МАТЕМАТИКА

БРОЙ 1
2019 Г.
ГОДИНА LVIII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,
Редколегията на списание *Математика* Ви пожелава успешна 2019 година!

УДИВИТЕЛНИТЕ СВОЙСТВА НА ЧИСЛОТО 2019

⊛ Сборът на четвъртите степени на първите шест естествени числа е 2019:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2019.$$

⊛ Числото 2019 може да се запише като сбор на степени, в който всяка от цифрите от 0 до 9 участва по веднъж:

$$2^8 + 3^6 + 4^5 + 7^0 + 9^1 = 2019.$$

⊛ Ако запишем степените на естествените числа по големина и без повторения, ще получим редицата на точните степени

$$1,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 3^2 = 9,\ 2^4 = 16, 5^2 = 25,\ 3^3 = 27,\ 2^5 = 32,\ 6^2 = 36,\ \ldots$$

Сборът на първите 22 точни степени от тази редица е 2019:

$$\begin{aligned} 2019 \quad &= \quad 1 + 4 + 8 + 9 + 16 + 25 + 27 + 32 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 \\ &\quad + 121 + 125 + 128 + 144 + 169 + 196 + 216 + 225 + 243. \end{aligned}$$

⊛ Тъй като 2019 е произведение на простите числа 3 и 673, лесно намираме, че 2019 се записва по два начина като разлика на два квадрата:

$$2019 = 338^2 - 335^2 = 1010^2 - 1009^2.$$

⊛ Числото 2019 не може да се запише като сбор на два квадрата, но може да се запише като сбор на три квадрата – при това по 9 различни начина! Шест от тези сборове включват само квадрати на прости числа:

$$\begin{array}{ll} 7^2 + 11^2 + 43^2 = 2019 & \qquad 11^2 + 23^2 + 37^2 = 2019 \\ 7^2 + 17^2 + 41^2 = 2019 & \qquad 17^2 + 19^2 + 37^2 = 2019 \\ 13^2 + 13^2 + 41^2 = 2019 & \qquad 23^2 + 23^2 + 31^2 = 2019 \end{array}$$

Оказва се, че 2019 е най-малкото число, което може да се представи по шест различни начина като сбор от квадратите на три прости числа!

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Колко решения има уравнението

$$16\sin^2 x - 16\sin x + 3 = 0$$

в интервала $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Задача 2. (1 т.) Трапец с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност с радиус R. Голямата му основа е $R\sqrt{3}$. Малката му основа е:

А) $\dfrac{R}{2}$ **Б)** $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ **В)** R **Г)** $R\sqrt{2}$

Задача 3. (1 т.) Развивката на околната повърхнина на конус е полукръг. Ъгълът между образувателната на конуса и основата му е:

А) 15° **Б)** 30° **В)** 60° **Г)** 75°

Задача 4. (1 т.) Решенията на неравенството $\sqrt{x} < x - 1$ са:

А) $(1, +\infty)$ **Б)** $\left(1, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

В) $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ **Г)** $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

Задача 5. (1 т.) Нека $a > 1$ и $x_1(a) < x_2(a)$ са корените на уравнението $x^2 - 2ax + 1 = 0$. Тогава

$$\lim_{a\to+\infty} x_2(a)\sin x_1(a) \text{ е:}$$

А) 0 **Б)** 1 **В)** a **Г)** $+\infty$

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$\log_3(9^x + a) = x + 1,$$

където a е параметър.

а) (1 т.) За коя стойност на a уравнението има корен $x = 1$?

б) (2 т.) Да се реши уравнението за $a = 2$.

в) (2 т.) За кои стойности на параметъра a уравнението има точно едно решение?

Задача 7. (5 т.) В окръжност с радиус R е вписан $\triangle ABC$ със страни $AB = c$ и $BC = a$, като $c > a$. Нека $BH \perp AC$ $(H \in AC)$. Симетралите на страните AB и BC пресичат правата BH съответно в точките M и N.

а) (1 т.) Да се докаже, че $BH = \dfrac{ac}{2R}$.

б) (2 т.) Да се докаже, че $MN = R\left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{a}{c}\right)$.

в) (2 т.) При фиксирани R и a да се определи c така, че отсечката MN да е най-дълга.

Задача 8. (5 т.) Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръбове $AB = a$, $BC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $AA_1 = \dfrac{3}{2}a$. Точките M и N са среди съответно на AB и AD, а точката P дели DD_1 в отношение $1 : 2$.

а) (1 т.) Да се докаже, че точката C_1 лежи в равнината (MNP).

б) (2 т.) Да се пресметне ъгълът между равнините (ABC) и (MNP).

в) (2 т.) Да се докаже, че правите CM и DB_1 са перпендикулярни и да се намери разстоянието между тях.

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА НА ИМИ–БАН

Петър Бойваленков,
Институт по математика и информатика на БАН

На 3–8 януари 2019 г. в Института по математика и информатика на Българската академия на науките се проведе петото издание на Седмицата на олимпийската математика (СОМ 2019) на ИМИ-БАН. СОМ се организира от ИМИ със съдействието на Фондация „Георги Чиликов“ и Американска Фондация за България. За участие бяха поканени 40 ученици от цялата страна съответно на рейтинга към момента – първите десет от всеки от класовете 9.–12.

Програмата на СОМ 2019 включваше четири тематични контролни, по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата. На 5 януари бяха проведени два математически двубоя. Освен в контролните и боевете, учениците получиха възможност за изява и чрез изнасяне на доклади на олимпийска тематика. Както стана вече традиция, докладчиците бяха поканени да подготвят материали за поредицата Олимпийски теми.

Предлагаме ви условията и решенията на задачите.

Контролно по теория на числата, 03.01.2019

Задача NT1. Нека $\gcd(x_1, \ldots, x_n)$ означава най-големия общ делител на естествените числа $x_1, \ldots, x_n$. Да се докаже, че

$$\gcd\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right) = \gcd\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}\right).$$

Тук $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача NT2. Дадени са естествени числа m и n, за които $m \leq \dfrac{n^2}{4}$. Всеки прост делител на m е не по-голям от n. Да се докаже, че m дели $n!$.

Задача NT3. Да се намерят всички естествени числа m, за които $2^m + 1$ дели $5^m - 1$.

Контролно по алгебра, 04.01.2019

Задача A1. Нека $f(x) = x^2 + ax + 1$, $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, $n \geq 1$. Да се намерят всички естествени числа a, за които уравнението $f_a(x) = 0$ има поне един реален корен.

Задача A2. Дадена е редицата $\{a_k\}$, за която $a_1 = 1$ и $a_k = a_{k-1} + a_{[k/2]}$ при $k > 1$. Възможно ли е някой член на тази редица да се дели на 4?

Задача A3. Нека е медицентърът на $\triangle ABC$. Да се докаже, че

$$\sin \sphericalangle MBC + \sin \sphericalangle MCA + \sin \sphericalangle MAB \leq \frac{3}{2}.$$

Контролно по геометрия, 06.01.2019

Задача G1. Даден е успоредник $ABCD$. Права ℓ през C пресича правите AD и AB съответно в точки P и Q (D е между A и P, B е между A и Q). Да се докаже, че съществува фиксирана точка M, такава, че когато ℓ се мени, MC е ъглополовяща на $\sphericalangle PMQ$.

Задача G2. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O. Нека P е произволна точка във вътрешността на $\triangle ABC$, различна от O. Правите AP, BP и CP пресичат k за втори път в точките A_1, B_1 и C_1 съответно. Нека A_2, B_2 и C_2 са съответно симетричните точки на A_1, B_1 и C_1 относно правата OP. Да означим с ℓ_a правата през средата на BC, успоредна на AA_2. По аналогичен начин се дефинират правите ℓ_b и ℓ_c. Да се докаже, че ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c се пресичат в една точка.

Задача G3. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k и нека X е произволна точка от страната AB. Разглеждаме окръжностите ω_1 и ω_2 с центрове U_1 и U_2, които се допират до страната AB, до отсечката CX и вътрешно до окръжността k. Да се определи геометричното място от точки, което описва средата S на отсечката U_1U_2.

Контролно по комбинаторика, 07.01.2019

Задача C1. Дадена е дъска 7×7 с изрязани ъглови квадратчета. Във всяко от останалите 45 квадратчета е записано цяло число, а с S е означена сумата на всички записани числа. За всяко вътрешно квадратче i от дъската означаваме с s_i сумата от числата, записани в него и четирите му съседа (две квадратчета са съседни, ако имат обща стена). Една такава конфигурация наричаме *добра*, ако $S > 0$ и $s_i < 0$ $\forall i$.

а) Да се докаже, че съществуват добри конфигурации.

б) Колко най-малко отрицателни цели числа може да има в добра конфигурация?

Задача C2. Едно естествено число A ще наричаме k-*специално*, ако е произведение на k различни прости числа. (Ненаредена) двойка естествени числа (d_1, d_2) наричаме *класическа*, ако частното на по-голямото към по-малкото е просто число. Да се намерят всички естествени числа n със следното свойство: за всяко 2019-специално A класическите (ненаредени) двойки от делители на числото A^n могат да се разбият на непресичащи се множества $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ от по 2019 елемента, така че за всяко i има делител d_i на A^n, който да е част от всички двойки в S_i.

Например, $n = 1$ изпълнява условието при работа с $k = 2$, защото за всяко $A = p_1 p_2$ класическите двойки са 4: $\{(1, p_1), (1, p_2), (p_1, A), (p_2, A)\}$, като първите две и последните две дават разбиване с исканите свойства.

Задача C3. При подготовката на математическия бой към СОМ, проф. Бойваленков си бе поставил амбициозна задача. Той искаше да състави най-различни проекто-отбори за състезанието измежду поканените 43 ученици така, че:
1) Всеки проекто-отбор да е съставен от поне трима ученици.
2) Всеки два проекто-отбора да имат точно един общ участник.
3) Независимо кои двама ученици дойдат първи за състезанието, да могат да са съотборници.
Възможно ли е това? Ако е възможно, да се даде пример.

Темите бяха предложени както следва: теория на числата – проф. Емил Колев (NT2) и проф. Иван Ланджев (NT1), алгебра – проф. Олег Мушкаров и проф. Николай Николов, геометрия Стоян Боев (G3) и Александър Иванов (G1 и G2), комбинаторика – доц. Станислав Харизанов (C3) и Александър Иванов (C1 и C2), математически боеве – проф. Петър Бойваленков (NT3).

Ето и **решенията на задачите**.

NT1. Ясно е, че

$$\gcd\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right) = \gcd\left(\binom{n}{k}\frac{k}{n}, \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}, \binom{n}{k}\frac{n+1}{n+1-k}\right),$$
$$\gcd\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}\right) = \gcd\left(\binom{n}{k}\frac{n-k}{n}, \binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1}, \binom{n}{k}\frac{k}{n+1-k}\right).$$

Нека p е произволно просто число, а a – естествено число. С $\lambda_p(a)$ означаваме максималната степен на p, която дели a. Трябва да докажем, че най-високата степен на p, която дели лявата страна на исканото равенство е равна на най-високата степен на p, която дели дясната страна. Това е еквивалентно на равенството

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \min(\lambda_p(k)-\lambda_p(n), \lambda_p(n-k)-\lambda_p(k+1), \lambda_p(n+1)-\lambda_p(n+1-k)) = \\
& \min(\lambda_p(n-k)-\lambda_p(n), \lambda_p(n+1)-\lambda_p(k+1), \lambda_p(k)-\lambda_p(n+1-k)).
\end{aligned}
$$

Ако положим

$x_1 = \lambda_p(k)-\lambda_p(n), y_1 = \lambda_p(n-k)-\lambda_p(k+1), z_1 = \lambda_p(n+1)-\lambda_p(n+1-k)),$

$x_2 = \min(\lambda_p(n-k)-\lambda_p(n), y_2 = \lambda_p(n+1)-\lambda_p(k+1), z_2 = \lambda_p(k)-\lambda_p(n+1-k),$

равенство (1) е еквивалентно на

$$(2)\qquad \min(x_1, y_1, z_1) = \min(x_2, y_2, z_2),$$

като при това

$$(3)\qquad x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2.$$

Очевидно е, че ако $\lambda_p(a) \le \lambda_p(b)$, то $\lambda_p(a) = \lambda_p(|a \pm b|)$. Оттук, ако $\lambda_p(k) \le \lambda_p(n)$, то $\lambda_p(k) = \lambda_p(n-k)$ и $x_1 = x_2$. Ако $\lambda_p(k) > \lambda_p(n)$, то $\lambda_p(n-k) = \lambda_p(n)$ и $x_1 > 0, x_2 = 0$, т.е. $\min(x_1, x_2) = 0$. Така доказахме, че имаме $x_1 = x_2$ или $\min(x_1, x_2) = 0$. Аналогично се доказва, че $y_1 = y_2$ или $\min(y_1, y_2) = 0$, както и че $z_1 = z_2$ или $\min(z_1, z_2) = 0$.

Нека $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Тогава от (3) следва $z_1 = z_2$ и (2) е очевидно.

Ако $x_1 = x_2$, $y_1 \ne y_2$, $z_1 \ne z_2$, то без ограничение на общността $y_1 > y_2 = 0$, $z_1 < z_2 = 0$. Сега минимумът е 0 или $x_1 = x_2$ и (2) е очевидно.

Накрая при $x_1 \ne x_2$, $y_1 \ne y_2$, $z_1 \ne z_2$ от (3) отново получаваме

$$\min(x_1, y_1, z_1) = \min(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

NT2. Достатъчно е да докажем, че ако $p^k|m$, то $p^k|n!$. Ако $k = 1$, то $p|m$ и от условието следва, че $p \le n$, което означава, че $p|n!$. При $k > 1$ от $p^k \le m \le \dfrac{n^2}{4}$ получаваме $n \ge 2\sqrt{p^k}$. Ако $n \ge kp$, то поне k от числата $1, 2, \ldots, n$ се делят на p и следователно $p^k|n!$. Следователно е достатъчно да докажем, че $2\sqrt{p^k} \ge kp$ или еквивалентно

$$(1)\qquad p^{\frac{k-2}{2}} \ge \frac{k}{2}.$$

При $k = 2$ горното неравенство е изпълнено, а при $k \ge 4$ имаме

$$p^{\frac{k-2}{2}} \ge 2^{\frac{k-2}{2}} \ge \frac{k}{2},$$

като последното неравенство се доказва лесно по индукция.

При $k = 3$ неравенство (1) е вярно при $p > 2$, а при $p = 2$ получаваме $m \geq 8$, откъдето $n > 5$ и $n!$ се дели на 8.

NT3. Да предположим, че съществува m с исканото свойство. Ако m е нечетно, то $3|2^m+1|5^m-1$, което е невъзможно. Ако $n = 2k$ и k е нечетно, то $5|2^m + 1|5^m - 1$, което е невъзможно.

Нека $m = 2^n t$, където $n \geq 2$ и t са естествени числа и t е нечетно, и нека $F_n = 2^{2^n} + 1$ е n-тото число на Ферма. Тогава $F_n \equiv 2 \pmod 5$, което означава, че съществува просто число p, което дели F_n и за което $p \equiv \pm 2 \pmod 5$. Ясно е, че $p|F_n|2^{2^n} t + 1 = 2^m + 1|5^m - 1$.

Известно е (и се доказва лесно с разглеждане на показателя на 2 по модул p), че $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$; нека $p = 2^{n+1}q + 1$, където q е естествено число.

От $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ следва, че p е квадратичен неостатък по модул p. Тогава по критерия на Ойлер имаме $5^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$, т.е. $5^{2^n q} \equiv -1 \pmod p$. Следователно $5^{mq} = 5^{2^n qt} \equiv (-1)^t = -1 \pmod p$. Последното обаче е невъзможно при $5^m \equiv 1 \pmod p$ – противоречие, което приключва решението.

A1. Лесно се вижда, че при $a = 1$ и $a = 2$ уравнението няма реални корени. Да отбележим, че уравнението $f(x) = b$ има реално решение при $b \geq 1 - \dfrac{a^2}{4}$ и в този случай $x_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b - 4}}{2} \geq -\dfrac{a}{2}$. Нека $a = 3$. Тогава уравнението $f(x) = 0$ има корен $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, уравнението $f(x) = x_1$ има реален корен $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5 + 4x_1}}{2} \geq 1 - \dfrac{9}{4}$ и следователно уравнението $f(x) = x_2$ има реален корен x_3. Тогава

$$f_3(x_3) = f_2(f(x_3)) = f_2(x_2) = f(f(x_2)) = f(x_1) = 0.$$

Нека сега $a \geq 4$. Тогава уравнението $f(x) = 0$ има реален корен

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \geq -\frac{a}{2} > 1 - \frac{a^2}{4}$$

и както по-горе следва, че съществува редица от реални числа $x_1, x_2, \dots, x_a$, за която уравнението $f(x) = x_k$ има решение x_{k+1} при $k = 1, 2, \dots, a-1$. Тогава $f_a(x_a) = f_{a-1}(f(x_a)) = f_{a-1}(x_{a-1}) = \dots = f(x_1) = 0$. Следователно търсените стойности на a са всички $a \geq 3$.

A2. *Първи начин.* Ако n е нечетно, то a_n също е нечетно. Действително, $a_{2k+1} = a_{2k} + a_k = a_{2k-1} + 2a_k$ показва, че a_{2k-1} и a_{2k+1} имат еднаква четност и е достатъчно да отбележим, че a_1 е нечетно.

Ще докажем по индукция, че $a_{4k} \equiv a_k \pmod 4$. Базата се проверява лесно, а за индукционната стъпка последователно пресмятаме

$$\begin{aligned} a_{4k+4} &= a_{4k+3} + a_{2k+2} = a_{4k+2} + 2a_{2k+1} + a_{k+1} = a_{4k+1} + 3a_{2k+1} + a_{k+1} = \\ &= a_{4k} + 3a_{2k+1} + a_{2k} + a_{k+1} = a_{4k} + 4a_{2k+1} + a_{k+1} - a_k, \end{aligned}$$

откъдето $a_{4(k+1)} - a_{k+1} \equiv a_{4k} - a_k \pmod 4$.

Сега ще докажем, че ако $n \equiv 2 \pmod 4$, то $a_n \equiv 2 \pmod 4$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} a_{4k+2} &= a_{4k+1} + a_{2k+1} = a_{4k} + a_{2k} + a_{2k+1} = \\ &= a_{4k} - a_k + 2a_{2k+1} \equiv 2a_{2k+1} \pmod 4 \end{aligned}$$

и исканото следва от нечетността на a_{2k+1}.

Да допуснем, че има членове на редицата, които се делят на 4 и нека a_n е този от тях с най-малък индекс. Тогава от горното следва, че n се дели на 4. Но сега $a_{n/4}$ също се дели на 4, противоречие с избора на n.

Втори начин. Нека $n = 2^k m$, където m е нечетно число. Тогава с индукция по n се доказва, че:

(1) ако k е нечетно, то $a_n \equiv 2 \pmod 4$;

(2) ако k е четно и двоичният запис на n съдържа $s(n)$ цифри, то $a_n \equiv 2s(n) - 1 \pmod 4$.

A3. Нека D е петата на перпендикуляра от M към BC. Тъй като $S_{AMB} = S_{BMC} = S_{CMA}$, то $MD = \frac{h_a}{3}$, където h_a е височината през A. Понеже $BM = \frac{2m_b}{3}$, където m_b е дължината на медианата през B, то $\sin \sphericalangle MBC = \frac{h_a}{2m_b}$. Събирайки това равенство с другите две подобни, даденото неравенство добива вида

$$\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_c} + \frac{h_c}{m_a} \leq 3.$$

От неравенството на Коши-Буняковски-Шварц следва, че

$$\left(\frac{h_a}{m_b} + \frac{h_b}{m_c} + \frac{h_c}{m_a}\right)^2 \leq (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)\left(\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2}\right) =: X.$$

Значи е достатъчно да докажем, че $X \leq 9$.

Нека $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$. Да отбележим, че

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = 4S_{ABC}^2 \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz}$$

$$= \quad \frac{\big(2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2\big)(xy+yz+zx)}{4xyz},$$

$$\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}=\frac{36(xy+yz+zx)}{(2x+2y-z)(2y+2z-x)(2z+2x-y)}.$$

Тогава $X \le 9$ е еквивалентно на

$$xyz(2x+2y-z)(2y+2z-x)(2z+2x-y)+(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2$$

$$\ge 2(xy+yz+zx)^3.$$

Разкривайки скобите, достигаме до $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 \ge 0$, което е очевидно.

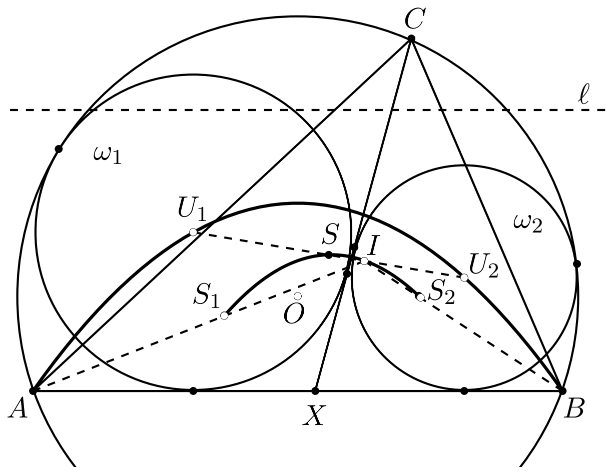
G1. Нека M е симетричната точка на C относно BD. Тогава $DBMA$ е равнобедрен трапец и $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ABM$. От друга страна,

$$\frac{MB}{BQ}=\frac{BC}{BQ}=\frac{DP}{DC}=\frac{DP}{DM},$$

т.е. $\triangle MBQ \sim \triangle MDP$. Следователно $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{DP}{BM}=\dfrac{DP}{BC}=\dfrac{PC}{QC}$, т.е. MC е ъглополовяща на $\sphericalangle PMQ$ и твърдението е доказано.

G2. Достатъчно е да докажем, че AA_2, BB_2 и CC_2 минават през една точка, тогава ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c ще минават през образа на тази точка при хомотетия с център медицентъра на $\triangle ABC$ и коефициент $-1/2$. Да забележим, че $\sphericalangle AOA_2 = \sphericalangle APA_2$ и следователно описаната около $\triangle OAA_2$ окръжност минава през P. Ако разгледаме инверсия относно k, то образът на описаната около $\triangle OAA_2$ окръжност е правата AA_2 и следователно AA_2 минава през образа P' на P при тази инверсия. Аналогично BB_2 и CC_2 ще минават през P', с което доказателството е завършено.

G3. Нека O е центърът на описаната окръжност k за $\triangle ABC$, I е центърът на вписаната окръжност, а ℓ е права успоредна на AB на разстояние равно на радиуса на k и разположена от страната на върха C както е изобразено на чертежа. Забелязваме, че U_1 и U_2 се намират на едно и също разстояние както от O, така и от правата ℓ, т.е. при движението на X по AB описват парабола с фокус O и директриса ℓ. От друга страна, от теоремата на Виктор Тебо следва, че U_1U_2 минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, независимо от избора на точката X.



Остава да съобразим, че при това положение средата S на U_1U_2 също описва парабола (в случая на окръжност този факт е очевиден, но се оказва валиден и в общия случай на коника). Тази парабола е отново с директриса, успоредна на AB (нейната ос на симетрия минава през средата на OI и е перпендикулярна на AB), минава през I, а краищата и S_1 и S_2 се явяват средите на отсечките, свързващи върховете A и B с центровете на съответните полувписани окръжности за $\triangle ABC$. Това са граничните случаи, когато $X \equiv A$ и $X \equiv B$ съответно.

C1. Ако номерираме редовете отдолу нагоре с $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а означим стълбовете отляво надясно с $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, то една добра конфигурация е, като запишем -9 в клетките $b4, c2, c6, d4, e2, e6, f4$, а във всички останали клетки запишем 2. Тъй като $S = 38 \cdot 2 - 7 \cdot 9 = 13 > 0$ и $4 \cdot 2 - 9 = -1 < 0$, остава да се убедим, че всяко вътрешно *положително* квадратче има поне един съсед измежду седемте *отрицателни* клетки. Проверката е директна.

Ще покажем, че няма добра конфигурация с най-много 6 отрицателни клетки, тъй като както и да маркираме 6 клетки върху дъската, ще се намери немаркирано вътрешно квадратче i, несъседно за никоя от тях и значи $s_i \geq 0$ като сума на пет неотрицателни числа.

Допускаме противното. Вътрешните клетки $b3, b6, d2, d5, f3, f6$ нямат общи съседи и следователно, шестте маркирани клетки трябва да са измежду съседите им (по един съсед за всяка от тях). В такъв случай, клетките $b1, c1, d7, e1, f1$ са немаркирани (не са съседи на нито една от изброените вътрешни клетки). Но завъртайки дъската последователно на 90°, 180° и 270°, заключаваме, че всички външни клетки на дъската трябва задължително да не са маркирани. По същия начин получаваме, че и всички съседи на централната клетка $d4$ не са маркирани и следователно самата тя трябва да е маркирана. Останаха 5 клетки за маркиране. Вътрешните клетки $b2, b5, d6, f2, f5$ не са съседни на $d4$ и нямат общи съседи. Аналогично на горните разсъждения заключаваме, че $c3, c5, d2, d6, e3, e5$ трябва задължително да не са маркирани. Но, тогава всички общи съседи на седемте клетки $b4, c2, c6, d4, e2, e6, f4$ са немаркирани и значи трябва да маркираме поне седем клетки. Противоречие с допускането.

C2. Ще покажем, че всички естествени n удовлетворяват условието, като за целта ще конструираме разбиване с исканите свойства. Избираме произволно 2019-специално $A = p_1 \dots p_{2019}$ и произволно естествено n. Всички делители на A^n са от вида $p_1^{\alpha_1} \dots p_{2019}^{\alpha_{2019}}$, $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\forall i$ и може да ги илюстрираме като точки в 2019-мерното пространство с целочислени координати $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2019})$. Така отъждествихме множеството от делителите на A^n с целочислената решетка в $[0, n]^{2019}$. Два делителя образуват класическа двойка тогава и само тогава, когато отговарят на съседни точки в решетката, т.е. класическите двойки се отъждествяват с ребрата на решетката. От своя страна, условията върху разбиването на множеството от класическите двойки делители е еквивалентно на разбиване на ребрата на решетката в непресичащи се конструкции от по 2019 две по две перпендикулярни ребра с общо начало (т.е. локална координатна система в целочислена точка от мрежата). Остава да фиксираме началните точки на тези локални координатни системи и да определим ориентацията на координатните оси. Да оцветим в червено всички целочислени точки, за които $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2019} \equiv 0 \pmod{n+1}$ и да разгледаме произволна неоцветена целочислена точка $B = (\beta_1, \dots, \beta_{2019})$. Върху всяка от координатните оси през B лежат по точно $n+1$ точки от решетката (включая B), като за всеки две съседни точки разликата от сумите от координатите им е точно 1. Следователно, тези суми образуват пълна система от остатъци по модул $n+1$ и значи съдържат по точно една червена точка. Построяването на локалните координатни системи, центрирани във всички неоцветени целочислени точки от решетката и ориентирани по посока на червената точка във всяка от координатните оси ни дава разбиване с търсените свойства.

C3. Ще докажем, че не е възможно да удовлетворим всички горепосочени изисквания. Да означим учениците с $\{c_1, \dots, c_{43}\}$, а проекто-отборите с $\{T_1, T_2, \dots\}$. Първо ще докажем, че е необходимо броят проекто-отбори да е 43, като всеки от тези отбори трябва да включва точно 7 ученика, а всеки ученик участва в точно 7 различни проекто-отбора. Разглеждаме произволен отбор T и произволен ученик $c \notin T$, който не е част от отбора. Да означим броя участници в T с $k \geq 3$. Тогава всеки отбор T', за който $c \in T'$, има по точно един общ участник с T, като различните отбори имат различен общ участник (заради условие 2) и всеки различен участник в T е в общ отбор с c (заради условие 3). Следователно c участва в точно k различни отбора и всеки отбор, в който c не участва, е от точно k участници. Сега нека изберем произволен участник $c' \in T$ от отбора T и да разгледаме единствения отбор T'', за който $\{c, c'\} \in T''$. От условие 1 следва, че съществува и трети ученик $c'' \notin \{c, c'\}$, $c'' \in T''$. Имаме, че $c'' \notin T$, следователно този ученик участва в точно $k \geq 3$ отбора и значи има отбор T''' такъв, че $c'' \in T'''$ и $\{c, c'\} \notin T'''$. От $c \notin T'''$ следва, че $|T'''| = k$, а от $c' \notin T'''$ следва, че c' участва в точно k различни отбора. Но c' бе произволен участник от T и значи всички участници в този отбор участват в по k отбора. Получихме, че всички ученици участват в точно k различни отбора и всички отбори са с по точно k участници. Оттук следва, че броят ученици е равен на броя отбори, т.е. трябва да се съставят 43 отбора. Но ние имаме броя отбори като функция на k, защото от условие 2 следва че всички отбори имат по точно един общ участник с T и значи $k(k-1) + 1 = 43$, т.е. $k = 7$.

Конструираме матрицата $\{A_{ij}\}$ по следния начин:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & c_i \in T_j; \\ 0, & c_i \notin T_j. \end{cases}$$

От доказаното дотук получаваме, че A е с размери 43×43 и условия 1–3 са еквивалентни на

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{43} A_{ki} = \sum_{k=1}^{43} A_{ik} = 7, \ \forall i = 1, 2, \ldots, 43.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{43} A_{ki}A_{kj} = \sum_{k=1}^{43} A_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 1, & i \neq j; \\ 7, & i = j. \end{cases}$

Да допуснем, че такава матрица съществува. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{43}$ са рационални числа, които засега оставяме произволни, но ще ги фиксираме едно по едно в процеса на доказателството. Дефинираме рационалните числа $\{z_i\}_1^{43}$ посредством:

$$z_i := \sum_{k=1}^{43} A_{ki}x_k.$$

Всяко от тези числа е сума на 7 от хиксовете, в частност е тяхна линейна комбинация. Директно се проверява, че

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{43} z_k^2 &= \sum_k \left(\sum_{i,j} A_{ik}A_{jk}x_ix_j \right) = \sum_{i,j} \left(\sum_k A_{ik}A_{jk} \right) x_ix_j \\ &= 6 \sum_k x_k^2 + \underbrace{\left(\sum_k x_k \right)^2}_{:=s^2}. \end{aligned}$$

Ясно е, че s също е рационално, като сума на рационални числа. Прибавяме към двете страни на тъждеството $6x_{44}^2$ и дефинираме рационалните числа $\{y_i\}_1^{44}$ посредством

$$\begin{aligned}
y_{4i+1} &:= x_{4i+1} - 2x_{4i+2} - x_{4i+3} \\
y_{4i+2} &:= 2x_{4i+1} + x_{4i+2} + x_{4i+4} \\
y_{4i+3} &:= x_{4i+1} + x_{4i+3} - 2x_{4i+4} \\
y_{4i+4} &:= -x_{4i+2} + 2x_{4i+3} + x_{4i+4}
\end{aligned}$$

за всяко $i = 0, 1, \ldots, 10$. Тези числа отново са линейни комбинации на хиксовете, като директно се проверява, че $6\sum_k x_k^2 = \sum_k y_k^2$ и значи

$$\sum_{k=1}^{43} z_k^2 + 6x_{44}^2 = \sum_{k=1}^{44} y_k^2 + s^2$$

при произволен избор на числата $x_1, x_2, \ldots, x_{44}$. Остава да съобразим, че при подходящ избор на числата $x_1, \ldots, x_{43}$ можем да унищожим част от квадратите от двете страни, така че да съществува рационално Y, такова че $Y^2 = \sum_{k=1}^{44} y_k^2 - \sum_{k=1}^{43} z_k^2$. Ще илюстрираме само първата стъпка. Без ограничени на общността, с точност до преномериране на редовете и стълбовете на A, можем да считаме, $A_{11} = 1$ и значи $z_1 = x_1 + A_{21}x_2 + \ldots$. Тъй като $y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3$, ако изберем

$$x_1 := -\frac{(A_{21} - 2)x_2 + (A_{31} - 1)x_3 + A_{41}x_4 + \cdots + A_{43,1}x_{43}}{2}$$

си гарантираме $y_1 + z_1 = 0$ и значи $y_1^2 = z_1^2$. Останалите $y_2, \ldots, y_{44}$ и $z_2, \ldots, z_{43}$ са линейни комбинации на $x_2, \ldots, x_{44}$ и продължаваме по аналогичен начин на стъпка i да фиксираме x_i да е подходящо избрана линейна комбинация с рационални коефициенти на $x_{i+1}, \ldots, x_{44}$, така че да съществуват двойка j, k със свойството $y_j \pm z_k = 0$, което води до $y_j^2 = z_k^2$.

Така, стигнахме до тъждеството

$$6x_{44}^2 = Y^2 + s^2,$$

където Y и s са рационални числа, функции на x_{44}, а x_{44} е произволно рационално. Нека сега вземем $x_{44} = 1$, $Y = A/B$, $s = C/D$, където A, B, C, D са цели числа. След подвеждане под общ знаменател, получаваме че трябва да съществуват естествени числа u, v, w, такива че

$$6w^2 = u^2 + v^2,$$

което е невъзможно и по модул 2 и по модул 3. Следователно, такава матрица A не съществува!

Забележка: Втората част от решението е доказателство, че не съществува крайна проективна равнина от ред 6. Това следва и директно от теоремата на Брук-Райзър, тъй като $6 \equiv 2 \pmod 4$ и не може да се представи като сума на два точни квадрата.

Математически боеве, 05.01.2019

Задача 1. Във футболен турнир участват 6 отбора, които играят по веднъж всеки срещу всеки. За победа, равенство и загуба се присъждат съответно 3, 1 и 0 точки. Оказало се, че в крайното класиране разликата между всеки два съседни отбора е 2 точки. Колко победи има четвъртият в класирането?

Решение. Нека точките в крайното класиране са $s, s+2, \ldots, s+10$, а T е сумата им, т.е. $T = 6s+30$. Да означим броя на равенствата с d. Тогава $T = 2d + 3(15-d) = 45 - d$.

От получените две равенства за T получаваме, че $T \in \{30, 36, 42\}$. Ако $T = 30$, то $d = 15$, т.е. всички срещи са завършили наравно, което е невъзможно. Ако $T = 36$, то $d = 9$ и $s = 1$. Отборът с 1 точка е завършил наравно един мач и е изгубил останалите четири, а отборът с 3 точки е изгубил поне два мача. Освен това отборът победител е спечелил поне 3 срещи, което означава, че поне една от тях е срещу отборите от второ до четвърто място. Получихме общо $4+2+1=7$ загуби, което противоречи на $d = 9$.

При $T = 42$ имаме $d = 3$ и $s = 2$. Тогава отборите са спечелили съответно по $2, 1, 0, 2, 1, 0$ точки от равенства. В частност, четвъртият в класирането има две победи.

Задача 2. Дадени са 1000 топки от 40 различни цвята, по 25 от всеки цвят. Да се намери минималното n, за което е в сила следното: както и да разположим топките по окръжност, ще има n поредни топки от поне 20 различни цвята.

Решение. Ако топките са разположени последователно в блокове от по 25 от един и същи цвят, ще са ни необходими $18.25 + 2 = 452$ поредни топки. Ще докажем, че 452 топки са и достатъчни.

Да разгледаме произволно разположение и множеството от всички „дъги“ от точки, при които имаме точно 20 цвята (това множество не е празно!). Нека A е „дъга“ с 20 цвята и минимална дължина и първата топка от A е бяла. Ако в A има още една бяла топка, можем да премахнем първата и да получим противоречие с минималността на A. По същия начин се вижда, че последната топка (която не е бяла) също е уникална. Следователно имаме по една топка от два различни цвята и най-много $18.25 = 450$ топки от други цветове между тях, общо най-много 452.

Задача 3. Нека A е множество от функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ със следното свойство: за всеки две функции $f_1, f_2 \in A$ съществува функция $f_3 \in A$, такава, че

$$f_1(f_2(y) - x) + 2x = f_3(x + y)$$

за всички $x, y \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че $f(x - f(x)) = 0$ за всяка функция $f \in A$ и за всяко реално число x.

Решение. Полагането $x = 0$ дава $f_1(f_2(y)) = f_3(y)$ за всяко y, което означава, че съответната на f_1 и f_2 функция е тяхната композиция. Сега полагаме $x = -y$ и получаваме $f_1(f_2(y) + y) - 2y = f_3(0) = f_1(f_2(0))$. Това важи и за двойката функции (f_3, f_2), т.е. $f_3(f_2(y) + y) - 2y = f_3(f_2(0))$.

Връщайки се към двойката (f_1, f_2), полагаме $x = f_2(y)$ и получаваме $f_1(0) + 2f_2(y) = f_3(f_2(y) + y) = 2y + f_3(f_2(0))$. Оттук следва, че $f_2(y) = y + a$, където $2a = f_3(f_2(0)) - f_1(0)$, т.е. a е константа и f_2 е линейна функция.

Последното важи за всяка функция $f \in A$. Следователно

$$f(x - f(x)) = f(x - (x + a)) = f(-a) = 0.$$

Задача 4. Нека $a_1 \leq a_2 \leq \cdots < a_{100}$ са реални числа, за които $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} > 0$ и

$$100(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2) = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})^2.$$

Да се докаже, че $a_{51} > 0$.

Решение. Ще наричаме $(a_1, \ldots, a_{100})$ *добра*, ако удовлетворява условията. Да отбележим, че умножение с положителна константа запазва „добрината“ и затова можем без ограничение на общността да считаме, че $a_1 + \cdots + a_{100} = 50$. Нека $1 < \ell < 100$ е индекс, за който $a_1 \leq \cdots \leq a_\ell \leq 0 < a_{\ell+1} \leq \cdots \leq a_{100}$. Да допуснем, че $\ell > 50$.

Да означим $X := a_{\ell+1} + \cdots + a_{100}$ и $Y := -(a_1 + \cdots + a_\ell)$. Ясно е, че X и Y са положителни и $2(X - Y) = 100 > 0$.

С помощта на неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$\begin{aligned} 50 = \frac{1}{50} \cdot \left(\frac{50}{2}\right)^2 &= \frac{1}{50}(a_1 + \cdots + a_{100})^2 \\ &= \left((-a_1)^2 + \cdots + (-a_\ell)^2\right) + \left(a_{\ell+1}^2 + \cdots + a_{100}^2\right) \\ &\geq \frac{Y^2}{\ell} + \frac{X^2}{100 - \ell}. \end{aligned}$$

Директно се проверява, че

$$\frac{X^2}{100-\ell}+\frac{Y^2}{\ell}\geq\frac{2(X^2+Y^2)}{100}.$$

Действително, ако е вярно обратното, то

$$X^2\left(\frac{1}{100-\ell}-\frac{2}{100}\right)\leq Y^2\left(\frac{2}{100}-\frac{1}{\ell}\right),$$

откъдето $1\leq\dfrac{X^2}{Y^2}\leq\dfrac{100-\ell}{\ell}$ (съкратихме на $2\ell-100>0$). Следователно $2\ell\leq 100$, противоречие.

Сега $(X-Y)^2=50^2\geq X^2+Y^2$, откъдето $XY\leq 0$, противоречие.

Задача 5. Нека $k>1$ е естествено число, а S_k е множеството от тройки (n,a,b) от естествени числа, за които n е нечетно, $(a,b)=1$, $a+b=k$ и $n|a^n+b^n$. Да се намерят всички k, за които S_k е крайно множество.

Решение. Ще докажем, че S_k е крайно тогава и само тогава, когато k е степен на 2.

До допуснем за момент, че k има нечетен прост делител p. Нека $n=p^\ell$ за някое естествено число ℓ. От лемата за повишаване на експонентата имаме

$$\upsilon_p(a^n+b^n)=\upsilon_p(a^{p^\ell}+b^{p^\ell})=\upsilon_p(a+b)+\upsilon_p(n)=\upsilon_p(k)+\ell\geq 1+\ell.$$

Следователно $n|a^n+b^n$, което означава, че $(p^\ell,a,b)\in S_k$ и множеството S_k е безкрайно.

Нека сега $k=2^m$. Нека $n>1$ е фиксирано и p е най-малкият му прост делител. Ако p дели b, то p дели и a, което противоречи на $(a,b)=1$. Следователно $(p,b)=1$ и значи съществува цяло число c, такова, че $bc\equiv 1 \pmod p$. Тогава от $a^n+b^n\equiv 0 \pmod p$ следва, че $(ac)^n\equiv -1 \pmod p$.

Нека d е показателят на ac по модул p. Тогава $d|2n$ и $d|p-1$, т.е. $d|(2n,p-1)$. Последното, заедно с избора на p дава $d\in\{1,2\}$.

Ако $d=1$, то $-1\equiv(ac)^n\equiv 1 \pmod p \implies p=2$, противоречие. Ако $d=2$, то $p|(ac)^2-1$, откъдето $ac\equiv -1 \pmod p$. Последното след умножение с c води до $p|a+b=k$, което е невъзможно, защото k е степен на 2.

Следователно $n=1$, което означава, че множеството S_k е крайно.

Задача 6. На дъската са написани числата $1,2,\ldots,100$. На всяка минута се избират две от написаните числа a и b, изтриват се и на тяхно място се записва най-големият общ делител на числата a^2b^2+3 и a^2+b^2+2. Възможно ли е последното число на дъската да е точна степен (по-голяма от първа)?

Решение. Тъй като a^2b^2+3 никога не се дели на 9, последното число няма да се дели на 9 и е достатъчно да докажем, че то се дели на 3. За целта е достатъчно да видим, че четността на кратните на 3 числа на дъската се запазва.

Ако a и b не се делят на 3, то a^2b^2+3 също не се дели на 3 и в този случай четността не се променя. Ако a и b се делят на 3, то a^2+b^2+2 не се дели на 3 и отново четността не се променя. Накрая, ако точно едно от числата a и b се дели на 3, то a^2b^2+3 се дели на 3 и четността се запазва.

Задача 7. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$, $\sphericalangle C = 90^\circ$, в който D е средата на AC, а E е петата на перпендикуляра от C към BD. Да се докаже, че допирателната в точка C към окръжността, описана около $\triangle AEC$, е перпендикулярна на AB.

Решение. Нека S е пресечната точка на разглежданата допирателна и AB. Тъй като $\triangle BCD \sim \triangle CED$, имаме $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{DE}{DC}$, откъдето

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DA}.$$

Последното и общият $\sphericalangle BDA$ дават подобието $\triangle ADE \sim \triangle BDA$. Тогава $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EAD = \sphericalangle ECS$, откъдето следва, че четириъгълникът $BCES$ е вписан и сега $\sphericalangle BSC = \sphericalangle BEC = 90^\circ$.

Задача 8. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека D е петата на височината през A, а точките E и F, $E \neq F$, върху AD са такива, че $AE = BE$ и $AF = CF$. Точка $T \neq D$ е такава, че $\sphericalangle BTE = \sphericalangle CTF = 90^\circ$. Да се докаже, че $TA^2 = TC \cdot TB$.

Решение. Нека M и n са средите съответно на AB и AC. Тогава точките B, D, T и M лежат на окръжността с диаметър BE, а точките C, N, T, D и F – на окръжността с диаметър CD. От теоремата на Микел следва, че четириъгълникът $AMTN$ е вписан.

За исканото е достатъчно да докажем, че $\triangle TBA \sim \triangle TAC$. Имаме $\sphericalangle NTC = \sphericalangle NFC = 90^\circ - \sphericalangle FCN$. Тъй като $\sphericalangle FCN = \sphericalangle CAF$, получаваме $\sphericalangle NTC = 90^\circ - \sphericalangle CAF = \sphericalangle ACB$. Следователно

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACT &= \sphericalangle NCT = 180^\circ - \sphericalangle NTC - \sphericalangle CNT = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle CNT \\ &= \sphericalangle CNM - \sphericalangle CNT = \sphericalangle MNT = \sphericalangle BAT\end{aligned}$$

(използвахме, че MN е успоредно на BC и $AMTN$ е вписан). Аналогично се вижда, че $\sphericalangle ABT = \sphericalangle CAT$.

WORLD MATHEMATICS TEAM CHAMPIONSHIP 2018

Емил Колев,
Институт по математика и информатика – БАН

Състезанието WMTC се проведе в гр. Варна от 21 до 25 ноември 2018 г. В него взеха участие отбори от България, Виетнам, САЩ, Хонг Конг, Австралия, Катар, Сингапур, Канада, Индонезия, Иран, Индия, Тайван, Нигерия, Корея и Япония. Общо участваха 402 ученици, разделени в три възрастови групи – Junior, Intermediate и Advanced.

Състезанието се проведе в три кръга – индивидуален, щафета и отборен. Повече информация за състезанието, както и класирането по възрастови групи може да намерите на сайта

`http://wmtc.international`.

Предлагаме ви задачите от отборния кръг на трите възрастови групи.

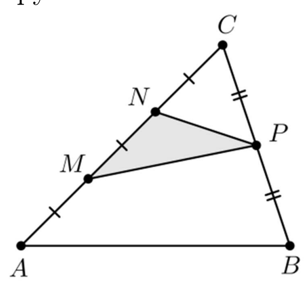
Junior Level Team Round

1. Да се намери броят на трицифрените числа без 0 в десетичния си запис, които имат сбор на цифрите 23.

2. Дадени са 9 монети, една от които е фалшива. За един въпрос можем да изберем 4 монети и да разберем дали фалшивата е между тях. Да се намери минималният брой въпроси, с които със сигурност можем да намерим фалшивата монета.

3. Средното тегло на група от ученици е 35,2 кг. Алберт, който тежи 45,6 кг, се присъединил към групата. Това увеличило средното тегло на групата до 36 кг. Колко ученици е имало в първоначалната група?

Задача 4. Точките M и N от страната AC и точка P от страната BC на триъгълник ABC са такива, че $AM = MN = NC$ и $BP = PC$. Ако $S_{ABC} = 30\ \text{cm}^2$, намерете S_{MNP}.



5. Четири последователни естествени числа имат следното свойство: първото число се дели на 3, второто число се дели на 5, третото число се дели на 7 и четвъртото число се дели на 9. Намерете най-малкия възможен сбор на тези числа.

6. Колко числа от интервала [1, 2018] могат да се представят като сбор на k последователни естествени числа за всяко $k = 2$, $k = 3$ и $k = 5$?

7. Да се намери броят на редиците от нули и единици с дължина 4.

8. Всяка клетка на таблица е оцветена в бяло или черно. Всяка бяла клетка има точно три съседни черни клетки, а всяка черна клетка има точно една съседна бяла клетка. Да се намери броят на белите клетки. (Две клетки са съседни, ако имат обща страна.)

9. Ако числото $\overline{a2018b}$ се дели на 12, но не се дели на 9, намерете най-голямата възможна стойност на $a + b$.

10. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 2.** Две свещи с равни дължини изгарят съответно за 3 часа и 2 часа. Двете свещи се запалват едновременно. След колко минути дължината на едната свещ ще бъде T пъти дължината на другата?

11. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 9.** Числата 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 са записани на 9 топки. Всяка топка е синя или червена. Средното аритметично на числата върху сините топки е равно на 7, а средното аритметично на числата върху червените топки е равно на $T - 3$. Да се намери броят на сините топки.

12. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 8.** Точка M от страната AB на успоредник $ABCD$ е такава, че $AM = T.MB$. Ако $S_{CDM} = 25$ cm^2, намерете S_{AMD}.

13. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 5.** Всички естествени числа са записани едно след друго 123456789101112.... Намерете цифрата, която се намира на място T в тази редица.

14. $\boldsymbol{S}$ **= отговора на задача 7;** $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 4.** Къща има няколко стаи. Всяка стая има T врати. Две от вратите са външни, а останалите врати са вътрешни между стаите. Ако общо има S врати, колко са стаите в тази къща?

Intermediate Level Team Round

1. Дадени са 5 различни естествени числа, за които сборовете на числата по двойки са различни. Да се намери най-малката възможна стойност на най-голямото от тези числа.

2. За естествено число n с $S(n)$ означаваме сбора от цифрите на n. Намерете най-малката стойност на n, за която $S(n)S(n+1) = 2018$.

3. Даден е равнобедрен триъгълник ABC, за който $\sphericalangle C = 90^\circ$ и $AC = BC = 6$. Точки Y и X съответно върху страните AC и BC са такива, че $CY = CX = 2$. Ако D е пресечната точка на AX и BY, намерете лицето на $\triangle ADB$.

4. Да се намери броят на думите с дължина 7, съставени от две букви a и b, в които няма две съседни букви a.

5. Някои от клетките на таблица 5×5 са оцветени. Какъв е най-малкият брой клетки, имащи четен брой съседни оцветени клетки? (Две клетки са съседни, ако имат обща страна.)

6. Вода извира от извор с постоянен дебит от 40 литра в минута. Десет слона изпиват всичката вода, като всеки слон пие едно и също количество вода. След една минута два от слоновете си тръгнали. След още една минута още три слона си отишли. След третата минута останалите 5 слона също си тръгнали. Какво количество вода е изпил всеки от последните 5 слона за всичките 3 минути?

7. Намерете ъгъла между часовниковите стрелки в 7 часа и 38 минути.

8. Точка M от страната AB и точка N от страната AC на триъгълник ABC са такива, че $AN = NM = MC = CB$ и $\sphericalangle BAC = 20^\circ$. Намерете $\sphericalangle BNM$.

9. За коя стойност на параметъра a уравнението $|2x-1|+|3x-2| = a-x$ има безбройно много решения?

10. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 7.** Ако $\overline{bcT}$ се дели на 3, $\overline{Tbc}$ се дели на 4 и $\overline{cTb}$ се дели на 5, намерете c.

11. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 9.** Намерете броя на двойките (x, y) от естествени числа, за които

$$x + y = Txy - 7.$$

12. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 1.** В турнир по футбол всеки два от 7 отбора изиграли по една среща помежду си. Общият брой точки на всички отбори се дели на $2T$. Колко от срещите са завършили с победа на единия от двата отбора? (За победа се дават 3 точки, за равен по една точка на двата отбора и за загуба – 0 точки.)

13. $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 3.** Намерете най-голямото естествено число k, за което 3^k дели

$$3 \times 33 \times 333 \times \cdots \times \underbrace{33\ldots33}_{T}.$$

14. $\boldsymbol{S}$ **= отговора на задача 6;** $\boldsymbol{T}$ **= отговора на задача 8.** Ученик тича покрай трамвайна линия с постоянна скорост. Трамваите се движат в двете посоки с постоянна скорост през равни интервали от време. Всеки S минути ученикът е задминаван от трамвай, а всеки T минути той среща трамвай. Намерете отношението на скоростта на ученика и скоростта на трамвая.

Advanced Level Team Round

1. Нека a е най-малкото цяло число, за което уравнението

$$x^3 + ax + 2a + 15 = 0$$

има рационален корен. Намерете a^2.

2. Нека a и b са реални числа, за които уравнението

$$\left||x^2 - 1| - b\right| = a^2 + 1$$

има точно 5 различни реални корена. Намерете най-малката стойност на $2a + |b| + 49$.

3. Ако $a = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, намерете стойността на $a^2 + b^2 - 2ab + 3$.

4. Диаметърът на футболната топка е $40(3-\sqrt{6})$ cm. Три футболни топки са поставени на равна повърхност и се допират една до друга. Четвърта топка е поставена върху тези три, като допира всяка от тях. Намерете разстоянието от повърхността до най-високата точка на тази конструкция.

5. Нека A е множество от положителни цели числа, за което за всеки две различни x и y от A е изпълнено, че $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| \geq \dfrac{1}{25}$. Най-много колко елемента може да има в множеството A?

6. Всички десетцифрени числа с различни цифри са записани едно след друго в нарастващ ред. Намерете 1198-та цифра в получената редица.

7. Да се намери броят на наредените двойки (a, b) от реални числа, за които $x^2 + ax + b \geqq ax^2 + bx + 1 \geqq bx^2 + x + a$ за всяко реално число x.

8. За всяко непразно подмножество A на множеството $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 105\}$ с $P(A)$ означаваме произведението от елементите на A. Ако S е сборът на всички такива произведения, намерете най-големия прост делител на $S+1$.

9. Всички наредени тройки от естествени числа (a, b, c) са записани една след друга по следните правила:

1. Ако $a_1b_1c_1 < a_2b_2c_2$, то (a_1, b_1, c_1) е преди (a_2, b_2, c_2).

2. Ако $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ и $a_1 < a_2$, то (a_1, b_1, c_1) е преди (a_2, b_2, c_2).
3. Ако $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$, $a_1 = a_2$ и $b_1 < b_2$, то (a_1, b_1, c_1) е преди (a_2, b_2, c_2).
Колко тройки са между $(1, 1, 900)$ и $(900, 1, 1)$ включително?

10. ***T* = отговора на задача 8.** В триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ACB = T^\circ$, точките P и Q от страната AB са такива, че $AP = BC$ и $BQ = AC$. Ако M, N и K са среди съответно на AB, CP и CQ, намерете $2\sphericalangle NMK$ в градуси.

11. ***T* = отговора на задача 6.** Равностранен триъгълник със страна T е разделен на равностранни триъгълници със страна 1 чрез прави, успоредни на страните му. Да се намери броят на успоредниците с върхове в пресечните точки на тези прави.

12. ***T* = отговора на задача 7.** Намерете най-голямата стойност на xy, където x и y са цели числа, за които $(T + 6)(x - y) + xy = 8$.

13. ***T* = отговора на задача 2.** Човек се изкачва по ескалатор, който се движи в същата посока. От момента, в който той стъпва на ескалатора, до момента, в който стига края на ескалатора, той изкачва T стъпала. Когато се изкачва два пъти по-бързо, от момента, в който той стъпва на ескалатора, до момента, в който стига края на ескалатора, той изкачва $T+10$ стъпала. Да се намери броят на стъпалата на неподвижен ескалатор.

14. ***S* = отговора на задача 3; *T* = отговора на задача 5.** Две окръжности k_1 и k_2 с радиуси съответно S и T се допират външно. Ако AB и CD са общи допирателни към k_1 и k_2 ($A, C \in k_1$ и $B, D \in k_2$), намерете $(AC + BD)^2$.

ОТГОВОРИ

Junior Level

1. 15; **2.** 4; **3.** 12; **4.** 5; **5.** 642; **6.** 67; **7.** 16; **8.** 4; **9.** 13; **10.** 108; **11.** 6; **12.** 20; **13.** 0; **14.** 6.

Intermediate Level

1. 8; **2.** $1\underbrace{99\ldots9}_{112}$; **3.** 9; **4.** 34; **5.** 1; **6.** 17; **7.** 1; **8.** 10; **9.** 1; **10.** 6; **11.** 4; **12.** 6; **13.** 13; **14.** $\dfrac{7}{27}$.

Advanced Level

1. 10404; **2.** 50; **3.** 7; **4.** 40; **5.** 9; **6.** 7; **7.** 1; **8.** 97; **9.** 216; **10.** 83; **11.** 378; **12.** 204; **13.** 75; **14.** 1008.

РЕШЕНИЯ

Junior Level

1. Цифрите са 9, 9, 5 (и с тях се образуват 3 числа); 9, 8, 6 (образуват 6 числа); 9, 7, 7 (образуват 3 числа); 8, 8, 7 (образуват 3 числа); общо 15 числа.

2. Ако първият отговор е *не*, фалшивата монета е сред останалите 5. Като разделяме всеки път монетите в две почти равни групи и добавяме монети от първите четири, за да получим група от 4, за още 3 хода ще открием фалшивата. Ако първият отговор е *да*, стратегията е аналогична.

3. Ако броят на децата отначало е n и сборът от теглата им е x, имаме $x = 35.2n$ и $x + 45.6 = 36(n+1)$ и намираме $n = 12$.

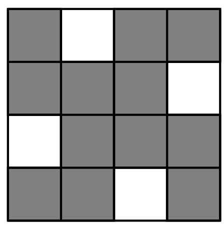
4. Имаме $S_{APC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = 15\ \mathrm{cm}^2$ и $S_{PMN} = \dfrac{1}{3}S_{APC} = 5\ \mathrm{cm}^2$.

5. Последната цифра на второто число е 5 или 0, следователно последната цифра на четвъртото число е 2 или 7. То е от вида $9t$ и завършва на 2 или 7, значи t завършва на 3 или 8. С проверка на първите стойности на $t = 3, 8, 13$ и 18 намираме, че най-малко t е 18. Числата са 159, 160,161 и 162 и сборът им е 642.

6. Търсените числа са нечетни, кратни на 15, т.е. от вида $30t + 15$. Имаме $t = 0, 1, \ldots 66$ и броят им е 67.

7. За всяка позиция има по 2 възможности; общо $2^4 = 16$.

8. Лесно построяваме решение с 4 бели клетки.



9. Числото $\overline{a2018b}$ се дели на 4, следователно $b = 0$, 4 или 8. Освен това $a + b + 11$ се дели на 3, но не на 9. За $b = 0$ максималното a е 4; за $b = 4$ максималното a е 9 и за $b = 8$ максималното a е 5. Максималният сбор е 13.

10. Имаме $T = 4$. Ако търсеното време е t, имаме $1 - \dfrac{t}{3} = 4\left(1 - \dfrac{t}{2}\right)$, откъдето $t = \dfrac{9}{5}$ часа, т.е. 108 минути.

11. Имаме $T = 13$. Нека сините топки са n на брой и сборът от числата на тях е x. Имаме $\dfrac{x}{n} = 7$ и $\dfrac{72 - x}{9 - n} = 10$ и оттук $n = 6$ и $x = 42$. Например, ако сините топки са с номера 4, 5, 6, 7, 8, 12, а червените са 9, 10, 11.

12. Имаме $T = 4$. Тъй като $S_{CDM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD}$ и $S_{ABD} = 25\ \mathrm{cm}^2$, намираме $S_{AMD} = \dfrac{4}{5}S_{ABD} = \dfrac{4}{5} \times 25 = 20\ \mathrm{cm}^2$.

13. Имаме $T = 642$. Тъй като $9 + 90.2 + 151.3 = 642$, то 642-та цифра е последната цифра на 151-то трицифрено число. То е $151 + 99 = 250$ и търсената цифра е 0.

14. Имаме $S = 16$, $T = 5$. Ако броят на стаите е x, имаме $\dfrac{5x-2}{2} + 2 = 16$, откъдето $x = 6$.

Intermediate Level

11. Имаме $T = 1$. Записваме уравнението $x + y = xy - 7$ във вида $(x-1)(y-1) = 8$. Числото $x - 1$ е делител на 8, откъдето x може да е 2, 3, 5 или 9. Получаваме 4 решения.

12. Имаме $T = 12$. Броят на мачовете е 21. Всеки мач носи 2 или 3 точки общо, т.е. общият брой точки е между 42 и 63. Този брой се дели на 24, следователно е 48. Тогава броят на победите е $48 - 42 = 6$.

13. Имаме $T = 9$. Тъй като 111 и 111111 са кратни на 3, 111111111 е кратно на 9, а $3 \times 33 \times 333 \times \cdots \times \underbrace{33\ldots33}_{9} = 3^9 \times 1 \times 11 \times 111 \times \cdots \times \underbrace{11\ldots11}_{9}$, намираме $k = 13$.

14. Имаме $S = 17$, $T = 10$. Ако скоростта на ученика е x, скоростта на трамвая е y, а разстоянието между два трамвая е D, имаме $\dfrac{D}{x+y} = T = 10$ и $\dfrac{D}{y-x} = S = 17$. Следователно $\dfrac{x+y}{y-x} = \dfrac{17}{10}$, откъдето $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{27}$.

Advanced Level

11. Имаме $T = 7$. Отговорът е $3\dbinom{T+2}{4} = 3\dbinom{9}{4} = 378$.

12. Имаме $T = 1$. Равенството е еквивалентно на $(x-7)(y+7) = -41$ и търсената най-голяма стойност се достига при $x = -34$ и $y = -6$ и е 204.

13. Имаме $T = 50$. В общия случай отговорът е $\dfrac{pq}{2p-q}$, където p и q е съответният брой стъпала. В случая получаваме $\dfrac{50.60}{2.50 - 60} = 75$.

14. Имаме $T = 9, S = 7$. Ако допирната точка на окръжностите е I, лесно получаваме, че IA е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$. Същото е вярно за IC, ID, IB и съответните ъгли. Следователно $ACDB$ е описан, откъдето $AC + BD = 2AB$. Но $AB = 2\sqrt{r_1 r_2} = 6\sqrt{7}$ (от четириъгълника O_1O_2BA) и $(AC + BD)^2 = 4AB^2 = 1008$.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до месец март.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. При А = 2,5 и В = –0,2 най-голяма е стойността на израза:

А) –А.В **Б)** А : В **В)** А + В **Г)** А – В

2. 10% от кое число е с 20% повече от 30?

А) 302 **Б)** 320 **В)** 360 **Г)** 375

3. Нормалният вид на многочлена $(2x + 3)^2 - (x - 4)(x + 4)$ е:

А) $3x^2 + 12x + 25$ **Б)** $x^2 + 12x + 25$

В) $3x^2 + 6x - 7$ **Г)** $x^2 + 6x - 7$

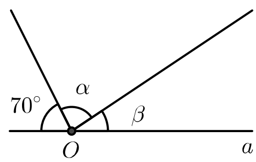
4. Коренът на уравнението $(x + 1)(2 - x) = 3 + (x + 2)(1 - x)$ е:

А) 3 **Б)** 1,5 **В)** –0,5 **Г)** –2

5. На чертежа $O \in a$ и $\alpha : \beta = 17 : 5$. Градусната мярка на ъгъл β е:

А) 20° **Б)** 22°

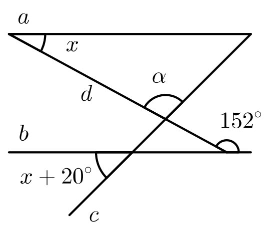
В) 24° **Г)** 25°



6. На чертежа успоредните прави a и b са пресечени с правите c и d. Градусната мярка на ъгъл α е равна на:

А) 96° **Б)** 102°

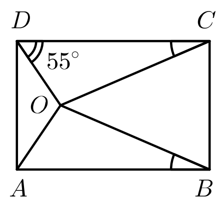
В) 104° **Г)** 106°



7. На чертежа $ABCD$ е правоъгълник, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle DCO$ и $\sphericalangle ODC = 55°$. Градусната мярка на $\sphericalangle AOD$ е равна на:

А) 105° **Б)** 110°

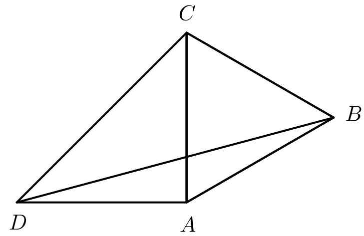
В) 115° **Г)** 120°



8. На чертежа триъгълникът ABC е равностранен, а триъгълникът ACD е правоъгълен и равнобедрен. Отношението на ъглите на триъгълника BDC е:

А) 1 : 4 : 7 **Б)** 2 : 3 : 7

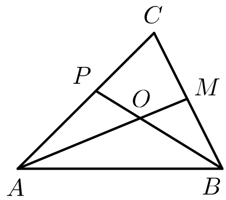
В) 7 : 8 : 21 **Г)** 5 : 10 : 21



9. В триъгълника ABC са построени ъглополовящите AM и BP, които се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle AOP = 60\% \sphericalangle AOB$, то $\sphericalangle ACB$ е равен на:

А) 35° **Б)** 40°

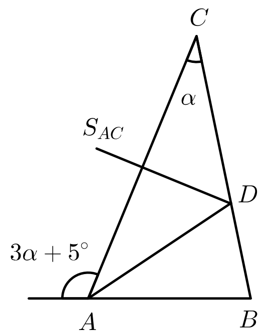
В) 45° **Г)** 50°



10. В триъгълника ABC симетралата на страната и ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ се пресичат в точка D от страната C. Ако $\sphericalangle C = \alpha$, а външният ъгъл при върха е равен на $3\alpha + 5°$, то градусната мярка на $\sphericalangle ABC$ е:

А) 70° **Б)** 75°

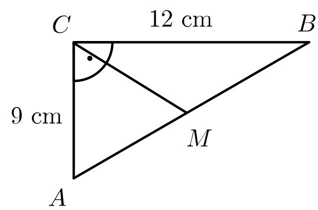
В) 80° **Г)** 85°



11. Правоъгълният триъгълник ABC има катети $AC = 9$ cm и $BC = 12$ cm. Дължината на медианата CM е:

А) 10 cm **Б)** 9 cm

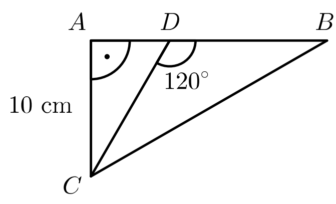
В) 8 cm **Г)** 7,5 cm



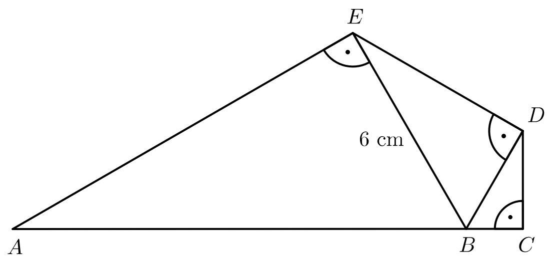
12. Ъглополовящата на $\sphericalangle C$ в правоъгълния триъгълник ABC пресича AB в точка D. Ако $BD = 10$ cm и $\sphericalangle CDB = 120°$, намерете AB.

А) 20 cm **Б)** 18 cm

В) 16 cm **Г)** 15 cm



13. На чертежа точката B лежи на отсечката AC, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDE = \sphericalangle BEA = 90^\circ$ и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBD = \sphericalangle DBC$.



Ако $BE = 6$ cm, дължината на отсечката AC е:

А) 15 cm **Б)** 13,5 cm **В)** 16 cm **Г)** 15 cm

14. Уравнението $(x+1)^2 - x = \dfrac{(2x+1)^2}{4}$ е еквивалентно на:

А) $x^2 = 4$ **Б)** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6}$

В) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3x-1}{6}$ **Г)** $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{2}$

15. Произведението на корените на уравнението $1 + 2|x-3| = 9$ е:

А) -7 **Б)** -6 **В)** -16 **Г)** 0

16. От числата 1, 2, 3, 4, 5 по случаен начин е избрано едно число. Каква е вероятността избраното число да е делител на 20?

А) $\dfrac{2}{5}$ **Б)** $\dfrac{3}{5}$ **В)** $\dfrac{4}{5}$ **Г)** 1

17. Моторист тръгнал от A, пътувал 2 h със скорост x km/h, след това увеличил скоростта си с 10 km/h и след 3 h пристигнал в B. Разстоянието между A и B, изразено чрез x, е равно на:

А) $5x + 30$ km **Б)** $5x + 10$ km **В)** $4x + 30$ km **Г)** $3x + 10$ km

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

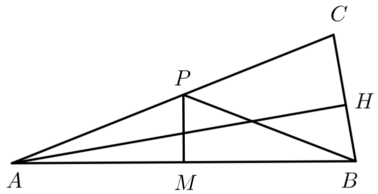
18. В таблицата е представена справка за броя на преподавателите в едно училище по възраст през 2017/18 година.

Възраст	Брой
Под 29 години	3
30–39 години	6
40–49 години	15
50–59 години	24
60 и повече години	12

А) Колко процента от преподавателите са на възраст под 50 години?

Б) Данните са представени на кръгова диаграма. Определете мярката на ъгъла на сектора, съответен на броя преподаватели на възраст на 60 и повече години.

19. Триъгълникът ABC на чертежа е равнобедрен ($AB = AC$). Симетралата на AB пресича страните AB и AC съответно в точките M и P.



А) Ако $\sphericalangle MPC = 2\sphericalangle MBC$, намерете $\sphericalangle BAC$.
Б) Ако обиколката на триъгълника BPC е равна на 23 cm, а обиколката на ABC е 36 cm, намерете дължината на основата BC, височината AH и лицето на триъгълника ABC.

20. Дадени са многочлените

$$A = (3x-1)^2 + (2x+1)(1-2x) \text{ и } B = (1-2x)(2-3x) - x(x-4).$$

А) Запишете A и B в нормален вид.

Б) За коя стойност на x стойността на A е с 9 по-голяма от стойността на B?

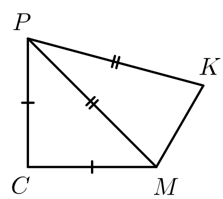
В) За кои стойности на x стойността на A или B е равна на 2?

21. Симо може да измаже стените на една стая за 3 часа, а Мишо – за 4 часа.

А) След като Мишо работил сам 2 часа, го заместил Симо и доизмазал стаята. За колко часа е била измазана стаята?

Б) Мишо започнал да маже в 8 часа и работил сам известно време, след което оставил Симо да доизмаже стаята. Симо приключил работата в 11 часа 50 мин. Колко часа е работил Симо?

22. На чертежа $MP = PK = 10$ cm, $MC = CP$ и $\sphericalangle MKP = \sphericalangle KPC = 75^\circ$.
А) Намерете градусната мярка на $\sphericalangle KMP$, $\sphericalangle MPK$, $\sphericalangle CPM$, $\sphericalangle PCM$.



Б) Намерете височините към страната PM в триъгълниците PCM и PKM и лицето на четириъгълника $KPCM$.

ВТОРИ МОДУЛ

Запишете пълното решение на задачи 23, 24 и 25.

23. Лодка се движи в спокойна вода със скорост 20 km/h.

А) Намерете скоростта на течението на реката, ако скоростта на лодката срещу течението е с 40% по-малка от скоростта по течението.

Б) За 1 час и 15 минути лодката плавала от А до В и се върнала обратно в А. Намерете разстоянието от А до В, ако скоростта на течението на реката е 4 km/h.

В) Намерете скоростта на течението на реката, ако за 3 часа и половина по течението на реката лодката изминава 3 пъти по-голямо разстояние, отколкото за час и половина срещу течението.

24. В правоъгълна координатна система с център O са отбелязани точки $A(-2k; -3k)$, $B(2+k; -3k)$, $C(2+k; 2k)$, $D(-2k; 2k)$, като A е в трети квадрант. Намерете k, ако:

А) периметърът на $ABCD$ е 12 мерни единици;

Б) лицето на триъгълника BOC е 120 кв.ед.;

В) 16% от площта на $ABCD$ лежи в първи квадрант.

25. Симетралата на бедрото AC на равнобедрения триъгълник ABC пресича бедрото BC в точката D. Разстоянието от точката D до AB е два пъти по-малко от разстоянието от D до върха C. На страната BC е отбелязана точка K така, че $AB = AK$.

А) Намерете ъглите на триъгълника ABC.

Б) Докажете, че $S_{AKC} = \dfrac{1}{4}AB.AC$.

Отговори и решения

1. Г; **2** В; **3** А; **4** Б; **5** Г; **6** В; **7** Б; **8** Б; **9** В; **10** Б; **11** Г; **12** Г; **13** Б; **14** В; **15** А; **16** В; **17** А; **18** А) 40%; Б) 72°; **19** А) 45°; Б) $BC = 10$ cm, $AH = 12$ cm, $S = 60$ cm^2; **20** А) $A = 5x^2 - 6x + 2$, $B = 5x^2 - 3x + 2$; Б) $x = -3$; В) $x = 0$; 0,6; 1,2; **21** А) 3 ч 20 мин.; Б) 0,5 часа (или 30 мин); **22** А) $\sphericalangle KMP = 75°$, $\sphericalangle MPK = 30°$, $\sphericalangle CPM = 45°$, $\sphericalangle PCM = 90°$; Б) височините са равни на 5 cm, а лицето на четириъгълника $KPCM$ е 50 cm^2.

23. А) Нека скоростта на течението е x km/h. Скоростта на лодката по течението е $(20 + x)$ km/h, а срещу него е $(20 - x)$ km/h. Имаме

$$20 - x = 60\%(20 + x),\ x = 5 \text{ km/h}.$$

Б) Скоростта по течението е 24 km/h, а срещу него е 16 km/h. Ако разстоянието от A до B е x km, то $\dfrac{x}{24}+\dfrac{x}{16}=\dfrac{5}{4}$, $x=12$ km.

В) Нека скоростта на течението е x km/h. Скоростта на лодката по течението е $(20+x)$ km/h, а срещу него е $(20-x)$ km/h. Имаме

$$\frac{7}{2}(20+x)=3.\frac{3}{2}(20-x),\ x=2,5 \text{ km/h}.$$

24. От условието, че A е в трети квадрант следва, че $k>0$. $ABCD$ е правоъгълник със страни

$$AB=2+k-(-2k)=3k+2 \text{ и } BC=2k-(-3k)=5k.$$

А) Имаме $2(3k+2+5k)=12$, $k=0,5$.

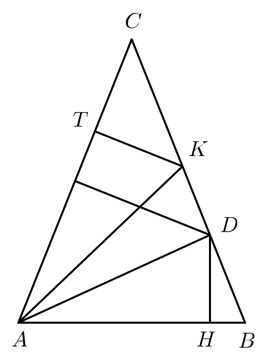
Б) $S_{BOC}=\dfrac{5k(k+2)}{2}=60$, откъдето $k^2+2k=24$, $(k+1)^2-25=0$, $(k+6)(k-4)=0$ и намираме $k=4$ или $k=-6$. Тъй като $k>0$, то $k=4$.

В) Частта от $ABCD$, която лежи в първи квадрант, е правоъгълник със страни $2k$ и $k+2$. Имаме

$$2k(k+2)=16\%.5k(3k+2),$$

откъдето $k(k-6)=0$ и $k=6$ или $k=0$. Тъй като $k>0$, то $k=6$.

25. А) От $D\in s_{AC}$ следва, че $AD=DC$. Триъгълникът ADC е равнобедрен, следователно $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CAD=x$. Разстоянието от точката D до AB е $DH=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{1}{2}DA$, следователно в правоъгълния триъгълник DHA имаме $\sphericalangle HAD=30^\circ$. Тогава $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=x+30^\circ$. От сбора на ъглите в триъгълника ABC намираме



$$x+2(x+30^\circ)=180^\circ \Rightarrow x=40^\circ.$$

Ъглите на триъгълника са $\sphericalangle A=\sphericalangle B=70^\circ$, $\sphericalangle C=40^\circ$.

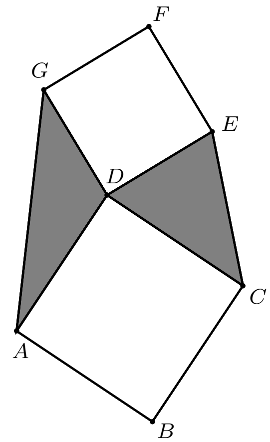
Б) В равнобедрения триъгълник ABK имаме $\sphericalangle ABK=\sphericalangle AKB=70^\circ$ и оттук $\sphericalangle BAK=40^\circ$, а $\sphericalangle KAC=70^\circ-40^\circ=30^\circ$. Ако KT е височина в триъгълника AKC, то триъгълникът AKT е правоъгълен с 30°, следователно $KT=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{1}{2}AB$. Тогава

$$S_{AKC}=\frac{1}{2}KT.AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}.AC=\frac{1}{4}AB.AC.$$

КВАДРАТИ С ОБЩ ВРЪХ И РАВНОЛИЦЕВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Невена Събева

Да разгледаме два квадрата с общ връх, разположени като на чертежа. В тази конфигурация ще открием два триъгълника с равни лица.



Задача 1. На чертежа $ABCD$ и $DEFG$ са квадрати. Да се докаже, че

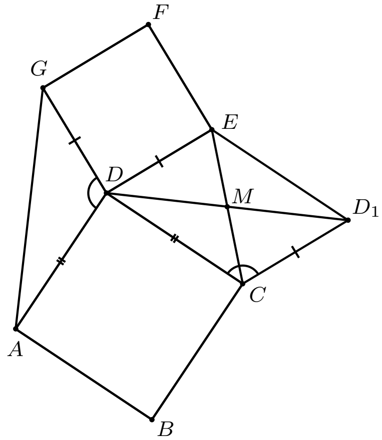
$$S_{ADG} = S_{DCE}.$$

Решение. Един начин да докажем горното твърдение е като построим медианата DM в триъгълника DCE и я удвоим до точка D_1. Имаме $DM = MD_1$, $D_1 \in DM$.

Тогава четириъгълникът DCD_1E е успоредник (защо?). Следователно

$$\sphericalangle DCD_1 = 180^\circ - \sphericalangle CDE.$$

От друга страна, $\sphericalangle ADG = 360^\circ - (2.90^\circ + \sphericalangle CDE) = 180^\circ - \sphericalangle CDE$.



Получихме, че $\sphericalangle DCD_1 = \sphericalangle ADG$. От това равенство и от $DC = DA$ и $CD_1 = DE = DG$ следва, че триъгълниците ADG и DCD_1 са еднакви.

От равенството на лицата на еднаквите триъгълници получаваме

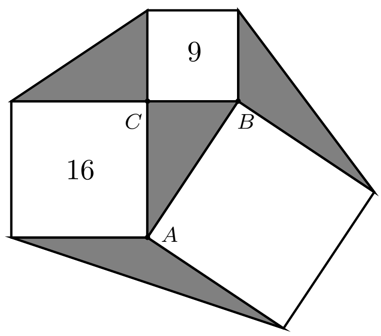
$$S_{ADG} = S_{DCD_1} = \frac{1}{2} S_{DCD_1E} = S_{CDE}.$$

(Използвахме, че DCD_1E е успоредник.)

Забележка. От доказаната еднаквост лесно следва, че медианата DM в $\triangle CDE$ е перпендикулярна на AG и два пъти по-малка от нея. А най-известният факт, свързан с разглежданата конфигурация, е, че отсечките AE и GC са равни и перпендикулярни.

Като използваме твърдението от задача 1, лесно ще решим следващите задачи.

Задача 2. На страните на правоъгълния триъгълник ABC са построени квадрати и върховете им са свързани, както е показано на чертежа. Ако лицата на квадратите, построени на катетите, са 9 и 16, да се намери лицето на получения шестоъгълник.



Решение. Имаме $BC^2 = 9$ и $AC^2 = 16$, откъдето намираме $BC = 3$, $AC = 4$ и

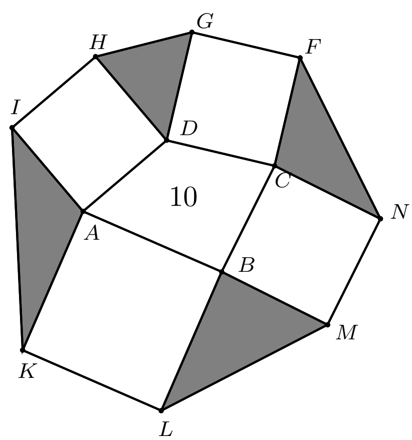
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

От задача 1 следва, че триъгълникът ABC е равнолицев с всеки от останалите оцветени триъгълници на чертежа.

Освен това, от питагоровата теорема намираме $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 25$, т.е. лицето на квадрата, построен на хипотенузата AB, е равно на 25.

Накрая за лицето на шестоъгълника получаваме $9 + 16 + 25 + 4.6 = 74$.

Задача 3. На страните на четириъгълник $ABCD$ с лице 10 са построени квадрати, както е показано на чертежа. Да се намери сборът от лицата на четирите оцветени триъгълници.



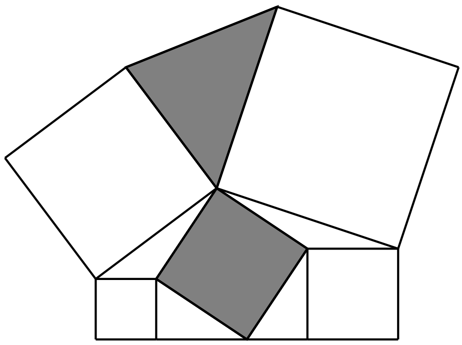
Решение. От задача 1 следва, че триъгълниците AKI и ABD имат равни лица, както и триъгълниците CNF и BCD. Следователно

$$\begin{aligned} S_{AKI} + S_{CNF} &= S_{ABD} + S_{BCD} \\ &= S_{ABCD} = 10. \end{aligned}$$

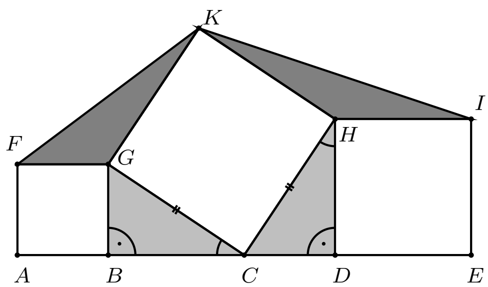
Аналогично $S_{BML} + S_{DHG} = 10$ и търсеният сбор е 20.

Ще използваме задача 1 при решаването на следващата класическа японска задача (сангаку).

Задача 4. В дадената конфигурация от пет квадрата да се докаже, че сивият квадрат и сивият триъгълник имат равни лица.



Решение. Да разгледаме част от конфигурацията, като използваме означенията на чертежа. Триъгълниците BCG и CDH са еднакви по втори признак ($\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$ и $CG = CH$, а ако $\sphericalangle BCG = \alpha$, то $\sphericalangle DCH = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$ и в правоъгълния $\triangle CDH$ имаме $\sphericalangle CHD = \alpha$). Следователно $BC = DH = a$ и $BG = CD = b$.



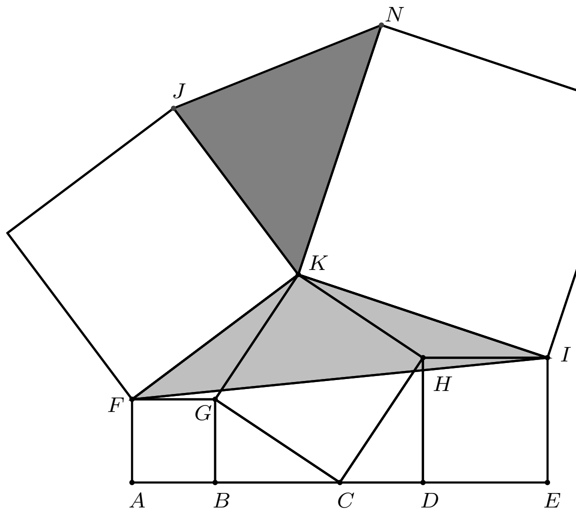
От доказаната еднаквост получаваме няколко важни следствия:

- $AE = 2a + 2b$;
- $S_{BCG} = S_{CDH} = \dfrac{1}{2}ab$;
- По питагоровата теорема имаме $CH^2 = CD^2 + DH^2 = a^2 + b^2$, т.е. лицето на квадрата $CHKG$ е равно на $a^2 + b^2$.

Сега от задача 1 следва, че лицата на оцветените триъгълници на горния чертеж са равни, т.е.

$$S_{FGK} = S_{BCG} = S_{CDH} = S_{KHI} = \frac{1}{2}ab.$$

Също от задача 1 получаваме, че лицето на оцветените триъгълници на чертежа по-долу са равни, т.е. $S_{KNJ} = S_{FIK}$.



Следователно остава да докажем, че лицето на триъгълника FIK е равно на лицето на квадрата $CHKG$, т.е. на $a^2 + b^2$.

За целта изразяваме лицето на FIK като разлика на лицата на петоъгълника $AEIKF$ и трапеца $AEIF$:

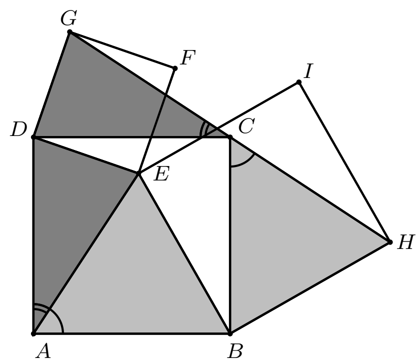
$$\begin{aligned} S_{FIK} &= S_{AEIKF} - S_{AEIF} = \\ &= \left(a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}ab\right) - \frac{1}{2}(a+b)(2a+2b) \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2ab - (a+b)^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Така доказахме, че $S_{CHKG} = S_{FIK} = S_{KNJ}$.

Задача 5. Даден е квадрат $ABCD$ и точка E, вътрешна за $\triangle BCD$. Построени са квадратите $BHIE$ и $DEFG$, както е показано на чертежа. Да се докаже, че:

а) сборът от лицата на триъгълниците ADG, ABH и EFI не зависи от избора на точката E;

б) точките G, C и H лежат на една права.



Упътване. б) Докажете, че $\triangle ADE \cong \triangle CDG$ и $\triangle ABE \cong \triangle CBH$, откъдето $\sphericalangle GCD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCH = 180^\circ$.

РЕДИЦАТА НА МОРИЦ ЩЕРН

Емил Карлов

През 1202 година в съчинението си „Книга за смятането“ Леонардо Фибоначи популяризира редицата от числа:

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = 1,\ \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1} \quad \text{или}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \tag{4}$$

Тази редица е позната в Индия още през 6 век след Христа и най-вероятно Леонардо Фибоначи я пренася в Европа от Алжир, където живее няколко години заедно с баща си и се учи да смята с арабски числа.

Задача 1. Всеки два съседни члена на редицата (1) на Фибоначи са взаимно прости.

Решение. Ако допуснем, че два съседни члена φ_k и φ_{k+1} се делят на числото $d > 1$, то от рекурентната връзка $\varphi_{k-1} = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ следва, че числото d дели и φ_{k-1}. Така постепенно ще стигнем до твърдението, че d дели $\varphi_1 = 1$, което е невъзможно.

Редицата на Фибоначи е много добре изучена и позната, но винаги се изненадваме, когато я срещнем отново.

Задача 2. Иван живее на първия етаж и до техния апартамент има стълбище само с 9 стъпала. Иван изкачва стълбището, като взема по едно стъпало или наведнъж по две стъпала. По колко различни начина Иван може да изкачи стълбището?

Решение. Ако стълбището е само от едно стъпало, Иван може да го изкачи по един единствен начин, $\varphi_1 = 1$.

Ако стълбището е от две стъпала, Иван може да го изкачи по два различни начина, $\varphi_2 = 2$.

Ако стълбището е от три стъпала, Иван може да започне с 1 стъпало, тогава му остават φ_2 начина да довърши.

Ако Иван започне с 2 стъпала ще му останат φ_1 начина да довърши стълбището, т.е. начините за изкачване на 3 стъпала са

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = 1 + 2 = 3.$$

По същия начин намираме

$$\varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 = 5,\ \varphi_5 = 8,\ \varphi_6 = 13,\ \varphi_7 = 21,\ \varphi_8 = 34,\ \varphi_9 = 55 \text{ начина.}$$

Редицата на Фибоначи ще открием в решението и на следващата задача.

Задача 3. Имаме дървена кутия с размери 2×9. По колко различни начина можем да покрием дъното ѝ с девет плочки домино (2×1)?

През 1958 година в една своя работа немският математик Мориц Абрахам Щерн представя на математическата общност следната редица от числа:

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 5, 3, 4, 1, 5, \ldots, \tag{5}$$

Тази редица в известен смисъл прилича на редицата на Фибоначи, затова припомнихме за редицата на италианеца.

Ще започнем с две задачи.

Задача 4. В банка "Георг Кантор" има само монети от 1 лв., 1 лв., 2 лв., 2 лв., 4 лв., 4 лв., 8 лв., 8лв., …от всяка монета по два броя, но за сметка на това безброй много монети.

а) По колко различни начина може касиерка от банката да изплати на клиент чек за 64 лв.?

б) Ако b_k е броят на начините, по които касиерката може да изплати чек за k лева, да се докаже, че за редицата

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, \ldots \tag{6}$$

са изпълнени равенствата: $b_1 = 1$, $b_{2n+1} = b_n$ и $b_{2n+2} = b_{n+1} + b_n$.

(Сравнете с рекурентната връзка в редицата на Фибоначи.)

Решение. а)Начините за изплащане на чек от 64 лв. са седем:

$$64 = 32 + 32 = 32 + 16 + 16 = 32 + 16 + 8 + 8 = 32 + 16 + 8 + 4 + 4$$

$$= 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 2 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1.$$

б) Ако на чека е написано нечетно число $2n + 1$ лева, то непременно в изплащането на чека ще участва 1 лев. Премахваме този лев и остава сумата $2n$. Начините за изплащане на чек с n лева са точно b_n и всяка монета в представянето на n заменяме с двойно по-голяма стойност. Добавим ли към това представяне 1 лев, получаваме изплащане на сумата $2n + 1$. Това е причината $b_{2n+1} = b_n$.

В изплащането на сумата от $2n + 2$ лева имаме два случая.

I случай. **В изплащането на $2n + 2$ лева няма монети от 1 лев.**

Тогава всяко представяне на сумата от $2n+2$ лева ще е представяне на $n+1$ лева, в което сме заменили всяка монета с монета с двойно по-голяма стойност или броят на изплащанията ще е точно b_{n+1}.

II случай. **В изплащането на $2n+2$ лева има две монети от 1 лев.**

Премахваме тези монети от общата сума и получаваме сума от $2n$ лева. Тук е ясно, че броят на изплащането на тази сума е точно b_n.

Така получаваме рекурентната връзка $b_{2n+2} = b_{n+1} + b_n$.

Ако приемем, че $b_0 = 1$, получаваме, че редицата $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, \ldots$ е редицата на Мориц Щерн.

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 5, 3, 4, 1, 5, \ldots$$

Ако повторим разсъжденията в задача 1., можем да докажем следното твърдение.

Задача 5. Да се докаже, че всеки два съседни члена на редицата на Щерн са взаимно прости.

Тук отново трябва да се върнем около 150 години назад, когато през 1878 година немският математик Георг Кантор пише в писмо до своя колега Херберт Дедекинд: *Не вярвам на очите си, но го доказах.*

Става дума за доказателството, че съществува взаимно еднозначно съответствие между множеството на рационалните дроби и негово подмножество – множеството на естествените числа.

В някакъв смисъл, това означава, че множеството на рационалните дроби е с толкова елементи (равномощно) със своето подмножество от естествените числа.

Това може да се случи само в идеалния свят на приказките, в идеалния свят на математиката и, както казва Давид Хилберт, *Кантор ни покани в Рая.*

За да покажем това взаимно и еднозначно съответствие между двете множества, е достатъчно да подредим всички рационални дроби в редица.

Задача 6. Подредете в редица множеството на рационалните числа.

Решение. Кантор изброява в безкрайна таблица редиците от рационални числа с числител 1, с числител 2, с числител 3 и т.н.

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \\
\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \\
\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \ldots \\
\ldots
\end{array}$$

Ясно е, че в тази таблица са всички рационални числа, дори многократно повторени.

Нека наречем сумата на числителя и знаменателя $(p+q)$ на дробта $\frac{p}{q}$ *височина на дробта* $\frac{p}{q}$.

Кантор подрежда в редицата дробите с височина 0, дробите с височина 1, след това в нарастващ ред дробите с височина 2 и т.н.

$$0,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \dots$$

Този метод на подреждане се нарича *диагонален метод на Кантор.*

Доказателството на Кантор е съвършено като реализация, но редицата на Кантор се нуждае от „почистване“. Можем ли да напишем всички рационални числа в редица, но в тази редица да няма повтарящи се дроби?

През 2000 година двама приятели, американските учени Нейл Калкин и Херберт Вилф, решиха този проблем, като успяха да подредят всички рационални числа в редица и в тази редица няма нито едно повтарящо се рационално число.

Ето как.

На дробта $\frac{1}{1}$ определяме двама наследници: *дроб-дъщеря* $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ и *дроб-син* $\frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$.

След това от своя страна дробта $\frac{1}{2}$ има наследници: дъщеря $\frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$ (числителят се запазва, а знаменателят е сумата от числител и знаменател на родителя) и син $\frac{2+1}{1} = \frac{3}{1}$.

Съответно дробта $\frac{2}{1}$ също има дъщеря $\frac{1}{3}$ и син $\frac{3}{1}$ и т.н.

Получаваме безкрайно родословно дърво:

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\[2ex]
\frac{1}{2}\ \ \frac{2}{1}\\[2ex]
\frac{1}{3}\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{3}{1}\\[2ex]
\frac{1}{4}\ \ \frac{4}{3}\ \ \frac{3}{5}\ \ \frac{5}{2}\ \ \frac{2}{5}\ \ \frac{5}{3}\ \ \frac{3}{4}\ \ \frac{4}{1}\\
\dots
\end{array}$$

Ще докажем няколко свойства на числата в това *родословно дърво на Калкин и Вилф.*

Задача 7. Всяка дроб от родословното дърво на Калкин и Вилф е несъкратима.

Решение. Допускаме, че в родословното дърво има съкратима дроб $\dfrac{r}{s}$. Тогава търсим нейния родител $\dfrac{r-s}{s}$ (ако е дъщеря) и $\dfrac{r}{s-r}$ (ако е син) и в двата случая родителят е също съкратима дроб и т.н. Така се движим нагоре, докато достигнем до извода, че $\dfrac{1}{1}$ е съкратима дроб. Противоречие.

Задача 8. Всяка дроб $\dfrac{r}{s}$ се среща в родословното дърво на Калкин и Вилф.

Решение. Разглеждаме дробите с височина 2, т.е. дробта $\dfrac{1}{1}$ и тя е в таблицата.

Допускаме, че всички дроби $\dfrac{m}{n}$ с височина $m+n \leq k$ (k е естествено число) може да се намерят в родословното дърво.

Ще докажем, че дроб $\dfrac{r}{s}$ с височина $r+s=k+1$ също е дроб от родословното дърво.

Родителят на тази дроб $\dfrac{r-s}{s}$ (ако е дъщеря) и $\dfrac{r}{s-r}$ (ако е син) е член на родословното дърво от допускането, следователно и дробта $\dfrac{r}{s}$ принадлежи на това родословно дърво.

Задача 9. Да се докаже, че в родословното дърво на Калкин и Вилф всяка дроб се появява само веднъж.

Упътване. Прилагаме същата индукция като в задача 8.

Сега да запишем първите няколко члена на от редицата на Калкин и Вилф:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Нека от тази редица да изпишем редица от естествени числа, като редуваме числител и знаменател от редицата на Калкин и Вилф (без да ги повтаряме), или

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, \ldots$$

Не е за вярване, това е редицата на Мориц Щерн!

Искам да вярвам, че ако Мориц Щерн бе писал статия за редицата (3) не в 1858 година, а двайсет години по-късно (през 1878 година, когато Кантор пише за диагоналния метод), той щеше да изпревари Калкин и Вилф в тяхното удивително откритие.

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ „ХИТЪР ПЕТЪР“ 2018

Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

В състезателната тема за 4 клас в математическия турнир „Хитър Петър“ 2018 беше дадена следната задача, която е отправна точка за клас от задачи, които могат да бъдат интересни и за по-големи ученици. Задачата беше формулирана така:

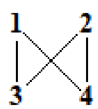
Написани са двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това?

Впрочем в авторското решение негласно се предполагаше, че двуцифрените числа са различни, но тъй като това не беше упоменато, част от учениците бяха достатъчно наблюдателни да забележат, че задачата има и решения с еднакви числа. Също така негласно се приемаше, че редът на записване на числата не е важен. По-долу ще анализираме как се променя задачата при различни стойности на параметрите в нея.

Задача 1. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 3.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Всяка цифра е свързана с две различни други цифри. Ето примерно какво би се получило, ако числата са 13, 14, 23 и 24:



Получаваме затворена разходка из 1, 2, 3, 4, за която има три варианта в зависимост от това коя цифра не е свързана с 1. Получаваме вариантите (13; 14; 23; 24), (12; 14; 23; 34) и (12; 13; 24; 34).

Задача 2. (ХП'18) Написани са двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 6.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Получаваме затворена разходка из 1, 2, 3, 4, за която има три варианта в зависимост от това коя цифра не е свързана с 1, или две двойки отсечки, за които има три варианта в зависимост от това коя цифра е свързана с 1, което поражда още вариантите (12; 12; 34; 34), (13; 13; 24; 24) и (14; 14; 23; 23).

Задача 3. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата е важен.)

Отговор 72.

Решение. Според задача 1, има три възможни четворки числа. За всяка има $4! = 24$ варианта за реда на четирите числа. Отговорът е $3.24 = 72$.

Задача 4. Написани са двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата е важен.)

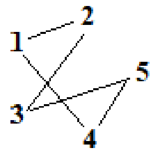
Отговор 90.

Решение. Според задача 2, има три възможни четворки различни числа (за всяка има $4! = 24$ варианта за реда на четирите числа), както и три множества от по две еднакви числа (за всяка има по $4! : (2.2) = 6$ варианта за реда на четирите числа; двете деления на 2 са заради наличието на две двойки еднакви числа). Отговорът е $3.24 + 3.6 = 90$.

Задача 5. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 12.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Всяка цифра е свързана с две различни други цифри. Например, ако числата са 12, 14, 23, 35 и 45, бихме получили следното:

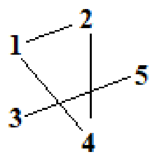


Във всички случаи получаваме затворена разходка из 1, 2, 3, 4, 5. Ако изберем посока за разходката, има 4 избора за цифрата след „1“, 3 избора за следващата, после 2 избора и накрая 1 избор, т.е. $4!=24$ варианта. Всяка разходка е преброена по два пъти в зависимост от посоката, така че отговорът е $24 : 2 = 12$.

Задача 6. Написани са двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 22.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Всяка цифра е свързана с две различни други цифри (според предната задача за това има 12 варианта) или пък има двойка свързани цифри ($5.4 : 2 = 10$ варианта) и триъгълник от останалите три – например, ако числата са 12, 14, 24, 35 и 35, получаваме следното:



Задача 7. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата е важен.)

Отговор 1440.

Решение. Според Задача 5, ако редът не е важен, начините са 24. Тъй като има $5! = 120$ варианта за реда на петте записани числа, отговорът тук е $12.120 = 1440$.

Задача 8. Написани са двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и всяка от тях участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата е важен.)

Отговор 2040.

Решение. Според предната задача, ако петте числа са различни, начините са 1440. Според по-предната задача, остава да добавим десетте случая, в които едно число се среща два пъти, като при всеки има $5! : 2 = 60$ варианта за реда на числата – още $10.60 = 600$ начина. Отговор: $1440 + 600 = 2040$.

Задача 9. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и всяка участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 70.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Всяка цифра е свързана с две различни други цифри. Възможно е да се получи разходка сред 6-те цифри (аналогично на решението на задача 5, за това има $5! : 2 = 60$ варианта) или два триъгълника (за единия триъгълник има 6 избора за първия връх, 5 за втория и 4 за третия, които трябва да разделим на $3! = 6$, понеже няма значение реда на избиране на трите върха, и на 2, понеже всяка двойка триъгълници е броена по веднъж откъм всеки, т.е. в този случай вариантите са $6.5.4 : 6 : 2 = 10$).

Задача 10. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и всяка участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата не е важен.)

Отговор 395.

Решение. Да запишем цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и да свържем с линия всеки две от тях, които участват заедно в число. Всяка цифра е свързана с две различни други цифри. Възможно е да се получи разходка сред седемте цифри (аналогично на решението на задача 5, за това има $6! : 2 = 360$ варианта) или триъгълник + четириъгълник (за триъгълника има 7 избора за първия връх, 6 за втория и 5 за третия, които трябва да разделим на $3! = 6$, понеже няма значение реда на избиране на трите върха, т.е. вариантите са $7.6.5 : 6 = 35$). Отговорът е $360 + 35 = 395$.

Сега решете самостоятелно задачата:

Задача 11. Написани са различни двуцифрени числа, във всяко от които първата цифра е по-малка от втората, като са ползвани само цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и всяка участва точно в две числа. По колко начина може да стане това? (Редът на числата е важен.)

Ученическо творчество

КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ КАТО ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА НА ТОЧКИ И ОБВИВКИ

Мартин Димитров, Гергана Пеева, Борислав Стоянов*

Пролог. Коничните сечения са обекти, привлекли вниманието на математиците още от древността. Името подсказва, че става въпрос за линия, която е сечение на кръгова конична повърхнина с равнина. Техните свойства са били изучавани от велики мъже: Евклид е написал *Елементи на коничните сечения* – нещо като учебно пособие, което не е достигнало до нас; Архимед е намерил лицето на параболичен сегмент, с което по същество поставя началото на интегралното смятане; пак той е познавал отражателното свойство на параболата; Аполоний Пергски дава най-пълно описание на свойствата на коничните сечения в съчинението си *Конични сечения* (там са въведени и съвременните названия на тези линии)[1].

Астрономите след 17. век приемат коничните сечения като най-доброто приближение за орбитите на космическите обекти в гравитационното поле, създавано от Слънцето. В днешно време отражателното свойство на параболата се прилага в телекомуникациите, като на практика прави възможен информационно-комуникационния скок, от който се ползваме ежедневно[2].

Определението на конично сечение може да става по различни начини, например като графика на линия, зададена чрез многочлен от втора степен на две променливи или ГМТ от различен тип. Развитието на системите за динамична геометрия позволява лесно и ефектно да се онагледяват тези и други представяния на коничните сечения, например, като *обвивка на семейство линии*[3].

*Статията е разработена под научно-методическото ръководство на проф. Борислав Лазаров и Димитър Димитров. Частична подкрепа е оказана от Образователна и изследователска програма *Черноризец Храбър* на ИМИ–БАН и 125. СУ *Боян Пенев*.

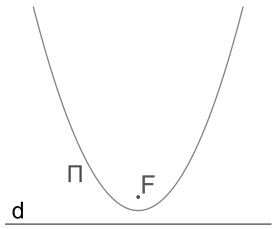
[1] Ван дер Варден, Б. Л. Пробуждаща се наука. Издателство „Наука и изкуство“, София, 1968, страници 300, 330, 331.

[2] Lazarov, B. Envelopes Around Us. Доклад по покана на WMTC 2014 в Пекин, публикуван в списание Math world, № 2, 2015 (in Chinese).

[3] Lazarov, B. Teaching envelopes in secondary school. The Teaching of Mathematics, vol. XIV, 1 (2011), 45-55.

В статията е представен алгоритъм за построяване на точка от конично сечение, който позволява с малки модификации да се илюстрира всяка от линиите *парабола, елипса, хипербола* като обвивка на еднопараметрично семейство прави. Построението улеснява и обосновката на отражателните свойства на тези криви.

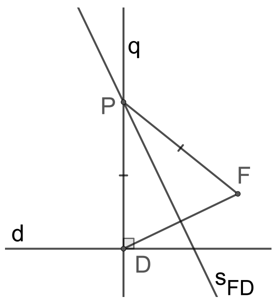
1. Парабола. Построяването на парабола в ГеоГебра изисква наличието на предварително построени точка (*фокус на параболата*) и права (*директриса на параболата*).



Определение. *Парабола* е геометричното място на точки, равноотдалечени от дадени точка (фокус) и права (директриса).

Прилагайки оператора *парабола* на ГеоГебра към избрана двойка (точка; права), на екрана се появява съответната парабола.

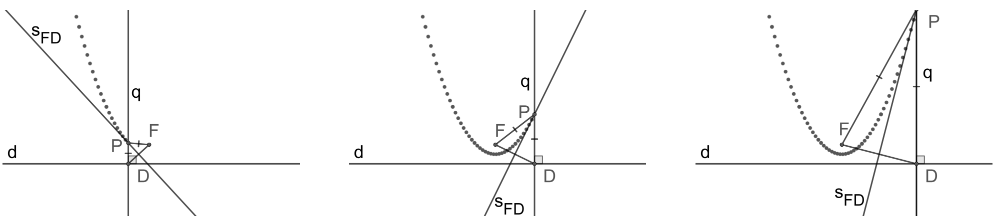
1.1. Построяване на точка от параболата



Построение 1. Нека параболата П е определена от фокуса F и директрисата d.
1) Избираме произволна точка $D \in d$ и построяваме симетралата s_{FD} на отсечката FD.
2) Построяваме права q през D, перпендикулярна на d.
3) Построяваме пресечната точка P на s_{FD} и q.

Лема 1. При горните означения $P \in \Pi$.

Доказателство. От построения 2) и 3) следва, че PD е разстоянието от P до d. От построение 1) следва, че $PD = PF$. $\square$



Ще отбележим, че с построение 1 могат да се построяват точки от параболата, но не и цяла дъга от нея.

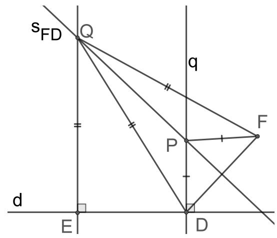
1.2. Допирателна към параболата

Определение. Права, която има точно една обща точка с парабола и не е перпендикулярна на директрисата, е *допирателна* към параболата.

Лема 2. При означенията от предната секция s_{FD} е допирателна към П.

Доказателство. Ясно е, че s_{FD} не е перпендикулярна на d. Остава да докажем, че P е единствената обща точка на s_{FD} и Π.

Допускаме противното: s_{FB} има втора обща точка с Π – кръщаваме я с Q. Нека E е петата на перпендикуляра през Q към d.



Ясно е, че $E \not\equiv D$. От $Q \in \Pi$ следва $FQ = QE$; от $Q \in s_{FD}$ следва $FQ = QD$. Тогава $QD = QE$, т.е. $\triangle DEQ$ е равнобедрен с прав ъгъл при основата – противоречие. $\square$

1.3. Параболата като обвивка на семейство прави

Когато семейство прави се описва по някакво правило, зависещо от един параметър, говорим за *еднопараметрично семейство прави*.

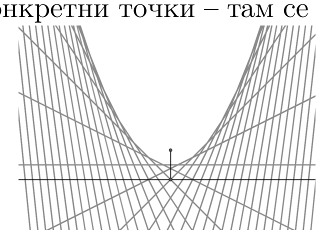
Определение. Линия, която се допира във всяка своя точка до права от семейството и допира всяка от правите в семейството точно в една точка, се нарича *обвивка* на еднопараметричното семейство прави.

Пример 1. Семейството прави $\mathcal{P} = \{s_{FD} | D \in d\}$ се описва с параметъра D, който пробягва правата d, т.е. $\mathcal{P}$ е еднопараметрично семейство прави.

Теорема 1. При въведените означения по-горе Π е обвивка на $\mathcal{P}$.

Доказателство. От лема 2 следва, че всяка права от $\mathcal{P}$ е допирателна към Π. Нека вземем произволна точка P от Π и нека D е проекцията на P върху d. От определението на парабола следва, че $FP = PD$ т.е. $P \in s_{FD}$, която е допирателна към Π. $\square$

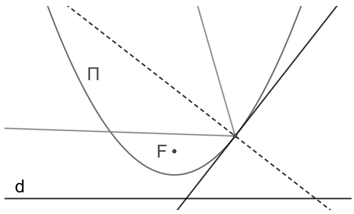
ГеоГебра ни дава възможност да опишем $\mathcal{P}$ с анимиран аплет. В построение 1 извършваме само точка 1), като за D въвеждаме плъзгач. Следата на s_{FD}, когато D се мени, дава представа за $\mathcal{P}$. На долния чертеж обвивката Π не се задава чрез конкретни точки – там се появява нейният призрак.



1.4. Отражателно свойство на параболата

От геометричната оптика се знае, че падащ лъч върху гладка отражателна крива[4] се отразява от нея. При това отразеният лъч е симетричен на падащия спрямо перпендикуляра през точката на отражение към допирателната в тази точка. С други думи, падащият и отразеният лъч сключват равни ъгли с допирателната в отразяващата точка.

[4] „гладка“ означава, че във всяка нейна точка има допирателна права.

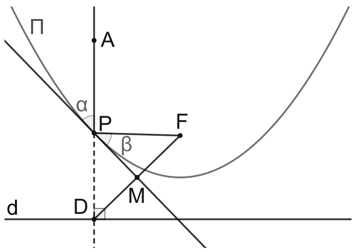


Вътрешност на параболата Π е тази част от равнината с контур Π, която съдържа фокуса F.

Теорема 2. Лъч от вътрешна точка на Π, който пада към нея перпендикулярно на d, след отразяване от Π минава през F.

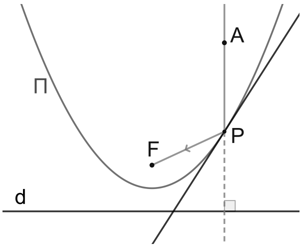
Доказателство. Нека A е от вътрешността на Π и $AP \perp d$, като $P \in \Pi$. Ще докажем, че $AP^{\rightarrow}$ и $PF^{\rightarrow}$ сключват равни ъгли с допирателната през P към Π. Това би означавало, че $PF^{\rightarrow}$ е отразеният на $AP^{\rightarrow}$.

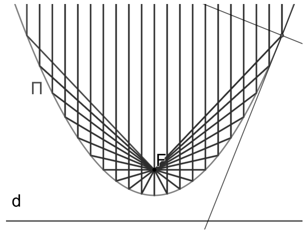
Нека $AP^{\rightarrow} \cap d = D$ и $s_{DF} \cap DF = M$. Знаем, че $P \in s_{DF}$, която е допирателна през P към Π.



Нека $AP^{\rightarrow}$ и $PF^{\rightarrow}$ сключват съответно ъгли α и β с допирателната през точка P към Π т.е. със s_{DF}. Симетралата на основата в равнобедрения $\triangle PDF$ е ъглополовяща на $\sphericalangle DPF$, значи $\sphericalangle DPM = \sphericalangle FPM = \beta$. Освен това $\sphericalangle DPM = \alpha$ като връхни. Следователно $\alpha = \beta$, което означава, че $PF^{\rightarrow}$ е отразеният лъч на $AP^{\rightarrow}$. $\square$

От теорема 2 следва, че сноп лъчи от вътрешността на параболата, който е перпендикулярен на директрисата, след отражение от параболата минава през фокуса ѝ. Обратно, лъчите, излизащи от фокуса на параболата, след отражение от нея, се преобразуват в сноп успоредни лъчи, перпендикулярни на директрисата.

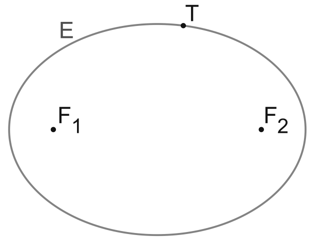




2. Елипса. Построяването на елипса в ГеоГебра изисква наличието на предварително построени три точки: двата фокуса на елипсата и точка, през която да минава елипсата.

Определение. *Елипса* е геометрично място на точки, за които сумата на разстоянията до две определени точки (фокуси) е една и съща.

На чертежа $F_{1,2}$ са фокусите на елипсата Е, която е геометрично място на точки, за които сумата на разстоянията до F_1 и F_2 е равна на TF_1+TF_2. Тази елипса се изчертава, прилагайки оператора *елипса* на ГеоГебра към тройката $(F_1; F_2; T)$.



2.1. Построяване на точки от елипсата.

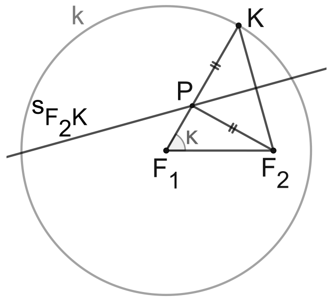
Построение 2. Нека елипсата Е е определена от фокусите F_1 и F_2 и точката T, като T не е от отсечката F_1F_2.

1) Нека $c = F_1T + F_2T$. Построяваме окръжност k с център F_1 и радиус c. Ясно е, че F_2 е от вътрешността на k, тъй като $c > F_1F_2$.

2) Построяваме $\sphericalangle F_2F_1K = \kappa$, като $K \in k$

3) Построяваме симетралата s_{F_2K} на отсечката F_2K.

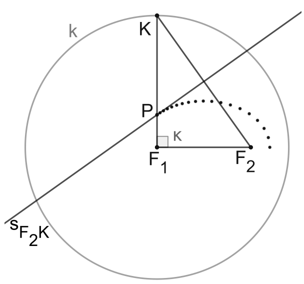
4) Построяваме пресечната точка P на F_1K и s_{F_2K}.

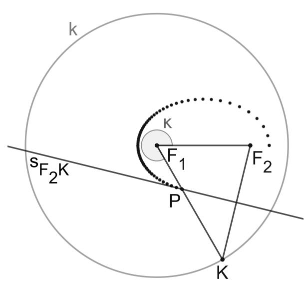


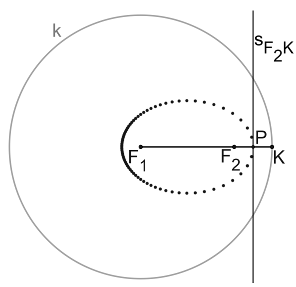
Изследване на построение 2. Ако $F_1K \cap s_{F_2K} = \varnothing$ следва, че $F_1K \parallel s_{F_2K}$, но $s_{F_2K} \perp F_2K \Rightarrow F_1K \perp F_2K \Rightarrow \sphericalangle F_1KF_2 = 90^\circ$. Следователно KF_2 е допирателна, следователно F_2 е извън окръжността – противоречие, защото, както вече показахме, F_2 е от вътрешността на окръжността k.

Лема 3. При горните означения $P \in$ Е.

Доказателство. От 4) по свойството на симетралата следва, че $F_2P = KP$. Тогава $F_1P + F_2P = F_1P + KP = F_1K = c \quad \Rightarrow F_1P + F_2P = c \quad \Rightarrow P \in$ Е. $\square$





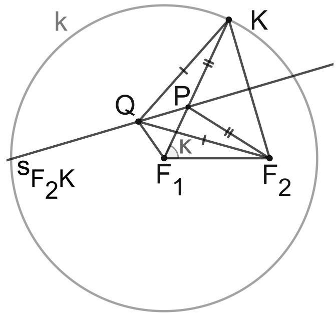


2.2. Допирателна към елипсата.

Определение. Права, която има точно една обща точка с елипса, е *допирателна* към елипсата.

Лема 4. При означенията от предната секция s_{F_2K} е допирателна към Е.

Доказателство. Да допуснем противното: s_{F_2K} има втора обща точка с Е – кръщаваме я с Q.



Имаме

$$\left.\begin{array}{ll} Q \in \mathrm{E} & \Rightarrow F_1Q + F_2Q = c \\ Q \in s_{F_2Q} & \Rightarrow F_2Q = QK \end{array}\right\} \Rightarrow F_1Q + QK = c.$$

Но от неравенството на триъгълника за $\triangle F_1QK$ следва, че $F_1Q + QK > F_1K$. Тогава

$$c = F_1Q + QK > F_1K = c.$$

Полученото противоречие доказва лемата. $\square$

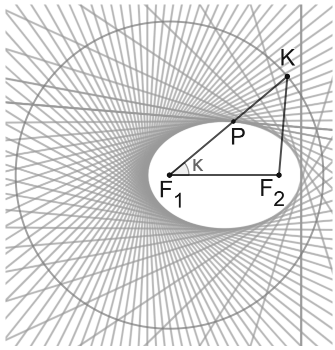
2.3. Елипсата като обвивка на семейство прави.

Пример 2. Семейството прави $\mathcal{E} = \{s_{F_2K} | K \in k\}$ се описва с параметъра K, който пробягва окръжността k, т.е. $\mathcal{E}$ е еднопараметрично семейство прави.

Теорема 3. При въведените означения по-горе Е е обвивка на $\mathcal{E}$.

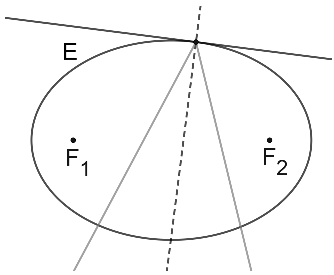
Доказателство. От лема 4 следва, че всяка права от $\mathcal{E}$ е допирателна към Е. Нека вземем произволна точка P от Е и нека $F_1P^{\to} \cap k = K$. От определението на елипса следва, че $F_1P+F_2P = c$, но $F_1P+PK = F_1K = c$, следователно $PK = PF_2$ т.е. $P \in s_{F_2K}$, която е допирателна към Е. $\square$

ГеоГебра ни дава възможност да опишем $\mathcal{E}$ с анимиран аплет. В построение 2 извършваме само точки 1), 2) и 3), като за κ въвеждаме плъзгач. Следата на s_{F_2K}, когато κ, съответно и K, се мени, дава представа за $\mathcal{E}$. На долния чертеж обвивката Е не се задава чрез конкретни точки – там се появява нейният призрак.



2.4. Отражателно свойство на елипсата.

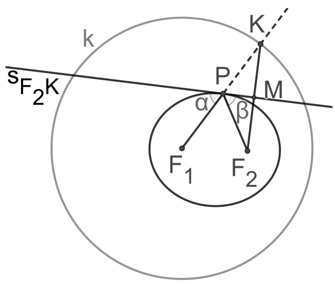
Елипсата е гладка крива и за нея важи правилото за отражение от геометричната оптика.



Теорема 4. Лъч, който излиза от F_1, след отразяване от E, минава през F_2.

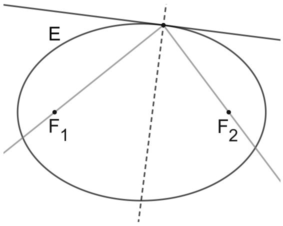
Доказателство. Нека точка P е от елипсата. Ще докажем, че лъчите $F_1P^{\rightarrow}$ и $PF_2^{\rightarrow}$ сключват равни ъгли с допирателната през P към E. Това би означавало, че $PF_2^{\rightarrow}$ е отразеният на $F_1P^{\rightarrow}$.

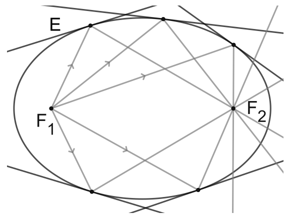
Нека $F_1P^{\rightarrow} \cap k = K$ и $s_{F_2K} \cap F_2K = M$. Знаем, че $P \in s_{F_2K}$, която е допирателната през P към E.



Нека $F_1P^{\rightarrow}$ и $PF_2^{\rightarrow}$ сключват съответно ъгли α и β с допирателната през точка P към E т.е. със s_{F_2K}. Симетралата на основата s_{F_2K} в равнобедрения $\triangle PKF_2$ е ъглополовяща на $\sphericalangle F_2PK$, значи $\beta = \sphericalangle MPK$. Понеже $\alpha = \sphericalangle MPK$ като връхни, имаме $\alpha = \beta$. Следователно $PF_2^{\rightarrow}$ е отразеният лъч на $F_1P^{\rightarrow}$. $\square$

От теорема 4 следва, че сноп лъчи, излизащ от единия фокус на елипсата, след отражение от нея, минава през другия фокус.

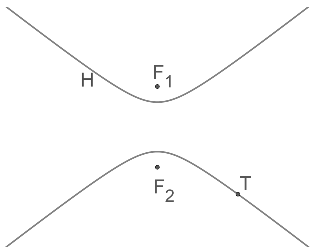




3. Хипербола. Построяването на хиперболата в ГеоГебра изисква наличието на предварително построени три точки (*двата фокуса на хиперболата и точка, която да принадлежи на нея*).

Определение. *Хипербола* е геометрично място на точки, за които абсолютната стойност на разликата на разстоянията до две определени точки (фокуси), е една и съща.

На чертежа $F_{1,2}$ са фокусите на хиперболата H, която е геометрично място на точки, за които разликата на разстоянията до F_1 и F_2 е равна на $TF_1 - TF_2$. Тази хипербола се изчертава, прилагайки оператора *хипербола* на ГеоГебра към тройката $(F_1; F_2; T)$.



Видно е, че хиперболата се състои от два клона, което е в съответствие със знака на разликата на разстоянията до F_1 и F_2.

3.1. Построяване на точка от хиперболата

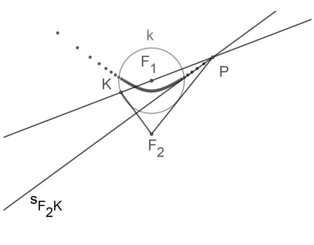
Построение 3. Нека хиперболата H е определена от фокусите F_1 и F_2 и точката T.

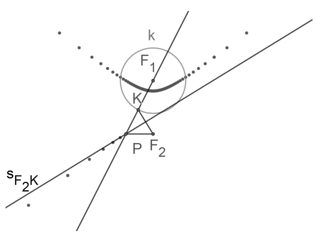
1) Нека $c = |F_1T - F_2T|$. Построяваме окръжност k с център точка F_1 и радиус c.

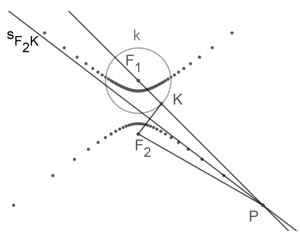
2) Построяваме $\sphericalangle F_2F_1K = \kappa$, като $K \in k$.

3) Построяваме симетралата s_{F_2K} на отсечката F_2K.

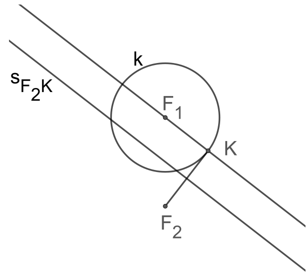
4) Построяваме пресечната точка P на F_1K и s_{F_2K}.





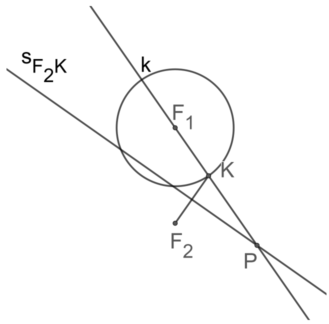


Изследване на построение 3. Ако $F_1K \parallel s_{F_2K}$, то според 4) P не съществува. В този случай s_{F_2K} се явява *асимптота* на хиперболата Н. Асимптотите се получават в двата случая $K_{1,2}$, при които $F_2K_{1,2}$ е допирателна към k.



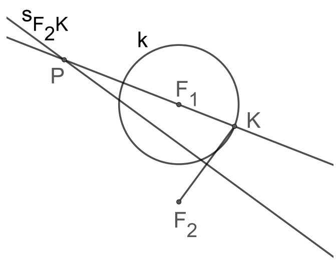
Лема 5. При горните означения, когато P съществува, тя е от Н.

Доказателство. Разглеждаме конфигурацията на чертежа. Когато $F_1K^{\to} \cap s_{F_2K}$, от построения 3) и 4) имаме $F_2P = KP$. Тогава $F_1P - F_2P = (F_1K + KP) - F_2P = F_1K + KP - KP = F_1K = c \quad \Rightarrow F_1P - F_2P = c \quad \Rightarrow P \in$ Н.



При тази конфигурация P е от клона на хиперболата, който е по-близо до F_2.

Аналогично се разглежда конфигурацията от следващия чертеж.



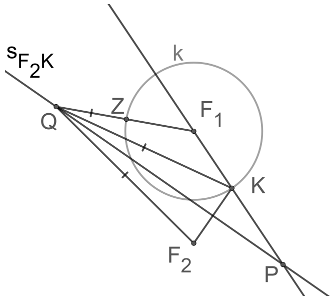
При тази конфигурация P е от клона на хиперболата, който е по-близо до F_1. $\square$

3.2. Допирателна към хиперболата.

Определение. Права, която има точно една обща точка с хипербола и не е успоредна на F_1F_2, е *допирателна* към хиперболата.

Лема 6. При означенията от предната секция, s_{F_2K} е допирателна към Н при $K \neq K_{1,2}$.

Доказателство. Допускаме противното: s_{F_2K} има втора обща точка с единия от клоновете на Н – кръщаваме я с Q. Нека $F_1Q \cap k = Z$.



Сега

$$Q \in \text{Н} \Rightarrow QF_1 - QF_2 = c \quad \Rightarrow (QZ + ZF_1) - QF_2 = c \quad \Rightarrow$$

$$QZ + c - QF_2 = c \quad \Rightarrow QZ = QF_2.$$

Но $Q \in s_{F_2K}$, от което следва, че $QF_2 = QK$. Следователно $QZ = QK$.

От неравенството на триъгълника за $\triangle QF_1K$ следва, че $QK + KF_1 > QF_1$ т.е. $QK + KF_1 > QZ + ZF_1$. Но $QK = QZ$ и $KF_1 = ZF_1$(радиуси), откъдето следва, че $QK + KF_1 = QF_1$ – противоречие. $\square$

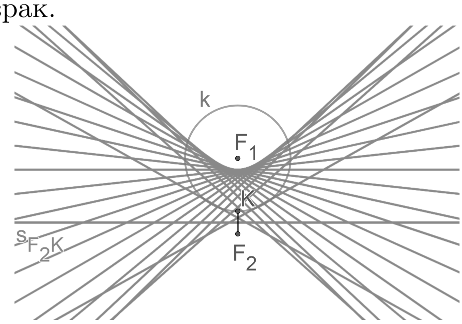
3.3. Хиперболата като обвивка на семейство прави.

Пример 3. Семейството прави $\mathcal{H} = \{s_{F_2K} \mid K \in k, K \neq K_{1,2}\}$ се описва с параметъра K, който пробягва окръжността k без точките $K_{1,2}$, т. е. $\mathcal{H}$ е еднопраметрично семейство прави.

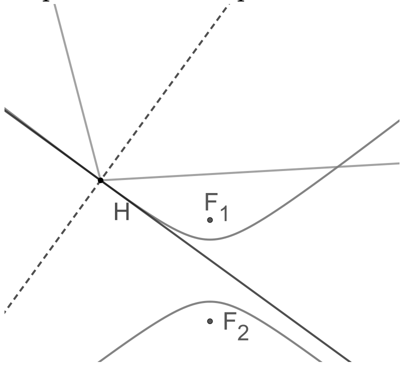
Теорема 5. При въведените означения по-горе Н е обвивка на $\mathcal{H}$.

Доказателство. От лема 6 следва, че всяка права от $\mathcal{H}$ е допирателна към Н. Нека вземем произволна точка P от Н и нека $F_1P \cap k = K$. От определението на хиперболата следва, че $F_1P - PF_2 = c$. Но $F_1P - PK = F_1K = c$, следователно $PF_2 = PK$, т.е. $P \in s_{KF_2}$, която е допирателна към Н. $\square$

ГеоГебра ни дава възможност да опишем $\mathcal{H}$ с анимиран аплет. В построение 3 извършваме точки 1), 2), 3) и 4), като за κ въвеждаме плъзгач. Следата на s_{F_2K}, когато κ, съответно и K, се мени, дава представа за $\mathcal{H}$. На долния чертеж обвивката Н не се задава чрез конкретни точки – там витае нейният призрак.



3.4. Отражателно свойство на хиперболата. Хиперболата е гладка крива и за нея важи правилото за отражение от геометричната оптика.

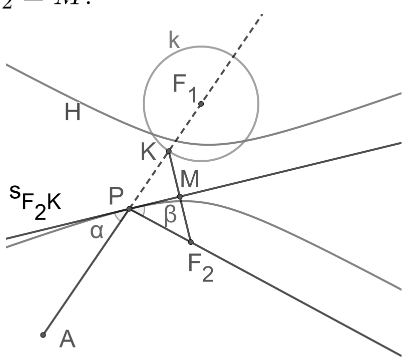


Вътрешност на клон на хиперболата H е тази част от равнината с контур клона, която съдържа по-близкия от фокусите.

Теорема 6. Нека H_2 е клонът на H, който съдържа F_2. Лъч от вътрешна точка на H_2, насочен към F_1, след отразяване от H_2, минава през F_2.

Доказателство. Нека A е точка от вътрешността на H_2, като $AP^{\to}$ е насочен към F_1 и $P \in \mathrm{H}_2$. Ще докажем, че $PF_2{}^{\to}$ и $AP^{\to}$ сключват равни ъгли с допирателната през P към H_2. Това би означавало, че $PF_2{}^{\to}$ е отразеният на $AP^{\to}$.

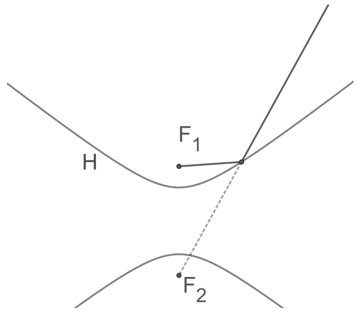
Нека $AP^{\to} \cap k = K$. Знаем, че допирателната през точка P към H е s_{KF_2}. Нека $s_{KF_2} \cap KF_2 = M$.

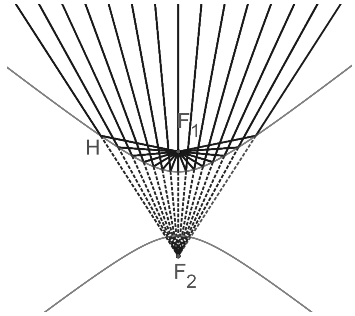


Нека $AP^{\to}$ и PF_2 сключват съответно ъгли α и β с допирателната през точка P към H т.е. със s_{KF_2}.

Симетралата на основата s_{KF_2} в равнобедрения $\triangle KPF_2$ е ъглополовяща на $\sphericalangle KPF_2$, значи $\beta = \sphericalangle KPM$. Сега $\alpha = \sphericalangle KPM$ като връхни, откъдето $\alpha = \beta$. Следователно $AP^{\to}$ и PF_2 сключват равни ъгли с s_{KF_2} т.е. $PF_2^{\to}$ е отразеният лъч на $AP^{\to}$. $\square$

Следващите чертежи ни дават представа за отражателното свойство на хиперболата.





Епилог. Представеният подход за разглеждане на коничните сечения като геометрични места и същевременно обвивки се основава на алгоритъм с обща идеология за трите криви. Този подход подчертава и общата идея за обосноваване на отражателните свойства, като по същество подчертава следния феномен: кривите отразяват по механизма, скрит в тяхната призрачна роля на обвивка.

Не ни е известна природата на светлината или радиомагнитното излъчване, но моделите на геометричната оптика добре обслужват практическото приложение на отражателните свойства. Според легендата, Архимед е палел кораби, фокусирайки слънчеви лъчи чрез система огледала. Навярно ги е разполагал като част от обвивката на някаква парабола. Подобна е и конструкцията на радиотелескопите. По-общо – параболичните повърхнини имат най-широко и ключово приложение в телекомуникациите.

А има ли някакъв смисъл от практическа гледна точка отражателното свойство на елипсата и това на хиперболата?

Схолия. Свойството на елипсата да концентрира лъчите от единия фокус в другия може да послужи за различни реални физически експерименти: ако източник на топлина е в единия фокус на някаква фурна с елиптична отражателна форма, то в другия фокус ще се концентрира голямо количество от отразената енергия.

Обратно, ако във фокуса на хиперболичен отражател се постави излъчвател на някакво лъчение, то той би разпределял енергията максимално равномерно във вътрешността на пространството, определена от отражателната повърхност.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ и точка $D \in AB$. Права пресича отсечките AC, DC и BC съответно в точки M, P и N. Да се докаже, че

$$DB \cdot \frac{MA}{MC} + AD \cdot \frac{NB}{NC} = AB \cdot \frac{PD}{PC}.$$

Задача 2. Дадени са естествени числа a, b и c, за които $b > 2a$ и $c > 2b$. Да се докаже, че съществува реално число α, за което дробните части на числата αa, αb и αc са в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Задача 3. На олимпиада по математика 49 ученици решавали три задачи. Всяка задача се оценява с цяло число точки от 0 до 7. Да се докаже, че има двама участници A и B, за които по всяка задача A има не по-малко точки от B.

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 5/2018 г.

Задача 1. Нека $a > 1$ е естествено число. Редицата естествени числа $\{a_n\}$ е определена по следния начин: $a_1 = a$ и за всяко $n \geqq 1$, a_{n+1} е най-големият прост делител на $a_n^2 - 1$. Да се намери най-малката стойност на a, за която всеки две от числата $a_1, a_2, \ldots, a_7$ са различни.

Решение. Ако в редицата се появи числото 2, тя зациклья. Следователно 2 се появява най-рано като a_7 и значи $a_6 \geqq 3$.

Числото a_2 е нечетно и просто и a_3 дели $(a_2 - 1)(a_2 + 1)$. Тъй като a_3 е нечетно и $a_2 \pm 1$ са четни, то a_3 дели $\dfrac{a_2 - 1}{2} \cdot \dfrac{a_2 + 1}{2}$. Оттук за простото число a_3 следва, че

$$a_3 \leqq \frac{a_2 + 1}{2} \iff a_2 \geqq 2a_3 - 1.$$

Аналогично получаваме

$$a_2 \geqq 2a_3 - 1 \geqq 4a_4 - 3 \geqq \cdots \geqq 16a_6 - 15 \geqq 33.$$

При $a_2 = 37$ получаваме $a_2 = 37,\ a_3 = 19,\ a_4 = 5,\ a_5 = 3, a_6 = 2$, която не е решение. При $a_2 = 41$ получаваме редицата $a_2 = 41,\ a_3 = 7,\ a_4 = 3,\ a_5 = 2$, а при $a_2 = 43$ получаваме $a_2 = 43,\ a_3 = 11,\ a_4 = 5,\ a_5 = 3,\ a_6 = 2$, като и двете редици не са решение.

При $a_2 = 47$ получаваме редицата

$$a_2 = 47,\ a_3 = 23,\ a_4 = 11,\ a_5 = 5,\ a_6 = 3,\ a_7 = 2.$$

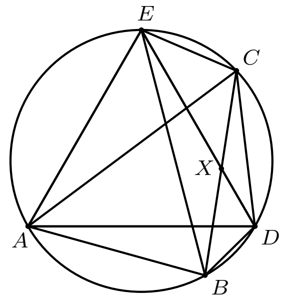
Минималното a, за което 47 е делител на $a^2 - 1$, е $a = 46$.

Задачата е решена от **Мирослав Минчев** (8. клас, ППМГ, Плевен), **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ) и **Калин Върбанов** (12. клас, СМГ).

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с $AB = 10$, $AC = 11$ и радиус на описаната окръжност 6. Точките D и E са върху описаната около ABC окръжност и триъгълникът ADE е равностранен. Отсечките DE и BC се пресичат в точка X. Да се намери $BX : XC$.

Решение на Калин Върбанов. Имаме $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{S_{BDE}}{S_{DCE}} = \dfrac{BD.BE}{CD.CE}$.

От теоремата на Птолемей за четириъгълниците $ADCE$ и $ABDE$ получаваме



$$11 = CE + CD, \quad \text{и} \quad BE = 10 + BD.$$

Тогава

$$\frac{BX}{CX} = \frac{(BE-10)BE}{(11-CE)CE}. \tag{1}$$

По синусовата теорема получаваме $AE = AD = DE = 6\sqrt{3}$. По косинусовата теорема за триъгълниците ACE и ABE получаваме:

$$108 = CE^2 + 121 - 11.CE \iff CE(11-CE) = 13 \text{ и}$$
$$108 = BE^2 + 100 - 10.BE \iff BE(BE-10) = 8.$$

Оттук и от (1) следва, че $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{8}{13}$.

Задачата е решена и от **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ).

Задача 3. Мишо е в долния ляв ъгъл на мрежа 6×6; в точката $(0,0)$. В мрежата има две устройства за еднократно телепортиране, разположени в $(2,2)$ и $(3,3)$: първия път, когато Мишо попадне в една от тези точки, той незабавно се телепортира до другата точка и устройствата изчезват. Ако Мишо може да се движи само нагоре или надясно, да се намери по колко различни начина той може да стигне до точката $(5,5)$.

Решение. Маршрутите, при при които Мишо се телепортира в $(2,2)$, са от $(0,0)$ до $(2,2)$ и след телепортирането, от $(3,3)$ до $(5,5)$. Броят им е

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36.$$

Маршрутите, при при които Мишо се телепортира в $(3,3)$, са от $(0,0)$ до $(3,3)$, без да минават през $(2,2)$, и след телепортирането от $(2,2)$ до $(5,5)$; броят им е

$$\left(\binom{6}{3} - 2\binom{4}{2}\right) \cdot \binom{6}{3} = 160.$$

Маршрутите, при при които Мишо не се телепортира, ще преброим с принципа за включване/изключване. Те са

$$\binom{10}{5} - 2\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} = 84.$$

Общо пътищата са $36 + 160 + 84 = 280$.

Задачата е решена от **Ясен Пенчев** (7. клас, ПМГ, Габрово) и **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ).

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2018 г. и бр. 1, 2 от 2019 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (присъствен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Едно естествено число наричаме *забележително*, ако е сбор на трицифрено огледално число и четирицифрено огледално число. Например, 2300 и 2020 са забележителни числа, тъй като $2300 = 1331 + 969$ и $2020 = 1111 + 909$.

а) Забележително число ли е 2019?

б) Колко числа са едновременно и забележителни, и огледални?

Задача 2. Едно естествено число наричаме *интересно*, ако се дели на 9 и в записа му няма еднакви цифри. Например, 1287 е интересно число, а 522 и 521 не са.

а) Колко са трицифрените интересни числа?

б) Колко са 8-цифрените интересни числа?

Задача 3. За естествените числа a и b с $\widetilde{a,b}$ ще означаваме десетичната дроб, която се получава като се запише числото a, след това десетична запетая и след нея числото b. Например, ако $a = 20$ и $b = 19$, то $\widetilde{20,19} = 20,19$, а $\widetilde{19,20} = 19,2$.

Да се намерят всички двойки $(a;b)$, за които:

а) $\widetilde{a,b} \cdot \widetilde{b,a} = 13$.

б) $\widetilde{a,b} \cdot \widetilde{b,a} = 160$.

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2019 г.

СПЕЦИАЛНА НАГРАДА НА БРОЯ

С цел да насърчи желанието за творческа изява на децата с математически заложби, ЧОУ „Света София“ (www.svetasofia.com) осигури награден фонд на конкурса на списание *Математика* за 5.–7. клас през 2018/19 учебна година.

След всеки от четирите задочни кръга на конкурса, най-добре представилият се участник от пети, шести и седми клас ще получи награда от 50 лв.

Като оцени получените в срок решения на задачите от брой 5/2018 г., списанието награди:

Стефания Миленова Милева (5. клас, МГ, Варна)
Николай Евгениев Николаев (6. клас, ППМГ, Видин)
Дениз Тунай Потурлиев (7. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен)

Очакваме Вашите решения!

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 5/2018 г.

Задача 1. В 10:10 часа електронният часовник на Алиса показва 9:57. За да го свери, Алиса разполага с два бутона: единият увеличава часа с 9 минути, а другият го намалява с 20 минути. Най-малко колко пъти трябва да натисне бутоните Алиса, за да свери часовника?

Решение. За да свери часовника, Алиса трябва да увеличи часа с 13 минути. Нека тя е натиснала x пъти бутона, който увеличава часа с 9 минути и y пъти бутона, който намалява часа с 20 минути. Тогава

$$9x - 20y = 13.$$

Забелязваме, че сборът $x + y$ е най-малък, когато y е най-малко (защото $9x = 20y + 13$ и с увеличаването на y се увеличава и x).

Освен това цифрата на единиците на $20y$ е 0, значи цифрата на единиците на $9x$ е 3. Следователно цифрата на единиците на x е 7.

При $x = 7$ получаваме $63 - 20y = 13$, чието решение не е естествено число.

При $x = 17$ получаваме $153 - 20y = 13$, откъдето намираме $y = 7$.

Следователно Алиса трябва да натисне бутоните най-малко $17+7 = 24$ пъти (17 пъти да увеличи часа с 9 минути и 7 пъти да намали часа с 20 минути).

Задачата е решена от **Стефания Милева** (5. клас, МГ, Варна), **Явор Фиданов** (5. клас, ПМПГ, Монтана), **Ивалин Боев** (5. клас, ОУ „П.Р.

Славейков“, Стара Загора), **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Николаев** (6. клас, ППМГ, Видин), **Бенедетта Дженнаро Бенедетто** (5. клас, ПМПГ, Монтана), **Александър Мургин** (6. клас, ППМГ, Видин), **Николай Георгиев** (7. клас, ПМГ, Силистра), **Дениз Потурлиев** (7. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, ПМГ, Габрово).

Задача 2. Една редица наричаме *добра*, ако изпълнява следните условия:

• Всяка буква в редицата е М, О, Р или Е.

• Измежду първите три букви няма еднакви.

• Измежду последните три букви няма еднакви.

• Първата, втората, четвъртата и петата буква са две по две различни.

Колко са добрите редици с дължина 6 букви?

Решение. Щом първата, втората, четвъртата и петата буква са две по две различни, то те са буквите М, О, Р и Е в някакъв ред. Този ред може да се избере по $4! = 24$ начина.

Нека сме избрали първата, втората, четвъртата и петата буква.

Третата буква е различна от вече записаните първа и втора буква и остават две възможности за нейния избор (например, ако първата буква е М, а втората е Е, третата може да е О или Р).

По същия начин, шестата буква е различна от вече записаните четвърта и пета буква и може да се избере измежду останалите две букви.

Следователно за всеки от 24-те избора на първа, втора, четвърта и пета буква има по две възможности за третата и две възможности за шестата буква. Получаваме $24.2.2 = 96$ добри редици.

Задачата е решена от **Стефания Милева** (5. клас, МГ, Варна), **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Николаев** (6. клас, ППМГ, Видин), **Александър Мургин** (6. клас, ППМГ, Видин), **Златимир Петров** (6. клас, ПМПГ, Монтана), **Николай Георгиев** (7. клас, ПМГ, Силистра), **Дениз Потурлиев** (7. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, ПМГ, Габрово).

Задача 3. Една редица наричаме *строга*, ако изпълнява следните условия:

• Всяка буква в редицата е А или М.

• Ако разделим редицата на подредици от еднакви букви (като съседните подредици са съставени от различни букви), то подредиците с А съдържат четен брой букви, а подредиците с М – нечетен брой букви.

Например, АА, М, ААМАА са строги редици, а МАМА не е.

Колко са строгите редици с дължина 14 букви?

Решение. Нека a_n е броят на строгите редици с дължина n, които завършват на М, а b_n е броят на строгите редици с дължина n, които завършват на А. Броят на строгите редици с дължина n е $a_n + b_n$.

Има единствена строга редица с дължина 1 (М) и единствена строга редица с дължина 2 (АА), т.е. $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$. Строгите редици с дължина 3 са МММ, ААМ и МАА, т.е. $a_3 = 2$, $b_3 = 1$.

Да разгледаме една строга редица с дължина n, която завършва с А. Предпоследната буква също е А (иначе ще има нечетен брой букви А една до друга), т.е. редицата завършва с АА, а първите $n-2$ букви също образуват строга редица. Следователно редицата е получена с дописване на АА в края на строга редица с дължина $n-2$. Това означава, че броят на строгите редици с дължина n, завършващи с А, е равен на броя на строгите редици с дължина $n-2$:

$$b_n = a_{n-2} + b_{n-2}.$$

Да разгледаме строга редица с дължина n, която завършва с М. Предпоследната буква може да е А; тогава редицата се получава от завършваща на А строга редица с дължина $n-1$, към която е дописана буква М. Броят на тези редици е b_{n-1}. Ако предпоследната буква е отново М, то редицата завършва с МММ (иначе ще има четен брой букви М една до друга). Следователно редицата се получава от завършваща на М строга редица с дължина $n-2$, към която са дописани ММ. Броят на тези редици е a_{n-2}. Общо строгите редици с дължина n, завършващи с М, е

$$a_n = a_{n-2} + b_{n-1}.$$

Като използваме двете получени формули, последователно пресмятаме:

n	b_n	a_n	n	b_n	a_n
1	0	1	8	6	10
2	1	0	9	11	11
3	1	2	10	16	21
4	1	1	11	22	27
5	3	3	12	37	43
6	2	4	13	49	64
7	6	5	14	80	92

Следователно броят на строгите редици с дължина 14 е $a_{14} + b_{14} = 172$.

Задачата е решена от **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Николаев** (6. клас, ППМГ, Видин), **Николай Георгиев** (7. клас, ПМГ, Силистра), **Дениз Потурлиев** (7. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен), **Ясен Пенчев** (7. клас, ПМГ, Габрово).

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

ПЪРВИ МОДУЛ

1. Седем деца са родени в седем последователни години. Сборът от възрастите на трите най-малки деца е 42. Колко е сборът от годините на трите най-големи деца?

А) 51 **Б)** 54 **В)** 57 **Г)** 60

2. Дидо занесъл на пазара банани и ябълки. Той планирал да продава бананите по 40 ст. за брой, а ябълките по 50 ст. за брой. Без да иска обаче, Дидо разменил цените и затова спечелил 1 лев повече, отколкото планирал. Колко повече банани е продал Дидо, отколкото ябълки?

А) 2 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 10

3. В редицата $5, 12, 19, 26, \dots$ всяко число след първото е със 7 по-голямо от числото преди него. Кое е първото число в тази редица, което е по-голямо от 2019?

А) 2020 **Б)** 2021 **В)** 2022 **Г)** 2023

4. Две мишки за час и половина изяждат парче сирене. Колко такива парчета ще изядат за 40 минути 18 мишки със същия апетит?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 6

5. Една година през месец март имало 4 вторника и 4 съботи. Какъв ден от седмицата е бил 19 март през тази година?

А) събота **Б)** неделя **В)** понеделник **Г)** вторник

6. Тома получил кутия с бонбони и веднага излапал 4 бонбона. След това изял половината от останалите бонбони и още два бонбона. Останали 10 бонбона. Колко бонбона е изял Тома?

А) 28 **Б)** 24 **В)** 20 **Г)** 18

7. В сладкарницата два сока и парче торта струват 6 лв. Явор купил три сока и две парчета торта и платил 10 лв. 40 ст. Колко струват две парчета торта?

А) 6 лв. **Б)** 5 лв. 80 ст. **В)** 5 лв. 60 ст. **Г)** 5 лв. 40 ст.

8. Наско има по десет теглилки от $1, 2, 3$ и 5 грама. По колко различни начина Наско може да отмери 8 грама?

А) 11 **Б)** 12 **В)** 13 **Г)** 14

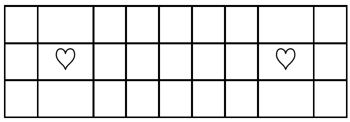
9. Г-жа Иванова дала на учениците си тест с 5 въпроса. Оказало се, че всеки ученик е отговорил вярно на точно три въпроса, но никои двама не са отговорили вярно на едни и същи три въпроса. Най-много колко са учениците на г-жа Иванова?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12

10. Коко записал всички петцифрени числа, които се записват с цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 (без повторение). Колко е сборът на числата на Коко?

А) 3000000 **Б)** 3600000 **В)** 3999960 **Г)** 3999990

11. Правоъгълник, в който има точно едно сърце, се нарича *прекрасен*. Колко прекрасни правоъгълници има на чертежа?



А) 64 **Б)** 72 **В)** 81 **Г)** 96

12. Правоъгълник и квадрат са сложени на масата така, че частично се припокриват. Лицето на припокриващата се част е 30 кв.см, а общата площ, покрита от фигурите, е 154 кв.см. Ако лицето на правоъгълника е 120 кв.см, колко сантиметра е обиколката на квадрата?

А) 32 **Б)** 36 **В)** 40 **Г)** 48

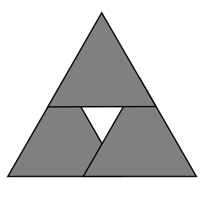
13. Четирицифрените числа, които са по-големи от 2019, са повече от четирицифрените числа, които са по-малки от 2019. С колко?

А) 6951 **Б)** 6959 **В)** 6960 **Г)** 6961

14. Данчо получил кутия със 50 бонбона, някои от които с карамел, а останалите – с ядки. Той изял половината от карамелените бонбони и два бонбона с ядки. Оказало се, че са останали по равен брой от двата вида бонбони. Общо колко бонбона е изял Данчо?

А) 14 **Б)** 16 **В)** 18 **Г)** 20

15. Три плочки с форма на равностранен триъгълник със страна 31 см са разположени върху равностранен триъгълник със страна 50 см, както е показано на чертежа. Колко сантиметра е страната на триъгълника в центъра, който не се покрива от плочките?



А) 7 **Б)** 9 **В)** 11 **Г)** 12

16. Драконите имат една или две глави. Двуглавите дракони са с 33 повече от едноглавите. Ако всички глави са 303, колко са всички дракони?

17. В експрес *Хогуортс* Хари Потър пътувал във вагон номер 19. Той забелязал, че сборът от номерата на вагоните пред неговия е с 10 по-голям от сбора на номерата на вагоните след неговия. Колко са вагоните в експреса?

18. Иво записал числата от 1 до 999. Всяко число, което завършва на 5 или на 0, той оцветил в червен цвят. След това оцветил в син цвят всяко число, съседно на червено число. По този начин, например, числото 100 е оцветено в червен цвят, а 99 и 101 – в син цвят. Колко числа са останали неоцветени?

19. Ани, Боян и Владо си намислили по едно число. Числото на Ани е 2 пъти по-голямо от числото на Боян, числото на Боян е с 20 по-голямо от числото на Владо, а числото на Владо е 6 пъти по-малко от числото на Ани. Колко е сборът на числата, които са намислили Ани, Боян и Владо?

20. Едно четирицифрено число се нарича *забележително*, ако в записа му участват четири различни цифри със сбор 12 и цифрата на хилядите е 2 пъти по-голяма от сбора на цифрата на стотиците и цифрата на десетиците. Например, 2019 е забележително число. Колко са забележителните числа?

ВТОРИ МОДУЛ

Задача 1. В библиотеката ми върху три рафта има общо 60 книги.

А) Ако преместя 7 от първия рафт на втория, после половината от книгите от втория рафт на третия и 13 книги от третия на първия, на трите рафта ще има равен брой книги. По колко книги е имало на всеки рафт в началото?

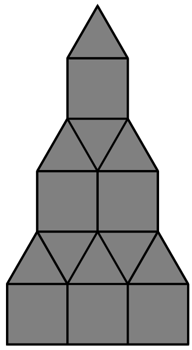
Б) В библиотеката има книги на български, английски и руски език. Книгите на английски са 5 пъти по-малко от книгите на български и с 3 повече от книгите на руски. Колко книги са на български език?

В) Ани е прочела третината от книгите в библиотеката, а сестра и Бети е прочела четвъртината от книгите в библиотеката. Половината от книгите, които е прочела Ани, са прочетени и от Бети. Колко книги в библиотеката не са прочетени от нито една от двете сестри?

Задача 2. В конструктор има триъгълници и квадрати, общо 100 фигури.

А) Иво претеглил 2 триъгълника и 5 квадрата и те тежали 64 грама общо. Асен претеглил 4 триъгълника и 3 квадрата и те тежали 58 грама. Накрая Петър сложил няколко фигури на кантара и те тежали 92 грама. Колко фигури е претеглил Петър?

Б) С всички фигури от конструктора подредих кула, като редувах редове от триъгълници и редове от квадрати. Върхът на кулата е показан на чертежа.



Намерете колко са триъгглниците и колко са квадратите в комплекта. Ако страната на квадрата е 1 дм, намерете обиколката на кулата.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Б; **2.** Г; **3.** Б; **4.** В; **5.** Б; **6.** Г; **7.** В; **8.** В; **9.** Б; **10.** В; **11.** Г; **12.** А; **13.** Г; **14.** В; **15.** А; **16.** 191; **17.** 26; **18.** 402; **19.** 100; **20.** 8.

Задача 1. а) На трите рафта има съответно по $20 - 13 + 7 = 14$, $20.2 - 7 = 33$, $60 - (14 + 33) = 13$ книги.

б) Ако добавим 3 книги на руски, в библиотеката ще има 63 книги, като на английски и на руски ще има по x книги, а на български $5.x$ книги. Имаме $7.x = 63$, т.е. $x = 9$ и книгите на български са $5.9 = 45$.

в) Ани е прочела 20 книги, Бети е прочела 15 книги, от които 10 са прочетени и от двете. Остават $60 - (20 + 15 - 10) = 35$ непрочетени книги.

Задача 2. а) Тъй като 2 триъгълника и 5 квадрата тежат 64 грама, то 4 триъгълника и 10 квадрата тежат 128 грама. Като сравним с фигурите на Асен, намираме, че 7 квадрата тежат $128 - 58 = 70$ грама, т.е. един квадрат тежи 10 грама. Един триъгълник тежи $(64 - 5.10) : 2 = 7$ грама.

Ако Петър е взел x триъгълника и y квадрата, имаме $7.x + 10.y = 92$. Следователно $7.x$ завършва на 2 и $x < 14$, т.е. $x = 6$. Петър е взел 6 триъгълника и 5 квадрата, общо 11 фигури.

б) На най-долния ред има 8 квадрата, над тях има $8 + 7 = 15$ триъгглника, след това 7 квадрата, $7 + 6 = 13$ триъгълника и т.н. Квадратите са $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 4.9 = 36$, а триъгълниците са $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 16.4 = 64$ (общо са точно 100 фигури).

Кулата има 8 реда с триъгълници и 8 реда с квадрати; общо 16 реда. Обиколката на кулата е $8 + 16.2 = 40$ дм.

за по-малките задачи

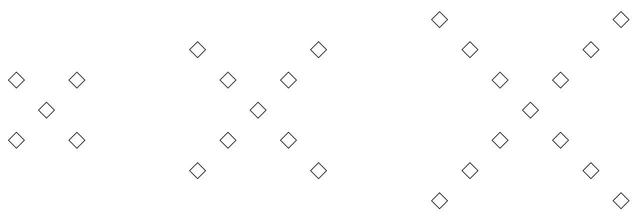
4. клас

1. Пресметнете $2019 - 2018 + 2017 - 2016 + \cdots + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$.

2. Колко стълба са нужни за ограждане на триъгълен участък със страни 20 м, 20 м и 30 м, ако стълбовете се поставят през 5 м?

3. Намислих три числа. Ако събера две от тях, ще получа или 39, или 48, или 51. Кое е най-голямото от намислените числа?

4. Иво рисува схеми с ромбчета. Първите три схеми са следните:



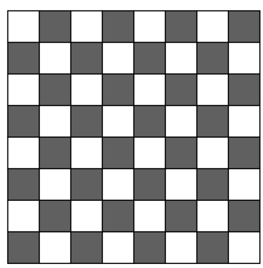
Колко ромбчета са нужни за стотната схема?

5. клас

5. Ани намислила едно число X, умножила го по 2 и разделила резултата на 3. Получила $\frac{1}{6}$. Колко би получила Ани, ако първо беше разделила X на 2 и резултата беше умножила по 3?

6. Над река, която е широка 49 m, е построен мост. Една трета от дължината на моста е над единия бряг на реката, а 20% от дължината на моста е над другия бряг. Колко метра е дълъг мостът?

7. На шахматната дъска 8×8 има общо 204 квадрата (с различна големина). Ако в един квадрат има равен брой черни и бели единични квадратчета, го наричаме *хубав*. Колко от 204-те квадрата на шахматната дъска са хубави?



8. В една надпревара участвали три коня – бял, сив и черен. По колко различни начина може да се класират те? (Възможно е няколко коня да финишират едновременно.)

6. клас

9. Четири еднакви метални сфери с радиус 6 cm са разтопени и от тях е отлят цилиндър с диаметър 8 cm. Да се намери височината на цилиндъра.

10. Пресметнете $\dfrac{9^5.10^{11}.6^6}{15^{10}.16^4.3^6}$.

11. Средната височина на мочетата в една компания е 162 cm. Ако към компанията се присъедини и Тошко, който е висок 165 cm, средната височина в компанията ще стане 162,2 cm. Колко са момчетата в компанията, заедно с Тошко?

12. Мила е висока 1,2 m. Привечер сянката на Мила е дълга 3 m. Ако Мила стъпи и се изправи на раменете на брат си, които са на височина 1,5 m над земята, колко метра ще е дълга сянката им?

7. клас

13. Ако $x = 3$ е решение на уравнението

$$(px - q)(qx + p) = 0$$

и $pq = 1$, да се намери стойността на $p^2 - q^2$.

14. Разтвор A съдържа 45% сол, а разтвор B съдържа 54% сол. Разтворите A и B са смесени в отношение 2 : 1. Да се намери концентрацията на сол в получения разтвор.

15. На основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е построен равностранен триъгълник ABD (точката D е вътрешна за триъгълника ABC). Правата AD и симетралата на AC се пресичат в точка от страната BC. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

за по-малките  решения

на задачите от бр. 6/2018

76. От два еднакви квадрата сглобих правоъгълник с обиколка 180 см. Да се намери обиколката на един от квадратите.

Решение. Обиколката на правоъгълника включва 6 пъти страната на квадрата. Оттук обиколката на квадрата е $(180 : 6).4 = 120$ см.

77. Да се намери неизвестното число x от равенството
$$x\,.\,9 + 87 = 654 - 3\,.\,21.$$

Решение. Намираме $654 - 3\,.\,21 = 654 - 63 = 591$. Имаме

$$x \xrightarrow{.9} \bigcirc \xrightarrow{+87} 591$$

и по обратния път намираме $x = (591 - 87) : 9 = 504 : 9 = 56$.

78. Колко са двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е по-малка от цифрата на десетиците?

Решение. Двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е 0, са 10, 20 и така нататък до 90; общо 9 числа. Двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е 1 и по-малка от цифрата на десетиците, са 21, 31 и така нататък до 91; общо 8 числа. По същия начин намираме 7 числа с цифра на единиците 2 и така нататък. Броят на търсените числа е $9 + 8 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

79. В един клас всяко момиче има 3 молива, 2 химикала и 1 гума, а всяко момче има 1 молив, 2 химикала и 3 гуми. Ако всички гуми в класа са 21 и всички химикали в класа са 18, колко са всички моливи в този клас?

Решение. Всяко дете има по 2 химикала, затова децата са $18 : 2 = 9$. Ако на всички раздадем по една гума, а след това на всяко момче по още 2 гуми, гумите ще станата 21. Затова момчетата са $(21 - 9) : 2 = 6$. Момичетата са 3 и всички моливи са $3.3 + 6 = 15$.

Втори начин. Общият брой на моливите и гумите на всяко дете е 4, а на химикалите е 2. Следователно общият брой а всички моливи и гуми е 2 пъти повече от общия брой на химикалите. Моливите са $18.2 - 21 = 15$.

80. Баба Цоцолана събрала кошница с ябълки. Тя може да ги раздаде поравно на 10 деца, както и на 12 деца, а ако изяде 4 ябълки, може да раздаде останалите ябълки на 11 деца поравно. Най-малко колко ябълки има в кошницата?

Решение. Броят на ябълките се дели на 10 и на 12, следователно на НОК$(10;12) = 60$. Ябълките може да са 60, 120, 180, 240 и т.н. Освен това, ако броят на ябълките се намали с 4, полученото число се дели на 11. Тъй като 56 и 116 не се делят на 11, а 176 се дели на 11, то в кошницата има най-малко 180 ябълки (това е огромна кошница!).

81. Баба Цоцолана набрала 150 ябълки и 130 круши. Тя раздала плодовете поравно на децата в селото. Останали 6 ябълки и 10 круши. Най-много колко деца има в селото?

Решение. Раздадени са $150 - 6 = 144$ ябълки и $130 - 10 = 120$ круши. Плодовете от всеки вид са раздадени поравно на децата, следователно броят на децата е делител на 144 и на 120. Децата са най-много НОД$(144, 120) = 24$.

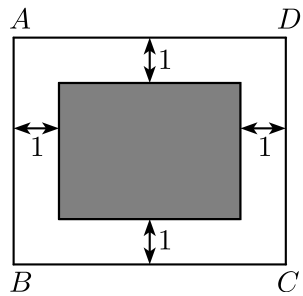
82. Подредете по големина дробите $\dfrac{2525}{2424}$, $\dfrac{3737}{3636}$, $\dfrac{25+37}{24+36}$, $\dfrac{25\,.\,37}{24\,.\,36}$.

Решение. Съкращаваме дробите $A = \dfrac{2525}{2424} = \dfrac{25.101}{24.101} = \dfrac{25}{24} = 1\dfrac{1}{24}$ и по същия начин $B = \dfrac{3737}{3636} = 1\dfrac{1}{36}$.

Намираме $C = \dfrac{25+37}{24+36} = \dfrac{62}{60} = 1\dfrac{1}{30}$. Тъй като $\dfrac{1}{24} > \dfrac{1}{30} > \dfrac{1}{36}$, то $A > C > B$.

Освен това $D = \dfrac{25\,.\,37}{24\,.\,36} > \dfrac{25\,.\,36}{24\,.\,36} = \dfrac{25}{24} = A$, значи $D > A > C > B$.

83. Правоъгълникът $ABCD$ на чертежа има страни 11 cm и 18 cm. Каква част от лицето на правоъгълника $ABCD$ е лицето на оцветения правоъгълник? (Отговора запишете като несъкратима дроб.)



Решение. Лицето на оцветения правоъгълник е $\dfrac{16.9}{18.11} = \dfrac{8}{11}$ от лицето на $ABCD$.

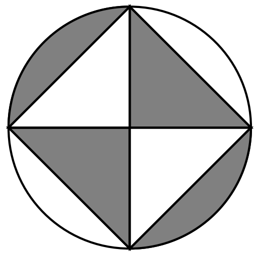
84. В права n-ъгълна призма 75% от стените са околни. Колко ръба има тази призма?

Решение. Тъй като 75% от стените n-ъгълната призма са околни, то останалите 25% от стените са двете основи. Следователно стените са $2.4 = 8$ и призмата е шестоъгълна. Ръбовете са $3.6 = 18$.

85. Да се намери неизвестното число x от равенството $16^8\,.\,4^x = 8^{16}$.

Решение. Тъй като $16^8 = (4^2)^8 = 4^{16}$, от даденото равенство получаваме $4^x = \dfrac{8^{16}}{4^{16}} = 2^{16} = 4^8$, т.е. $x = 8$.

86. Колко процента от лицето на кръга е оцветено в сиво на чертежа?



Решение. Отговорът е 50%, тъй като оцветените в сиво части могат да се разместят така, че да покриват половината от кръга.

87. Дадени са числата $A = 12^{18}$ и $B = 18^{12}$. Да се намери броят на делителите на A и броят на делителите на B. Колко са общите делители на A и B?

Решение. Имаме $A = 12^{18} = (2^2.3)^{18} = 2^{36}.3^{18}$ и $B = 18^{12} = (2.3^2)^{12} = 2^{12}.3^{24}$. Числото A има $37.19 = 703$ делители, B има $13.25 = 325$ делители.

Общите делители на A и B са делителите на НОД$(A; B) = 2^{12}.3^{18}$ и са $13.19 = 247$ на брой.

88. Да се намери стойността на произведението xy, ако

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0.$$

Решение. Записваме лявата част на уравнението във вида $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = (x^2 + 2x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = (x + 1)^2 + (2y - 1)^2$. Тъй като всяко от събираемите $(x+1)^2$ и $(2y-1)^2$ е неотрицателно число, сборът им е нула само когато $(x + 1)^2 = (2y - 1)^2 = 0$. От тук намираме $x = -1$, $y = \dfrac{1}{2}$ и $xy = -\dfrac{1}{2}$.

89. Височините в остроъгълния триъгълник ABC се пресичат в точка H. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако

$$\sphericalangle AHB : \sphericalangle BHC : \sphericalangle CHA = 4 : 5 : 6.$$

Решение. Тъй като сборът на ъглите $\sphericalangle AHB, \sphericalangle BHC$ и $\sphericalangle CHA$ е 360° и те се отнасят както $4 : 5 : 6$, намираме $\sphericalangle AHB = \dfrac{4}{15} \cdot 360^\circ = 96^\circ$, $\sphericalangle BHC = \dfrac{5}{15} \cdot 360^\circ = 120^\circ$, $\sphericalangle CHA = \dfrac{6}{15} \cdot 360^\circ = 144^\circ$. Ъглите на $\triangle ABC$ са $\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle AHB = 84^\circ$, $\sphericalangle A = 180^\circ - \sphericalangle BHC = 60^\circ$ и $\sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle CHA = 36^\circ$.

90. Даден е правоъгълен триъгълник ABC със страни $AB = 3x$, $BC = 4x + 16$ и $AC = 5x + 14$. Да се намери обиколката на триъгълника.

Решение. По Питагоровата теорема $(5x + 14)^2 = (3x)^2 + (4x + 16)^2$, откъдето намираме $x = 5$. Обиколката на триъгълника е $12x + 30 = 90$.

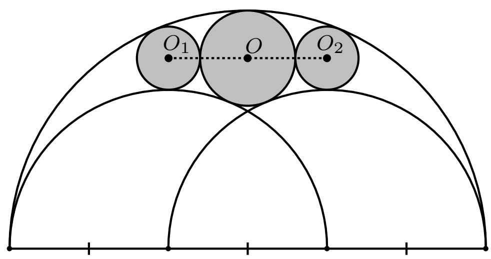
КАКВО ВИЖДАТ МАТЕМАТИЦИТЕ?

По материали на Юра Билетски

Една от забележителностите на украинския град Одеса е сградата на Одеската филхармония. Построена е като Търговска борса в края на 19. век. За изграждането ѝ одеските търговци внесли най-добри материали – италиански мрамор, германско стъкло, ливанско дърво, австрийски декори...

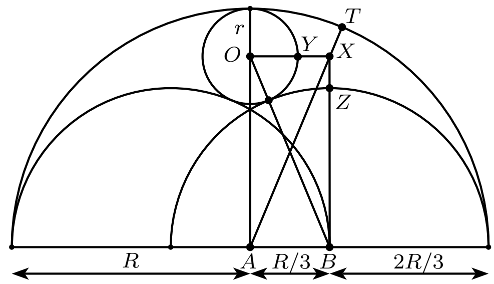
Сградата е архитектурен шедьовър. Писателят Валентин Катаев я оприличавал на венециански дворец; Иля Илф и Евгений Петров определяли стила ѝ като асиро-вавилонски, а Корней Чуковский разглеждал ориенталските елементи по фасадата.

Без съмнение, сградата е уникална; но също така е вярно, че какво виждаш зависи от това, какъв си ти самият. И ето, киевският математик Юра Билетски, разхождайки се край днешната Одеска филхармония, видял в един прозорец не какво да е, а ...интересна задача!



Така ли изглежда или наистина е вярно, запитал се Юра, *че центровете O, O_1 и O_2 на сивите окръжности лежат на една права?*

Не е трудно да отговорим на този въпрос. Нека, при означенията на следващия чертеж, построим правоъгълник $ABXO$. Ще докажем, че $XY = XZ = XT$.



Без особено усилие изразяваме отсечките $AO = R - r$;

$$XY = XO - r = \frac{R}{3} - r;$$

$$XZ = XB - \frac{2R}{3} = (R - r) - \frac{2R}{3} = \frac{R}{3} - r;$$

$$XT = R - AX = R - BO = R - \left(\frac{2R}{3} + r\right) = \frac{R}{3} - r.$$

Оказа се, че ако построим окръжност с център X и радиус $\frac{R}{3} - r$, тя ще се допира до останалите три окръжности на чертежа. Това означава, че X е точно центърът O_2 на окръжността в прозореца и O_2 лежи на правата през O, успоредна на AB. По същия начин, на тази права лежи и центърът O_1, т.е. трите центъра са колинеарни.

И така, съкровищата (в това число и математическите) понякога са точно пред нас, стига да имаме очи да ги видим!

А сградата на Одеската филхармония е изтъкана от предания и тайни. Разказват, че търговците и банкерите специално помолили архитекта да построи залата по такъв начин, че ако двама са застанали един до друг и разговарят, стоящият до тях да не чува разговора им. Как е изпълил той молбата не се знае, но е факт, че при великолепна акустика в залата е много трудно да се чуе разговора на съседите…

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ, *Ст. Стоилова, П. Стоев* 3

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА НА ИМИ–БАН,
Петър Бойваленков 5

WORLD MATHEMATICS TEAM CHAMPIONSHIP 2018,
Емил Колев 20

ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА ЗА СЕДМИ КЛАС,
ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ 27

КВАДРАТИ С ОБЩ ВРЪХ И РАВНОЛИЦЕВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ,
Невена Събева 33

РЕДИЦАТА НА МОРИЦ ЩЕРН, *Емил Карлов* 37

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ „ХИТЪР ПЕТЪР“ 2018,
Ивайло Кортезов 42

КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ КАТО ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА
НА ТОЧКИ И ОБВИВКИ,
Мартин Димитров, Гергана Пеева, Борислав Стоянов 46

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ 58

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 61

В ПОМОЩ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИТЕ, ПРИМЕРЕН ТЕСТ 65

ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 69

КАКВО ВИЖДАТ МАТЕМАТИЦИТЕ? 74

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, (02) 979-28-90
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 11.02.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.