а) $AH = 3BH$, където CH е височина;
  б) $AB = 4CH$, където CH е височина.

2. В триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 30^\circ$ са построени височините AA_1 и BB_1, а M, N са средите на AC и BC. Да се докаже, че $MA_1 \perp NB_1$.

3. В триъгълника ABC медианата от върха A е четири пъти по-малка от страната AB и сключва с нея ъгъл 60°. Да се намери $\sphericalangle BAC$.

Отговор. 60°

4. В остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H са построени височините AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че:

  а) $\sphericalangle B_1A_1C = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle ABC$;

  б) височините AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи в триъгълника $A_1B_1C_1$.

5. Даден е триъгълник ABK с медиана BE. Външно за триъгълника са построени квадратите $BCDA$ и $BKMN$. Докажете, че медианата BE е перпендикулярна на CN и е два пъти по-малка от нея.

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Стойността на израза $(2\sqrt{5})^2 - \sqrt[3]{125}$ е:

А) 15 **Б)** 10 **В)** 5 **Г)** $4\sqrt{5} - 5$

2. Решенията на неравенството $81 \cdot 3^x > \dfrac{1}{9}$ са:

А) $(-2;\ +\infty)$ **Б)** $(-6;\ +\infty)$ **В)** $(-\infty;\ -6)$ **Г)** $(-\infty;\ 6)$

3. Стойността на израза $\log_4 36 - 2\log_4 3$ е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 30 **Г)** 27

4. Коренът на уравнението $\log_3(1 - x) = 4$ принадлежи на интервала:

А) $(62;\ 64)$ **Б)** $(-81;\ 79)$ **В)** $(79;\ 81)$ **Г)** $(-12;\ 10)$

5. Допустимите стойности на израза $\sqrt{\dfrac{3+x}{x-1}}$ са:

А) $[-3;\ -1]$ **Б)** $[-3;\ -1)$

В) $(-\infty;\ -3] \cup (-1;\ +\infty)$ **Г)** $(-\infty;\ -3] \cup (1;\ +\infty)$

6. Най-малката стойност на функцията $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x$ в интервала $[0;\ 2]$ е:

А) 1 **Б)** $-0,75$ **В)** 2 **Г)** -1

7. Изразът $\sin(\alpha + 2\pi) + \mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ е равен на:

А) $\sin\alpha + \cos\alpha$ **Б)** 0 **В)** $2\sin\alpha$ **Г)** $-\sin\alpha$

8. Множеството от решенията на уравнението $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ е:

А) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ **Б)** $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

В) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ **Г)** $(-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

9. Решенията на неравенството $\dfrac{5+x}{(x-7)(x-4)} \leq 0$ са:

А) $(-\infty;\ -5]$ **Б)** $[-5;\ 4) \cup (7;\ +\infty)$

В) $(-\infty;\ 7)$ **Г)** $(-\infty;\ -5] \cup (4;\ 7)$

10. Около остроъгълния триъгълник ABC е описана окръжност с център O и радиус $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Ако $BC = 5$, то $\sphericalangle BOC$ е равен на:

А) 150° **Б)** 120° **В)** 60° **Г)** 30°

11. Даден е равнобедрен триъгълник с основа 6. Центърът на вписаната в триъгълника окръжност разделя височината към основата в отношение $3 : 2$, считано от върха на триъгълника. Дължината на бедрото на триъгълника е:

А) 4 **Б)** 4,5 **В)** 6 **Г)** 9

12. В трапец може да се впише окръжност, бедрата му са равни на 3 и 5, а средната основа го дели на две части, чиито лица се отнасят както $5 : 11$. По-малката основа на трапеца е равна на:

А) 1 **Б)** 1,2 **В)** 1,5 **Г)** 2

13. Сборът на третия и петия член на аритметична прогресия е 8. Сумата от първите седем члена на прогресията е:

А) 32 **Б)** 20 **В)** 28 **Г)** 24

14. Случайните събития A и B имат съответно вероятности $0,7$ и $0,5$. Известно е, че вероятността на събитието $A \cup B$ е $0,9$. Вероятността на събитието $A \cap B$ е:

А) $0,05$ **Б)** $0,2$ **В)** $0,3$ **Г)** $0,4$

15. Ако медианата на статистическия ред $2,\ 2,\ 5,\ 5,\ m,\ 6,\ 7,\ 8$ е равна на $5,5$, то средната стойност е:

А) 5 **Б)** $5,125$ **В)** $5,5$ **Г)** 6

16. Даден е равнобедрен трапец със средна основа 6. Косинусът на ъгъла между основата и диагонала е равен на $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ Лицето на трапеца е равно на:

А) 12 **Б)** $10\sqrt{10}$ **В)** $10,8\sqrt{10}$ **Г)** 108

17. Правилен шестоъгълник $ABCDEF$ е вписан в окръжност с радиус $2\sqrt{3} + 2$. Радиусът на вписаната в триъгълника ACD окръжност е равен на:

А) 2 **Б)** $\sqrt{3}$ **В)** $2\sqrt{3} - 2$ **Г)** 1

18. В правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AC = 20$ е построена медианата BM. Вписаната в триъгълника ABM окръжност се допира до BM в точка P. Ако $BP : PM = 3 : 2$, да се намери BC.

А) 12 **Б)** 15 **В)** 16 **Г)** 18

19. В равнобедрен триъгълник ABC с основа AC височините BE и CH се пресичат в точка K и $BH = 6$, а $KH = 3$. Да се намери лицето на триъгълника CBK.

А) 10 **Б)** 12 **В)** 15 **Г)** 20

20. В равнобедрен триъгълник PMK с основа MK е вписана окръжност с радиус $2\sqrt{3}$. Вписаната окръжност пресича височината PH в точка T, като $PT : TH = 1 : 2$. Да се намери обиколката на триъгълника PMK.

А) 36 **Б)** 30 **В)** 24 **Г)** 48

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Да се намери най-малкият корен на уравнението
$$2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 5^{2x+1} = 0.$$

22. Да се намери най-малката цяла стойност на параметъра m, за която решението на системата $\begin{cases} 5x + 3y = 4, \\ y - 2x = 2m \end{cases}$ удовлетворява неравенството $x > -y$.

23. Точките A, B, C са от окръжност с радиус 2 и център O, а точката K е от допирателната към окръжността в точка B и $\sphericalangle AKC = 46^\circ$. Дължините на отсечките AK, BK и CK образуват в този ред растяща геометрична прогресия. Да се намери AC.

24. Каква е вероятността случайно избрано число от множеството на трицифрените числа, в чийто запис участват само нечетни цифри, да се дели на 9?

25. В окръжност са построени хордите AC и BD, които се пресичат в точка E. Допирателната към окръжността в точка B е успоредна на AC. Ако $EA : DA = 3 : 4$ и лицето на DCB е 16, да се намери лицето на BCE.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. За кои стойности на параметъра a сборът на $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ е равен на 1 за поне една стойност на x?

27. Бедрото на равнобедрения триъгълник ABC е 15, а лицето му е 67,5. Към основата AC и към страната BC са построени височините BE и AH, които се пресичат в точка O. Да се намери лицето на триъгълника BOH.

28. При $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$ да се намери най-голямата стойност на израза
$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}.$$

Отговори и решения

1. А); **2.** Б); **3.** Б); **4.** Б); **5.** Г); **6.** Б); **7.** В); **8.** Б); **9.** Г); **10.** Б); **11.** Б); **12.** А); **13.** В); **14.** В); **15.** Б); **16.** А); **17.** А); **18.** В); **19.** В); **20.** А); **21**. -1; **22**. -2; **23**. $4\sin 67^\circ$; **24**. $\dfrac{11}{125}$; **25**. 9.

26. Тъй като $\cos^2 x + 1 > 0$ и $\cos^2 x + 5 > 0$, имаме

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1 \Leftrightarrow \log_a((\cos^2 x + 1)(\cos^2 x + 5)) = 1,$$

т.е. $\log_a(\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5) = 1$. При $0 < a \neq 1$ разглеждаме уравнението

$$\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5 = a.$$

То има решение, когато a принадлежи на множеството от стойностите на $\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5$, което е множеството от стойностите на квадратната функция $g(t) = t^2 + 6t + 5$ при $t \in [0;\ 1]$.

Върхът на параболата $g(t) = t^2 + 6t + 5$ има абсциса $t_0 = -3 < 0$, следователно в интервала $[0;\ 1]$ функцията $g(t)$ е растяща. В този интервал множеството от стойностите на $g(t)$ е $[g(0);\ g(1)]$, т.е. $[5;\ 12]$.

Търсените стойности са $a \in [5;\ 12]$.

27. Имаме $AH = \dfrac{2\cdot 67,5}{15} = 9$. От правоъгълния триъгълник AHB намираме $BH = \sqrt{225-81} = 12$. Оттук $HC = 3$. Тогава $S_{ACH} = \dfrac{27}{2}$. Тъй като $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOH \Rightarrow \sphericalangle CAH = \sphericalangle OBH$, то $\Delta BOH \sim \Delta ACH$, откъдето $S_{BOH} = S_{ACH}\cdot \dfrac{BH^2}{AH^2} = \dfrac{27\cdot 144}{2\cdot 81} = 24$.

28. Коренуваните изрази $(x-1)(y-x)$, $(7-y)(1-x)$ и $(x-y)(y-7)$ са неотрицателни, а произведението им е $-(x-1)^2(y-x)^2(7-y)^2 \leqq 0$. Следователно $(x-1)(y-x)(7-y) = 0$, т.е. $x = 1$, $x = y$ или $y = 7$.

При $x = 1$ изразът става $\sqrt{(1-y)(y-7)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $y \in [1;7]$. В този интервал функцията $f(y) = (1-y)(y-7)$ има максимум $f(4) = 9$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е 3.

При $x = y$ изразът става $\sqrt{(7-x)(1-x)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $x \in [0;1]$. В този интервал функцията $g(x) = (1-x)(7-x)$ има максимум $g(0) = 7$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е $\sqrt{7}$.

При $y = 7$ изразът става $\sqrt{(x-1)(7-x)}$. Дефиниционното множество и условието водят до ограничението $x \in [1;3]$. В този интервал функцията $f(x) = (x-1)(7-x)$ има максимум $f(3) = 8$, т.е. най-голямата стойност на дадения израз е $2\sqrt{2}$.

Следователно търсената най-голяма стойност е 3.

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

Очакваме Вашите решения, най-хубавите от които ще публикуваме в брой 5/2018.

* * *

Задача 1. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$. На страната BC е избрана точка M, а на страната CD – точка N така, че $\sphericalangle MAN = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$. Да се докаже, че $MN = BM + ND$.

Задача 2. Петър има 10^9 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб с ръб 10^3 с изцяло бяла повърхност. Най-малко колко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър?

Задача 3. Безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ е образувана по правилото: $a_1 = 1$ и за всяко $n > 1$ ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, а ако този остатък е 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Да се докаже, че всяко естествено число се среща безкраен брой пъти в редицата. (Редицата започва с 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3,...)

Редколегията на списание *Математика* се извинява за допуснатата грешка в условието на конкурсна задача 2. от брой 2/2018 и благодари на читателите, които ни писаха за нея. Вярното условие на задачата е:

Задача 2. Даден е триъгълник ABC и външновписаните му окръжности k_a, k_b и k_c, които се допират съответно до страните BC, CA и AB. Нека I е центърът на k_c и M е средата на IC. Допирните точки на k_a и k_b съответно със страните BC и AC са A_1 и B_1, а AA_1 и BB_1 се пресичат в точка N. Да се докаже, че точките N, B_1, A и M лежат на една окръжност.

Срокът за представяне на решенията е 31.05.2018 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 1/2018 г.

Задача 1. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са естествени числа с произведение P и n е нечетно число, докажете, че

$$\gcd(a_1^n + P, a_2^n + P, \ldots, a_n^n + P) \leqq 2\gcd(a_1, \ldots, a_n)^n.$$

Решение. Нека $d = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$ и $a_k = db_k$, където $b_1, \ldots, b_n$ са естествени числа и $\gcd(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Тогава

$$\gcd(a_1^n + P, \ldots, a_n^n + P) = d^n \gcd(b_1^n + Q, \ldots, b_n^n + Q),$$

където $Q = b_1 b_2 \cdots b_n$. Следователно е достатъчно да докажем, че

$$D = \gcd(b_1^n + Q, \ldots, b_n^n + Q) \leq 2.$$

Имаме $b_1^n \equiv b_2^n \equiv \ldots \equiv b_n^n \equiv -Q \pmod D$. Ако p е общ прост делител на D и Q, то

$$b_1^n \equiv b_2^n \equiv \ldots \equiv b_n^n \equiv -Q \equiv 0 \pmod p,$$

т.е. $p \mid b_1, b_2, \ldots, b_n$, което противоречи на $(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Следователно $(D, Q) = 1$. Но

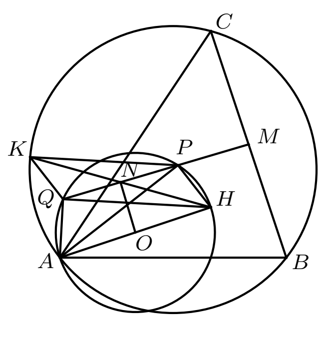
$$Q^n = b_1^n b_2^n \ldots b_n^n \equiv (-Q)^n \pmod D,$$

следователно $D \mid 2Q^n$ (тъй като n е нечетно). Оттук $D \mid 2$, т.е. $D \leq 2$, което искахме да докажем.

Задачата е решена от **Валери Ванков** (8. клас, СМГ), **Борислав Кирилов** (8. клас, ПЧМГ) и **Евгени Кайряков** (10. клас, СМГ).

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с ортоцентър H. Точката M е средата на страната BC, а P и Q са точки от окръжността с диаметър AH, различни от A, като M лежи на правата PQ. Докажете, че ортоцентърът на $\triangle APQ$ лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Нека O е средата на AH и N е средата на PQ; тогава $ON \perp PQ$. Нека K е ортоцентърът на APQ.



От $AP \perp KQ$ и $KP \perp HP$ следва, че $KQ \parallel PH$. Аналогично $KP \parallel QH$, т.е. $KPHQ$ е успоредник и KH и PQ имат обща среда N.
Тъй като OM е диаметър на окръжността k_9 на деветте точки за $\triangle ABC$ и $\sphericalangle ONM = 90^\circ$, то N лежи на k_9. Хомотетия с център H и коефициент 2 изобразява N в K, а k_9 в описаната около $\triangle ABC$ окръжност, следователно K лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задачата е решена от **Валери Ванков** (8. клас, СМГ), **Борислав Кирилов** (8. клас, ПЧМГ) и **Евгени Кайряков** (10. клас, СМГ).

Задача 3. Дадени са две различни естествени числа m и n. Фигура се движи по точките с целочислени координати в равнината, като от точка с координати (x, y) може да се премести в точка от вида $(x \pm m, y \pm n)$ или $(x \pm n, y \pm m)$. Определете за кои двойки $\{m, n\}$ фигурата може да се придвижи от точката $(0, 0)$ до $(1, 0)$ и за тези $\{m, n\}$ намерете най-малкия възможен брой ходове на фигурата от $(0, 0)$ до $(1, 0)$.

Решение. Ще докажем, че:

– ако $(m, n) > 1$ или m и n са нечетни, задачата няма решение.

– ако $(m, n) = 1$ и едно от числата, например m, е четно, търсеният брой е $\max\{2p, m\} + \max\{q, n\}$, където p е най-малкото цяло $t \geq 0$, за което $2mt \equiv \pm 1 \pmod{n}$ и q е това от числата $\dfrac{2mp-1}{n}$ и $\dfrac{2mp+1}{n}$, което е естествено.

Ясно е, че ако $(m, n) > 1$ задачата няма решение. Когато m и n са нечетни, фигурата тръгва от $(0, 0)$ и посещава само точки с координати от еднаква четност, т.е. не може да стигне до $(1, 0)$.

Нека m е четно, а n е нечетно. Има ходове от два вида:

$$\text{вид 1: } (x, y) \to (x \pm m, y \pm n) \qquad \text{вид 2: } (x, y) \to (x \pm n, y \pm n).$$

Редът на ходовете не е от значение, затова ще смятаме, че първо са ходовете от вид 1, а след това ходовете от вид 2. С ходове от първия вид фигурата се премества от

$$(x, y) \to (x \pm am, x \pm bn), \text{ където } a \equiv b \pmod{2}$$

с $\max\{|a|, |b|\}$ хода. Аналогично разсъждаваме, ако ходовете са само от вид 2.

Фигурата се движи по следния начин:

$$(0, 0) \xrightarrow[\text{вид 1}]{} (am, bn) \xrightarrow[\text{вид 2}]{} (am + cn, bn + dm) = (1, 0)$$

Тъй като $(m, n) = 1$, то $m \mid b$ и $n \mid d$, т.е. b е четно. Следователно и a е четно; нека $a = 2s$. Получаваме, че $2sm + cn = 1$. Всяко решение (s, c) на това уравнение съответства на маршрут с

$$\max\{2|s|, |b|\} + \max\{|c|, |d|\} \geq \max\{2|s|, m\} + \max\{|c|, n\}$$

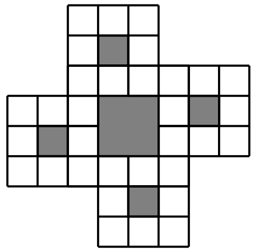
хода. За да бъде този брой минимален, търсим най-малкото $|s|$, което води до горния отговор.

Задачата е решена от **Валери Ванков** (8. клас, СМГ), **Борислав Кирилов** (8. клас, ПЧМГ) и **Евгени Кайряков** (10. клас, СМГ).

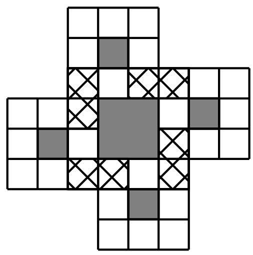
конкурсни задачи

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 1/2018 г.

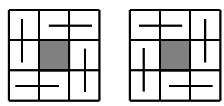
Задача 1. По колко различни начина белите квадратчета на фигурата могат да се покрият с 16 плочки домино?



Решение на Мария Дренчева. Забелязваме, че в никое от защрихованите правоъгълничета 2×1 на чертежа не може да се постави домино (иначе останалите бели квадратчета не могат да се покрият с домино). Следователно фигурата може да разреже на 4 квадратни рамки 3×3, без при това да се разреже нито едно домино.



Всяка рамка 3×3 може да се покрие с домино по 2 начина, показани вдясно. Следователно цялата фигура може да се покрие с домино по $2.2.2.2 = 16$ начина.



Задачата е решена и от **Златимир Петров** (5. клас, ППМГ, Монтана), **Николай Николаев** (5. клас, ППМГ, Видин), **Александър Мургин** (5. клас, ППМГ, Видин), **Христо Георгиев** (5. клас, ППМГ, Стара Загора), **Александра Ветова** (6. клас, МГ, Плевен), **Марин Христов** (6. клас, СМГ), **Михаил Михов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Ясен Пенчев** (6. клас, ПМГ, Габрово), **Йоан Василев** (7. клас, МГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), **Георги Тончев** (7. клас, МГ, Плевен).

Задача 2. В омагьосано езеро растат 20 лилии, подредени в редица и номерирани отляво надясно с числата от 1 до 20. На първата лилия има жабок. Той може да скочи на някоя от трите лилии вдясно и да продължи по същия начин: от лилия номер n на лилия номер $n+1$, $n+2$ или $n+3$. Жабокът знае, че има отрова на всяка лилия с номер просто число. По колко различни маршрута жабокът може да стигне до 20-тата лилия, като избегне отровните?

Решение на Александра Ветова. Жабокът трябва да избегне лилиите с номер 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Затова в началото той скача така:

$$1 \rightarrowtail 4 \rightarrowtail 6 \rightarrowtail 8 \text{ или } 9.$$

Маршрутът му отзад напред е

$$20 \leftarrowtail 18 \leftarrowtail 16 \text{ или } 15.$$

Тъй като лилии 11 и 13 са отровни, маршрутът задължително минава през лилия номер 12. Има 5 начина да стигне до лилия 12:

$8 \rightarrowtail 10 \rightarrowtail 12,\qquad 8 \rightarrowtail 9 \rightarrowtail 12,\qquad 8 \rightarrowtail 9 \rightarrowtail 10 \rightarrowtail 12$

$9 \rightarrowtail 10 \rightarrowtail 12,\qquad 9 \rightarrowtail 12$

Също по 5 начина може да се върнем от 15 или 16 до 12 (ситуацията е симетрична). Затова възможните маршрути са $5.5 = 25$.

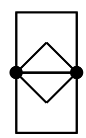
Задачата е решена от **Николай Николаев** (5. клас, ППМГ, Видин), **Ясен Пенчев** (6. клас, ПМГ, Габрово), **Мария Дренчева** (6. клас, СМГ), **Марин Христов** (6. клас, СМГ), **Михаил Михов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), **Георги Тончев** (7. клас, МГ, Плевен).

Задача 3. Отбелязах 12 сини точки, които са върхове на правилен дванадестоъгълник. Един квадрат наричам *специален*, ако два или повече от върховете му са измежду сините точки. Колко са различните специални квадрати?

Решение на Йоан Василев. Всеки две сини точки определят по 3 специални квадрата (виж чертежа). Две от 12-те сини точки могат да се изберат по

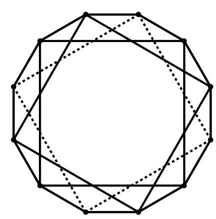
$$(12.11) : 2 = 66 \text{ начина.}$$

Така получаваме $66.3 = 198$ квадрата.



Сред тях обаче има три квадрата, които са броени по няколко пъти (виж чертежа вдясно). Всеки от тези три квадрата е броен $(4.3) : 2 = 6$ пъти. Затова броят на различните специални квадрати е

$$198 - 3.5 = 183.$$



Задачата е решена и от **Ясен Пенчев** (6. клас, ПМГ, Габрово), **Мария Дренчева** (6. клас, СМГ), **Марин Христов** (6. клас, СМГ), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Ясмин Ердим** (7. клас, МГ, Плевен), а с малка неточност и от **Георги Тончев** (7. клас, МГ, Плевен).

ОЩЕ ЕДНА ИГРА ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИ ЛАГЕР

Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Една от отборните игри, провеждана традиционно на математическите лагери, е „Математически конквистадор“, при който отборите се стараят с вярно решените си задачи да завладяват територии от игралното табло – свободни (в първата фаза) или чужди (във втората). Едно задачите от една от скоро проведените игри. Отговорите са в края на темата.

1. За колко цели стойности на n числото $(2018+n):(2018-n)$ е цяло?

2. Кое е най-малкото от седем поредни естествени числа, имащи произведение 32432400?

3. По колко начина можем да изберем три различни числа от $1, 2, 3, \ldots, 21$, така че сред избраните да няма такива с разлика 1?

4. Намерете най-малката стойност на израза

$$S = 2x^2 + 18y^2 - 6xy - 4x - 12y + 99.$$

5. Всяко поле на таблица 5×5 е оцветено в някакъв цвят. Във всеки ред и всяка колона се срещат най-много 4 различни цвята. Колко най-много цвята могат да бъдат използвани?

6. Около кръгла маса застанали 16 мъже и 22 жени. Имало 15 двойки жени, седящи една до друга. Колко са двойките мъже, седящи един до друг?

7. Намислих едно естествено число, умножих го по 17 и зачеркнах последната цифра на полученото произведение. Умножих по 11 полученото число и пак зачеркнах последната цифра на полученото произведение. По този начин остана числото 62. Кое е първоначалното число?

8. Правоъгълник 7×9 е съставен от единични квадратчета, чиито върхове са сини или жълти. Няма правоъгълен триъгълник с жълти върхове. Колко най-малко могат да са сините точки?

9. Във всяко поле на таблица 8×8 е записано цяло число. Ще казваме, че едно от тези числа е *едро*, ако сред съседите му по страна и диагонал има най-много едно, което е не по-малко от него. Колко най-много от числата могат да са едри?

10. Във всяко поле на таблица 7×7 е записано 0, 1 или -1. Сборът от числата във всеки квадрат 3×3 е 0. Какъв е най-големият възможен сбор на числата в таблицата?

11. Полетата на таблица 6×6 отначало са празни. На всеки ход се избира празно поле и в него се записва броят на запълнените съседни по страна полѐта. Какъв е най-големият възможен сбор от всички написани числа?

12. Какъв най-малък брой полѐта от дъска 9×9 трябва да отбележим, така че от всяко поле на дъската шахматен офицер да бие поне две отбелязани полѐта? (Офицерът бие и полето, на което стои.)

Решения

1. Отговор 12. Числото може да се запише като $4036 : (2018 - n) - 1$, така че $2018 - n$ трябва да е делител на $4036 = 2.2.1009$. Броят на тези целочислени делители е $2.3.2 = 12$.

2. Отговор 9.

3. Отговор 969. Да добавим и числото 22 (нямаме право да го избираме). Да кодираме редицата от избрани числа с три „И“ (= „избери това число и пропусни следващото“) и 16 „П“ (= „пропусни това число“). Броят на тези кодове е $19! : (3!.16!) = 969$.

4. Отговор 91. Тъй като $S = (x - 3y)^2 + (x - 2)^2 + (3y - 2)^2 + 91$, най-малката възможна стойност на израза е 91 и се достига при $x - 3y = x - 2 = 3y - 2 = 0$, което се случва при $x = 2$ и $y = 2/3$.

5. Отговор 17. Ето пример със 17 цвята:

1	1	5	6	7
1	1	8	9	10
2	2	11	12	13
14	15	3	3	4
16	17	3	3	4

Да допуснем, че са използвани поне 18 цвята. Да проследим колко *нови* цвята се появяват на всеки нов ред. Редовете са 5, а цветовете – 18, така че поне на три от редовете трябва да са се появили по 4 нови цвята. Тогава всяка колона има по един от цветовете от всяка от трите четворки, така че в колоната може да има най-много още един допълнителен цвят. В този случай в таблицата са ползвани само $12 + 5 = 17$ цвята – противоречие.

6. Отговор 9. На 15 от жените отдясно седи жена, значи на останалите 7 отдясно седи мъж. Значи на 7 от мъжете отляво седи жена, така че на останалите 9 отляво седи мъж.

7. Отговор 34. Преди последното задраскване съм имал кратно на 11, което може да е само 627 и числото преди това е било 57. Преди първото задраскване съм имал кратно на 17, което може да е само 578 и числото преди това е било 34.

8. Отговор 64. Или в реда, или в стълба на всяка жълта точка няма други останали жълта точки (ще казваме, че този ред или стълб е баща на точката; всеки е баща на най-много една жълта точка). Ако всички редове са бащи, броят на точките е най-много 8. Ако всички стълбове са бащи, броят на точките е най-много 10. Ако не всички редове и не всички стълбове са бащи, броят им е най-много $7 + 9 = 16$, така че и жълтите точки са най-много 16. Ако жълти са само точките от горния ред и от лявата колона, без тази в горния ляв ъгъл (общо 16), всички триъгълници с върхове в три от тях ще са тъпоъгълни. Така минималният брой сини точки е $80 - 16 = 64$.

9. Отговор 32. Ако разделим таблицата на 16 квадратчета 2×2, във всяко от тях едри могат да са само двете по-големи числа, и то ако другите две са по-малки от тях. Така едрите числа са не повече от 32. Те могат да са точно 32, както личи от примера, съставен от долепянето на четири такива таблици:

1	2	3	4	5	6	7	7
0	0	0	0	0	0	0	0

10. Отговор 11. В лявата таблица, във всяка от зоните с еднакви малки букви сборът е 0, а във всяка от зоните с еднакви големи букви сборът е не повече от 4 (понеже за допълването им до квадрат 3×3 са нужни 4 полѐта). В такъв случай общият сбор е не повече от $2.4 + 3 = 11$. Дясната таблица сочи, че той може да е точно 11.

a	a	a	e	e	e	
a	a	a	e	c	c	c
a	a	a	e	c	c	c
b	b	b		c	c	c
b	b	b	f	d	d	d
b	b	b	f	d	d	d
	f	f	f	d	d	d

1	1	1	1	1	1	1
1	−1	−1	1	−1	−1	1
0	−1	−1	0	−1	−1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	−1	−1	1	−1	−1	1
0	−1	−1	0	−1	−1	0
1	1	1	1	1	1	1

11. Отговор 60. В таблицата има 60 преградни единични отсечки и всяка има принос 1 към точно едно от числата (това от двете полѐта до нея, което се попълни второ; сборът не зависи от реда на запълване).

12. Отговор 16. Ако разположим 32 офицера по обиколката на дъската, всеки от тях бие поне две отбелязани клетки, а всяка клетка е бита от не повече от 4 офицера, така че клетките са поне $32.2 : 4 = 16$. За пример с 16, да поставим офицерите на полѐта $2, 3, \ldots, 8$ от редове 4 и 6 и на полѐта 2 и 8 от ред 5.

МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „Акад. Никола Обрешков“ Бургас, 18.02.2018

Юлия Хараламбиева и Алексина Кичева

Тема за 4. клас

Задачите с номера от 1. до 15. са с дадени четири възможни отговора – А), Б), В) и Г), като точно един от посочените отговори след всяка такава задача е верен. Задачите от 16. до 20. са с отворен отговор, който трябва да получите, като решите задачата.

1. Стойността на израза $246 : 6 - 2.(273 - 259)$ е равна на:

А) 46 **Б)** 13 **В)** 47 **Г)** 56

2. Намислих число. Умножих го с 5 и от произведението извадих 67. Получената разлика разделих на 2 и получих най-голямото двуцифрено число. Кое е числото, което намислих?

А) 13 **Б)** 260 **В)** 53 **Г)** 80

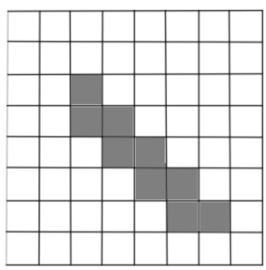
3. Ако със знака $*$ сме означили действието $b * d = 3.b - d : 2$, то на колко е равно $16 * 4 - 3$?

А) 43 **Б)** 19 **В)** 33 **Г)** 47

4. Квадрат и равностранен триъгълник имат равни обиколки. Страната на квадрата е с 4 см по-къса от страната на равностранния триъгълник. Колко квадратни сантиметра е лицето на квадрата?

А) 12 **Б)** 48 **В)** 144 **Г)** 256

5. Фигурата на чертежа е получена чрез затъмняване на част от единичните квадратчета на мрежата. Колко най-много квадратчета още могат да се затъмнят така, че да се увеличи лицето, но да не се промени периметърът на затъмнената фигура?



А) 55 **Б)** 16

В) 10 **Г)** 25

6. Велосипедистите Емо и Ванко тръгват едновременно един срещу друг от двата края на велоалея, дълга 8 км. След 16 минути Емо е в средата на алеята, а след още 4 минути среща Ванко. Колко метра в минута изминава Ванко?

А) 150 **Б)** 180 **В)** 200 **Г)** 250

7. В един клас има 26 ученици. От тях 16 имат отлична оценка по математика, 14 имат отличен по музика, двама нямат отличен нито по музика, нито по математика. Колко ученици в този клас имат отличен и по двата предмета?

А) 10 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 30

8. Намислих си едно число. Разделих го на 44 и получих равни частно и остатък. Кое е това число, ако е възможно най-голямо?

А) 45 **Б)** 1935 **В)** 1979 **Г)** 1980

9. Дани, Яни и Миро ще си купуват топка заедно. Пресметнали, че ако Дани даде за покупката с 4 лева по-малко от Яни, а Миро – два пъти повече от Дани, на всеки ще останат 2 лева за парче пица. Ако с парите, които има, Миро може да купи 3 парчета пица, колко лева струва топката?

А) 8 **Б)** 16 **В)** 10 **Г)** 12

10. Колко на брой са цифрите, с които са написани нечетните числа, които са по-големи от 80 и са по-малки от 120?

А) 60 **Б)** 50 **В)** 40 **Г)** 35

11. В ребуса ВАЛЯ + АЛЯ + ЛЯ + Я = 2222 на различните букви отговарят различни цифри. На колко е равно В + А + Л + Я?

А) 8 **Б)** 11 **В)** 13 **Г)** 16

12. Три ореха и 4 лешника тежат колкото 17 жълъда, а 5 ореха тежат колкото 6 лешника и 3 жълъда. Колко жълъда тежат колкото 1 орех?

А) 5 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** 2

13. На колко е равно неизвестното число x от равенството:

$$3280 : (910 - (624 - 2.x) : 2) = 4?$$

А) 143 **Б)** 201 **В)** 102 **Г)** 222

14. 192 кг ягоди са наредени в 27 щайги по 6 кг и по 8 кг. С колко щайгите по 8 кг са повече от щайгите от 6 кг?

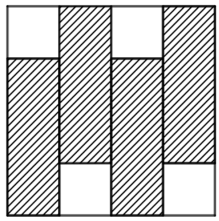
А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

15. Петя планирала през 21 дена от юли да решава по 20 задачи. Но през първия ден тя решила по-малко от предвиденото. Затова, през всеки следващ ден, тя решавала с една задача повече от предходния ден и приключила за определеното време. Колко задачи е решила Петя през последния ден?

А) 10 **Б)** 20 **В)** 25 **Г)** 30

16. Стоян и Стойна отишли да берат ябълки. Всеки напълнил по една кошничка. Като се прибрали, Стоян дал на Стойна първо 3 ябълки, а после – половината от ябълките, които му останали. След това Стойна изяла една една ябълка и му върнала 5 от ябълките и тогава Стойна вече имала два пъти повече ябълки от Стоян. Ако накрая двамата общо имали 99 ябълки, колко е имала Стойна в началото?

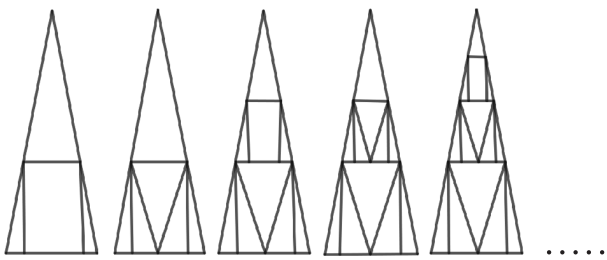
17. Квадратът на чертежа е разделен на 4 еднакви правоъгълника и 4 малки квадратчета. Сумата от обиколките на правоъгълниците е с 96 см по-голяма от обиколката на квадрата. Колко е страната на квадрата?



18. 18.02.2018 е дата от 2018 година (първите две цифри са за числото, което показва поредния ден от месеца; трета и четвърта цифра са за числото – номер на месеца; последните четири цифри са за номера на годината). Колко най-много можем да получим, ако съберем цифрите, с които са написани датите в продължение на седем последователни дни от 2018 година?

19. Къщите от едната страна на улицата са номерирани с последователни нечетни числа и започват от 1. Къщите от другата страна на улицата са номерирани с последователни четни числа и започват от 2. За четните числа са използвани 256 цифри, а за нечетните числа – 404 цифри. Колко е разликата на най-големия нечетен номер и най-големия четен номер?

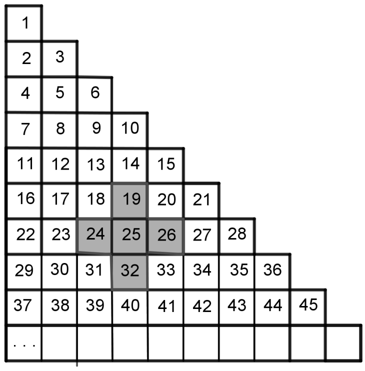
20. Колко е броят на всички триъгълници на Фиг. 29?



Фиг. 1 Фиг. 2 Фиг. 3 Фиг. 4 Фиг. 5

За следващите задачи трябва да се напишат подробни решения.

21. Естествените числа са написани последователно, започвайки от 1 по начина, показан на фигурата.



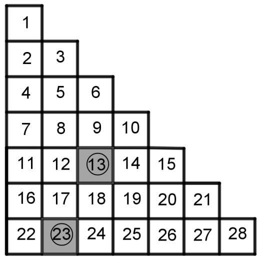
А) Фигурата „кръст“ се получава като се заградят пет числа по указания начин. Един такъв „кръст“ с център 25 е оцветен на чертежа.

1) Намерете сбора на числата от „кръст“ с център 42.

2) Намерете сбора на числата от „кръст“ с център 75.

3) Кое число е център на „кръст“, чийто сбор от числата е 546?

Б) На Алек не му се работело с тази безкрайна редица от числа. Затова той направил чертеж само до седмия ред. Оградил числата 13 и 23 с кръгчета и започнал да брои правоъгълниците, които съдържат и двете оградени числа. Колко са тези правоъгълници?



22. Ирка има два комплекта от картончета – сини и червени. Всеки комплект съдържа два вида картончета: еднакви правоъгълници и еднакви квадрати. Размерите на всяко картонче в сантиметри са цели числа.

А) Сините квадрати са 64. С всички сини квадрати Ирка сглоби плътен квадрат с лице 576 кв.см. Ирка развали квадрата и пак с всички сини квадрати направи плътен правоъгълник с ширина два пъти по-голяма от страната на един син квадрат. Колко е обиколката на този правогълник?

Б) Всеки син правоъгълник има лице 44 кв.см. Ирка взе един син правоъгълник и отряза от него квадрат. Обиколката в сантиметри на останалия правогълник се оказа число, което не се дели на 4. Колко квадратни сантиметра е лицето на изрязания квадрат?

В) В червения комплект правоъгълниците са с дължина 7 см и ширина 4 см, а квадратите са със страна 4 см. Сборът от лицата на всички картончета от този комплект е 4624 кв.см, а сборът на обиколките им е 4024 см. Колко са квадратите във втория комплект? Колко са червените фигури?

Отговори: **1.** Б; **2.** В; **3.** А; **4.** В; **5.** Б; **6.** А; **7.** В; **8.** Б; **9.** Г; **10.** Б; **11.** Г; **12.** В; **13.** Г; **14.** Б; **15.** Г; **16.** 41; **17.** 24 см; **18.** 196; **19.** 99; **20.** 116; **21.** А1) 211; А2) 376; А3) 109; Б) 10; **22.** А) 204 см; Б) 16 кв.см; В) 114 квадрата; 214 червени фигури.

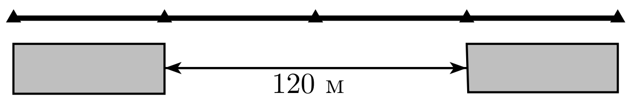
ЗАДАЧИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С ОТСЕЧКИ

Иванка Зангочева

Методът на отсечките е удобен начин за представяне на решения на математически задачи.

Задача 1. Над река с широчина 120 метра е построен мост, по четвъртина от дължината на който покриват съответно левия и десния бряг на реката. Намерете дължината на моста в метри. (ЕК 2009)

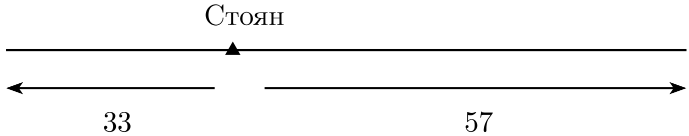
Решение. Да разделим дължината на целия мост на четири четвъртини. Две от тях са извън реката, останалите две са над реката.



Може да направим извода, че частта от моста извън реката и над реката е една и съща. Мостът е дълъг $2.120 = 240$ м.

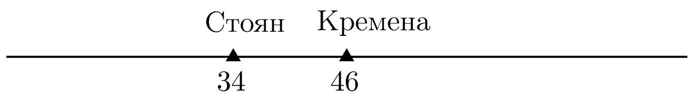
Задача 2. Надясно от къщата, в която живее Стоян, има 57 други къщи, а наляво от нея има 33 други къщи. Къщата, в която живее Кремена, е точно по средата на къщите от страната на улицата, където живее Стоян. Колко къщи има между къщата на Стоян и тази на Кремена? (ЕК 2010)

Решение. Да представим улицата, на която живеят Стоян и Кремена, като отсечка. Отбелязваме местоположението на къщата на Стоян и броя на къщите отдясно и отляво.



Отляво надясно къщата на Стоян е 34-та. Общият брой къщи на улицата е $33 + 57 + 1$ (тази на Стоян) $= 91$.

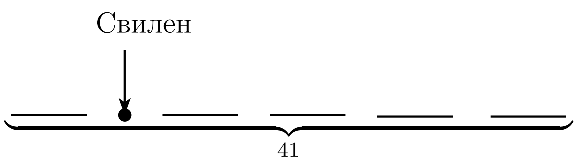
Да отбележим местоположението на къщата на Кремена. Тя е точно по средата на улицата. Отляво и отдясно на нея има по $(91 - 1) : 2 = 45$ къщи. Значи номерът на къщата на Кремена е 46.



Броят на къщите между тези на Стоян и Кремена е $45 - 34 = 11$.

Задача 3. В един маратон участвали 41 спортисти. Пред Свилен финиширали 4 пъти по-малко спортисти, отколкото след него. Кое място е заел Свилен?

Решение. Да означим спортистите преди Свилен с отсечка. Тогава тези след него са 4 отсечки.

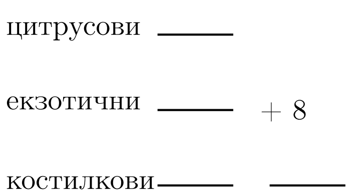


Всички спортисти без Свилен са 40. Щом 5 отсечки съответстват на 40 спортисти, то на една отсечка са $40 : 5 = 8$ спортисти.

Преди Свилен са финиширали 8 спортисти и той е на 9-то място.

Задача 4. В сладкарница доставили общо 10 килограма плодове от три вида: цитрусови, екзотични и костилкови. Цитрусовите са 2 пъти по-малко от костилковите и с 8 кг по-малко от екзотичните. Колко килограма екзотични плодове са доставили в сладкарницата?

Решение. Нека отбележим с отсечки килограмите на всеки един вид плодове по следния начин.



Плодовете са общо 10 кг, значи $10 - 8 = 2$ кг са означени с 4 отсечки. Това означава, че една отсечка е половин килограм, т.е. 500 грама. Екзотичните плодове са 8 кг 500 г.

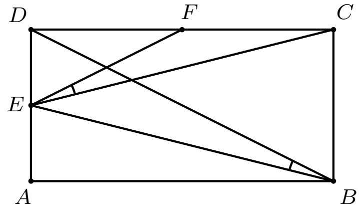
ПОДСЛУШАНИ РАЗГОВОРИ

от Facebook

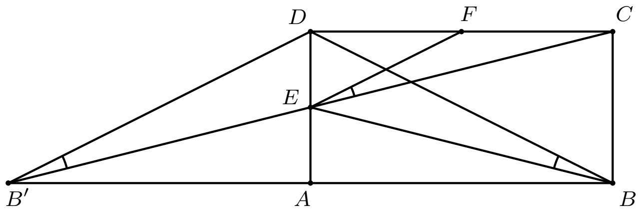
Ето какво съобщение публикува румънският геометър Stan Fulger на страницата си във Facebook.

На чертежа $ABCD$ е правоъгълник, а точките E и F са средите на съответните му страни. Тогава

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle DBE.$$



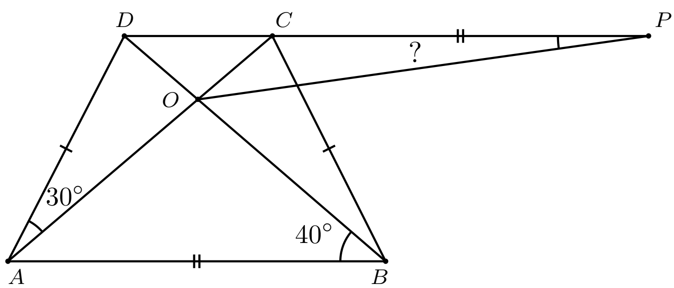
Съобщението предизвика голям интерес. Ето как му отговори Miguel Ochoa Sanchez от Перу.



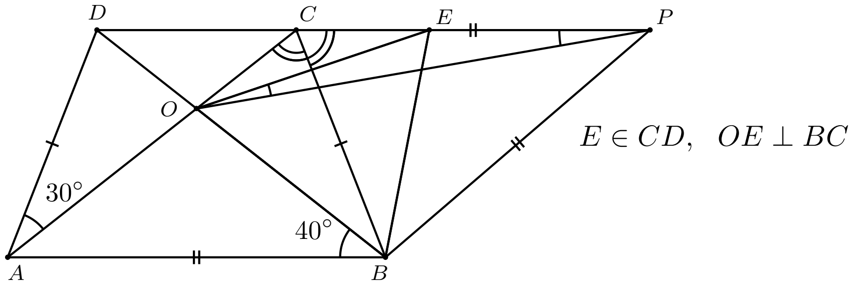
Макар отговорът да е без думи, не е трудно да го разберем, нали?

Достатъчно е да познаваме свойствата на симетрията и да забележим средната отсечка EF.

Ето как продължава разговорът. Stan Fulger предлага следния чертеж на равнобедрен трапец $ABCD$ с $\sphericalangle CAD = 30^\circ$ и $\sphericalangle ABD = 40^\circ$. Ако O е пресечката точка на диагоналите, а $P \in DC^{\to}$ е такава, че $CP = AB$, колко е $\sphericalangle OPC$?



Този път отговорът е от Ruben Dario от Перу и е отново *с картинка.*



Посланието и тук е ясно – дори за седмокласник!

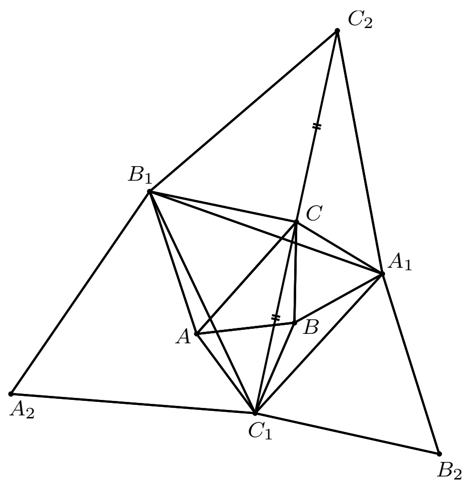
Като използваме дадените ъгли в равнобедрения трапец, лесно забелязваме, че $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCP = 70^\circ$, т.е. BC е ъглополовяща на $\sphericalangle ACP$ и следователно успоредникът $ABPC$ е ромб.

Ако построим $OE \perp BC$, $E \in CD$ (а това е едно от стандартните допълнителни построения, описани в статията *Великолепната ъглополовяща* от миналия брой), то BC е симетрала на OE и като използваме, че $\sphericalangle CBO = 30^\circ$, получаваме равностранния триъгълник BOE.

Остава само да забележим, че $\sphericalangle PBE = \sphericalangle BPC = 40^\circ$, т.е. триъгълникът BPE е равнобедрен. Оттам и триъгълникът OPE е равнобедрен и търсеният ъгъл е

$$\sphericalangle OPC = \frac{1}{2} \sphericalangle OEC = 10^\circ.$$

И накрая *да хвърлим ръкавицата* с още една задача, която *дочухме* в този математически разговор.



На чертежа ABC_1, AB_1C, A_1BC, $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_1C_1$ са равностранни триъгълници. Можете ли да докажете, че C е среда на C_1C_2?

ИНВАРИАНТИ

от школата Математика за напреднали

Темата *Инварианти* е подходяща за ученици от 4. до 7. клас – както при подготовка за математически състезания, така и за развлечение и удоволствие. Разгледаните задачи са подбрани от математически състезания, а някои от тях са класически твърдения.

Задача 1. Може ли в квадратна мрежа да се оцветят 25 единични квадратчета така, че всяко от оцветените квадратчета да има нечетен брой оцветени съседи? (Съсени са квадратчетата с обща страна.)

Решение. Да допуснем, че такова оцветяване е възможно. Нека във всяко оцветено квадратче запишем броя на оцветените му съседи. Ако съберем записаните 25 числа, в сбора всяко съседство на оцветени квадратчета ще е броено по два пъти. Следователно този сбор е четен. От друга страна, сборът на 25 нечетни числа е нечетен. Получихме противоречие; т.е. допускането е грешно. Оцветяването е невъзможно.

Забележка. По-запознатите с темата ще отбележат, че по същите причини във всяка компания броят на хората, които имат нечетен брой познати, е четен. Иначе казано, във всеки граф броят на върховете с нечетна степен е четен. Това е запазващо се, т.е. *инвариантно* свойство.

Задача 2. На права има две фигури – отляво черна и отдясно бяла. Разрешени са следните операции: да се сложат една до друга две едноцветни фигури (между другите фигури или в края) и да се махнат две съседни едноцветни фигури. Например, първата операция може да е

$$\blacktriangle\ \triangle \longrightarrow \begin{cases} \blacktriangle\ \triangle\triangle\triangle \\ \triangle\triangle\ \blacktriangle\ \triangle \\ \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\ \triangle \\ \blacktriangle\ \triangle\ \blacktriangle\blacktriangle \end{cases}$$

Може ли с тези операции да се стигне до момент, в който на правата има две фигури – отляво бяла, отдясно черна?

Решение. Да разгледаме броя N на двойките разноцветни фигури на правата (не само съседни), в които черната е отляво, а бялата е отдясно. В началото този брой е 1, а при желаната ситуация (две фигури – отляво бяла, отдясно черна), е 0.

Да разгледаме колко е този брой след първия ход.

$$\begin{array}{ll} \blacktriangle\ \triangle\triangle\triangle & \longrightarrow N=3 \\ \triangle\triangle\ \blacktriangle\ \triangle & \longrightarrow N=1 \\ \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\ \triangle & \longrightarrow N=3 \\ \blacktriangle\ \triangle\ \blacktriangle\blacktriangle & \longrightarrow N=1 \end{array}$$

Забелязваме, че първата операция променя този брой с 2 или не го променя. Може да предположим, че N запазва четността си след всяка операция. Дали това е вярно?

Ако вмъкнем две бели фигури, отляво на които има x черни, то N ще се увеличи с $2x$ (тъй като всяка от новите бели фигури ще образува черно-бяла двойка с всяко от тези x черни). Ако махнем две бели, отляво на които има x черни, то N ще се намали с $2x$.

По същия начин, ако вмъкнем две черни фигури, отдясно на които има y бели, то N ще се увеличи с $2y$; а ако ги махнем, ще се намали с $2y$.

Следователно при всяка операция броят N на черно-белите двойки се променя с четно число и не си променя четността. Това запазващо се свойство – *инвариант*, ни позволява да твърдим, че желаната ситуация $\triangle\ \blacktriangle$ е невъзможна.

Задача 3. На всяко от 44 дървета, разположени в кръг, е кацнал по един кос. От време на време някои два коса прелитат – единият на съседното дърво в посока по часовниковата стрелка, другият – на съседното дърво в посока обратно на часовниковата стрелка. Може ли след определено време да се окаже, че всички косове са кацнали на едно дърво?

Решение. Да номерираме дърветата от 1 до 44. Във всеки момент номерът на всеки кос ще е номерът на дървото, на което е кацнал. В началото сборът на номерата на косовете е $1 + 2 + \cdots + 44 = 990$.

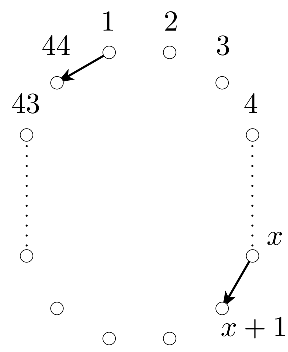
Да разгледаме как се променя сборът N на номерата на косовете при едно прелитане.

Ако номерата на двата коса са различни от 1 и 44, единият увеличава номера си с 1, а другият намалява номера си с 1, т.е. N не се променя

$$\boxed{y-1} \longleftarrow \boxed{y} \ldots\ldots \boxed{x} \longrightarrow \boxed{x+1}$$

Сега да разгледаме какво се случва, когато някой от прелитащите косове има номер 1 или 44.
Ясно е, че ако косовете с номера 1 и 44 си разменят местата, N не се променя.

Ако кос с номер 1 прелети на дърво 44, а кос с номер x – на дърво $x+1$ (където x не е 44), сборът N ще се увеличи с 44. В обратния случай (от 44 на 1 и от $x+1$ на x), сборът ще се намали с 44.



Получихме, че при всеки ход сборът N от номерата на косовете или не се променя, или се променя с 44. Това означава, че остатъкът на N при деление на 4 не се променя. (Иначе казано, инвариант е остатъкът при деление на 4 на сбора от номерата на косовете.)

Сега да допуснем, че всички косове кацнат на дърво номер k. Тогава сборът на номерата им ще е $N = 44k$ и ще се дели на 4. Но в началото $N = 990$ дава остатък 2 при деление на 4. Получихме противоречие; следователно не е възможно косовете да кацнат на едно дърво.

Задача 4. Азбуката на езика БАУ съдържа само буквите Б, А и У. Всички буми на този език с дължина n се конструират, като се започне от някоя дума на езика с дължина n, и се прилагат правилата:

– буквите в думата могат да се разместват;

– две поредни букви могат да се променят по правилата

$$\text{БА} \longleftrightarrow \text{УУ}, \ \text{АУ} \longleftrightarrow \text{ББ}, \ \text{УБ} \longleftrightarrow \text{АА}$$

Ако ББАУАБАУУАБАУУУАБАУУУУАББ е дума на този език, определете дали е дума:

а) БУАБУАБУАБУАБАУБАУБАУБАУБ;

б) АБУАБУАБУАБУАБАУБАУБАУБАУ.

Решение. Да разгледаме как се променя разликата между броя на буквите А и на буквите Б при една операция. Разместването на буквите не е от значение, а само следните операции:

Операция	Разликата между броя А и Б:
БА$\longleftrightarrow$УУ	не се променя
АУ$\longrightarrow$ББ	намалява се с 3
ББ$\longrightarrow$АУ	увеличава се с 3
УБ$\longrightarrow$АА	увеличава се с 3
АА$\longrightarrow$УБ	намалява се с 3

Получихме, че разликата между броя А и Б не се променя или се променя с 3, т.е. запазва остатъка си при деление на 3.

В дадената дума има 7 Б и 8 А, т.е. разликата между броя А и Б е 1. В думата от а) има 9 Б и 8 А, следователно тя не е от езика БАУ (разликата между броя А и Б е -1).

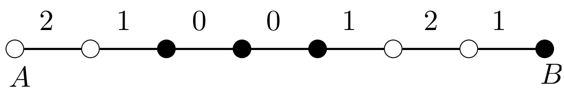
Думата от б) има 8 У, 8 Б и 9 А и тя лесно може да се получи от дадената дума, като се разместят буквите и УУ се замени с БА.

Забележка. Любознателният читател навярно е забелязал, че горната задача много прилича на известния пример с хамелеоните от три цвята. При среща на два разноцветни хамелеона, те се преоцветяват в третия цвят – а това е същото, като операциите БА$\longrightarrow$УУ и т.н. И в двете задачи инвариант е остатъкът при деление на 3 на разликата между броя обекти от два вида.

Задача 5. Краищата на отсечка са бяла точка A и черна точка B. По отсечката са отбелязани в някакъв ред бели и черни точки, които я разделят на отсечки. Може ли сред тях да има точно 100 отсечки с разноцветни краища?

Решение. Първо да отбележим, че ако точките са n (с краищата A и B включително), имаме $n-1$ отсечки.

Нека отсечките с два бели края (от вида ББ) са x на брой, а тези с бял и черен край (от вида БЧ) са y. Над всяка отсечка да запишем броя на белите ѝ краища (както е показано в примера).



Сборът на записаните числа е $2x+y$. В този сбор бялата точка A е броена веднъж, а всяка от останалите бели точки – по 2 пъти, тъй като участва в две отсечки. Следователно $2x+y$ е нечетно число, а това означава, че y е нечетно число.

Получихме, че *броят на отсечките с разноцветни краища е нечетен* – колкото и точки да отбележим и както и да ги оцветим в бяло и черно. Оттук веднага следва отговорът на задачата.

Забележка. Може да разсъждаваме и по друг начин. Тръгваме от бялата точка A към черната точка B и броим колко пъти се променя цветът на точките (т.е. колко пъти от бяла точка минаваме в черна или от черна в бяла). Броят на тези промени е точно броят на отсечките с разноцветни краища. От друга страна, за да стигнем от бяла в черна точка, са нужни нечетен брой промени. Отново стигаме до извода, че има нечетен брой отсечки с разноцветни краища.

Последната задача ни подготви за доказателството на едно класическо твърдение, известно като *Лема на Шпернер.* Германският математик Emanuel Sperner (1905 – 1980) доказал тази лема, когато бил на 23 години. Всъщност Шпернер доказал доста по-общо твърдение, което има много и разнообразни приложения в други области на математиката.

Задача 6. Върховете на триъгълник са бяла точка A, черна точка B и синя точка C. По страните и вътре в триъгълника са отбелязани бели, черни и сини точки, като точките на всяка страна на триъгълника ABC са оцветени в един от двата цвята на нейните краища.

Някои от отбелязаните точки са свързани така, че триъгълникът ABC е разделен на триъгълници, всеки два от които или имат цяла обща страна, или имат общ връх, или не се пресичат.

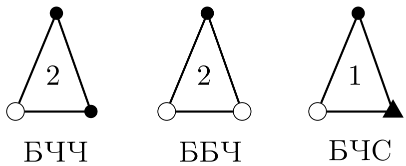
Да се докаже, че сред тях има триъгълник с три разноцветни върха.

Решение. Ще разгледаме триъгълниците, които имат бял и черен връх. В зависимост от цвета на третия си връх, те се разделят на три вида: ББЧ, БЧЧ и БЧС.

Нека триъгълниците с един бял и два черни върха (от вида БЧЧ) са x, триъгълниците с два бели и един черен връх (от вида БЧЧ) са y, а тези с три разноцветни върха (от вида БЧС) са z.

Както в задача 5, ще докажем, че z е нечетно число.

Във всеки триъгълник да запишем броя на неговите страни, които са от вида БЧ.



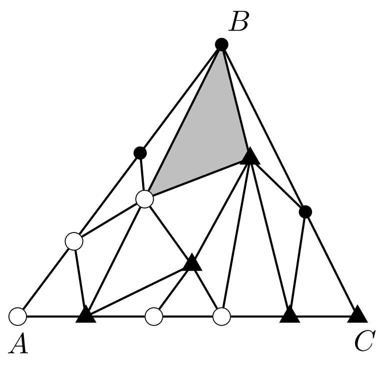
Сборът на всички записани числа е $2x + 2y + z$.

От друга страна, в сбора на записаните числа *граничните* отсечки са броени по веднъж (това са отсечките, които лежат на страната AB на големия триъгълник), а всяка от останалите *вътрешни* черно-бели отсечки е броена по два пъти (тъй като е страна на два триъгълника). Но от задача 5 знаем, че отсечките от вида ЧБ върху страната AB са нечетен брой. Следователно сборът на записаните числа е нечетен.

Получихме, че сборът $2x + 2y + z$ е нечетен, т.е. z е нечетно число.

Това означава, че триъгълниците от вида БЧС не може да са 0, т.е. има поне един триъгълник с три разноцветни върха.

Например, на чертежа има точно един такъв триъгълник.



Забележка. Този удивителен факт може да се докаже и по друг начин. Нека всички триъгълници, на които сме разрязали ABC, както и областта извън триъгълника (ще я наричаме *екс-триъгълник*), са одушевени. Ще казваме, че два триъгълника *се познават*, ако имат обща страна с черен и бял край.

От задача 5 следва, че екс-триъгълникът има нечетен брой познати. Всеки от останалите триъгълници има 0, 1 или 2 познати. А както отбелязахме след задача 1, във всяка компания има четен брой персони (в случая – триъгълници) с нечетен брой познати.

Следователно съществува поне още един триъгълник X с нечетен брой познати, т.е. с точно един познат. Точно една страна на X е с черен и бял край, значи върховете на X са оцветени в три различни цвята.

Така *в края на нашето пътешествие се върнахме там, откъдето започнахме* – до факта, че във всеки граф има четен брой върхове с нечетна степен!

Задачи за самостоятелно решаване

1. Дадена е шахматна дъска. Може ли след известен брой ходове да остане само едно черно поле на дъската, ако:

а) за един ход се избира ред или стълб и полетата от избрания ред или стълб си сменят цвета;

б) за един ход се избира един квадрат 2×2 и полетата от избрания квадрат си сменят цвета?

Упътване. Проверете как се променя броят на черните полета след един ход.

2. Дъска 6×6 е покрита с домино. Докажете, че тя може да се разреже по някоя вертикална или хоризонтална линия така, че всички домина да останат цели.

Упътване. Докажете, че всяка от десетте вътрешни линии на квадратната мрежа пресича четен брой домина.

3. В една държава някои градове са свързани с директни автобусни маршрути. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг (с евентуални прехвърляния). Иван си купил по един билет за всеки директен маршрут (т.е. може да пътува по всеки маршрут веднъж, независимо в коя посока). Петър купил по n билета за всеки маршрут. Иван и Петър отпътували от град A. Иван използвал всичките си билети, не купувал нови и накрая стигнал в град B. Петър известно време пътувал с купените от него билети и стигнал в град X, от който не може да продължи без да си купи нов билет. Докажете, че X е или A, или B.

за по-малките задачи

4. клас

31. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое число записахте в оцветеното квадратче?

216	:		=	6
		+		
808	–		=	777
		=		
15	·		=	?

32. Попитали Петър на колко години е, а той отговорил: *Ако намалите 4 пъти моите години и полученото число намалите с 5, ще получите 6.* На колко години е Петър?

33. Коко, Чоко и Боко си купили кутия с бонбони и си ги разпределили, като Коко взел третината от бонбоните. Бонбоните на Чоко били с 3 повече от бонбоните на Коко и 2 пъти повече от бонбоните на Боко. Колко бонбона е взел всеки от тях?

34. Колко са двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е с 2 по-голяма или по-малка от цифрата на десетиците?

5. клас

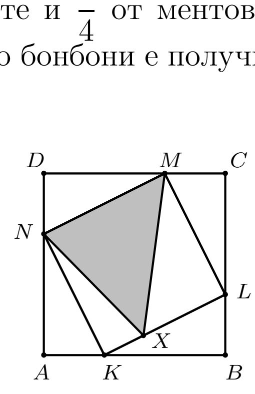
35. Вдясно на числото 2018 допишете една цифра така, че полученото петцифрено число да се дели на 4, но да не се дели на 6. Вляво на това петцифрено число допишете една цифра така, че полученото шестцифрено число да се дели на 9. Колко е произведението на двете дописани цифри?

36. Кари получила плик с бонбони, от които $\frac{2}{5}$ били ягодови, а останалите – ментови. Кари изяла $\frac{2}{3}$ от ягодовите и $\frac{3}{4}$ от ментовите бонбони и в кутията останали 34 бонбони. Колко бонбони е получила Кари?

37. На чертежа квадратът $ABCD$ има страна 9 cm. Върховете на квадрата $KLMN$ лежат на страните на $ABCD$, като

$$AK = BL = CM = DN = 3 \text{ cm}.$$

Точката X е от страната KL. Намерете лицето на триъгълника XMN.



38. Намерете лицето на успоредник със страна $a = 4,5$ cm, ако тази страна е с 10% по-малка от височината към нея.

6. клас

39. Да се намери неизвестното число x в равенството $a.x = b - a$, ако $a = -2 - 8 : 5$ и $b = 12 - 2.(-3)$.

40. Конус и цилиндър имат равни обеми, като радиусът на конуса е с 20% по-голям от радиуса на цилиндъра. С колко процента височината на цилиндъра е по-малка от височината на конуса?

41. Ако $a = \dfrac{3^{10} + 3^9}{3^{10} - 3^9}$, кое е числото x в равенството $a^x = \dfrac{4^6 \,.\, 8^7}{16^9}$?

42. Запишете в празните полета на таблицата две естествени числа така, че за всеки квадрат от вида

a	b
c	d

да е изпълнено или равенството $a.d = b.c$, или $a + d = b + c$.

Колко е сборът на числата, които записахте?

21	25
24	30

7. клас

43. Да се реши неравенството $\dfrac{x-9}{-2} \geqq \dfrac{x+2}{0,2}$. За кои стойности на параметъра a коренът на уравнението $2(x + a) = 3$ е решение на даденото неравенство?

44. От град A за град B в 6 ч сутринта тръгнал камион. Шест часа по-късно от град B за град A по същия път тръгнала лека кола. Камионът и леката кола едновременно пристигнали в град C по пътя между A и B. Те останали в град C два часа. След това камионът и леката кола продължили всеки по своя път и пристигнали едновременно съответно в градовете B и A в 20 ч същия ден. Да се намери отношението на скоростите на камиона и леката кола. В колко часа те са пристигнали в C?

45. На страните AB и CD на правоъгълника $ABCD$ са отбелязани точките M и N така, че $AMCN$ е ромб и $\sphericalangle NAD = 10^\circ$.

а) Да се намерят $\sphericalangle MAO$ и $\sphericalangle OMC$, ако O е центърът на ромба.

б) Да се докаже, че диагоналите на ромба и на правоъгълника се пресичат в една точка и да се намери $\sphericalangle ODC$.

за по-малките  решения

на задачите от бр. 2/2018

16. Карлсон си купил 7 еднакви пакета с кифлички. Той изял кифличките в три от пакетите и му останали 72 кифлички. Колко кифлички е купил Карлсон?

Решение. В 4 пакета има 72 кифлички. Карлсон е купил 7 пакета, в които е имало $7.(72 : 4) = 126$ кифлички.

17. В ребуса на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви - различни цифри. Ако $К + О + С = 20$,

$$К + О + К + О + С = 37, \quad С + О + К + О + Л = 36,$$

колко е $С + К + О + К$?

Решение. Имаме $К + О = 37 - 20 = 17$, следователно К и О са 8 и 9. Освен това $О + Л = 36 - 20 = 16$. Ако О е 8, то и Л е 8, противоречие. Следователно О е 9, Л е 7 и К е 8.

Намираме $С + К + О + К = 20 + 8 = 28$.

18. Децата в математическа школа получили по една лента с числа:

1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	1	2	2	3	3	3

Всяко дете оцветило три поредни квадратчета от своята лента и събрало числата в оцветените квадратчета. Всички получени сборове били различни. Най-много колко са децата в групата?

Решение. Сборът на три поредни числа от лентата може да е 5, 7, 8, 9, 10, 11 или 12. Всички деца са получили различни сборове, следователно децата са най-много 7.

19. Пипи, Томи и Аника закусили с палачинки. Аника изяла една палачинка по-малко от Томи, а Пипи – толкова палачинки, колкото Томи и Аника заедно. Ако Пипи и Аника са изяли общо 22 палачинки, колко палачинки е изял Томи?

Решение. Ако Аника е изяла една чиния палачинки, Томи е изял същата чиния и още една палачинка, а Пипи – две чинии и още една палачинка:

Аника: $\circledcirc$ Томи: $\circledcirc + 1$ Пипи: $\circledcirc\ \circledcirc +1$

Пипи и Аника са изяли общо 3 чинии и една палачинка и това са 22 палачинки. Следователно в една чиния има $(22-1) : 3 = 7$ палачинки. Томи е изял $7 + 1 = 8$ палачинки.

20. Да се пресметнат $A = 2,1.1\frac{5}{7} - 2,1.\frac{6}{7}$ и $B = 7,3 \cdot \frac{6}{11} + 3,7.\frac{6}{11}$.

Решение. Имаме $A = 2,1.\frac{6}{7} = 1,8$ и $B = (7,3 + 3,7).\frac{6}{11} = 6$.

21. Турист изминал 75% от маршрута си.

а) Колко километра е изминал туристът, ако му остават 2,4 км?

б) Ако $\frac{1}{6}$ от изминатия път и $\frac{1}{2}$ от предстоящия са изкачване, колко процента от целия път са изкачване?

Решение. а) Ако оставащите 25% от маршрута са 2,4 км, то туристът е изминал $3.2,4 = 7,2$ км.

б) Изкачването е $\frac{1}{6}.75\% + \frac{1}{2}.25\% = 25\%$ от маршрута.

22. Успоредник има страни 12 cm и 18 cm. Ако една от височините на успоредника е равна на 15 cm, да се намери лицето на успоредника и другата му височина.

Решение. Тъй като $15 > 12$, не е възможно дадената височина да е към страната от 18 cm. Следователно лицето на успоредника е $15.12 = 180$ cm^2, а другата му височина е $180 : 18 = 10$ cm.

23. Кутия без капак е висока 45 cm. Основата на кутията е квадрат със страна 35 cm. Колко квадратни дециметра материал са нужни за изработване на кутията?

Решение. За изработване на кутията са нужни $4.45.35 + 35.35 = 6300 + 1225 = 7525$ m^2, т.е. 75,25 dm^2 материал.

24. Да се намери произведението на x и y, за които

$$1,7 - x = 7 - 1,7, \qquad y = \frac{-3-2}{-3+2}.$$

Решение. Намираме $x = -3,6$ и $y = 5$; произведението им е -18.

25. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-9;0)$, $B(6;0)$ и $C(-1;1)$. Да се намери лицето на $\triangle ABC$.

Решение. В $\triangle ABC$ имаме $AB = 15$ а височината през C е 1. Лицето му е $\frac{1}{2}.15.1 = 7,5$ кв.ед.

26. Да се намерят неизвестните основи x и y в равенството

$$x^3 = y^2 = (-6)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 4^0.$$

Решение. Имаме $(-6)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 4^0 = 6^2 + 3^3 + 1 = 64$. От $x^3 = 64 = 4^3$ намираме $x = 4$. От $y^2 = 64$ намираме $y = 8$ и $y = -8$.

27. Един сандвич е с 2 лв. по-скъп от един сок, а сокът е 3 пъти по-евтин от един шоколад. Два сока, три сандвича и шоколад струват общо 12 лв. Да се намери цената на един сандвич.

Решение. Ако един сок струва x лв., сандвичът е $x + 2$ лв., а шоколадът е $3x$ лв. Съставяме уравнението $2x + 3(x + 2) + 3x = 12$ и получаваме $2x+3x+6+3x = 12$, т.е. $8x = 12-6$ и намираме $x = 0,75$. Оттук цената на сандвича е $0,75 + 2 = 2,75$ лв.

28. Да се намери:

а) сборът на корените на уравнението $(4x - 1)^2 = 9$;

б) произведението на корените на $x^2 - |x - 1| = (x - 7)(x + 7)$.

Решение. а) Уравнението се записва във вида $(4x-1)^2 - 3^2 = 0$, т.е. $(4x - 4)(4x + 2) = 0$ и има корени 1 и $-0,5$. Сборът им е 0,5.

б) Уравнението е еквивалентно на $|x - 1| = 49$, т.е. $x-1 = 49$ или $x - 1 = -49$. Корените са 50 и -48 и произведението им е -2400.

29. Том може да боядиса ограда за 3 часа, а Хък – за 4 часа. Том боядисвал оградата 5 минути, след което в боядисването се включил и Хък. За колко часа е била боядисана оградата?

Решение. За един час Том боядисва $\frac{1}{3}$ от оградата, а Хък $\frac{1}{4}$ от оградата. Ако Том е работил x h, Хък е работил $x - \frac{5}{60} = x - \frac{1}{12}$ h. Боядисали са цялата ограда, т.е. сборът от работата на двамата е 1.

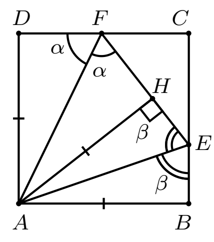
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{12}\right) = 1 \iff x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}\ h,$$

което означава, че оградата е била боядисана за 1 h 45 min.

30. На страните BC и CD на квадрат $ABCD$ са отбелязани съответно точки E и F така, че FA е ъглополовяща на $\sphericalangle DFE$.

а) Да се докаже, че EA е ъглополовяща на $\sphericalangle FEB$.

б) Да се намери $\sphericalangle EAF$.



Решение. Нека $AH \perp EF$ $(H \in EF)$. Точка A е от ъглополовящата на $\sphericalangle DFE$, следователно $AD = AH$. Но $AB = AD$, следователно $AB = AH$. Това означава, че AE е ъглополовяща на $\sphericalangle BEF$.

Да означим $\sphericalangle AFD = \sphericalangle AFH = \alpha$ и $\sphericalangle BEA = \sphericalangle HEA = \beta$. Изразяваме $\sphericalangle EFC = 180^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle CEF = 180^\circ - 2\beta$. От сбора на ъглите в правоъгълния $\triangle CEF$ имаме $2\alpha + 2\beta = 270^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 135^\circ$. От сбора на ъглите на $\triangle EAF$ намираме $\sphericalangle EAF = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 2/2018 г.

1. Б; **2.** В; **3.** В; **4.** Б; **5.** В.

6. След полагането $y = \cos x$ се получава уравнението

(1) $$(a+2)y^2 + 2a^2y - a = 0.$$

а) Числото $\cos 2018\pi = 1$ е корен на (1), т.е. $a = \pm 1$.

б) При $a = 1$ (1) има корени 1 и $-\dfrac{1}{3}$, т.е. $x = 2k\pi$ или $\cos x = -\dfrac{1}{3}$. Ако $\gamma \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ е ъгъл с косинус $-\dfrac{1}{3}$, получаваме още две групи решения: $x = \pm\gamma + 2k\pi$.

в) Нека x_0 е решение на даденото уравнение. Тогава $-x_0$ също е решение, т.е. тук трябва $x_0 = 0$. Следва, че (1) трябва да има корен $y = 1$, т.е. $a = \pm 1$. От б) се вижда, че при $a = 1$ искането за единственост не е изпълнено. При $a = -1$ (1) има единствен корен 1, т.е. тази стойност на a е търсената.

7. а) Следва от факта, че въпросният четириъгълник се състои от два еднакви правоъгълни триъгълика.

б) Радиусът на описаната окръжност е $\dfrac{1}{2}MO_1 = \dfrac{R}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$. Лицето на четириъгълника $AMCO_1$ е $R^2 \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ и е равно на полупериметъра му $R(1 + \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2})$ по радиуса на вписаната окръжност, откъдето този радиус е $\dfrac{R\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}}$.

в) Да означим даденото отношение с $f(\varphi)$. Не е трудно да се пресметне

$$f'(\varphi) = \frac{(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2})(2 + \sin\varphi)}{2\sin^2\varphi}.$$

Тъй като $\dfrac{\varphi}{2}$ е остър ъгъл, но приема и стойности по-малки от $\dfrac{\pi}{4}$, стандартно се вижда, че най-малката стойност на $f(\varphi)$ се достига за $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тогава $CM \perp AB$, откъдето $AB = R + r$.

8. а) Имаме $B_1M \perp (AA_1C_1C)$, т.е. AM е проекция на AB_1 и $\sphericalangle MAB_1 = \varphi$, като $\sphericalangle AMB_1$ е прав. Сега $AB_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\varphi} > a$, откъдето $\sin\varphi < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\varphi < 60^\circ$.

б) Околният ръб $b = \dfrac{a\sqrt{3 - 4\sin^2\varphi}}{2\sin\varphi} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ за $\varphi = 45^\circ$, откъдето $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

в) Имаме $AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, $A_1M \perp B_1M$, $AM \perp B_1M$ (защо?) и $\psi = \sphericalangle AMA_1$. Сега

$$4\operatorname{tg}\psi = \frac{2b}{a} = \frac{\sqrt{3 - 4\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Имаме $AA_1 \parallel BB_1$, т. е. $\sphericalangle(AM, BB_1) = \sphericalangle MAA_1 = 90^\circ - \psi$. Ако $\psi = 90^\circ - \psi$, то $\psi = 45^\circ$ и $\dfrac{\sqrt{3 - 4\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = 1$, откъдето $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 3/2018 г.

1. Г; **2.** А; **3.** Б; **4.** В; **5.** Г.

6. а) Получава се $a = 2$ и $x = 3$.

б) Трябва $5 - 2^a > 0$ и $D = 4(2^a - 1)(2^a - 4) < 0$, откъдето $a \in (0, 2)$.

в) С формулите на Виет от исканото равенство се получава уравнението

$$\frac{2(2^a - 1)}{5 - 2^a} = \frac{4(2^a - 1)^2}{(5 - 2^a)^2} - \frac{6(2^a - 1)}{5 - 2^a}$$

с корени $a_1 = 0$ и $a_2 = \log_2 \dfrac{11}{3}$. За втория корен обаче $D < 0$.

7. а) Тъй като $\dfrac{c}{2} = r \operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{2}$ по синусова теорема

$$R = \frac{r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{r}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}.$$

б) Следва от популярна формула за лице на триъгълник.

в) Лесно се вижда, че

$$S_{ABC} = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2})}.$$

Като се изследва функцията $y(x) = x(1 - x^2)$, се получава, че най-голямата ѝ стойност в интервала $(0, 1)$ се достига за $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. лицето е най-малко за $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

8. а) Ако Q е проекцията на D в основата на конуса, то $DQ = \dfrac{R}{2}\operatorname{tg}\alpha$ е височината на пирамидата $ABCD$. От условието следва, че Q е на равни разстояния до AC и BC, т.е. ъглополовящата на $\sphericalangle C$ и симетралата на AB съвпадат или $\triangle ABC$ е равнобедрен. Сега обемът е равен на $\dfrac{1}{6}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.

б) Нека $QN \perp AC$, $(N \in AC)$. Тогава въпросният тангенс е равен на

$$\frac{DQ}{NQ} = \frac{DQ}{\frac{3}{4}R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

в) Тъй като $AC \parallel= BP$, въпросният ъгъл е $\sphericalangle SPB = 60^\circ$, тъй като при $\alpha = 45^\circ$ триъгълникът BPS е равностранен. За разстоянието d забелязваме, че $3V_{ABPD} = d.S_{BPD} = S_{ABP}.DQ$. Оттук $d = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Математика“

Подготвя специалисти с фундаментални знания в класическите и съвременни математически направления. Завършилите успешно специалността могат да се реа-лизират като преподаватели и научни работници във висшите училища и научни институти. Същевременно тяхната солидна математическа подготовка им дава възможност за специализация в икономиката, банковото и застрахователно дело, физиката, биологията, философията и др.

Бакалавърска програма „Информатика“

Подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и ком-пании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат $70\times100/16$. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 28.03.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.