Мате мати ка

БРОЙ 1
2016 г.
ГОДИНА LIV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

IN MEMORIAM

Руси Илиев Русев
(1935–2016)

Руси Илиев Русев е роден на 24 септември 1935 г. в с. Оряховица, Старозагорско. Завършва следното си образование в Стара Загора и висше, специалност математика, през 1958 в Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Учителства в Ямбол и София. От 1962 г. е един от основателите, единствен щатен сътрудник – отговорен секретар и заместник главен редактор, на създаденото през същата година списание „Математика“. През 1968 става главен редактор на списанието, което вече има осем щатни сътрудници. Бил е асистент и доцент по математика във Висшия Лесотехнически институт и Медицинска академия. От март 1985 г. до 2002 г. работи и в Министерството на образованието и науката като главен директор и началник управление Общообразователна подготовка.

Изключителни са заслугите на доцент Русев към списание „Математика“. От скромното начало през 1962 г. той доведе списанието през 1980-те, златни за българската математика години, до 10 книжки с тираж 80 000 така, че то да стига до всеки учител по математика и почти до всеки ученик. Може да се каже, че доцент Русев беше Човекът Списание.

Руси Русев беше автор, съставител и разпространител. През годините издаде над 100 учебни помагала, сборници и учебници по математика, някои от тях заедно със съпругата си. Беше инициатор и организатор на редица математически конкурси – „Атанас Радев“ в Ямбол, Национален пролетен конкурс в Казанлък, състезания в Благоевград, Кюстендил, Перник, Русе и др. Доцент Русев е сред авторите на основните програми по математика за средното училище и теми за приемни изпити във ВУЗ през 1980-те. Член е на Съюза на Българските журналисти от 1964 г., дълги години е в ръководството на Съюза на Българските математици. Удостоен е със званието заслужил учител. Това е накратко Руси Русев – математикът, обучил и помогнал на хиляди ученици и учители, дал своя принос за подготовката на нашите олимпийци. Той до последния си дъх работеше и подготви и настоящия брой на списание Математика.

Руси Русев беше до всеки, който имаше нужда от помощ – приятел и другар, баща, брат и дядо. Той не даваше частни уроци, но помагаше на всеки, който попита за задачи. Той беше, както казва академик Кендеров, „майстор във всичко, с което се захване – математика, рибена супа, градинарство …“.

Вярваме, че Руси Русев оставя списание „Математика“ в добри ръце и то ще продължи народополезното си дело. Руси ще живее вечно чрез него.

Стефан Чернев, Петър Бойваленков

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

проф. П. Рангелова

Първа част

Зачертайте с × буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи — 0 точки.

1. Корените на уравнението $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ са:

А) $-3;\ 1$ **Б)** $-1;\ 3$ **В)** $3;\ 1$ **Г)** $-3;\ -1$

2. Корените на уравнението $2x^2-|x+1|-4=0$ са:

А) $-\dfrac{3}{2},\ 1$ **Б)** $\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$ **В)** $\dfrac{1-\sqrt{41}}{4},\ 1$ **Г)** $-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$

3. Решението на уравнението $\dfrac{54^x}{2^x}+9^x-2=0$ е:

А) 1 **Б)** 3 **В)** 0 **Г)** 2

4. Решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{array}\right.$ са:

А) $(2;1),\ (-1;-2)$ **Б)** $(1;-2),\ (2;-1)$

В) $(-2;1)$ **Г)** $(-2;-1),\ (1;2)$

5. Решенията на неравенството $|x-2|-|x-3|>\dfrac{1}{2}$ са:

А) $2\dfrac{3}{4}<x<3$ **Б)** $x\geqq 3$ **В)** $x\in(0,+\infty)$ **Г)** $x>2\dfrac{3}{4}$

6. Решенията на неравенството $\dfrac{3x-1}{x+2}\leqq x-1$ са:

А) $x\in[-2;-1-\sqrt{2})\cup[1+\sqrt{2};+\infty)$ **Б)** $x\in[-1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$

В) $x\in(-2;-1+\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2},+\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;-2)$

7. Ако $\sin(\alpha-90^\circ)=-\dfrac{2}{3}$ и $270^\circ<\alpha<360^\circ$, то $\operatorname{cotg}2\alpha$ е равно на:

А) $-\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ **В)** $-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$ е:

А) 6 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** 1

9. Стойностите на променливата, за които е дефинирана функцията $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}+\lg\dfrac{x}{3-x}+\dfrac{1}{x-2{,}5}$, са:

А) $x\in[2;2{,}5)\cup(2{,}5;3)$ **Б)** $x\in(0;3)$

В) $x\in(2;2{,}5)\cup(3;+\infty)$ **Г)** $x\in(2{,}5;3)$

10. За трапеца $ABCD$ ($AB\|CD$, $AB>CD$) точка $N\in BC$ и правите AN и DC се пресичат в точка T, при което $S_{ANB}=16S_{CTN}$. Ако E е точка от страната AD такава, че $AB\|EN$, то стойността на $S_{ANE}:S_{ATD}$ е:

А) $\dfrac{4}{25}$ **Б)** $\dfrac{4}{5}$ **В)** $\dfrac{16}{25}$ **Г)** $\dfrac{1}{5}$

11. Страните на $\triangle ABC$ са $AB=30$, $BC=26$ и $CA=28$. Височината CD е разделена в отношение 2:3, считано от върха C и през точката на деление е построена права, успоредна на AB. Лицето на получения трапец е:

А) 228,24 **Б)** 282,24 **В)** 300 **Г)** 272,24

12. Дадена е окръжност с радиус 15 cm и точка M на разстояние 13 cm от центъра ѝ. През M е построена хорда $AB=18$. Дължините на отсечките AM и MB са:

А) 2 cm и 16 cm **Б)** 3 cm и 15 cm

В) 4 cm и 14 cm **Г)** не може да се намерят

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Намерете границите и ги сравнете $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ и $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$. ☐

14. Намерете лицето на кръг, вписан в правоъгълен триъгълник, ако височината към хипотенузата я дели на части с дължини 25,6 и 14,4. ☐

15. За трапец с основи 20 и 12 центърът на описаната окръжност лежи на голямата основа. Дължините на диагоналите и на бедрата са: ☐

16. Големината на острия ъгъл в успоредник е 60°, а дължината на по-малкия му диагонал е $2\sqrt{31}$ cm. Перпендикулярът, спуснат от пресечната точка на диагоналите до по-дългата страна на успоредника е $0{,}5\sqrt{75}$ cm. Намерете дължините на страните на успоредника и на по-дългия му диагонал. $\boxed{}$

17. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ в интервала $[-2; 2]$. $\boxed{}$

18. Катетите на правоъгълен триъгълник са 9 cm и 12 cm. Намерете разстоянието между пресечната точка на медианите и центъра на вписаната в триъгълника окръжност. $\boxed{}$

ТЕМА 2: ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Първа част

Всяка от следващите 20 задачи има само един верен отговор. Преценете кой от предложените пет отговора на съответната задача е верен. За всеки верен отговор получавате по 1 точка. За грешен или непопълнен отговор, както и за посочени повече от един отговор на една задача, точки не се дават и не се отнемат.

1. Стойността на израза $\dfrac{1}{3}\sqrt{12\dfrac{1}{4}} - \left(\dfrac{9.5^{-2}}{0{,}5.2^{-1}}\right)^{-0{,}5}$ е:

А) 1,1 **Б)** 2 **В)** $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{2}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$ **Д)** $-\dfrac{1}{2}$

2. Ако $a = 3b + 1$ и $ab = 30$, то стойността на израза $a^2 + 9b^2$ е равна на:

А) 181 **Б)** 161 **В)** 121 **Г)** 81 **Д)** 31

3. Сборът на корените на уравнението $x^2 + 5x + 2 - \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} = 0$ е равен на:

А) 4 **Б)** -4 **В)** 0 **Г)** -1 **Д)** 3

4. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $2x^2 - 7x + 4 = 0$, то стойността на израза $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)$ е равна на:

А) $\dfrac{7}{4}$ **Б)** $\dfrac{7+\sqrt{2}}{2}$ **В)** $\dfrac{7+4\sqrt{2}}{4}$ **Г)** $\dfrac{7+2\sqrt{2}}{2}$ **Д)** $\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}$

5. Решенията на уравнението $\sqrt{(2x+3)^2} = x$ са:

А) -1 **Б)** -3 **В)** -1 и -3 **Г)** $\dfrac{3}{2}$ **Д)** няма решение

6. Броят на целите числа n, за които $\left(\dfrac{n+7}{2n+7}\right)^{-1} < 1$, е равен на:

А) 0 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

7. Редицата $\{a_n\}$ е аритметична прогресия с разлика $d = 2$. Стойността на израза $a_6 + a_2 - a_3 - a_4$ е:

А) 22 **Б)** -2 **В)** 2 **Г)** -22 **Д)** 10

8. За геометричната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_1 + a_5 = 57$ и $a_2 + a_6 = 171$. Частното на прогресията е равно на:

А) $\dfrac{57}{29}$ **Б)** $\dfrac{29}{57}$ **В)** 1 **Г)** $\dfrac{1}{3}$ **Д)** 3

9. Ако $a = \log_3 2$, то стойността на израза $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$ е равна на:

А) 1 **Б)** $\dfrac{a+2}{2}$ **В)** $\dfrac{a-2}{2}$ **Г)** $\dfrac{5a+6}{2}$ **Д)** $a+2$

10. Вероятност на случайно събитие е числото:

А) $\lg 13$ **Б)** $(0{,}4)^5$ **В)** $\sin 181^\circ$ **Г)** $\operatorname{tg} 47^\circ$ **Д)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

11. От 20 члена на студентски съвет трябва да се изберат председател и секретар. Броят на различните възможности за избора им е равен на:

А) 190 **Б)** 380 **В)** 100 **Г)** 40 **Д)** 10

12. Стойността на числения израз $\sqrt{3}\operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ$ е:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Г)** $\sqrt{3}$ **Д)** $\dfrac{1}{2}$

13. Ако $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, то:

А) $a = 1$ **Б)** $a = \dfrac{1}{2}$ **В)** $a = \dfrac{2}{5}$ **Г)** $a = 0$ **Д)** $a = -1$

14. Ако $2^{3x-4} = 2.2^x$, то стойността на x е:

А) $\dfrac{5}{2}$ **Б)** $a = \dfrac{5}{4}$ **В)** -1 **Г)** $\dfrac{3}{2}$ **Д)** 5

15. Множеството от допустимите стойности на x за функцията $f(x) = \log_x(3 - 2x - x^2)$ е:

А) $(-3; 1)$ **Б)** $(-3; 0)$ **В)** $(0; 1)$ **Г)** $(1; \infty)$ **Д)** $(0; \infty)$

16. Даден е $\triangle ABC$, в който с M е означен медицентърът му, а с P е означена средата на страната AB. Отношението на лицата на $\triangle BMP$ и $\triangle ABC$ е:

А) $\dfrac{1}{9}$ **Б)** $\dfrac{1}{8}$ **В)** $\dfrac{1}{7}$ **Г)** $\dfrac{1}{6}$ **Д)** $\dfrac{1}{5}$

17. В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AD \perp AB$) основите AB и CD имат дължини съответно 4 cm и 3 cm. Върху бедрото AD е построена т. M, която е равноотдалечена от върховете B и C. Ако $MC \perp MB$, то дължината на отсечката AD е равна на:

А) 3 cm **Б)** 4 cm **В)** 5 cm **Г)** 6 cm **Д)** 7 cm

18. Осните сечения на прав кръгов конус имат прав ъгъл при върха му, а радиусът на основата му е 3 cm. Отношението на радиусите на описаната и вписаната спрямо конуса сфери е равно на:

А) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **В)** $1+\sqrt{2}$ **Г)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **Д)** $\sqrt{2}-1$

19. Около основата на правилна четириъгълна пирамида е описана окръжност с диаметър $6\sqrt{2}$. Околните стени сключват с основата ъгли с големина α. Обемът на пирамидата е:

А) $36\operatorname{tg}\alpha$ **Б)** $108\operatorname{tg}\alpha$ **В)** $36\operatorname{cotg}\alpha$ **Г)** $36\cos\alpha$ **Д)** $72\operatorname{tg}\alpha$

20. Разликата на най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = -2x^2 - x - 1$ в затворения интервал $[-1; 2]$ е равна на:

А) 9 **Б)** -9 **В)** $-\dfrac{79}{8}$ **Г)** $-\dfrac{97}{8}$ **Д)** $\dfrac{81}{8}$

Втора част

Следващите 10 задачи са без избираем отговор. За всеки получен и обоснован верен отговор получавате по 2 точки. За грешен отговор или за непопълнен отговор точки не се дават и не се отнемат.

21. Да се намери най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството

$$4^x + 3.2^{x+1} - 16 > 0.$$

22. Да се реши неравенството

$$\log_2(x+1) + \log_2(3x-1) \leqq 2.$$

23. Да се намерят всички решения на уравнението

$$4\cos 2x - 2\sin 2x = 4\cos^2 x,$$

които принадлежат на затворения интервал $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; 0\right]$.

24. Да се реши уравнението

$$\sqrt{2x^2 - x - 6} = x - 1.$$

25. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{1}{3}$$

и да се установи видът им.

26. Колко служители има в даден отдел, ако начините за случаен избор на двама от тях са равни на медианата на данните 41, 29, 20, 20, 27, 60.

27. Осемте букви на думата УЧИТЕЛКИ са написани на отделни картончета и са поставени в кутия. По случаен начин се вади едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написана буква от думата ФРИЗЬОР?

28. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4ax + a}$ е дефинирана за всяко реално число x.

29. В ромб $ABCD$ със страна a диагоналът AC пресича височината DM на ромба в т. P така, че $DP : PM = 3 : 2$. Да се намери дължината на BD.

30. Височината на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина $4b$. Основата ѝ $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи $AB = 6b$ и $CD = 2b$. Ъгълът между диагонала A_1C и равнината на основата ѝ има големина φ. Да се намери обемът на призмата.

ТЕМА 3: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

1. Дадена е функцията $y = \dfrac{8}{3}x^3 - 2x + \dfrac{10}{3}$. Най-голямата ѝ стойност в интервала $[-1, 1]$ е:

А) 3 **Б)** $\dfrac{8}{3}$ **В)** 4 **Г)** $\dfrac{14}{3}$

2. Уравнението $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$ има за решение:

А) 3 **Б)** $(-\infty, +\infty)$ **В)** $[3, +\infty)$ **Г)** $(-\infty, 3]$

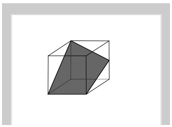
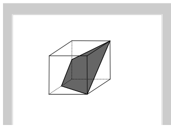
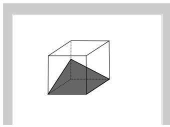
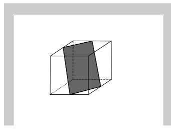
3. Ако α е остър ъгъл, за който $4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 1 = 0$, то α е от интервала:

А) $(0^\circ, 15^\circ)$ **Б)** $(15^\circ, 30^\circ)$ **В)** $(30^\circ, 45^\circ)$ **Г)** $(45^\circ, 90^\circ)$

4. В остър ъгъл с големина α е вписана окръжност, допираща се до раменете му. До нея и до раменете на ъгъла се допира друга окръжност с три пъти по-малък радиус. Ъгъл α е равен на:

А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 90°

5. Кой от защрихованите многоъгълници е сечение на куба с подходяща равнина:

А) ; **Б)** ; **В)** ; **Г)** ;

6. Дадена е функцията

$$f(x) = (m^2 - 1)9^x - (m^2 + 4m - 1)3^x + 4m,$$

където m е параметър.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 0$ за $m = 3$.

б) Да се реши неравенството $f(x) < 0$ за $m = \dfrac{1}{2}$

в) За кои стойности на параметъра m уравнението $f(x) = 0$ има два корена, от които единият е по-малък от 1, а другият – по-голям от 1?

7. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1. Точката M дели страната BC в отношение k, $k > 0$. Нека O е центърът на квадрата, P – пресечната точка на AM и BD.

а) Да се докаже, че лицето на $\triangle OMP$ е равно на $\dfrac{1}{4}\dfrac{k}{(k+1)(2k+1)}$.

б) Да се докаже, че лицето на $\triangle OMP$ е най-голямо, когато точката P дели AM в отношение $\sqrt{2} + 1$.

в) Да се намери радиусът на описаната около $\triangle OMC$ окръжност, когато лицето на $\triangle OMP$ е най-голямо.

8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа квадрата $ABCD$. Околният ръб DM е перпендикулярен на основата и е равен на основния ръб.

а) Да се намери повърхнината на пирамидата, ако основният ѝ ръб е a.

б) Да се пресметне двустенният ъгъл с ръб BM.

в) Да се намери ъгълът между правите AM и BD. Ако PQ е тяхната ос-отсечка ($P \in AM$, $Q \in BD$, PQ е перпендикулярна на AM и BD), да се намери в какво отношение точката Q дели BD.

Забележка: Предложената тема е може би малко по-трудна от очакваните на самите изпити, но както се казва „повече пот в тренировките, по-малко „кръв“ в боя“. Следва да се отбележи, че при оценяването тежестта на коя да е от последните три задачи е примерно пет пъти по-голяма от тежестта на всяка от първите пет задачи.

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА В ИМИ–БАН

Петър Бойваленков

На 5–10 януари 2016 г. в Института по математика и информатика (ИМИ) на Българската академия на науките се проведе второто издание на Седмица на олимпийската математика на ИМИ, организирана от ИМИ със съдействието на Фондация Георги Чиликов и Американска Фондация за България.

Както и година по-рано, програмата на Седмицата включваше четири тематични контролни, по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата. За участие бяха поканени 40 ученика от цялата страна съответно на рейтинга към момента – първите 10 от всеки от класовете (9-ти – 12-ти). Някои от учениците изнесоха предварително подготвени доклади, а на 8 януари сътрудници на ИМИ проведоха лекции в две групи.

Предлагаме ви условията и решенията на някои от задачите, както и резултатите по задачи.

Контролно по теория на числата, 06.01.2016

Задача NT1. Естествените числа a, b, c и d са такива, че

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \quad \text{и} \quad a \neq d.$$

Да се докаже, че числото $ac + bd$ има прост делител, който дава остатък 1 при деление на 4.

Задача NT2. Редицата от естествени числа $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява връзката

$$a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1}a_n + 1$$

за всяко естествено n. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $a_n - 43$ е нечетно съставно число.

Задача NT3. Нека $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ е редица от естествени числа. За всяко $i = 1, 2, \ldots$ дефинираме множеството $A_i = \{k \in \mathbb{N} : k < a_{i+1} \text{ и } k \text{ се дели на } a_i\}$. Да се опишат тези редици a_i, които притежават следното свойство: всяко естествено число се представя по единствен начин като сума на елементи от множествата A_i, като при това от всяко множество участва не повече от един елемент.

Контролно по алгебра, 07.01.2015

Задача A1. Нека a, b, c, d са положителни числа, за които $abcd = 1$. Да се докаже, че

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geqq 4.$$

Задача A2. Да се намерят всички полиноми $P \in \mathbb{R}[x]$ такива, че

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Задача A3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f(x+y) \geqq (y+1)f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Контролно по геометрия, 09.01.2016

Задача G1. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите F. Нека правите AB и CD се пресичат в точка P, а точка M е от лъча $PD^{\rightarrow}$, такава, че $PA.AB = PM.CD$. Ако N е симетричната точка на M относно P, то да се докаже, че $PF \parallel AN$.

Задача G2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ACB$. Точка N лежи на отсечката AB и е такава, че $\sphericalangle NCB = \sphericalangle ABD$. Нека M е средата на BD. Правите AM и BC се пресичат в точка P. Да се докаже, че $PN \perp AB$.

Задача G3. Даден е $\triangle ABC$, който е вписан в окръжност k с център O. Разглеждаме трите *полувписани* окръжности за $\triangle ABC$, т.е. окръжностите, които се допират вътрешно до k и до две от страните му. Да се докаже, че техният радикален център лежи на правата IO, където I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Контролно по комбинаторика, 10.01.2016

Задача C1. Ребрата на пълния граф с 11 върха са оцветени в червено и синьо. Да се докаже, че съществуват два независими (без общи върхове) едноцветни триъгълника, които са с един и същи цвят (и двата червени или и двата сини).

Задача C2. Да се намери броят на пермутациите $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ на числата $1, 2, \ldots, 6$ със следното свойство:

Минималният брой транспозиции (размяна на местата на две от числата в дадена пермутация), необходими за получаване на пермутацията $(1,2,\dots,6)$ от $(a_1,a_2,\dots,a_6)$, е равен на 4.

Задача С3. В клетките на безкрайна таблица са разположени n^2 пула във формата на квадрат $n\times n$. За един ход даден пул прескача съседен пул (хоризонтално или вертикално), като се поставя в празна клетка, а прескоченият пул се отстранява от таблицата. Да се докаже, че ако в даден момент не са възможни повече ходове, то са били направени поне $\dfrac{n^2}{3}$ хода.

Решения

А1. Имаме

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+cd}{1+c}=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+ab}{ab(1+c)}\geqq\frac{4(1+ab)}{1+a+ab+abc},$$

$$\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+da}{1+d}=\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+bc}{bc(1+d)}\geqq$$
$$\geqq\frac{4(1+bc)}{1+b+bc+bcd}=\frac{4a(1+bc)}{1+a+ab+abc}.$$

Събираме горните неравенства и получаваме исканото неравенство.

А2. Ако $P\equiv\text{const}$, то тогава $P\equiv 0$ или $P\equiv 1$. Сега да положим $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$,където $n=\deg P\geqq 1$ и $a_0\neq 0$. Сравнявайки коефициентите пред x^3n от двете страни на равенството получаваме, че $a_0^2=a_0$, т.е. $a_0=1$. Нека $P(x)=x^kP_1(x)$, където $k\geqq 0$ и $P_1(0)\neq 0$. Тогава даденото равенство може да бъде представено като

$$2^kx^2kP_1(x)P_1(2x^2)=(2x^2+1)^kP_1(2x^3+x).$$

Значи $k=0$, тъй като иначе $P_1(0)=0$, което е противоречие. Сега горното равенство за $x=0$ ни дава $a_n=P(0)=1$. От формулите на Виет се вижда, че произведението на корените на P е равно на 1.

Нека сега $\alpha\in\mathbb{C}$ да бъде корен на P с максимален модул. Тогава $P(2x^3+\alpha)=0$ и следователно $|\alpha|\leqq 1$, тъй като иначе

$$|2\alpha^3+\alpha|\geqq|\alpha|(2|\alpha|^2-1)>|\alpha|,$$

което е противоречие. Значи $|\alpha|=1$ и $|2\alpha^2+1|=1$. Представяме α като $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогава

$$2\alpha^2+1=(2\cos 2\varphi+1)-i.2\sin 2\varphi,\quad\text{т.е.}\quad(2\cos 2\varphi+1)^2+(2\sin 2\varphi)^2=1,$$

откъдето, следва че $\cos 2\varphi = -1$. Значи $\alpha = \pm i$ и тъй като коефициентите на $P(x)$ са реални, заключаваме, че i и $-i$ са корени на $P(x)$.

Нека $P(x) = (x^2+1)^m Q(x)$, където $m \geqq 1$ и $Q(i)Q(-i) \neq 0$. Тогава използвайки равенството $(x^2+1)((2x^2)^2+1) = ((2x^3+x)^2+1)$ виждаме, че полиномът $Q(x)$ удовлетворява даденото условие. От горните аргументи става ясно, че $Q \equiv 0$ или $Q \equiv 1$ (защото $Q(i)Q(-i) \neq 0$). Окончателно решенията на задачата са полиномите $P \equiv 0, P \equiv 1$ и $P(x) = (x^2+1)^n$, където $n \in \mathbb{N}$.

A3. Имаме, че $f(z) \geqq 0.f(z+1) = 0$ и $f\left(\dfrac{k+1}{n}x\right) \geqq \left(1+\dfrac{x}{n}\right) f\left(\dfrac{kx}{n}\right)$. Като умножим тези неравенства при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаваме, че $f(x) \geqq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n f(0)$. Аналогично, като умножим неравенствата $f\left(\dfrac{kx}{n}\right) \geqq \left(1-\dfrac{x}{n}\right) f\left(\dfrac{k+1}{n}x\right)$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаваме, че $f(0) \geqq \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n f(x)$. Тъй като $\left(1 \pm \dfrac{x}{n}\right)^n \to e^{\pm x}$, следва, че $f(x) = f(0)e^x$. Обратно, неравенството $e^y \geqq 1 + y$ показва че за всяко $c \geqq 0$ функцията $f(x) = ce^x$ удовлетворява даденото условие.

G1. Нека правата PF пресича правата AM в точка Q. Означаваме с h_1 и h_2 разстоянията от точка F към правите AP и DP съответно. От $\triangle DCF \sim \triangle ABF$ имаме

$$\frac{PM}{PA} = \frac{AB}{CD} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow PM.h_2 = PA.h_1 \Rightarrow S_{PMF} = S_{PAF} \Rightarrow MQ = MA.$$

Следователно PQ е средна отсечка в $\triangle ANM$, т.е. $PF \parallel AN$.

G2. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. Означаваме с K и L средите на AD и AB съответно. Имаме, че $\triangle DAC \sim \triangle ABC$ и значи CK и CL са съответни медиани в тях. Следователно $\sphericalangle AKC = \sphericalangle BLC$, откъдето следва, че четириъгълникът $AKCL$ е вписан. Сега от средна отсечка в $\triangle ABD$ следва, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ALK = \sphericalangle ACK = \sphericalangle BCL$, т.е. $N \equiv L$.

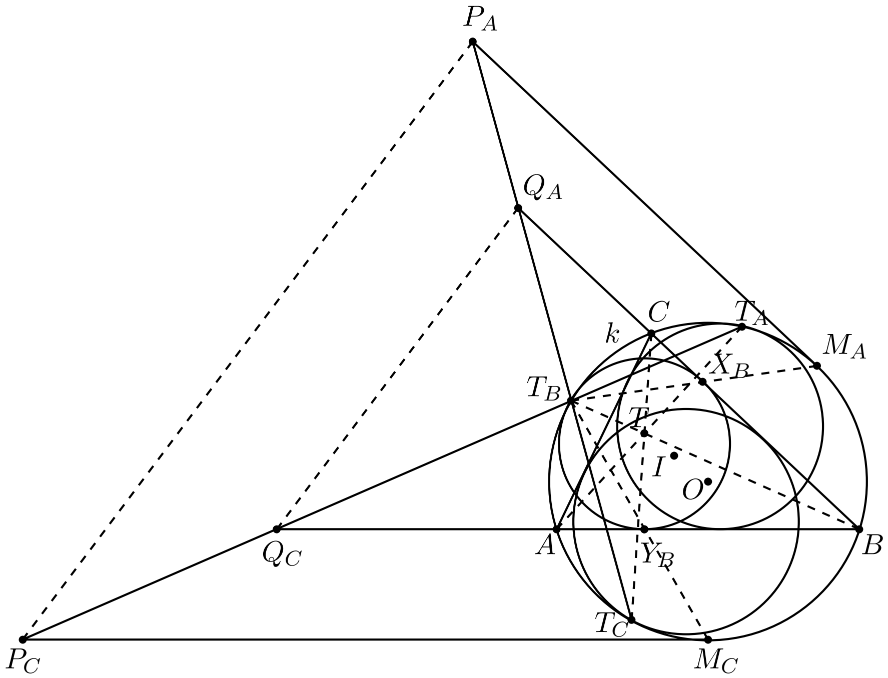
Разглеждаме $\triangle ANM$. От една страна

$$\sphericalangle ANM = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB,$$

а от друга,

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC}.$$

Следователно $\triangle ANM \sim \triangle BCA$, т.е. $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABC$, откъдето следва, че $\triangle ABP$ е равнобедрен. В този равнобедрен триъгълник N е средата на основата и следователно $PN \perp AB$.



G3. Нека ω е вписаната, а ω_A, ω_B и ω_C са полувписаните окръжности за $\triangle ABC$. Ще използваме означенията за точките от фигурата по-долу.

Да разгледаме хомотетия h, която изпраща вписаната в описаната за $\triangle ABC$ окръжност. От теоремата за трите хомотетии следва, че правите AT_A, BT_B и CT_C се пресичат в центъра T на хомотетията h. Следователно T, I и O лежат на една права.

От друга страна, полярите на точките Q_A и Q_C относно k минават през точка T и следователно Q_AQ_C е полярата на точката T относно k.

Остава да съобразим, че относно k, P_C е полюс за радикалната ос $\rho(\omega_A, \omega_B)$, а P_A е полюс за радикалната ос $\rho(\omega_B, \omega_C)$. Тогава P_AP_C е поляра на радикалния център P на ω_A, ω_B и ω_C относно k. Необходимо е да докажем, че $P_AP_C \parallel Q_AQ_C$. Но

$$\frac{T_BQ_A}{Q_AP_A} = \frac{T_BX_B}{X_BM_A} = \frac{T_BY_B}{Y_BM_C} = \frac{T_BQ_C}{Q_CP_C}$$

с което доказателството е завършено.

C1. Съществуват два независими едноцветни триъгълника $T_1 = X_1X_2X_3$ и $T_2 = Y_1Y_2Y_3$ (защо?). Нека $X_1X_2X_3$ е червен, а $Y_1Y_2Y_3$ – син. Ребрата между останалите пет върха не образуват едноцветен триъгълник (ако има такъв задачата би била решена) и следователно подграфът, индуциран от тези върхове се разбива на два едноцветни цикъла: $Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5Z_1$ – червен и $Z_1Z_3Z_5Z_2Z_4Z_1$ – син.

В подграфа, породен от $Y_i, Z_1, \ldots, Z_5$, $i = 1, 2, 3$, съществува едноцветен триъгълник. Ако той е червен, задачата е решена, затова ще приемем, че това е син триъгълник. Аналогично от всеки връх X_i, $i = 1, 2, 3$, образува с два от върховете $Z_1, \ldots, Z_5$ червен триъгълник.

Ако съществува монохроматичен триъгълник от вида $X_iY_jY_k$ или $X_iX_jY_k$, то задачата е решена, тъй като ще го комбинираме с един от построените по-горе триъгълници. Следователно от всеки връх Y_j излиза не повече от едно червено ребро, а от всеки връх X_i излиза не повече от едно синьо ребро. Това е противоречие, тъй като имаме девет ребра от вида X_iY_j.

Темите бяха предложени както следва: проф. Петър Бойваленков и Александър Иванов – теория на числата, гл. ас. Стоян Боев и Марк Андонов – геометрия, проф. Олег Мушкаров и проф. Николай Николов – алгебра, проф. Иван Ланджев и доц. Емил Колев – комбинаторика.

Резултатите на явилите се 38 ученици по задачи са в следващата таблица.

Име	Град, клас	NT1-3	G1-3	A1-3	C1-3	Σ
Александър Чергански	София, 12	6, 7, 7	7, 7, 2	1, 2, 7	7, 7, 2	62
Христо Папазов	София, 11	6, 7, 7	7, 7, 5	0, 2, 4	7, 4, 2	58
Виолета Найденова	София, 11	7, 7, 7	7, 7, 1	0, 0, 1	7, 6, 5	55
Иван Ганев	София, 11	6, 7, 7	7, 6, 7	0, 2, 1	7, 3, 0	53
Константин Гаров	Бургас, 10	7, 7, 7	7, 2, 1	0, 5, 1	7, 5, 3	52
Кирил Бангачев	София, 10	7, 7, 7	7, 6, 2	1, 1, 1	7, 4, 2	52
Деница Маркова	София, 12	6, 7, 7	7, 7, 2	0, 1, 6	7, 2, 0	52
Борислав Антов	София, 9	7, 7, 2	7, 7, 0	1, 1, 1	7, 7, 1	48
Атанас Динев	Бургас, 10	6, 7, 7	7, 6, 2	1, 1, 1	7, 0, 3	48
Костадин Гаров	Бургас, 11	6, 7, 7	7, 7, 2	0, 0, 4	7, 0, 0	47
Калоян Алексиев	София, 10	6, 7, 7	7, 6, 1	0, 0, 1	7, 2, 2	46
Даниел Атанасов	София, 12	0, 7, 7	7, 0, 0	0, 2, 6	7, 7, 3	46
Станислав Славов	София, 12	6, 0, 6	7, 7, 0	0, 1, 6	7, 6, 0	46
Станислав Димитров	София, 12	6, 7, 0	7, 7, 2	0, 7, 0	7, 1, 0	44
Габриел Костадинов	Силистра, 12	3, 7, 4	7, 7, 0	1, 1, 1	7, 4, 0	42
Иво Дилов	София, 12	0, 7, 7	7, 7, 2	0, 1, 4	0, 4, 3	42
Мирослав Маринов	Пловдив, 12	6, 7, 0	7, 6, 4	0, 1, 1	7, 1, 0	40
София Бурова	Варна, 12	0, 7, 5	7, 7, 0	0, 0, 1	7, 6, 0	40
Пламен Иванов	София, 9	2, 6, 7	7, 7, 0	0, 0, 1	5, 3, 1	39

Христо Попов	София, 11	0, 7, 6	7, 0, 0	0, 4, 1	7, 7, 0	39
Кристиян Василев	София, 9	5, 7, 0	7, 7, 0	0, 0, 1	7, 1, 2	37
Георги Русинов	София, 11	0, 6, 7	7, 0, 0	0, 1, 1	7, 6, 0	35
Димитър Ружев	София, 11	0, 7, 5	7, 0, 0	0, 1, 1	7, 4, 0	32
Георги Александров	София, 9	0, 7, 6	7, 0, 0	0, 1, 3	7, 0, 0	31
Мария Делякова	София, 11	1, 7, 0	7, 7, 0	0, 0, 0	7, 2, 0	31
Димитър Любенов	София, 10	7, 7, 0	7, 2, 0	0, 0, 0	7, 0, 0	30
Владимира Иринчева	София, 9	0, 7, 1	7, 2, 0	1, 0, 1	2, 5, 3	29
Ирина Софронова	София, 10	0, 7, 0	7, 7, 0	0, 1, 1	0, 6, 0	29
Илия Божинов	Благоевград, 10	6, 7, 2	7, 2, 0	0, 0, 0	2, 0, 0	26
Иван-Александър Мавров	София, 9	1, 7, 5	7, 3, 0	0, 1, 1	0, 0, 0	25
Васил Йорданов	София, 10	6, 7, 5	7, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	25
Евгени Кайряков	София, 8	6, 7, 4	0, 0, 0	0, 0, 0	7, 0, 0	24
Симона Кукова	Варна, 10	0, 7, 0	7, 3, 0	1, 0, 0	1, 5, 0	24
Борис Барбов	София, 9	4, 2, 0	1, 0, 0	0, 0, 0	7, 5, 1	20
Орлин Кучумбов	Бургас, 9	0, 7, 2	2, 0, 0	0, 1, 0	1, 1, 0	14
Георги Димитров	София, 10	0, 0, 0	7, 7, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	14
Богдан Симеонов	София, 9	2, 0, 6	0, 0, 0	0, 0, 1	2, 0, 0	11

ЛИНЕЙНО-РЕКУРЕНТНИ РЕДИЦИ И ТОЧНИ КВАДРАТИ

Вълчо Милчев, Цветелина Карамфилова

Ще разгледаме редици, които са точни квадрати на други редици. Ще разгледаме условията, при които може да се твърди, че една линейно-рекурентна редица е съставена от квадратите на съответните членове на друга линейно-рекурентна редица. Акцентът е върху редици от втори и трети ред.

Дефиниция. Нека числата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ са свързани с рекурентното равенство

$$A_0 a_{n+k} + A_1 a_{n+k-1} + A_2 a_{n+k-2} + \cdots + A_{k-1} a_{n+1} + A_k a_n = 0, \qquad (1)$$

където k е фиксирано естествено число, а $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ са дадени числа, независещи от n. Тогава редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ се нарича *линейно-рекурентна редица от ред* k.

Дефиниция. Уравнението

$$A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \cdots + A_{k-1} x + A_k = 0 \qquad (2)$$

се нарича *характеристично уравнение* за линейно-рекурентната редица $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ с линейно-рекурентно уравнение (1).

Забележка. Редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ще означаваме и чрез символа $\{a_n\}$.

Една линейно-рекурентна редица $\{a_n\}$ от ред k е зададена, ако са дадени k нейни последователни членове $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots, a_{n+k}$ и, освен това, е дадено рекурентното уравнение (1) или пък характеристичното уравнение (2).

Първо ще приведем без доказателство едно твърдение от теорията на линейно-рекурентните редици. То се отнася до формулите за общия член (*експлицитното представяне*), до тяхното извеждане чрез корените на характеристичното уравнение. Това уравнение може да има два по два различни реални корени или да има и съвпадащи корени.

Теорема 1. Нека за линейно-рекурентната редица $\{a_n\}$ от ред k е изпълнено рекурентното равенство (1) и са дадени първите k члена a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_k. Нека $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ са различни реални корени на алгебричното уравнение от k-та степен (2). Тогава изразът

$$f(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + \cdots + c_k x_k^n, \qquad (3)$$

където $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ са константи, определени от условията $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3, \ldots$, $f(k) = a_k$, дава общия член на редицата $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Забележка. Ако някой от корените на (2) не е прост, а е l-кратен, $2 \leqq l \leqq k$, например ако $x_1 = x_2 = \cdots = x_l$, то в равенството (3) съответната сума $c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + \cdots + c_l x_l^n$ се заменя с израза

$$\left(c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_k n^{l-1}\right) . x_1^n.$$

Забележка. Теорема 1 определя алгоритъм за намиране на формула за общия член на една линейно-рекурентна редица от ред k, която е зададена чрез рекурентното равенство (1) и първите k члена $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ за случая, когато всички корени на характеристичното уравнение са реални. Намираме реалните корени на уравнението (2), ако е възможно. След това чрез израза $f(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + \cdots + c_k x_k^n$ съставяме система от k линейни уравнения $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2, \ldots$, $f(k) = a_k$, и я решаваме спрямо $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$, за да получим формулата.

Забележка. Понякога е удобно да използваме следния вид на експлицитното представяне $f(n) = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1} + c_3 x_3^{n-1} + \cdots + c_k x_k^{n-1}$.

Пример. Дадена е редицата $\{a_n\}$ с условията

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,\ n \geqq 1.$$

Да се намери формула за общия член.

Решение. Редицата има характеристично уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, с корени $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Във формулата

$$a_n = c_1 \left(2 + \sqrt{3}\right)^{n-1} + c_2 \left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1}$$

търсим константите c_1 и c_2. От условията $a_1 = 2$ и $a_2 = 4$ намираме $a_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1}$.

Редиците с линейно-рекурентни уравнения от вида $a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ притежават забележителни свойства. Ще посочим някои от тях.

Теорема 2. За редиците с линейно-рекурентни уравнения от вида $a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ изразът $a_{n+1}^2 - pa_{n+1}a_n + a_n^2$ е константа за всяко цяло положително n.

Доказателство. Доказва се индуктивно чрез равенствата

$$a_{n+2}^2 - pa_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 = (pa_{n+1} - a_n)^2 - p(pa_{n+1} - a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 =$$

$$= p^2 a_{n+1}^2 - 2pa_{n+1}a_n + a_n^2 - p^2 a_{n+1}^2 + pa_{n+1}a_n + a_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - pa_{n+1}a_n + a_n^2.$$

Константата е $q = a_2^2 - pa_2a_1 + a_1^2$. Тя може да се определи и чрез кои да е два последователни члена на редицата.

Теорема 3. Нека са дадени две линейно-рекурентни редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с рекурентни зависимости $a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ и $b_{n+2} = pb_{n+1} - b_n$, където p е реално число. Тогава редицата с общ член $c_n = a_nb_n$ е също линейно-рекурентна и

$$c_{n+2} = \left(p^2 - 1\right) c_{n+1} - \left(p^2 - 1\right) c_n + c_{n-1}.$$

Доказателство. Имаме последователно

$$c_{n+2} = (pa_{n+1} - a_n)(pb_{n+1} - b_n) = p^2c_{n+1} + c_n - pa_{n+1}b_n - pa_nb_{n+1} =$$

$$= p^2c_{n+1} + c_n - p(pa_n - a_{n-1})b_n - pa_n(pb_n - b_{n-1}) =$$

$$= p^2c_{n+1} + c_n - p^2a_nb_n + pa_{n-1}b_n - p^2a_nb_n + pa_nb_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-1}b_{n-1} =$$

$$= p^2c_{n+1} + c_n - p^2c_n + c_{n-1} + pa_{n-1}b_n - p^2a_nb_n + pa_nb_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1} =$$

$$= p^2c_{n+1} + c_n - p^2c_n + c_{n-1} - \left(p^2a_nb_n - pa_{n-1}b_n\right) + (pa_nb_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1}) =$$

$$= p^2c_{n+1} + c_n - p^2c_n + c_{n-1} - (pa_n - a_{n-1})(pb_n - b_{n-1})$$

$$= \left(p^2 - 1\right) c_{n+1} - \left(p^2 - 1\right) c_n + c_{n-1}.$$

Следствие. Нека е дадена линейно-рекурентната редица $\{a_n\}$ с рекурентно уравнение $a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ за $p > 2$ и нека $x_n = a_n^2$. Тогава

$$x_{n+2} = \left(p^2 - 1\right) x_{n+1} - \left(p^2 - 1\right) x_n + x_{n-1}.$$

Следващите две теореми са критерии за определяне на редици от точни квадрати.

Теорема 4. Нека е дадена линейно-рекурентната редица $\{a_n\}$, за която $a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ за $p > 2$ и $n \geqq 1$. Нека за числата $\{b_n\}$ е изпълнено $b_n = a_n^2$. Тогава

(А) $$b_{n+2} = \left(p^2 - 1\right) b_{n+1} - \left(p^2 - 1\right) b_n + b_{n-1} \quad \text{и}$$

(Б) $$b_{n+2} = \left(p^2 - 2\right) b_{n+1} - b_n + B,$$

където $B = a_3^2 - \left(p^2 - 2\right) a_2^2 + a_1^2$.

Доказателство. (А) Доказано е в теорема 3 и нейното следствие.

(Б) От равенството (А) можем да запишем

$$b_{n+2} = \left(p^2 - 2\right) b_{n+1} - b_n + \left[b_{n+1} - \left(p^2 - 2\right) b_n + b_{n-1}\right].$$

Последователно имаме

$$b_{n+1}-\left(p^2-2\right)b_n+b_{n-1}=$$

$$=\left(p^2-1\right)b_n-\left(p^2-1\right)b_{n-1}+b_{n-2}-\left(p^2-2\right)b_n+b_{n-1}=$$

$$=b_n-\left(p^2-2\right)b_{n-1}+b_{n-2}=$$

$$=\cdots=b_3-\left(p^2-2\right)b_2+b_1=a_3^2-\left(p^2-2\right)a_2^2+a_1^2=B,$$

което доказва твърдението (Б).

Теорема 5. Нека е дадена линейно-рекурентната редица $\{b_n\}$, за която

(А) $$b_{n+2}=\left(p^2-1\right)b_{n+1}-\left(p^2-1\right)b_n+b_{n-1}$$

или

(Б) $$b_{n+2}=\left(p^2-2\right)b_{n+1}-b_n+B,$$

където $p>2$, $n\geqq 1$, $B=b_3-\left(p^2-2\right)b_2+b_1$. Тогава, ако редицата $\{a_n\}$ е с рекурентно уравнение $a_{n+2}=pa_{n+1}-a_n$ и ако $b_1=a_1^2$, $b_2=a_2^2$, $b_3=a_3^2$, то $b_n=a_n^2$ за всяко цяло $n\geqq 1$.

Доказателство. Нека $c_n=a_n^2$. Чрез преобразуванията като в теорема 3 заключаваме, че $b_n=c_n$, следователно $b_n=a_n^2$ за всяко естествено $n\geqq 1$.

Ще приложим разгледаните твърдения в няколко конкурсни задачи.

Задача 1. (*Румъния, Team Selection Test, 2006*) Нека за редицата $\{a_n\}$ е изпълнено

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}+1},\ n\geqq 2.$$

Да се докаже, че $2a_{n+1}a_n+1$ е точен квадрат.

Решение. От условието следва $a_3=15$, $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$, $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+1$, откъдето получаваме

$$a_{n+1}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)=a_n\left(a_{n+2}+a_n\right)$$

и

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\cdots=\frac{a_3+a_1}{a_2}=4.$$

Затова за редицата $\{a_n\}$ е в сила рекурентната зависимост $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$.

Да разгледаме редицата $\{b_n\}$, за която $b_1=3^2$, $b_2=11^2$, $b_3=41^2$ и $b_{n+1}=2a_{n+1}a_n+1$, за $n\geqq 1$. Съгласно теореми 3 и 4 тя удовлетворява линейно-рекурентното уравнение $b_{n+1}=14b_n-b_{n-1}-4$, където $-4=b_3-$

$\left(p^2-2\right)b_2+b_1$. Аналогично на предната задача да разгледаме редицата от числа $x_1=3$, $x_2=11$, $x_3=41$, за която $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$. Изпълнени са изискванията на теорема 5. Следователно числата $2a_{n+1}a_n+1$ са точни квадрати за всяко $n \geqq 1$.

Забележка. Твърдението може да се докаже и чрез използване на експлицитни формули. Дефинираната в условието редица $\{a_n\}$ има характеристичното уравнение $x^2-4x+1=0$ с корени $x_1=2+\sqrt{3}$ и $x_2=2-\sqrt{3}$. Тогава намираме

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$$

и

$$2a_{n+1}a_n+1=\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]^2=x_n^2.$$

Тъй като $x_1=3$, $x_2=11$ и $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$, то следва, че x_n са цели числа.

Аналогично на задача 1 се решават и следващите две задачи.

Задача 2. (*Китай, Нанчан сити конкурс*) Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана чрез равенствата

$$a_1=1,\ a_2=7,\ a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2-1}{a_n}\ \text{ за }\ n \geqq 1.$$

Докажете, че $9a_na_{n+1}+1$ е точен квадрат.

Задача 3. Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана чрез равенствата

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2-1}{a_n}\ \text{ за }\ n \geqq 1.$$

Докажете, че $a_na_{n+1}+1$ е точен квадрат.

Задача 4. (*Сърбия, Подборен кръг за Балканиадата по математика, 2005*) Нека е дадена редица $\{x_n\}$ такава, че

$$x_1=1,\ x_2=4,\ x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n\ \text{ за }\ n \geqq 1.$$

Намерете всички естествени числа m такива, че $3x_n^2+m$ е точен квадрат за всички естествени числа n.

Решение. От теорема 2 следва тъждеството $x_{n+1}^2-4x_{n+1}x_n+x_n^2=1$. Следователно $(x_{n+1}-2x_n)^2-3x_n^2=1$ или $3x_n^2+1=(x_{n+1}-2x_n)^2$ за всички естествени числа n. Заключаваме, че $m=1$.

Задача 5. (*България, подборен кръг за Международна олимпиада по математика, 1987*) Редицата $\{x_n\}$ е зададена чрез равенствата

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$$

за всяко естествено число n. Да се докаже, че всички членове на тази редица са точни квадрати.

Решение. За редицата $\{x_n\}$ имаме $x_3 = 9$, $x_{n+2} = \left(4^2 - 2\right) x_{n+1} - x_n + B$, където $B = x_3 - \left(4^2 - 2\right) x_2 + x_1 = 9 - 14.1 + 1 = -4$. Тогава за редицата, за която $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2}$, е изпълнено $x_n = y_n^2$, съгласно теорема 5.

Задача 6. (*Румъния, Team Selection Test, 2002*) Редицата от цели числа $\{a_n\}$ е зададена с условията

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} \text{ за } n \geqq 0.$$

Да се докаже, че числата $2a_n - 1$ са точни квадрати за всяко $n \geqq 0$.

Решение. Да разгледаме редицата $\{b_n\}$, за която $b_{n+1} = 2a_n - 1$, за $n \geqq 0$. Имаме $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 5^2$, $b_3 = 19^2$, $b_4 = 71^2$. Тъй като $14 = 4^2 - 2$, то да разгледаме редицата от числа $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 19$, $x_4 = 71$, за която $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$. Намираме, че редицата $\{b_n\}$ удовлетворява линейно-рекурентното уравниние $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1} + 12$, където $12 = b_3 - \left(p^2 - 2\right) b_2 + b_1$. Изпълнени са изискванията на теорема 5. Следователно числата $2a_n - 1$ са точни квадрати за всяко $n \geqq 0$.

Задача 7. Редицата $\{y_n\}$ е зададена с равенствата

$$y_1 = 1,\ y_2 = 9,\ y_n = 7y_{n-1} - y_{n-2} + 2,\ n \geqq 3.$$

Да се докаже, че всички членове на тази редица са точни квадрати.

Решение. Прилагаме теорема 5. Намираме $y_3 = 64$ и

$$y_n = \left(3^2 - 2\right) y_{n-1} - y_{n-2} + 2,$$

където $3^2 - 2 = 7$, $y_3 - \left(3^2 - 2\right) y_2 + y_1 = 64 - 7.9 + 1 = 2$. Тогава за редицата, за която $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 3c_{n-1} - c_{n-2}$, е изпълнено $y_n = c_n^2$.

Забележка. Тази задача може да се реши също и чрез експлицитни формули.

Задача 8. (*Китай, Югоизточна олимпиада, 2011*) Редицата $\{a_n\}$ е дефинирана така: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geqq 3$. Да се докаже, че $2 + a_n + a_{n+1}$ е точен квадрат.

Решение. Нека означим $b_n = 2 + a_n + a_{n+1}$. Тогава $\{b_n\}$ е линейно-рекурентна редица и изпълнява зависимостта $b_n = 7b_{n-1} - b_{n-2} + B$, където $B = b_3 - \left(p^2 - 2\right) b_2 + b_1$.

Освен това $b_1 = 4$, $b_2 = 9$, $b_3 = 49$, $b_n = 7b_{n-1} - b_{n-2} - 10$ и тогава $b_n = 8b_{n-1} - 8b_{n-2} + b_{n-3}$. Това е линейно-рекурентна зависимост на редица от точни квадрати, съгласно теорема 5, защото за редицата от числа $\{x_n\} = \{2, 3, 7, \dots\}$ е изпълнено $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}$.

Задача 9. (*Shortlist, Международна олимпиада по математика, 1986*) Нека $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} - 2$ за всички положителни цели n. Да се докаже, че a_n са точни квадрати.

Официално решение. Имаме $a_2 = 2^2$, $a_3 = 5^2$, $0a_4 = 13^2$ - тези числа са точни квадрати на подредица на редицата на Фибоначи. С метода на математическата индукция се доказва, че $a_k = F_{2k-1}^2$ за $n \geqq 2$. Наистина за тази подредица е в сила $F_{2k+1} = 3F_{2k-1} - F_{2k-3}$. Индуктивният преход се извършва чрез

$$a_{n+1} = 8a_n - 8a_{n-1} + a_{n-2} = 8F_{2n-1}^2 - 8F_{2n-3}^2 + F_{2n-5}^2 =$$

$$= 8F_{2n-1}^2 - 8F_{2n-3}^2 + (3F_{2n-3} - F_{2n-1})^2 = (3F_{2n-1} - F_{2n-3})^2 = F_{2n+1}^2.$$

Ново решение чрез теорема 5. Имаме $a_2 = 4$,

$$a_n = \left(3^2 - 2\right) a_{n-1} - a_{n-2} - 2,$$

където

$$B = a_3 - \left(3^2 - 2\right) a_2 + a_1 = 4 - 7.1 + 1 = -2.$$

Тогава за редицата, за която $c_0 = 2$, $c_1 = 5$, $c_n = 3c_{n-1} - c_{n-2}$, е изпълнено $a_n = c_n^2$.

Задача 10. (*Обобщение на задачата от МОМ*) Нека $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \left(k^2 - 2\right) a_n - a_{n-1} - 2\,(k-2)$ за всички положителни цели n. Да се докаже, че a_n са точни квадрати.

Решение. В тази задача отново ще приложим теорема 5. Имаме $a_3 = (k-1)^2$, $B = (k-1)^2 - \left(k^2 - 2\right) + 1 = -2k + 4 = -2\,(k-2)$. Тогава за редицата, за която $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = k - 1$, $c_n = kc_{n-1} - c_{n-2}$, е изпълнено $a_n = c_n^2$, съгласно теорема 5.

Задача 11. (*България, Национален кръг, 2003*) Дадена е редицата $\{y_n\}$, за която

$$y_1 = y_2 = 1,\ y_{n+2} = (4k-5)\, y_{n+1} - y_n + 4 - 2k, \quad n \geqq 1.$$

Да се намерят всички цели числа k, за които всички членове на редицата са точни квадрати.

Официално решение. Нека k изпълнява условието на задачата. Тогава ще имаме $y_3 = 2k-2$ и $y_4 = 8k^2-20k+13$. Понеже y_3 е четно, то съществува цяло число $a \geqq 0$, така че $2k-2 = 4a^2$ и значи $k = 2a^2+1$, т.е. $k \geqq 1$. Тогава $y_4 = 32a^4 - 8a^2 + 1$. Нека $b \geqq 0$ е цяло число, така че $y_4 = b^2$.

Имаме $16a^4 - 8a^2 + 1 + 16a^4 = b^2$, откъдето $\left(4a^2-1\right)^2 + \left(4a^2\right)^2 = b^2$. Понеже $4a^2-1$ и $4a^2$ са взаимно прости, то числата $4a^2-1$, $4a^2$, b образуват примитивна Питагорова тройка. Следователно съществуват цели и взаимно прости числа m и n, за които $4a^2 - 1 = n^2 - m^2$, $4a^2 = 2nm$ и $b = n^2+m^2$. От първите две равенства следва, че $n^2 - m^2 + 1 = 2nm$, откъдето $(n+m)^2 - 2n^2 = 1$. Второто равенство дава $mn = 2a^2$ и понеже m и n са взаимно прости, то те са с различна четност. Случаят m да е четно е невъзможен, защото от първото равенство ще следва, че $n^2 \equiv -1 \pmod 4$, което е невъзможно. Заключаваме, че m е нечетно и n е четно. Тогава от $nm = 2a^2$ следва, че съществува цяло число $t \geqq 0$, така че $n = 2t^2$.

От равенството $(n+m)^2 - 2n^2 = 1$ получаваме

$$2n^2 = 8t^4 = (n+m-1)\,(n+m+1)$$

и

$$2t^4 = \frac{n+m-1}{2}.\frac{n+m+1}{2} = u\,(u+1)\,,$$

където u и $u+1$ са последователни цели числа. Тъй като те са също така взаимно прости, заключаваме, че едното от тях е четвърта степен на цяло число, а другото – удвоена четвърта степен на цяло число. Нека едното е c^4, а другото е $2d^4$. Тогава $c^4-2d^4 = \pm 1$. Ако $c^4-2d^4 = 1$, то $d^8+2d^4+1 = d^8+c^4$ и $\left(d^4+1\right)^2 = \left(d^2\right)^4 + c^4$. Последното уравнение е от вида $x^4+y^4 = z^4$, за което е известно, че не притежава целочислено решение, за което $xyz \neq 0$. Заключаваме, че $c = 0$ или $d = 0$. Оттук намираме $t = 0$. Следователно $n = a = 0$ и $k = 1$. Ако $c^4 - 2d^4 = -1$, то $1 - 2d^4 + d^8 = d^8 + c^4$ и $\left(d^4+1\right)^2 = \left(d^2\right)^4 + c^4$. Последното уравнение е от вида $x^4+y^4 = z^4$, за което е известно, че не притежава целочислено решение, за което $xyz \neq 0$. Заключаваме, че $d = 0$, $c = 0$ или $d = \pm 1$, откъдето $c = \pm 1$. Единствената цяла стойност за u е $u = 1$. Оттук $t^4 = 1$, $n^2 = 4$, $m = 1$, $a^2 = 1$ и $k = 3$. Единствените възможности за k са $k = 1$ и $k = 3$. При $k = 1$ получаваме периодичната редица $1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, която изпълнява условието на задачата.

При $k = 3$ редицата става $y_1 = y_2 = 1$, $y_{n+2} = 7y_{n+1} - y_n - 2$. Понеже $y_3 = 4 = 2^2$, $y_4 = 25 = 5^2$, $y_5 = 169 = 13^2$, хипотезата е, че членовете на горната редица са квадратните на членовете на редицата на Фибоначи с нечетни номера. Ако $\{u_n\}$ е редицата на Фибоначи, се установява, че $u_{n+2} = 3u_n - u_{n-2}$ и $u_{n+2}u_{n-2} - u_n^2 = 1$ при нечетно n. Тогава $(u_{n-2} + u_{n-2})^2 = 9u_n^2$, откъдето $u_{n+2}^2 = 9u_n^2 - u_{n-2}^2 - 2u_{n+2}u_{n-2} = 7u_n^2 - u_{n-2}^2 - 2$, с което се потвърждава хипотезата.

Ново решение чрез теорема 5. От дадената в условието рекурентна зависимост намираме стойностите $y_3 = 2(k-1)$, $y_4 = 4\left(2k^2 - 5k\right) + 13$. Разглеждаме редицата $\{y_n\}_2^\infty$, за която

$$y_2 = 1,\ y_3 = 2(k-1),\ y_{n+2} = (4k-5)\, y_{n+1} - y_n + 4 - 2k.$$

Тази редица е дадената, но без първия член. Тя има характеристично уравнение $z^2 - (4k-5)\, z + 1 = 0$ с корени

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4k - 5 \pm \sqrt{(4k-5)^2 - 4}\right).$$

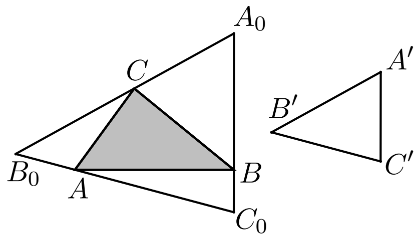
Общият член е $y_n = c_1 z_1^{n-1} + c_2 z_2^{n-1} + c_3$, където c_1, c_2 и c_3 са константи, които се определят чрез y_1, y_2 и y_3. Съгласно теорема 5, разглеждаме също и редицата $\{x_n\}$, за която $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2(k-1)}$, $x_{n+2} = b x_{n+1} - x_n$, $n \geqq 1$, където $b = \sqrt{4k-3}$, само за онези k, за които y_3 и y_4 са точни квадрати. Изборът $b = \sqrt{4k-3}$ е в съзвучие от необходимостта $b^2 - 2 = 4k - 5$, съгласно теорема 5. Остава да се изясни дали съществуват цели числа k, за които $2(k-1)$ е точен квадрат и едновременно с това $4k-3$ също е точен квадрат. При $k = 1$ имаме решение $\{y_n\} = \{1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots\}$. При $k < 1$ би се получило $y_3 < 0$, което не може да бъде квадрат. Нека $k > 1$. Тогава търсим цели числа k, за които $2(k-1) = m^2$ и $4k - 3 = n^2$. Става ясно, че m и n трябва да са решения на уравнението на Пел $n^2 - 2m^2 = 1$. Чрез двойката решения $(3; 2)$ на уравнението на Пел намираме още едно решение на дадената задача $k = 3$.

МЕТАПОЛЮС

Невена Събева

Да разгледаме два еднакво ориентирани триъгълника ABC и $A'B'C'$. Около триъгълника ABC *описваме*[1] триъгълник $A_0B_0C_0$, подобен на $A'B'C'$ и еднакво ориентиран с него.

Такъв триъгълник може да построим, като изберем произволна права l през върха A, различна от AB и AC. Определяме точките B_0 и C_0 върху правата l така, че $\sphericalangle AB_0C = \sphericalangle B'$ и $\sphericalangle BC_0A = \sphericalangle C'$, а $A_0 = B_0C \cap C_0B$ ([2]). На всеки избор на правата l съответства единствен триъгълник $\triangle_l$, описан около ABC, подобен на $A'B'C'$ и еднакво ориентиран с него.



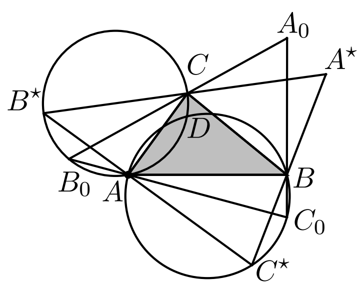
Като въртим правата l около A, триъгълникът $\triangle_l$ остава подобен на себе си и три непресичащи се в една точка прави от $\triangle_l$ (страните му) минават през три неподвижни точки (A, B и C). За движение с това свойство е в сила твърдението, че всеки две положения на $\triangle_l$ имат един и същ център на въртяща хомотетия ([1]), т.е.

Теорема 1. Триъгълниците от множеството

$$\Upsilon = \{\triangle A^\star B^\star C^\star, / \ \triangle A^\star B^\star C^\star \sim A'B'C', A^\star \in B_0C_0, B^\star \in C_0A_0, C^\star \in A_0B_0\}$$

имат общ център на въртяща хомотетия.

Доказателство. Нека $A_0B_0C_0$ е фиксиран триъгълник от Υ. Да разгледаме произволен триъгълник $A^\star B^\star C^\star$ от Υ. Тъй като триъгълниците $A^\star B^\star C^\star$ и $A_0B_0C_0$ са подобни и еднакво ориентирани, то съществува въртяща хомотетия φ с център D, която изобразява единия в другия. Понеже φ изобразява отсечката B_0C_0 в $B^\star C^\star$, центърът на φ е различната от A пресечна точка на описаните около триъгълниците $AB^\star B_0$ и $AC^\star C_0$ окръжности.



[1] Триъгълникът $A_0B_0C_0$ е описан около ABC, ако $C \in A_0B_0$, $A \in B_0C_0$, $B \in C_0A_0$.

От друга страна, отсечката AC се вижда под един същ ъгъл от B_0 и $B^\star$, което означава, че описаните окръжности на триъгълниците $AB^\star B_0$ и ACB_0 съвпадат. Аналогично съвпадат описаните окръжности на $AC^\star C_0$ и ABC_0. Следователно D може да се определи като обща точка за описаните окръжности на триъгълниците ACB_0 и ABC_0 (следователно и на BCA_0).

Получихме, че центърът на въртяща хомотетия D не зависи от избора на триъгълника $A^\star B^\star C^\star$. Това означава, че въртящите хомотетии, които изобразяват $A_0B_0C_0$ в произволен триъгълник $A^\star B^\star C^\star$ от Υ, имат общ център D. Тогава всяка въртяща хомотетия, определена от два триъгълника от Υ, има същия център D.

Общият център на въртене на триъгълниците от Υ се нарича **метаполюс** на $\triangle ABC$ по отношение на $\triangle A'B'C'$. По същия начин се определя метаполюс D' на $\triangle A'B'C'$ по отношение на $\triangle ABC$.

Например, метаполюсът D на ABC по отношение на равностранен триъгълник е точката на Торичели на триъгълника ABC ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 120^\circ$).

Твърдение. Нека триъгълниците ABC и $A'B'C'$ са подобни и D е метаполюсът на $\triangle ABC$ по отношение на $\triangle A'B'C'$.

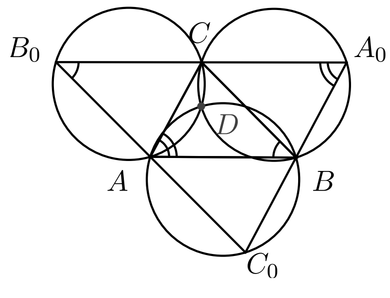
1) Ако $\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$, метаполюсът D (който може да се разглежда като метаполюс на ABC спрямо себе си) е ортоцентър на ABC и общ център на описаната окръжност на триъгълниците от Υ.

2) Ако $\sphericalangle A = \sphericalangle C', \sphericalangle B = \sphericalangle A', \sphericalangle C = \sphericalangle B'$, метаполюсът D е първа точка на Брокар на ABC и всички триъгълници от Υ.

3) Ако $\sphericalangle A = \sphericalangle B', \sphericalangle B = \sphericalangle C', \sphericalangle C = \sphericalangle A'$, метаполюсът D е втора точка на Брокар на ABC и всички триъгълници от Υ.

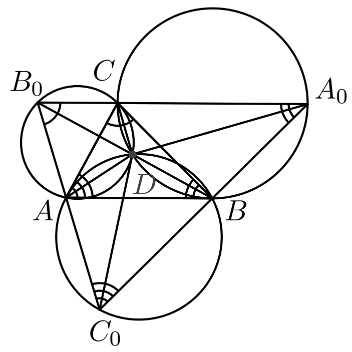
Доказателство. Да разгледаме триъгълника $A_0B_0C_0$ от Υ, за който $A_0B_0 || AB$. Метаполюсът D на ABC по отношение на $A'B'C'$ е общата точка на описаните окръжности на триъгълниците A_0BC, AB_0C и ABC_0.

1) В този случай върховете на ABC са среди на съответните страни на $A_0B_0C_0$. Тогава, както е известно, описаните окръжности на триъгълниците A_0BC, AB_0C и ABC_0 минават през ортоцентъра на ABC, който е и център на описаната около $A_0B_0C_0$ окръжност. Това означава, че метаполюсът D е ортоцентър на ABC и център на описаната окръжност за $A_0B_0C_0$, а значи и за всички триъгълници от Υ.



В случай 2) от равенствата $\sphericalangle A = \sphericalangle C_0 = \gamma, \sphericalangle B = \sphericalangle A_0 = \alpha, \sphericalangle C = \sphericalangle B_0 = \beta$ при остроъгълен $\triangle ABC$ получаваме:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle B_0DC_0 &= \sphericalangle B_0DA + \sphericalangle ADC_0\\
&= \sphericalangle A_0BC + \sphericalangle CAB_0\\
&= \sphericalangle A + \sphericalangle A_0 = \gamma + \alpha\\
\Longrightarrow &\quad \sphericalangle A_0B_0D = \sphericalangle B_0C_0D = \varphi\\
\sphericalangle C_0DA_0 &= \sphericalangle C_0DB + \sphericalangle BDA_0\\
&= \sphericalangle C_0AB + \sphericalangle BCA_0\\
&= \sphericalangle B_0 + \sphericalangle B = \beta + \alpha\\
\Longrightarrow &\quad \sphericalangle B_0C_0D = \sphericalangle C_0A_0D = \varphi
\end{aligned}$$



т.е. D е първата точка на Брокар за $\triangle A_0B_0C_0$, а следователно и за всички триъгълници от Υ. Остана да отбележим, че ъглите $\sphericalangle ABD, \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle CAD$ са съответно равни на $\sphericalangle AC_0D$, $\sphericalangle BA_0D$ и $\sphericalangle CB_0D$ (всеки от които е φ), следователно D е първа точка на Брокар за ABC. (По подобен начин твърдението се доказва за неостроъгълен триъгълник.)

Случай 3) се разглежда аналогично.

Ще докажем някои свойства на метаполюсите.

Свойство 1. Метаполюсът D на ABC по отношение на $A'B'C'$ е вътрешна точка за триъгълниците от Υ, точно когато е изпълнено условието

$$\max(\sphericalangle A + \sphericalangle A', \sphericalangle B + \sphericalangle B', \sphericalangle C + \sphericalangle C') < \pi. \tag{1}$$

Доказателство. Ако D е вътрешна точка за триъгълника $A_0B_0C_0$ от Υ, от равенството

$$\begin{aligned}
\sphericalangle A_0DB_0 &= \sphericalangle C_0 + \sphericalangle C_0A_0D + \sphericalangle C_0B_0D = \sphericalangle C_0 + \sphericalangle BCD + \sphericalangle ACD =\\
&= \sphericalangle C_0 + \sphericalangle C
\end{aligned}$$

и аналогичните на него следва (1).

Ако D е точка от контура на триъгълника $A_0B_0C_0$ от Υ, то D съвпада с един от върховете на ABC. Нека $D \equiv C$. Тъй като D лежи на описаната окръжност за триъгълника ABC_0, то $\sphericalangle C + \sphericalangle C' = \pi$, т.е. условието (1) не е изпълнено.

Ако D е външна точка за триъгълника $A_0B_0C_0$ от Υ, от равенството

$$\begin{aligned}
\sphericalangle A_0DB_0 &= \sphericalangle BDA + \sphericalangle A_0DB + \sphericalangle ADB_0 =\\
&= \pi - \sphericalangle C_0 + \sphericalangle A_0CB + \sphericalangle ACB_0 = 2\pi - \sphericalangle C_0 - \sphericalangle C
\end{aligned}$$

следва, че $\sphericalangle C + \sphericalangle C_0 > \pi$, т.е. не е изпълнено условието (1).

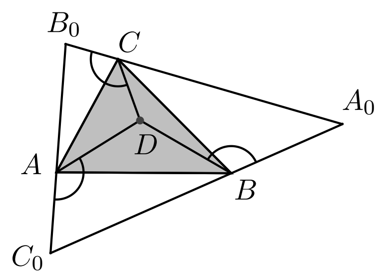
Свойство 2. За метаполюса D на $\triangle ABC$ по отношение на $\triangle A'B'C'$ е в сила равенството

$$\sphericalangle(B'C', AD) = \sphericalangle(C'A', BD) = \sphericalangle(A'B', CD) = \alpha, \tag{2}$$

а за метаполюса D' на $\triangle A'B'C'$ по отношение на $\triangle ABC$:

$$(3) \qquad \sphericalangle(BC, A'D') = \sphericalangle(CA, B'D') = \sphericalangle(AB, C'D') = \pi - \alpha.$$

Доказателство. Да премем, че D е вътрешна точка за триъгълниците от Υ. Да разгледаме триъгълник $A_0B_0C_0$ от Υ, чиито страни са успоредни на съответните страни на $A'B'C'$. Метаполюсът D на ABC по отношение на $A'B'C'$ е обща точка на описаните окръжности на триъгълниците A_0BC, AB_0C и ABC_0. Следователно AD, BD и CD сключват равни ъгли съответно с B_0C_0, C_0A_0 и A_0B_0 и оттук получаваме равенство (2).



Да разгледаме правите l_a, l_b и l_c през A_0, B_0 и C_0, сключващи същия ъгъл α съответно с правите BC, CA и AB. Ще докажем, че l_a, l_b и l_c се пресичат в точка D_1, която е изогонална на D в триъгълника $A_0B_0C_0$.

Да означим пресечната точка на l_a и BC с N. От равенството

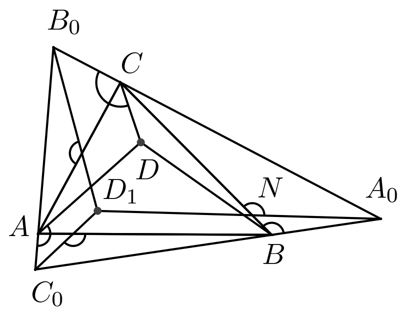
$$\sphericalangle(NA_0, BC) = \sphericalangle(A_0B_0, CD) = \alpha$$

следва, че

$$\sphericalangle(A_0B_0, A_0N) = \sphericalangle(CD, CB).$$

Точката D лежи на описаната около триъгълника A_0CB окръжност и $\sphericalangle(CD, CB) = \sphericalangle(A_0D, A_0C_0)$. Значи

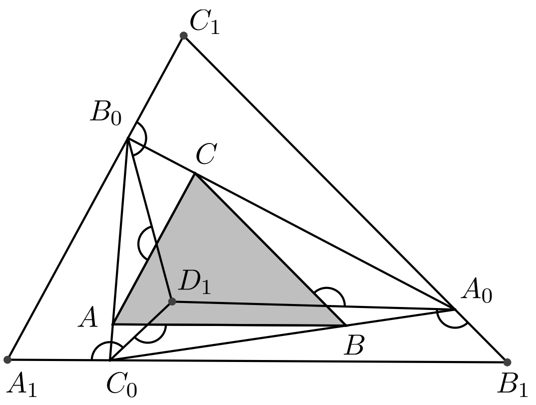
$$\sphericalangle(A_0B_0, A_0N) = \sphericalangle(A_0D, A_0C_0),$$



т.е. правите l_a и A_0D са симетрични относно ъглополовящата през върха A_0 в $\triangle A_0B_0C_0$.

С аналогични разсъждения за l_b и l_c получаваме, че правите l_a, l_b и l_c са симетрични на A_0D, B_0D и C_0D относно съответните ъглополовящи в $\triangle A_0B_0C_0$. Следователно правите l_a, l_b и l_c се пресичат в точка D_1, изогонална на D спрямо триъгълника $A_0B_0C_0$ ([2]).

По-нататък, да впишем триъгълника $A_0B_0C_0$ в триъгълник $A_1B_1C_1$ така, че страните на $A_1B_1C_1$ да са успоредни на съответните страни на ABC.



Тогава $\sphericalangle(B_1C_1, A_0D_1) = \sphericalangle(C_1A_1, B_0D_1) = \sphericalangle(A_1B_1, C_0D_1) = \pi - \alpha$, т.е. точка D_1 е обща за описаните окръжности на триъгълниците $A_0B_0C_1$, $A_0B_1C_0$ и $A_1B_0C_0$. Това означава, че D_1 е метаполюс на $A_0B_0C_0$ спрямо ABC. И тъй като триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$ са хомотетични, в сила е равенството (3).

Равенствата се модифицират (по модул π), когато D е външна точка за триъгълниците от Υ.

В хода на доказателството получихме, че метаполюсите D и D_1 на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и ABC един спрямо друг, са *изогонални* в $\triangle A_0B_0C_0$.

Литература

[1] Яглом И. М. *Геометрические преобразования I*, ГИТТЛ, Москва, 1955.

[2] Шклярский Д. О., Ченцов Н., Яглом И. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики*, *Часть* 2. *Геометрия*, Наука, Москва, 1967.

ЗА ЕДНО ЗАБАВНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ОТ ПРОГРАМАТА „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“

Боянка Савова, Ивайло Кортезов

От 2012 г. екипът на турнира „Черноризец Храбър“ осъществява научно-методическо ръководство на съпътстващо обучение: майсторски клас през февруари, летен и есенен семинар. Участниците са ученици от 5., 6. и 7. клас.

След задълбочената работа в лекциите и семинарите през деня, всяка вечер се провеждат отборни състезания по забавна математика.

Едно от тях е станалото вече традиционно състезание „От едно до сто“. В него отговорите са естествени числа от едно до сто включително. Времето за решаване е 60 минути и всеки отбор предава само бланка с отговорите. През следващите дни се обсъждат по-трудните задачи на някои от лекциите.

Тема от състезанието „От едно до сто“, проведено в гр. Хисаря през февруари 2016 г.

Задача 1. Трима мотористи се състезават на писта, дълга 2 километра. Те стартират едновременно и се движат с постоянни скорости. Когато Алекс финишира, той е на 200 метра пред Вики и на 290 метра пред Бони. На колко метра от финала ще се намира Бони, в момента когато Вики финишира?

Задача 2. Във всяко от полетата на дадения квадрат 3×3 било записано по едно двуцифрено число така, че сумата от числата във всеки ред, колонка и във всеки от двата диагонала била една и съща. Част от числата били изтрити. На колко е равно x?

		27
x	36	45

Задача 3. За рожден ден на Бебо поставили върху една торта толкова свещи, колкото години е навършил. Тортата със свещите тежала 2016 г, без три от свещите – 1999 г, а четвъртинка от тортата (без свещи) – 487 г. Свещите били с еднакво тегло. Колко години е навършил Бебо?

Задача 4. Ако таблицата се попълни по правилата на СУДОКУ, то сборът от числата в четирите сиви квадратчета ще е равен на ...

	5		1			7		
	1		6			5		
2					8			1
8	7		3			6	5	
			9		7			
	3	1			5		7	2
1			8					3
		2			1		9	
		5			6		1	

Задача 5. На колко най-много части може да се раздели един лист хартия (без да се прегъва) с помощта на 13 прави?

Задача 6. В една детска игра има 96 блокчета от от два вида материал (пласмаса и дърво), три размера (малък, среден и голям), четири цвята (син, зелен, червен и жълт) и четири форми (кръг, шестоъгълник, квадрат и триъгълник). Колко са блокчетата, които са различни точно по два признака от дървения малък зелен кръг?

Задача 7. В правоъгълна координатна система е построен равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Ако координатите на върха A са положителни числа, $B(0;15)$ и $C(8;0)$, на колко е равен сборът от координатите на A?

Задача 8. Една дума ще наричаме „хисарска“, ако тя се състои само от буквите *А*, *Б* и *В*, като някои от тях може и да не се появят в думата. Освен това, *А* не е съседна отдясно на *Б*, *Б* не е съседна отдясно на *В* и *В* не е съседна отдясно на *А*. Колко са шестбуквените „хисарски“ думи?

Задача 9. На гърба на един слон кацнали мухи милион.
И така той за момент натежал с един процент.
Предварително аз знам: сто мухи са един грам.
А сега ти пресметни и отговор запиши:
Колко тона тежи слона?

Задача 10. Деветцифреното число A се дели на 3 и на 4, а цифрите са му само двойки и тройки, като двойките са повече от тройките. На колко е равен сборът на цифрите на A?

Задача 11. Колко градуса е ъгълът между часовата и минутната стрелка в 6 ч. и 42 мин.?

Задача 12. Билетът за влак от гара A до гара B струва 3 лева, а глобата за пътник без билет е 20 лева. Разходите на г-н Гратисчиев за 35 пътувания от A до B са общо 361 лева. Колко пъти г-н Гратисчиев е пътувал без билет и не са го глобили?

Задача 13. Колко са шестцифрените числа със свойството: като се премести първата цифра на последно място, числото се увеличава три пъти?

Задача 14. На един коктейл присъствали 74 души: политици, артисти, журналисти, художници и бизнесмени. Артистите и художниците били 4 пъти по-малко от политиците и журналистите, а журналистите и художниците били 7 пъти повече от политиците и артистите. Колко бизнесмени са били на коктейла?

Задача 15. Дадени са две пресичащи се прави a и b, които лежат в една равнина α. В α са построени 4 прави, успоредни на a и 3 прави, успоредни на b. Колко успоредника се получават при пресичането на деветте прави?

Задача 16. Пепо изминал разстоянието от хижа A до хижа B и обратно за 5 часа и 30 минути. Скоростта му при изкачване била 3 km/h, а при слизане – 6 km/h. По пътя нямало равни участъци. Колко километра е разстоянието от A до B?

Задача 17. Лисицата е пред кучето на 60 лисичи скока. Три кучешки скока са равни на седем лисичи скока. За едно и също време кучето скача 6 пъти, а лисицата – 9. След колко кучешки скока кучето ще догони лисицата?

Задача 18. Сборът от цифрите на трицифреното число x е равен на y, а числата x^2, x^3, x^4 имат съответно сбор от цифрите y^2, y^3, y^4. Колко са числата y с посоченото свойство?

Задача 19. На рафт се намират 10 тома от един автор. Те са с номера от 1 до 10. Всеки том е на своето място или на съседното. Колко такива наредби са възможни?

Задача 20. Колко са четните четирицифрени естествени числа, които имат нечетен брой делители?

Задача 21. Ачо се спуска по движещ се надолу ескалатор за 30 секунди. Ако се движи със същата скорост при неподвижен ескалатор, той се спуска за 42 секунди. За колко секунди ще се спусне Ачо, ако се движи надолу по ескалатор, който се движи нагоре?

Задача 22. Четири естествени числа имат сбор 2016. Ако към първото се прибави естественото число x, от второто се извади x, третото се умножи по x, а четвъртото се раздели на x, резултатите ще бъдат равни. Кое е най-голямото x с посочените свойства?

Задача 23. Две последователни години продукцията на една фирма намалява с един и същ процент. След края на втората година се оказало, че продукцията за двете години е намаляла общо с 64%. С колко процента е намалявала продукцията всяка година?

Задача 24. Едно естествено число ще наричаме „универсално“, ако всяка от цифрите му се дели на разликата от другите две. Колко са трицифрените „универсални“ числа, които са по-малки от 300?

Задача 25. На колко е равен остатъкът от делението на 2016^{2017} с 13?

Кратки решения на някои от задачите

8. За първата буква има три избора, а за всяка следваща – по два; общо $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ думи.

14. Нека има b бизнесмени и n други участници. Тъй като политиците и журналистите са 4 пъти повече от артистите и художниците, то n се дели на 5. Аналогично n се дели и на 8. Сега от $n < 74$ следва $n = 40$. Следователно $b = 34$.

15. От петте прави – a и успоредните на нея, се избира двойка прави по C_5^2 начина, а от четирите прави – b и успоредните на нея, изборът на двойка прави става по C_4^2 начина. При пресичането на двете избрани двойки прави се получава успоредник. Броят всички успоредници, получени при пресичането на построените девет прави, е равен на $C_5^2 \cdot C_4^2 = 60$.

18. Числото е x трицифрено, от което следва, че $x < 10^3$ и $x^4 < 10^{12}$, т.е. x^4 е най-много 12-цифрено.Тогава $y^4 \leq 9.12 = 108$ и $y \leq 3$. Тъй като сборът от цифрите на x не надминава 3, то

$$x \in \{300, 201, 210, 120, 102, 111, 200, 101, 110, 100\}.$$

С непосредствена проверка се установява, че само числата 110, 101 и 100 са решения на задачата.

19. Нека a_n е броят начини за подреждане на n тома по указания начин. Явно $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Последният том може да остане на последното място (при което за останалите $n-1$ тома има a_{n-1} начина) или да отиде на предпоследното (при което на негово място трябва да дойде предпоследният, а за останалите $n-2$ тома има a_{n-2} начина). Така $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, което поражда $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

22. Нека a, b, c, d са естествени числа със сбор 2016 и

$$a + x = b - x = c.x = \frac{d}{x}.$$

Имаме $a = cx - x$, $b = cx + x$, $d = c.x^2$ и

$$2016 = c + 2cx + cx^2 = c(1 + 2x + x^2) = c(1 + x)^2.$$

Най-големият точен квадрат, който е делител на 2016, е 12^2, така че $1 + x = 12 \Leftrightarrow x = 11$.

23. Ако количеството на продукцията отначало е A и намалява с по $x\%$ две поредни години, то

$$A\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{36}{100}A \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{100} = \frac{6}{10}.$$

Следователно $x = 40$.

задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
отговор	100	81	12	26	92	29	31	96	1	21	51	11	2
% верни отговори	90	90	90	80	60	60	80	50	70	100	80	80	80
задача	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	X
отговор	34	60	11	72	3	89	34	70	11	40	12	1	X
% верни отговори	60	40	70	60	50	10	90	90	10	40	40	100	X

В състезанието участваха 10 отбора. Всяка задача се оценяваше с 2520 точки, които се разпределяха поравно между отборите, които са дали верен отговор (знаете, че 2520 е най-малкото общо кратно на естествените числа от 1 до 10, а за наша радост не се наложи да делим на 0).

Състезателните игри в съпътстващото обучение на турнира „Черноризец Храбър“ носят голям емоционален заряд и са очаквани с радостно нетърпение от участниците. Освен описаното състезание, може да споменем още „Математическата рулетка“, в която отборите решават задачи и разполагат с точков капитал, част от който залагат за верността на отговора си; „Математическата щафета“, в която отборите са разделени на постове и верният отговор на всеки пост (без последния) участва като параметър в задачите на следващия пост; „Математическата търсачка“, в която отборите трябва да открият талони за задачи, скрити из околността, и да решат задачите, свързани с тях; „Математическия джакпот“, който е подобен на състезанието „От едно до сто”, но задачите са по-трудни и се трупат точките на нерешените задачи (само че на последния лагер учениците се представиха толкова силно, че не позволиха да се събере никакъв джакпот).

Склонността да играят е една от най-присъщите черти на децата (включително на порасналите), така че състезателните игри допринасят за все по-големия интерес към математическите лагери на турнира „Черноризец Храбър“. Играейки, по естествен път децата обикват и най-великата игра, измислена от човечеството.

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

Димитър Димитров

На 13.12.2015 г. в Ботевград, Бургас, Варна, Велико Търново, Враца, Гоце Делчев, Димитровград, Кюстендил, Ловеч, Монтана, Перник, Плевен, Пловдив, Поморие, Разград, Русе, Самоков, Сандански, Силистра, Сливен, Смолян, Сопот, София, Хасково, Шумен и Ямбол се проведе 22. Коледно математическо състезание, организирано от секция „Изток“ – София към СМБ.

Регламент на задачите от 4. до 6. клас. Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор от четири възможни. „Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите са разпределени на групи по трудност: от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки; от 4 до 6 с по 5 точки и от 7 до 9 с по 7 точки. Задача 10 се решава и описва подробно. Оценява се с 15 точки. Максималният брой точки е 60. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

4. клас

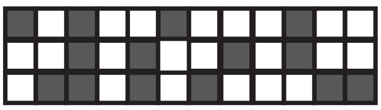
1. Сборът $4.1000 + 20.100 + 1$ е равен на:

А) 421 **Б)** 4201 **В)** 6001 **Г)** Друг отговор

2. Колко естествени числа могат да се поставят вместо знака ✠ в израза $2 + 3.$ ✠ така, че стойността му да е между 10 и 40?

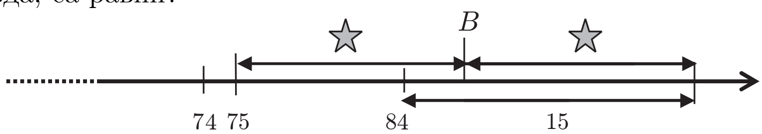
А) 5 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** Друг отговор

3. Колко още квадратчета трябва да се оцветят така, че белите квадратчета да останат половината от черните?



А) 10 **Б)** 8 **В)** 4 **Г)** Друг отговор

4. Кое е числото означено с буквата В, като имате предвид, че отсечките, означени със звезда, са равни?



А) 90 **Б)** 88 **В)** 85 **Г)** Друг отговор

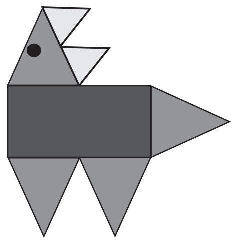
5. В годината, в която съм се родил, годините на брат ми са били три пъти повече от тези на сестра ми. Днес вече съм на 10 години и сборът на годините на тримата ни е 46. На колко години е брат ми днес?

А) 36 **Б)** 22 **В)** 18 **Г)** Друг отговор

6. Кали (K) обича да умножава с 4, Сали (C) обича да прибавя 5, а Рали (P) обича да изважда 2. В какъв ред трите, точно по веднъж, трябва да извършат своите любими действия, за да получат числото 60 от числото 12?

А) KCP **Б)** CPK **В)** PKC **Г)** Друг отговор

7. Орлин направил модел на петел от два еднакви малки и четири еднакви големи равностранни триъгълници и от един правоъгълник. Дължините на страните на правоъгълника в сантиметри са цели числа, а обиколката му е 120 сантиметра. Обиколката на получената фигура (на модела) в сантиметри е:



А) 220 **Б)** 320 **В)** 420 **Г)** Друг отговор

8. По права линия са застанали четири джуджетата. Те се казват Знайко, Мърморко, Веселушко и Кихавко. Известно е, че Знайко е на 4 метра от Кихавко и на 20 метра от Мърморко, а Кихавко е на 16 метра от Мърморко и е точно по средата между Веселушко и Мърморко. Колко метра е разстоянието между Веселушко и Знайко?

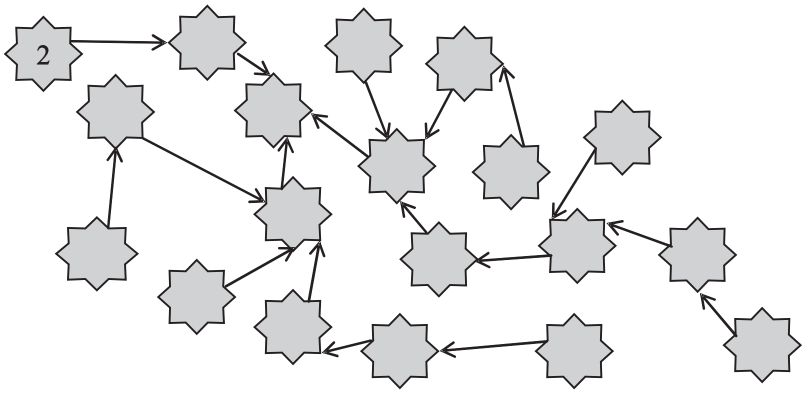
А) 16 **Б)** 12 **В)** 8 **Г)** Друг отговор

9. Коледната елха е украсена с топки: жълти,зелени и сини. Те са общо 30. Сините са със 7 по-малко, отколкото са жълтите, а зелените са повече, отколкото сините и жълтите взети заедно. Най-много колко могат да са жълтите топки?

А) 12 **Б)** 11 **В)** 9 **Г)** Друг отговор

10. а) Попълнете номерата на снежинките като следвате посоката на стрелката: в първия ред на таблицата е номерът на снежинката в началото на стрелката, а във втория – номерът на снежинката, в която стрелката свършва.

↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	8	14	1	8	12	1	4	8	3	19	15	1	4	8	13	18	9	9	4



б) Намерете сбора на номерата на снежинките. Представете този сбор като произведение на четири различни естествени числа.

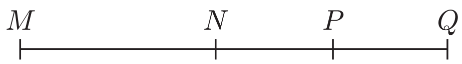
5. клас

1. Четири от джуджетата на дядо Коледа решили да се състезават кой пръв ще измине 200 метра. Буши пробягал разстоянието за 26,7 секунди, Алабастър за 26,07 секунди, Мери за 27,92 секунди, а Шини за 27,09 секунди. Кое от джуджетата е финиширало трето?

А) Шини **Б)** Буши **В)** Мери **Г)** Друг отговор

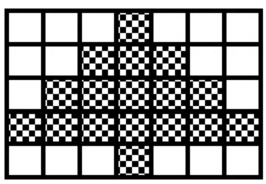
2. На фиг. 1 отсечката PQ е с 25 мм по-малка от MN, а MN е с 0,32 дм по-голяма от NP. Ако $MQ = 9$ см, то дължината на отсечката NP в милиметри е:

А) 49 **Б)** 24 **В)** 17 **Г)** друг отговор



фиг. 1

3. Правоъгълникът на чертежа е разделен на еднакви квадратчета. Ако лицето на защрихованата фигура е 374 кв.см, то лицето на незащрихованата част от правоъгълника в квадратни сантиметри е:



А) 396 **Б)** 398

В) 392 **Г)** Друг отговор

4. Намерете стойността на израза $A = 3.x + x : 15$, ако
$$x = (20{,}16 - 2{,}016) : 0{,}2 - 0{,}72.$$

А) 275 **Б)** 276 **В)** 85 **Г)** Друг отговор

5. Влак, дълъг 600 м, изминава 90 км за 1 час. За колко време влакът ще мине покрай стълб, намиращ се до железопътната линия?

А) 24 мин. **Б)** 12 сек. **В)** 12 мин. **Г)** Друг отговор

6. Лека кола тръгнала в 10 часа 45 минути от град София за град Варна. Отначало изминала 210 километра, след това още третинката от изминатото разстояние и направила престой 12 минути. Оказало се, че ѝ останало да измине 2 пъти по-късо разстояние от вече изминатото. В колко часа колата е пристигнала в град Варна, ако за един час изминава 70 километра?

А) 16:34 **Б)** 16:57 **В)** 16:45 **Г)** Друг отговор

7. Петокласниците в едно училище, организирали Коледен бал с маски. Броят на всички ученици от пети клас е 126, но 12 от тях не отишли на бала. Маскирани били 84 ученици, като 35 от тях са момичета. Ако общият брой на момчетата е 62, какъв е броят на момичетата отишли на бала без маски?

А) 17 **Б)** 49 **В)** 13 **Г)** Друг отговор

8. Правоъгълник, квадрат и равностранен триъгълник имат равни обиколки. Дължините на страните в сантиметри на трите фигури са различни последователни четни числа. Колко квадратни сантиметра е лицето на правоъгълника?

А) 168 **Б)** 540 **В)** 140 **Г)** Друг отговор

9. Миро е с девет години по-голям от брат си Петър. Сега е на толкова години, на колкото месеца е бил брат му, когато той е бил 10 пъти по-голям от него. На колко години е сега брат му Петър?

А) 21 **Б)** 23 **В)** 14 **Г)** Друг отговор

10. На 7 декември Ники имал в касичката си няколко лева. Всеки следващ ден започнал да пуска в нея по 2 лева повече от предходния ден. За две седмици Ники събрал 224 лева.

а) Колко лева е имал Ники в касичката си на 7 декември?

б) Какви са спестяванията му на 17 декември?

6. клас

1. Броят на различните прости множители в разлагането на числото 2016 е:

А) 8 **Б)** 3 **В)** 10 **Г)** Друг отговор

2. Произведението на най-голямата и най-малката реципрочна стойност на числата $\dfrac{2}{3}$; $-4\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{5}{6}$; 0,3; -5; 3,5 е:

А) -4 **Б)** $-16{,}75$ **В)** $-\dfrac{2}{3}$ **Г)** Друг отговор

3. Ако $(x-3)^8 : 2^5 - 3^7 : 9^3 = 5^9 : 25^4$, то стойността x е:

А) 2 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** Друг отговор

4. Нечетното просто число, което е делител на $3.2^{2014} + 5.2^{2015} + 2^{2016}$, е:

А) 13 **Б)** 5 **В)** 17 **Г)** Друг отговор

5. Ани е с 8% по-висока от Ванеса, а Вики е с 10 % по-ниска от Ванеса. С колко процента Ани е по-висока от Вики?

А) 18% **Б)** 12% **В)** 16% **Г)** Друг отговор

6. Сборът на няколко последователни естествени числа е 102. Най-много колко на брой са тези числа?

А) 10 **Б)** 12 **В)** 14 **Г)** Друг отговор

7. Броят на естествените числа, които са делители на 2015, е:

А) 3 **Б)** 6 **В)** 5 **Г)** Друг отговор

8. Ани купила 0,80 кг бадеми, а Ния – 500 гр. бадеми. При тях дошла Руми и разделили бадемите поравно, след което Руми дължи на приятелките си 13 лева. Колко лева дължи Руми на Ани?

А) 11 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** Друг отговор

9. Колко различни правоъгълни паралелепипеда могат да се конструират от 2015 кубчета с ръб 1 см, като се използват всички кубчета?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** Друг отговор

10. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB, CD ($CD < AB$) и бедра AD, BC ($AD < BC$). Периметърът P (в см) на трапеца $ABCD$ е стойността на израза

$$P = -9.(-3) - |-12| : (-2) + |-3|$$

и сборът на бедрата е половината от периметъра му. Едното бедро е $\dfrac{4}{5}$ от другото бедро.

Намерете:

а) лицето на трапеца.

б) лицата на триъгълниците ABC и BCD, ако дължината на малката основа е с 25% по-малка от бедрото AD.

Регламент. Всяка задача от 1 до 16 има само един правилен отговор от четири възможни (отбелязани с А), Б), В), Г)). За задачи 17 до 22 трябва да бъдат записани само отговорите, а задачи 23 и 24 трябва да бъдат подробно решени. Задачите от 1 до 4 се оценяват с по 1 точка; задачи от 5 до 10 – с по 2 точки; задачи от 11 до 16 – с по три точки; задачи 17 до 20 – с по 5 точки; задачи 21 и 22 – с по 8 точки и задачи 23 и 24 – с по 15 точки. Максималният брой точки е 100. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

1. Нормалният вид на едночлена $3axa^2x^2.2a^3x$ е:

А) $5a^3x^4144$ **Б)** $20a^2x^2$ **В)** $6a^5x^2$ **Г)** $6a^6x^4$

2. Сборът на три от ъглите, които две прави образуват при пресичането си, е със 108° по-голям от четвъртия ъгъл. Най-големият ъгъл, който правите образуват, е равен на:

А) 36° **Б)** 72° **В)** 126° **Г)** 144°

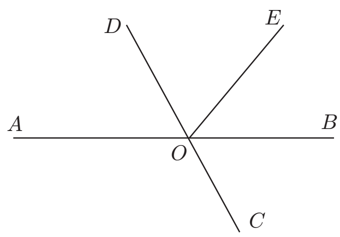
3. Кое е следващото число в редицата $-2{,}8; -2{,}5; -2{,}1; -1{,}8; \ldots$?

А) $-1{,}7$ **Б)** $-1{,}5$ **В)** $-1{,}4$ **Г)** $-1{,}8$

4. На чертежа AB и CD са прави. $\sphericalangle AOC = \alpha$, а $\sphericalangle BOE = 40^\circ$. Тогава $\sphericalangle DOE$ е равен на:

А) $\alpha + 90^\circ$ **Б)** $140^\circ - \alpha$

В) $\alpha - 40^\circ$ **Г)** $\alpha + 40^\circ$



5. Ако $A = (x+1)^2$ и $B = x - 2$, то $A.B$ е равно на:

А) $x^3 - 3x + 2$ **Б)** $x^2.(x-3) - 2$

В) $x.\left(x^2 - 3x - 3\right)$ **Г)** $x.\left(x^2 + 1\right) - 2.(2x+1)$

6. С колко процента ще се увеличи лицето на квадрат, ако увеличим обиколката му с 20%?

А) 12 **Б)** 24 **В)** 44 **Г)** 56

7. Изразът $a^2 - 2a + b^2 + 2b + 2$ има само:

А) положителни стойности **Б)** неотрицателни стойности

В) отрицателни стойности **Г)** неположителни стойности

8. В триъгълника ABC ъглополовящите AM и CN се пресичат в точка P, като $\sphericalangle APN = 50^\circ$. Колко е мярката на $\sphericalangle ABC$?

А) 80° **Б)** 50° **В)** 40° **Г)** 30°

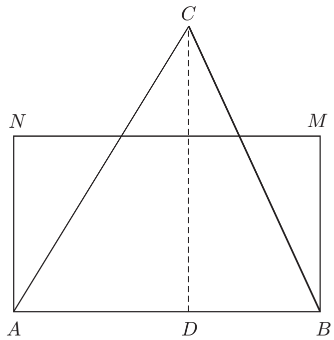
9. Коя от пропорциите НЕ е вярна?

А) $\dfrac{0{,}7}{0{,}8} = \dfrac{70}{80}$ **Б)** $-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{21}{14}$ **В)** $\dfrac{625}{25} = \dfrac{2}{0,8}$ **Г)** $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{2} : \dfrac{5}{3}$

10. Колко пъти трябва да съберем числото 3 само със себе си, за да получим числото 3^4?

А) 27 **Б)** 18 **В)** 12 **Г)** 9

11. Лицето на триъгълника ABC е 2 пъти по-голямо от лицето на правоъгълника $ABMN$. Намерете дължината на MB, ако разстоянието от C до правата AB е равно на 24 см.



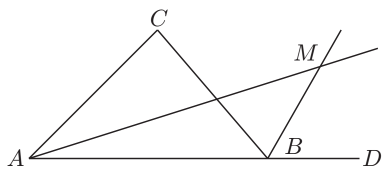
А) 4 см **Б)** 6 см

В) 8 см **Г)** 12 см.

12. Сборът на целите числа, по-големи от (-2015) и не по-големи от 2015, е равен на:

А) 0 **Б)** 2015 **В)** 2014 **Г)** 4025

13. Триъгълникът ABC е равнобедрен ($AC = BC$) с $\sphericalangle ACB = 100^\circ$. Ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle CBD$ се пресичат в точка M. Намерете големината на $\sphericalangle AMB$.



А) 30° **Б)** 50°

В) 80° **Г)** 100°

14. За коя стойност на a в нормалния вид на многочлена, тъждествено равен на $\left(x^2 - 10x + 6\right)(2x + a)$, коефициентите пред x и x^3 са равни?

А) -1 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** 2

15. Два от ъглите в триъгълник са 65° и 87°. Определете ъгъла между ъглополовящата и височината в триъгълника, построени през третия връх.

А) 11° **Б)** 14° **В)** 21° **Г)** 27°

16. След разлагане на многочлена $2x.(x-2y)^2 - y.(4y-2x)^2$ се получава:

А) $2(x-2y)(x-y)$ **Б)** $2(x-2y)^3$

В) $2(x+y)(x-2y)^2$ **Г)** $(-2)(2y-x)(x+y)$

17. В триъгълник ABC, CD е височина и $\sphericalangle ACD : \sphericalangle DCB = 3 : 5$. Намерете мярката на $\sphericalangle ACB$, ако $\sphericalangle CAB : \sphericalangle CBA = 7 : 5$.

18. На петцифрено число е добавена отпред цифрата 1, като се получава шестцифрено число (наричаме го първо). Ако на първоначалното петцифрено число се добави цифрата 1 отзад, се получава ново шестцифрено число (наречено второ). Да се намери първоначалното петцифрено число, ако второто шестцифрено число е три пъти по-голямо от първото шестцифрено число.

19. Дадени са три равенства, в които с главни букви са означени пропуснати едночлени. В бланката с отговори срещу всяка буква запишете съответния нормален едночлен, така че да се получат тъждества.

$$4x^2 + 24x + M = (N + 6)^2$$

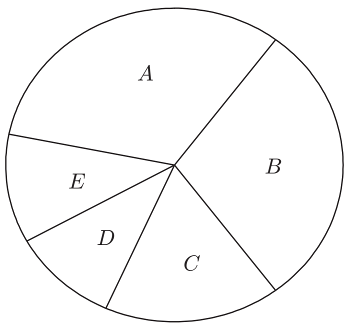
$$(3x + 1)^2 - P = (9x - 1)(x - 1)$$

$$Q - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + R)$$

Забележка: Едночленът Q е естествено число.

20. В какво отношение трябва да се разреже парче тел на две части, така че ако от тях се построят два квадрата, първият да загражда 4 пъти по-голяма площ от втория?

21. В едно училище има 150 ученика от 6 клас. Почти всички ученици тренират някакъв спорт, като всеки е избрал само по един спорт. На кръговата диаграма е дадено разпределението на всички ученици по спортове:



сектор A (108°) – футбол
сектор B (96°) – баскетбол
сектор C (72°) – волейбол
сектор D (36°) – худож. гимнастика (девойки)
сектор E (48°) – не тренират

А) какво е отношението на броя на трениращите футбол към тези, които тренират баскетбол?

Б) колко % са момичетата, трениращи гимнастика от всички ученици от 6 клас?

В) колко ученици тренират футбол?

22. Самолетна компания превозила определен брой пътници. Оказало се, че $\frac{2}{3}$ от броя на пътниците от първия полет са равни на $\frac{3}{5}$ от броя на пътниците от втория полет и на $\frac{3}{4}$ от броя на пътниците от третия полет. Ако броят на всички превозени пътници е равен на 324, намерете:

А) колко са пътниците от първия полет?

Б) колко са пътниците от втория полет?

В) колко са пътниците от третия полет?

23. В остроъгълния триъгълник ABC с височини AM и BN имаме $\sphericalangle BAM : \sphericalangle NBA = 2 : 5$, а $\sphericalangle NBC$ е с 30° по-малък от $\sphericalangle ABN$. Направете чертеж и намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.

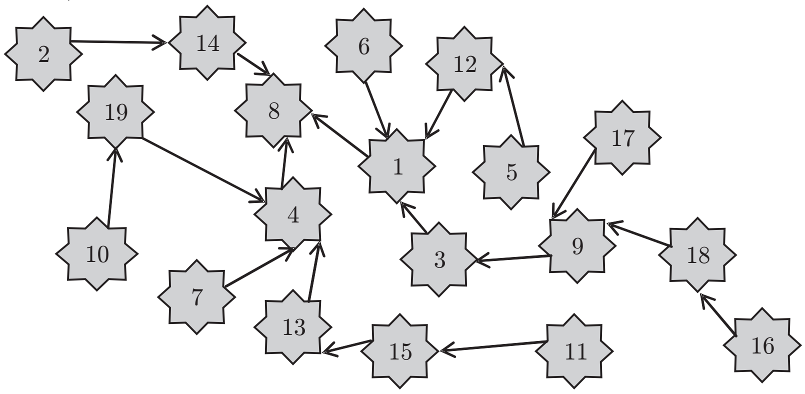
24. Дадени са многочлените $A = 25 - x^2 - x^4 - 5x^3$,

$$B = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 9x - 9y + y^3,\ C = 4x^2 + 7x - 2.$$

А) Да се разложат многочлените A, B и C.

Б) Да се намери числената стойност на многочлена $A - B + 5C$, като x се замести с най-голямото цяло отрицателно число, а y - с най-малкото естествено число.

Отговори. 4. клас. **1.** В; **2.** В; **3.** В; **4.** Г – 87; **5.** Б; **6.** Б; **7.** А; **8.** Б; **9.** Г – 10. **10.** А) Виж схемата.



Б) Сборът е равен на $1 + 2 + \ldots + 18 + 19 = 190 = 1 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 19$

5. клас. **1.** А; **2.** В; **3.** А; **4.** Б; **5.** Г – 24 сек; **6.** Б; **7.** А; **8.** В; **9.** Г – 3; **10.** А) 3 лв.; Б) 143 лв.

6. клас. **1.** Б; **2.** А; **3.** В; **4.** В; **5.** Г – 20%; **6.** Б; **7.** Г – 8; **8.** А; **9.** Г – 5; **10.** А) 72 кв.см; Б) 24 и 48 кв.см.

7. клас. **1.** Г; **2.** В; **3.** В; **4.** В; **5.** Г; **6.** В; **7.** Б; **8.** А; **9.** В; **10.** А; **11.** Б; **12.** Б; **13.** Б; **14.** В; **15.** А; **16.** Б; **17.** 72; **18.** 42857; **19.** $M = -24x$, $N = 2x$, $P = 16x$, $Q = 8$, $R = x^2$; **20.** 2:1; **21.** А) 9:8; Б)10% ; В) 45; **22.** А) 108; Б) 120; В) 96.

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Мадлен Христова, ЦКОКУО

Тестът е разработен на основата на неизтеглен вариант и обхваща учебното съдържание, което се изучава до м. февруари.

ПЪРВИ МОДУЛ
ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $350.5 - 5.50$ е:

А) 2650 **Б)** 2500 **В)** 1375 **Г)** 0

2. Частното $60{,}06 : 10$ е равно на:

А) 60,6 **Б)** 6,06 **В)** 6,006 **Г)** 600,6

3. Многочленът $b^2 - 9 - b - 3$ е тъждествено равен на:

А) $(b-3)b$ **Б)** $(b-3)(b+2)$ **В)** $(b+3)(b-4)$ **Г)** $(b+3)b$

4. Изразът $3c^2x - 6cx + 12cx^2$ е тъждествено равен на:

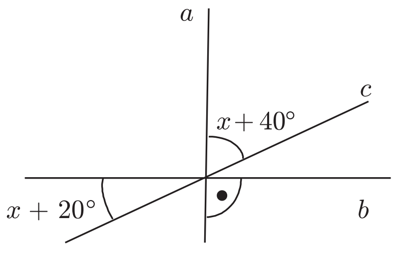
А) $3cx\,(c-2+4x)$ **Б)** $3cx\,(c-3+4x)$

В) $3c^2x\,(1-2c+4x)$ **Г)** $3c^2x\,(-2+4x)$

5. Правите a, b и c минават през една точка. При означенията на чертежа, стойността на x е:

А) 15° **Б)** 20°

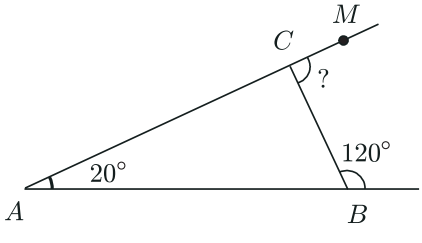
В) 35° **Г)** 60°



6. Мярката на $\sphericalangle BCM$ от чертежа е:

А) 140° **Б)** 120°

В) 100° **Г)** 80°



7. Коренът на уравнението $2 + 5(x-3) = 0$ е:

А) $-\dfrac{1}{5}$ **Б)** $\dfrac{13}{5}$ **В)** $\dfrac{17}{5}$ **Г)** 13

8. Коренът на кое от уравненията е положително число?

А) $x + 0{,}5 = 0{,}25$ **Б)** $x + 0{,}25 = -0{,}5$

В) $-0{,}25x = 0{,}5$ **Г)** $0{,}5 - x = 0{,}25$

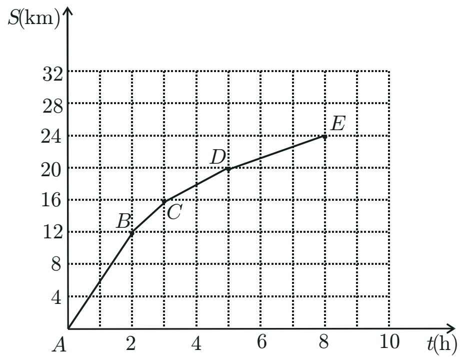
9. Стойността на израза $\dfrac{8^3 - 5^3}{25 + 5.8 + 64}$ е:

А) 3 **Б)** 11 **В)** 27 **Г)** 33

10. Във физкултурен салон има три вида топки. От тях $\dfrac{1}{5}$ са футболни, а $\dfrac{1}{2}$ от всички топки са волейболни. Кое от числата може да е броят на всички топки в салона?

А) 96 **Б)** 95 **В)** 90 **Г)** 88

11. Турист изминал разстоянието от пункт A до пункт E. На графиката е показана зависимостта на изминатия път S (km) от времето t (h).



В кой участък той се е движил със скорост, по-малка от 2 km/h?

А) AB **Б)** BC **В)** CD **Г)** DE

12. От всички ученици, явили се на изпит, 60% издържали изпита, а другите 60 ученици не го издържали. Колко ученици се явили на този изпит?

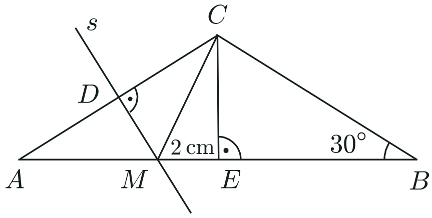
А) 150 **Б)** 120 **В)** 100 **Г)** 60

13. Складово помещение се запълва или с 15 сандъка или с 16 кашона. В помещението има 5 сандъка и 8 кашона. Кой сбор изразява каква част от помещението е запълнена?

А) $\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16}$ **Б)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ **В)** $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8}$ **Г)** $\dfrac{5}{16} + \dfrac{8}{15}$

За задачи 14, 15 и 16 използвайте следното условие:

На чертежа $\triangle ABC$ е равнобедрен, $AC = BC$.
Правата s е симетралата на AC и $ME = 2$ cm.



14. Височината на $\triangle AMC$ през върха C е отсечката:

А) MD **Б)** CE **В)** AE **Г)** CM

15. Кои твърдения са верни?

(**I**) $\triangle CMD \cong \triangle AMD$ (**II**) $\triangle DMA \cong \triangle EMC$ (**III**) $\triangle AEC \cong \triangle BEC$

А) Само (**III**) и (**II**) **Б)** Само (**I**) и (**II**)

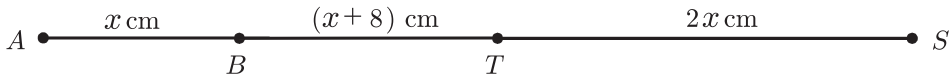
В) Само (**I**) и (**III**) **Г)** И трите – (**I**), (**II**) и (**III**)

16. Дължината на отсечката MB в сантиметри е:

А) 6 **Б)** 8 **В)** 12 **Г)** 16

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Известно е, че x е цяло число, по-голямо от 3.



(1) За коя стойност на x точката T е среда на отсечката BS?

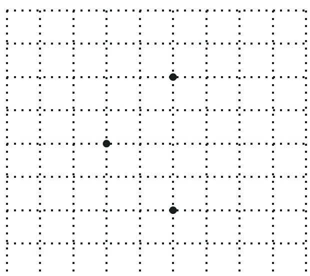
(2) Кои са всички възможни стойности на x, за които отсечките AB и BT са страни, а отсечката TS е височината към AB в $\triangle ABT$?

18. В квадратната мрежа са отбелязани трите върха на триъгълник.

(1) Означете ги с K, L и M така, че LM да е най-дългата му страната.

(2) Начертайте триъгълник PMK, еднакъв на триъгълник LMK.

(3) Намерете разстоянието от точка P до правата LM, ако дължината на страната на квадратчето в мрежата е 2,5 cm.



19. Запишете преобразуванията си и напишете в нормален вид многочлена, получен по следния начин:

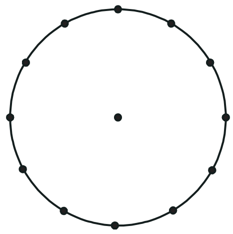
От произведението на n и $(n-1)(n+1)$ е изваден израза $(1-2n)^2$.

20. В един парк са засадени 600 лалета от три различни цвята: червен, бял, жълт. Пенко започва да представя данните в таблица и чрез кръгова диаграма. За диаграмата той използва окръжност, разделена на 12 равни части.

(1) Довършете представянето на данните, като попълните празните полета в таблицата и начертаете кръговата диаграма. Означете кой цвят лале сте представили на всеки от секторите в диаграмата.

(2) В сектора, който съответства на броя на жълтите лалета, запишете градусната мярка на ъгъла му.

Цвят на лалето	Брой по цвят на лалето	Част от всички лалета, представена с несъкратима дроб
(1) Червен		
(2) Бял	350	
(3) Жълт		$\frac{1}{12}$



ВТОРИ МОДУЛ

21. ШАПКАТА НА РИБАРЯ . В 8 часа̀ и 45 минути шапката на един рибар пада в реката. В 10 часа̀ рибарят тръгва с лодка по течението на реката да си търси шапката и я настига в 10 часа̀ и 30 минути. Скоростта на лодката в спокойна вода е 5 km/h.

21.А) Пречертайте и попълнете таблицата.

	Време на пътуване до настигането	Скорост, изразена чрез x	Път до настигането, изразен чрез
Шапка	.........h	x km/h	.........km
Лодка	.........h	.........km/h	.........km

21.Б) Колко пъти скоростта на лодката е по-голяма от скоростта на шапката по време на това пътуване?

22. ТЕЛЕФОННА СМЕТКА. Всеки месец Стефан говори повече от 100 минути по мобилния си телефон. Месечната му сметка S към GSM оператора се пресмята по формулата

$$S = 11{,}80 + 0{,}32\,(t - 100)\,,$$

където t е броят на изговорените минути, а 11,80 лв. е задължителният абонамент на месец, в който са включени 100 безплатни минути разговор.

22.А) Колко лева трябва да заплати Стефан за месец, в който е говорил 110 минути?

22.Б) От дадената формула изразете броя на изговорените минути t чрез месечната сметка S.

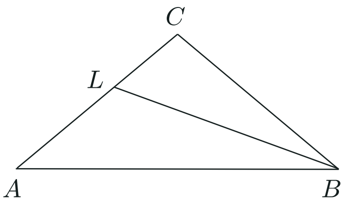
22.В) Препишете изреченията и ги допълнете с правилния текст така, че да отговорите на въпроса: Колко най-много минути над безплатните може да си позволи да говори Стефан през месец юни, ако за този месец е планирал месечната му сметка да е не повече от 20 лв.?

Неравенството с неизвестно t*, което показва, че месечната му сметка не надвишава планираната, е* ....

С точност до цяло число, Стефан може да си позволи най-много .... *минути над безплатните.*

При изчисляването на месечната му сметка числото 0,32 е цената на ....

23. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$. Точка L от страната е такава, че $ABL = 3\alpha$ и $CBL = 2\alpha$. Точка K от отсечката BL е такава, че $\sphericalangle BAK = \alpha$. Изразете чрез α ъглите на $\triangle AKL$. Симетралата на страната пресича отсечката BL в точка . Намерете стойността на α, за която $\triangle AKT \cong \triangle ACT$, и пресметнете мярката на $\sphericalangle AKC$ при тази стойност на α.



Указание. **На задача 24. напишете отговорите и необходимите обосновки.**

24. За числата $a = n$, $b = n + 1$ и $c = n + 2$, където n е цяло положително число, са изказани следните пет твърдения:

1. Средноаритметичното на числата a, b и е цяло число.
2. Сборът на две от тези числа е равен на третото.
3. Сборът на числата a, b и е равен на 120.
4. Най-малката стойност на израза $ab + bc - ac$ е равна на 1.
5. Стойността на $b^2 - ac$ е нечетно число.

За всяко от твърденията отговорете на въпроса „Вярно ли е твърдението?“, като изберете точно един от следните варианти за отговор:

(А) Вярно за всяка стойност на n.
(Б) Вярно за някои стойности на n.
(В) Няма стойност на n, за които да е вярно.

Запишете отговора си и се аргументирайте с подробни математически разсъждения за Вашия избор.

тест

за подготовка за държавен зрелостен изпит

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Изразът $25^{\frac{3}{2}} - 0{,}25$ е равен на:

А) 27,25 **Б)** 14,75 **В)** 124,75 **Г)** 26,25

2. Изразът $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6$ е равен на:

А) 1 **Б)** -5 **В)** 3 **Г)** -3

3. Стойността на израза $0{,}3^{\log^2_{0{,}3}} - 5$ е:

А) $-4{,}91$ **Б)** $-4{,}7$ **В)** -4 **Г)** -3

4. Интервалът, съдържащ коренът на уравнението $7^{5x+6} = 49$, е:

А) $[-4,\ -1)$ **Б)** $[-1,\ 0]$ **В)** $(0,\ 2)$ **Г)** $[5,\ 9]$

5. Интервалът, съдържащ корена на уравнението $\log_2(x+8) = \log_2 3 + \log_2 5$, е:

А) $(-8,\ -5]$ **Б)** $(-1,\ 3)$ **В)** $(3,\ 5)$ **Г)** $[5,\ 8]$

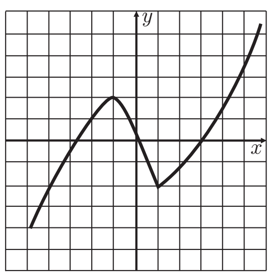
6. Дефиниционната област на функцията $y = \sqrt[6]{1 - \log_{0,7} x}$ е:

А) $[0{,}7,\ \infty)$ **Б)** $(0,\ 0{,}7]$ **В)** $(-\infty,\ 0{,}7]$ **Г)** $(0{,}7,\ \infty)$

7. Сборът на модата и медианата на данните 1, 12, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8 е равен на:

А) 4 **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 12

8. На чертежа е изобразена графиката на функцията $y = f(x)$. Коренът на уравнението $f(x) = 4$ принадлежи на интервала:



А) $(-6,\ -4)$ **Б)** $(5,\ 7)$

В) $(-2,\ 0)$ **Г)** $(0,\ 2)$

9. Най-малкото цяло решение на неравенството $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-4} \geqq 27^{15-x}$ е:

А) 12 **Б)** 21 **В)** 8 **Г)** -21

10. Най-малкият корен на уравнението $\left(\sqrt{x}\right)^2 = 5x^2 + 4x - 2$ е равен на:

А) -2 **Б)** 0 **В)** 2 **Г)** 0,4

11. Сумата на петия и десетия член на аритметична прогресия е равена на 110. Сумата на първите 14 члена на прогресията е:

А) 770 **Б)** 570 **В)** 690 **Г)** 750

12. Процентите, с които ще се увеличи произведението на две числа, ако едното от тях увеличим с 30%, а другата с 20%, са:

А) 50 **Б)** 44 **В)** 156 **Г)** 56

13. Изразът $\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{4}}.\sqrt{\sqrt{5} + 2}$ е равен на:

А) 9 **Б)** 1 **В)** 4 **Г)** $\sqrt{5}$

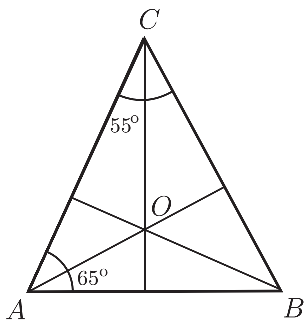
14. За триъгълника ABC е дадено, че $\sphericalangle BAC = 65^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 55^\circ$. Височините на триъгълника се пресичат в точката O. Ъгълът AOC е равен на:

А) 100°

Б) 105°

В) 110°

Г) 120°



15. Сейф има код от 7 цифри. Стефан забравил последните три. Най-големият брой опити, който Стефан трябва да направи за да е сигурен че ще отвори сейфа, е:

А) 210 **Б)** 120 **В)** 72 **Г)** 36

16. Даден е правоъгълния триъгълник ABC с хипотенуза $AB = c$ и катет $BC = a$. Височината CD $(D \in AB)$ е равна на:

А) $\dfrac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c}$ **Б)** $\dfrac{c\sqrt{c^2 - a^2}}{a}$ **В)** $\dfrac{a\sqrt{c^2 + a^2}}{c}$ **Г)** $\dfrac{c\sqrt{c^2 + a^2}}{a}$

17. Броят на правите, които могат да се прекарат през 10 точки, три от които лежат на една права, е:

А) 40 **Б)** 42 **В)** 43 **Г)** 45

18. Средноаритметичното на всеки три от четири числа е 2016. Средноаритметичното на тези 4 числа, е:

А) 806 **Б)** 1006 **В)** 2016 **Г)** 3016

19. Дадени са 5 отсечки с дължини 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm и 10 cm. Вероятността три произволно избрани точки измежду дадените да са страни на триъгълник, е:

А) $\dfrac{3}{10}$ **Б)** $\dfrac{2}{5}$ **В)** $\dfrac{3}{7}$ **Г)** $\dfrac{4}{5}$

20. В равнобедрен триъгълник медианата към бедрото е равна на основата на триъгълника. Косинусът на ъгъла при основата на триъгълника е равен на:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **Б)** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Да се реши уравнението $-8+(-3)+2+\dots+x=76$, където x е цяло положително число.

22. Да се реши неравенството $\dfrac{4^{\frac{5}{x-2}}}{11-x} \geqq 0$.

23. Да се реши уравнението $\dfrac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{x^2}=1$.

24. В трапеца $ABCD$ ($AB \| CD$) е построена отсечката EF успоредна на основите AB и CD ($E \in AD$, $F \in BC$). Ако $AB=12$, $CD=2$ и $EF=8$, да се намери отношението на лицето на трапеца $EFCD$ към лицето на трапеца $ABFE$.

25. В триъгълника ABC имаме $\sin \sphericalangle A=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ и $AC=\sqrt{11}$. Да се намери дължината на страната AB, ако е изместно, че $\sphericalangle ACB$ е тъп.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Да се намерят реалните стойности на параметъра a за които уравнението $x+\sqrt{x^2-x}=a$ НЯМА решение.

27. В триъгълника ABC височината BD е равна на 11,2, височината AE е равна на 12 и $BE:EC=5:9$. Да се намери дължината на страната AC.

28. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB=8$, $BC=15$, $CD=7$ и $\sphericalangle ABC=60^\circ$. Да се намери дължината на страната AD.

ОТГОВОРИ

1. В); **2.** Г); **3.** г); **4.** Б); **5.** Г); **6.** А); **7.** В); **8.** Б); **9.** Б); **10.** Г); **11.** А); **12.** Г); **13.** Б); **14.** Г); **15.** Б); **16.** А); **17.** В); **18.** В); **19.** А); **20.** Г); **21.** $x=27$; **22.** $x \in (-\infty,\ 2) \cup (2,\ 11)$; **23.** $x=-1$; **24.** 0,75; **25.** $AB=4$.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 21 ДО 28

21. Тъй като изразът в лявата страна на уравнението е аритметична прогресия с първи член $a_1 = -8$ и разлика $d = 5$, имаме

$$\frac{-16 + (n-1).5}{2} \cdot n = 76 \iff 5n^2 - 21n - 152 = 0,$$

откъдето намираме $n = 8$.

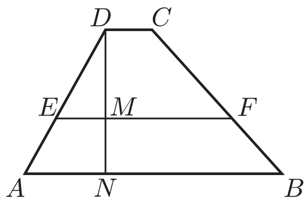
От $\dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 76$ получаваме $\dfrac{-8+x}{2} \cdot 8 = 76$, откъдето $x = 27$.

22. Тъй като $4^{\frac{5}{x-2}} > 0$ за всяко $x \neq 2$, то неравенството е равносилно на

$$\left| \begin{array}{l} x \neq 2 \\ 11 - x > 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x \neq 2 \\ x < 11. \end{array} \right.$$

Следователно $x \in (-\infty,\ 2) \cup (2,\ 11)$.

23. Даденото уравнение има смисъл за $x \in (-\infty,\ 0)$. Тогава го записваме във вида $\dfrac{-x-x}{x^2} = 1$, откъдето $-2x = x^2$, т.е. $x = -1$.



24. Построяваме височината DN ($N \in AB$), която пресича EF в точката M. Означаваме $DN = h$, $DM = h_1$ и $MN = h_2$. Тогава $h = h_1 + h_2$. Изразяваме лицето на трапеците $ABCD$, $EFCD$ и $ABFE$ и получаваме $S_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot h = \dfrac{12+2}{2} \cdot h = 7h$, $S_{EFCD} = \dfrac{EF + CD}{2} \cdot h_1 = \dfrac{8+2}{2} \cdot h_1 = 5h_1$ и

$$S_{ABFE} = \frac{AB + FE}{2} \cdot h_2 = \frac{12+8}{2} \cdot h_2 = 10h_2.$$

Понеже $S_{ABCD} = S_{ABEF} + S_{EFCD}$, то $7h = 5h_1 + 10h_2$. Но $h_1 + h_2 = h$ и намираме зависимостта $h_1 = 1{,}5h_2$. Търсеното отношение на лицата на трапеците е

$$\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = \frac{5h_1}{10h_2} = \frac{7{,}5h_2}{10h_2} = 0{,}75.$$

25. Построяваме $CD \perp AB$ ($D \in AB$). От $\triangle ADC$ намираме $CD = AC \sin \sphericalangle A = \dfrac{\sqrt{11}.\sqrt{22}}{11} = \sqrt{2}$ и $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 11 - 2 = 9$, откъдето $AD = 3$. От $\triangle CBD$ получаваме $CB = \dfrac{CD}{\sin \sphericalangle B} = \dfrac{\sqrt{2}.3}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$, $DB^2 = CB^2 - CD^2 = 3 - 2 = 1$. Тогава $AB = AD + DB = 3 + 1 = 4$.

26. За допустимите стойностти на x имаме

$$x+\sqrt{x^2-x}=a \iff \sqrt{x^2-x}=a-x \iff \left| \begin{array}{l} x^2-x=(a-x)^2 \\ a-x \geqq 0. \end{array} \right.$$

Всяко решение на даденото уравнение е решение на уравнението $(2a-1)x = a^2$, но не и обратното.

При $2a-1=0$, т.е. $a=\dfrac{1}{2}$ получаваме уравнението $0.x=\dfrac{1}{4}$, което нама решение. Следователно и даденото уравнение няма решение.

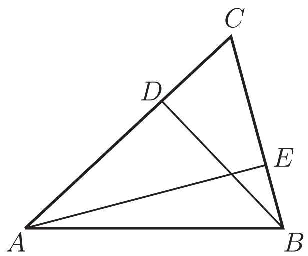
При $2a-1\neq 0$, т.е. $a\neq\dfrac{1}{2}$ получаваме $x=\dfrac{a^2}{2a-1}$. За да няма решение даденото уравнение, трябва $a-x<0$, т. е. $a-\dfrac{a^2}{2a-1}<0 \iff \dfrac{a(a-1)}{2a-1}<0$, откъдето $a\in(-\infty,\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$.

Следователно даденото уравнение няма решение за $a\in(-\infty,\ 0)\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

27. Означаваме $BE=5x$ и $CE=9x$. Понеже $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\dfrac{1}{2}BC.AE$, то

$$11{,}2.AC=14x.12,$$

откъдето $AC=15x$. Прилагаме питагоровата теорема за $\triangle AEC$ и получаваме $12^2+81x^2=225x^2$, откъдето $x=1$. Следователно $AC=15$.

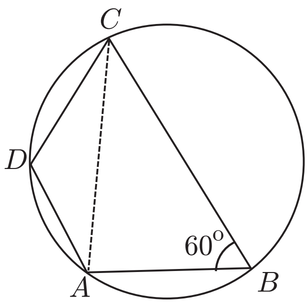


28. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и получаваме

$$AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.AC\cos 60^\circ \iff$$

$$AC^2=64+225-12-=169,$$

откъдето $AC=15$.



Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle ACD$ ($\sphericalangle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$) и получаваме

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD.CD.\cos 120^\circ \iff$$

$$13^2=AD^2+49+7.AD \iff AD^2+7AD-120=0,$$

откъдето $AD=8$ (защото $AD>0$).

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2015/16 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Да се докаже, че за неотрицателни числа a, b, c и d за които $a+b+c+d=1$ е изпълнено неравенството:

$$abc+bcd+cda+dab \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

Задача 2. За естествено число n с $\varphi(n)$ означаваме функцията на Ойлер (броят на естествените числа, по-малки от n и взаимно прости с него). Дадени са $l=\dfrac{\varphi(n)}{2}+1$ естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_l$, които са по-малки от n и са взаимно прости с n. Да се докаже, че за всяко естествено число $0<r<n$, което е взаимно просто с n, съществуват числа a_i и a_j, за които $a_ia_j - r$ се дели на n.

Задача 3. Петоъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Отсечките AC и BD се пресичат в точка K. Отсечката CE се допира до описаната около триъгълник ABK окръжност в точка N. Да се намери $\sphericalangle CNK$, ако $\sphericalangle ECD = 40^\circ$.

Срокът за представяне на решенията е 31.05.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 5/2015 г.

Задача 1. Да се докаже, че ако x, y и z са неотрицателни реални числа, за които $x+y+z=1$, то

$$0 \leqq xy+yz+zx-2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

Решение. Без ограничение можем да приемем, че $z < \frac{1}{2}$. Тогава $xy+yz+zx \geqq xy \geqq 2xyz$ и лявото неравенство е доказано. След заместване $x = 1-y-z$, дясната част става:

$$f(y) = y^2(2z-1)+y(2z-1)(z-1)+z(1-z) \leqq \frac{7}{27}.$$

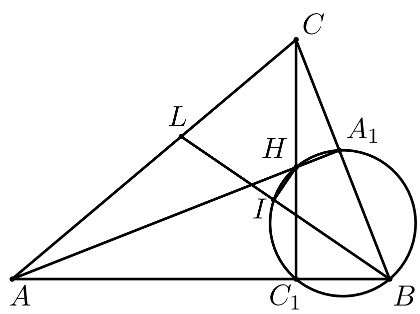
Тъй като $2z-1<0$, максимумът на $f(y)$ се достига при $y = \frac{1-z}{2}$. Освен това $0 \leqq \frac{1-z}{2} < 1$. Следователно трябва да докажем, че

$$f\left(\frac{1-z}{2}\right) \leqq \frac{7}{27}.$$

Това неравенство е еквивалентно на $54z^3-27^2+1 \geqq 0$ и може да се запише като $(3z-1)^2(6z+1) \geq 0$. Това неравенство е вярно за всяко $z \geqq 0$.

Задача 2. В остроъгълен триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I, правата BI пресича AC в точка L. Ако I лежи на ъглополовящата на острия ъгъл между височините AA_1, $A_1 \in BC$ и CC_1, $C_1 \in AB$, да се докаже, че $IA_1 = IC_1 = IL$.

Решение. Да означим с H ортоцентъра на $\triangle ABC$. Тъй като триъгълникът е остроъгълен, то $\sphericalangle A_1HC_1 = 180^\circ - \beta > 90^\circ$. Следователно $\sphericalangle AHC_1 < 90^\circ$ и точката I лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle AHC_1$. От $\sphericalangle AHC_1 = \beta$ следва, че $\sphericalangle IHC_1 = \frac{\beta}{2}$ и понеже BI е ъглополовяща, то точките I, C_1, B и H лежат на една окръжност.



Тъй като четириъгълникът HC_1BA_1 е вписан, получаваме, че точките I, C_1, B, A_1 и H лежат на една окръжност. В тази окръжност на равните ъгли $\sphericalangle C_1BI$ и A_1BI съответстват хордите IC_1 и IA_1, което означава, че $IC_1 = IA_1$. Понеже

$$\begin{aligned}\sphericalangle AC_1I + \sphericalangle ALI &= \sphericalangle IA_1B + \sphericalangle ALI = \alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma + \frac{1}{2}\beta = \\ &= \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,\end{aligned}$$

то четириъгълникът AC_1IL е вписан в окръжност. В този четириъгълник на хордите IC_1 и IL съответстват равните ъгли $\sphericalangle IAC_1$ и $\sphericalangle IAL$, т.е. $IC_1 = IL$ и следователно $IA_1 = IC_1 = IL$.

Задача 3. Да се намерят всички взаимнопрости естествени числа x и y, за които $x^3 - x = 2(y^3 - y)$.

Решение. Очевидно $x = y = 1$ е решение. Да допуснем, че $x > 1$ и $y > 1$. Тъй като $x > y$, то

$$\frac{x^3}{y^3} > \frac{x}{y}.\frac{x^2-1}{y^2-1} = 2,$$

откъдето $y < x < \sqrt[3]{2}y$. Понеже x и y са взаимно прости, получаваме, че x дели $2(y^2-1)$ и y дели $x^2 - 1$. Следователно xy дели

$$2(x^2-1)(y^2-1) = 2(x^2y^2 - 2xy - ((x-y)^2 - 1))),$$

т.е. xy дели $2((x-y)^2 - 1)$.

Ако $(x-y)^2 - 1 = 0$, то $x = y+1$ и получаваме решението $y = 4$, $x = 5$.

Ако $(x-y)^2 - 1 \neq 0$, то $(x-y)^2 - 1 \geqq \frac{1}{2}xy$. Това неравенство е невъзможно, защото

$$(x-y)^2 - 1 < ((\sqrt[3]{2} - 1)^2 - 1)^2 y^2 < \frac{y^2}{4} < \frac{xy}{4}.$$

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2014 г. и бр. 1, 2 от 2015 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2015 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

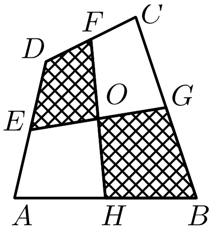
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

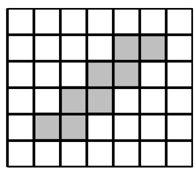
Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН,
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Точките E, F, G и H са средите съответно на AD, DC, CB и BA. Ако O е пресечната точка на EG и FH, да се докаже, че сборът от лицата на $AHOE$ и $CFOG$ е равен на сбора от лицата на $BGOH$ и $DFOE$.



Задача 2. На дъска 7×6 са поставени четири плочки домино, както е показано на чертежа. Най-много още колко плочки домино могат да се поставят на дъската, без да се застъпват? (Доминото е правоъгълник 1×2 и може да се постави хоризонтално или верикално.)



Задача 3. В кутия има два вида бонбони, ягодови и портокалови, които са опаковани еднакво. Известно че, че 25% от бонбоните са ягодови. Карлсон взел a% от бонбоните в кутията и се оказало, че b% от тях са портокалови (a и b са естествени числа). След това в кутията останали 1,5 пъти повече портокалови, отколкото ягодови бонбони. Колко процента от бонбоните е взел Карлсон? Да се намерят всички възможности.

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 5/2015 г.

Задача 1. Пипи, Томи и Аника планирали излет. Те взели една бутилка сок, две бутилки мляко и три бутилки вода. По колко различни начина те могат да си разпределят бутилките така, че всеки да носи по две бутилки?

Решение. Шестте бутилки ще разпределим в три чанти по две. Една бутилка сок, две бутилки мляко и три бутилки вода могат да се разпределят в три чанти по две по следните начини:

вода, вода	вода, сок	мляко, мляко
вода, вода	вода, мляко	сок, мляко
вода, мляко	вода, мляко	вода, сок

След това ще раздадем чантите на децата. Това може да стане по $3.2.1 = 6$ начина, ако и трите чанти са различни (както е в първия и във втория ред на таблицата) и по 3 начина, ако две чанти са еднакви (както е в третия ред). Следователно бутилките могат да се разпределят по $2.6 + 3 = 15$ начина.

Задача 2. Да се определи броят на естествените числа d, които са делители на $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$ такива, че най-големият общ делител на d и 10 е 5.

Решение. Числото d е от вида $d = 5.b$ или $d = 25.b$, където b е взаимнопрост с 10 делител на 10!. Следователно b е делител на $3^4.7$. Броят на делителите на това число е $5.2 = 10$. Следователно броят на възможните числа d е $2.10 = 20$.

Задача 3. За един ход от дадено естествено число n изваждаме неговия най-голям делител, по-малък n. С новото число извършваме същата операция и т.н. За колко хода от $n = 23^{23}$ ще получим числото 1?

Решение. Директно се проследява, че след 7 хода от числото 23^{23} се получава числото 23^{22}.

$$23^{23} \to 22.23^{22} \to 11.23^{22} \to 10.23^{22} \to 5.23^{22} \to 4.23^{22} \to 2.23^{22} \to 23^{22}.$$

Следователно с $7.23 = 161$ хода може да стигнем до $23^0 = 1$.

за по-малките задачи

Ваня Данова

4. клас

1. Да се намери двуцифрено число, което като се раздели на сбора от цифрите си, се получава частно 4 и остатък 3.

2. Ерик представил числото 27 като сбор на четири естествени числа по-големи от 3 като първото число е по-малко от второто, второто е по-малко от третото и третото е по-малко от четвъртото. Най-много колко различни представяния на числото 27 е получил Ерик?

3. Кристиян разполага с осемнадесет картички, на всяка от които е написано по едно от числата от 1 до 18. Той разделил тези картички на девет групи по две картички и намерил сбора на числата върху тях. Тогава с учудване забелязал, че и деветте сбора са равни на годините му умножени два пъти или на годините на по-малкото му братче също умножени по два пъти. (Например $2.2 = 4$, $3.3 = 9$ и т.н.). На колко години е Кристиян и на колко години е по-малкото му братче?

4. Сборът от годините на дядо, баща и син е 144. Възрастта на дядото е двуцифрено четно число. Ако се разменят цифрите на годината, показваща възрастта му, се получава възрастта на бащата. Възрастта на сина пък е равна на сбора от цифрите на годините на бащата. На колко години е дядото?

5. клас

5. Двуцифрено число, умножено по 4 е равно на сумата на цифрите му, умножена по 13. Ако пък към това число прибавим 36, ще получим число, записано със същите цифри в обратен ред. Намерете първоначалното число.

6. Иво подреди числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в редица, като спази следните условия:

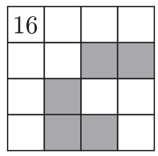
1. Сумата на 1 и 2 и всички числа между тях е 9;
2. Сумата на 2 и 3 и всички числа между тях е 19;
3. Сумата на 3 и 4 и всички числа между тях е 45;
4. Сумата на 4 и 5 и всички числа между тях е 18.

Така Иво получи едно деветцифрено число. Кое е то?

7. Даниела казала на майка си: „Ако разменя двете цифри на числото, показващо моята възраст, ще получа число, което е твоята възраст“. Майка ѝ отговорила: „Утре е моят рожден ден, но не е твоят и аз ще стана на два пъти повече години от твоите“. Намерете възрастта на Даниела.

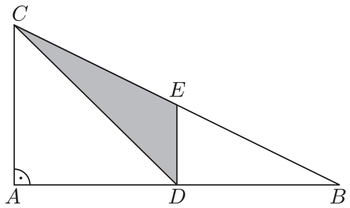
8. Намерете броя на всички правилни дроби, на които числителят и знаменателят са взаимно прости числа и имат сума 333.

6. клас



9. Галина постави числото 16 в горното ляво квадратче на един по-голям квадрат 4×4. Останалите петнадесет квадратчета тя запълни с числата $1, 2, \ldots, 15$ така, че сумата на четирите числа във всеки ред, всяка колона и всеки диагонал да е една и съща. (Квадрат с такова свойство се нарича магически квадрат.) После Галина намери сумата от числата в затъмнените квадратчета. Коя е тази сума?

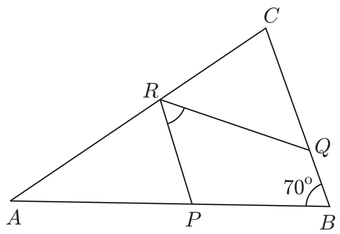
10. Намерете сбора от цифрите на числото $10^{2016} - 2016$.



11. В ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ и $AC = 5$ см. Точките D и E са съответно среди на страните AB и BC, а лицето на ΔCDE е 10 см^2. Намерете дължината в сантиметри на отсечката BD.

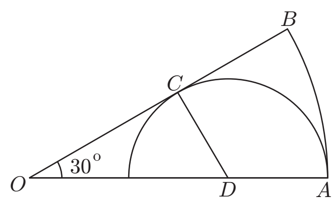
12. Сумата на седем последователни естествени числа е куб на естествено число, а сборът на трите средни числа е точен квадрат. Намерете възможно най-малката стойност на средното число.

7. клас



13. Точките P, Q и R са съответно върху страните AB, BC и CA на ΔABC, както е показано на чертежа. Освен това $AP = AR$ и $CQ = CR$. Ако е известно, че $\sphericalangle ABC = 70^\circ$, намерете мярката в градуси на $\sphericalangle PRQ$.

14. Един часовник показва времето от 00:00:00 до 23:59:59. Надежда погледнала часовника в 13:21:32 и забелязала, че първите три цифри са същите като последните три и то в същия ред. Тя помислила малко и съобразила, може би повече от 100 пъти това се случва за едно денонощие. Вярно ли е нейното предположение?

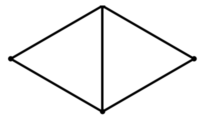


15. Точките A и B върху окръжност с център точка O са такива, че $\sphericalangle AOB = 30^\circ$, както е показано на чертежа. Точка D е от радиуса OA и полукръгът с център D се допира до радиуса OB в точка C. Ако лицето на полукръга е 18π, намерете лицето на сектора OAB.

за по-малките решения

на задачите от бр. 6/2015

76. От два равностранни триъгълника е сглобен ромб. Ако обиколката на ромба е 140 мм, да се намери обиколката на един триъгълник.



Решение. Страната на ромба е $140 : 4 = 35$ мм и обиколката на равностранния триъгълник е $35.3 = 105$ мм.

77. Пипи купила карамелови бонбони и 3 пъти повече шоколадови бонбони. Пипи, Томи и Аника си поделили бонбоните и всеки взел по 36 бонбона. Колко шоколадови бонбона купила Пипи?

Решение. Тъй като всеки от тримата получил по 36 бонбона, Пипи е купила общо $3.36 = 108$ бонбона. Ако всички купени карамелови бонбони сложим в една кутия, шоколадовите ще са три такива кутии. Щом 108 бонбона са в общо четири кутии, в една кутия има $108 : 4 = 27$ бонбона. Следователно Пипи купила $27.3 = 81$ шоколадови бонбона.

78. Ани и Боби си купили бисквити от два вида.

$\boxed{\heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}$ Ани: 2 лв. 45 ст.

$\boxed{\heartsuit\ \heartsuit\ \bigcirc}$ Боби: 85 ст.

Колко стотинки струва една бисквита с форма на сърце?

Решение. Покупката на Боби се съдържа два пъти в покупката на Ани.

Ани: $\boxed{\boxed{\heartsuit\ \heartsuit\ \bigcirc}\ \boxed{\heartsuit\ \heartsuit\ \bigcirc}\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}$

Следователно три кръгли бисквити струват $245 - 2.85 = 75$ ст. Оттук цената на кръгла бисквита е $75 : 3 = 25$ ст., а бисквита с форма на сърце струва $(85 - 25) : 2 = 30$ ст.

79. Трима приятели уловили общо 90 риби. В края на деня Петър дал на Васко половината от своите риби. След това Васко дал на Тошко половината от рибите, които имал в момента. Накрая Тошко дал 7 риби на Пешо и 13 риби на Васко. Така рибите били разпределени по равно между тримата. Колко риби уловил всеки от тях?

Решение. Да започнем от края, когато всеки от тримата е имал по $90 : 3 = 30$ риби. Преди раздаването на Тошко, той е имал $30 + 7 + 13 = 50$ риби, Васко имал $30 - 13 = 17$ риби, а Пешо имал $30 - 7 = 23$ риби. Тогава

Васко е останал със 17 риби, след като е дал на Тошко половината от своите риби. Преди това даване Васко е имал $2.17 = 34$ риби, а Тошко – $50 - 17 = 33$ риби. В началото Петър дал на Васко половината от своите риби и останал с 23 риби. Значи преди това даване Петър е имал $2.23 = 46$ риби, а Васко – $34 - 23 = 11$ риби. Получихме, че Петър уловил 46 риби, Васко – 11 риби и Тошко – 33 риби.

80. Да се намери неизвестното число x, ако

$$20,15 : 2,5 - 0,1.(x + 2,3) = 2,015.2.$$

Решение. Последователно получаваме $8,06 - 0,1.(x + 2,3) = 4,03$, откъдето $0,1.(x + 2,3) = 8,06 - 4,03$, т.е. $0,1.(x + 2,3) = 4,03$. Тогава $x + 2,3 = 4,03 : 0,1$, т.е. $x + 2,3 = 40,3$ и намираме $x = 40,3 - 2,3 = 38$.

81. Пабло, София и Миа имат по една кошница с ябълки. Пабло има 3 пъти повече ябълки от София, а София има 2 пъти повече ябълки от Миа. Пабло решил да даде част от ябълките си на София и Миа, така че тримата да имат равен брой ябълки. Каква част от ябълките в своята кошница Пабло е дал на София?

Решение. Ако Миа има x ябълки, то ябълките на София са $2x$, а на Пабло – $3.(2x) = 6x$. Общо ябълките са $x + 2x + 6x = 9x$, следователно накрая всеки е имал по $9x : 3 = 3x$ ябълки. Следователно София е получила $3x - 2x = x$ ябълки от всичките $6x$ ябълки на Пабло, т.е. той и е дал една шеста от своите ябълки.

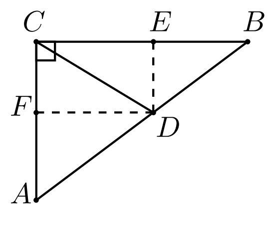
82. Две коли тръгнали едновременно една срещу друга от две селища. Едната се движела с 62,5 км/ч, а другата – с 11 км/ч по-бързо. Срещнали се след час и половина. Колко километра е разстоянието между двете селища? Приблизително за колко часа (с точност до десетите) ще измине това разстояние първата кола?

Решение. Разстоянието между селищата е $(62,5 + 73,5).1,5 = 204$ км. Първата кола ще измине това разстояние за $204 : 62,5 = 3,264 \approx 3,3$ часа.

83. Правоъгълният триъгълник ABC има катети $BC = 40$ см и $AC = 30$ см. На страната AB е избрана точка D, която е на разстояние 12 см от BC.

Попълнете текста.

Лицето на $\triangle ABC$ е равно на .... Лицето на $\triangle DBC$ е равно на .... Лицето на триъгълника ADC е разликата от лицата на ABC и DBC и е равно на .... Оттук височината към страната AC в $\triangle ADC$ е равна на .... Точката D е на разстояние ... см от AC.



Решение. Лицето на $\triangle ABC$ е равно на $30.40 : 2 = 600$ кв.см. Лицето на $\triangle DBC$ е равно на $12.40 : 2 = 240$ кв.см. Лицето на триъгълника ADC е разликата от лицата на ABC и DBC и е равно на 360 кв.см. Оттук височината към страната AC в $\triangle ADC$ е равна на $2.360 : 30 = 24$ см. Точката D е на разстояние 24 см от AC.

84. Да се намери сборът $a+b$, ако $25.5^a = 125^2$ и $(7^a.7^b)^2 = 49^7$.

Решение. Записваме първото равенство във вида $5^2.5^a = (5^3)^2$, откъдето $5^{2+a} = 5^6$ и получаваме $2+a=6$, т.е. $a=4$. Тогава второто равенство става $(7^4.7^b)^2 = (7^2)^7$, оттук $(7^{4+b})^2 = 7^{14}$, т.е. $7^{2(4+b)} = 7^{14}$ и получаваме $2(4+b) = 14$, откъдето $b=3$. Търсеният сбор е $4+3=7$.

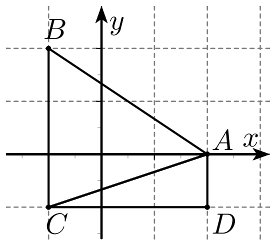
85. През 2000 г. Иван навърши $a.b$ години. Ако $2^a.5^b = 2000$, да се намери в коя година е роден Иван.

Решение. Тъй като $2^a.5^b = 2000 = 2^4.5^3$, то $a=4$ и $b=3$. Тогава през 2000 г. Иван е навършил $4.3 = 12$ години, т.е. е роден през 1988 г.

86. Намислих число, умножих го с -5 и към резултата прибавих сбора на целите числа, по-големи от $-4,1$ и по-малки от $1,4$. Полученото число разделих на $(-2)^3$, а от резулатата извадих реципрочното число на -2. Получих 6. Кое число съм намислил?

Решение. Сборът на целите числа, по-големи от $-4,1$ и по-малки от $1,4$, е $-4-3-2-1+1 = -9$, $(-2)^3 = -8$, а реципрочното число на -2 е $-0,5$. Намисленото число е $[(6-0,5).(-8)+9] : (-5) = 7$.

87. В координатна система Oxy са дадени точките $A(2;\ 0)$, $B(-1;\ 2)$ и $C(-1;\ -1)$. Ако точка D има абсциса, равна на ординатата на B, и ординатата, равна на абсцисата на B, да се намери колко процента от лицето на $ABCD$ е лицето на триъгълника ABD.



Решение. Отбелязваме точка $D(2;\ -1)$ и намираме $S_{ABD} = 3.1.0,5 = 1,5$ и $S_{ABCD} = 0,5.(3+1).3 = 6$. Следователно лицето на ABD е 25 от лицето на $ABCD$.

88. Даден е изразът $A = (3x-2)^2 + (4x-1)^2$. Да се намери:

а) числото k, при което A е тъждествено равен на $(5x+k)^2+1$;

б) стойността на x, при която A достига най-малката си стойност.

Решение. а) Имаме $A = 25x^2 - 20x + 5 = (5x-2)^2 + 1$, откъдето търсената стойност на k е -2.

б) Тъй като $A = (5x-2)^2+1$, най-малката стойност на A е 1 и се достига, когато $5x-2=0$, т.е. при $x = 0,4$.

89. Да се разложи на множители многочленът $B = 2xy - 3y + 6x - 9$ и да се намерят всички двойки цели числа x и y, при които $B = 11$.

Решение. Имаме $B = 2xy - 3y + 6x - 9 = (2x-3)(y+3)$. Ако x и y са цели числа, равенството $(2x-3)(y+3) = 11$ е възможно при:

1) $2x - 3 = 1$, $y + 3 = 11$, т.е. $x = 2$, $y = 8$;

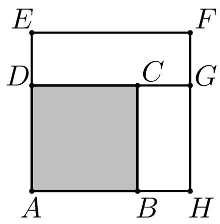
2) $2x - 3 = -1$, $y + 3 = -11$, т.е. $x = 1$, $y = -14$;

3) $2x - 3 = 11$, $y + 3 = 1$, т.е. $x = 7$, $y = -2$;

4) $2x - 3 = -11$, $y + 3 = -1$, т.е. $x = -4$, $y = -4$.

Следователно търсените двойки са $x = 2$, $y = 8$; $x = 1$, $y = -14$; $x = 7$, $y = -2$ и $x = -4$, $y = -4$.

90. На чертежа $ABCD$ е квадрат със страна x см, а $AHFE$ е квадрат със страна y см.



а) Да се изразят чрез x и y отсечката BH, периметърът на $BCGH$ и лицето на $DEFG$.

б) Да се намерят x и y, ако обиколката на $BCGH$ е 8 дм, а лицето на $DEFG$ е 10 кв.дм.

в) Ако лицето на правоъгълника $DEFG$ е 20 от лицето на квадрата $AHFE$, да се намери колко процента от лицето на квадрата $AHFE$ е лицето на $ABCD$.

Решение. а) Имаме $BH = y - x$, $P_{BCGH} = 2x + 2(y - x) = 2y$ и $S_{DEFG} = y(y - x)$.

б) Като използваме получените в а) изрази, получаваме равенствата $2y = 8$ и $y(y - x) = 10$. От първото намираме $y = 4$ дм и заместваме във второто: $4(4 - x) = 10$, т.е. $x = 1,5$ дм.

в) От равенството $y(y - x) = 20\ y^2$ следва, че $x = 80\ y$. Тогава лицето на квадрата $AHFE$ е равно на $x^2 = (0,8y)^2 = 0,64y^2$, т.е. на 64 от лицето на $ABCD$.

задачи задачи

8. клас

1. Да се докаже, че изразът

$$A = \left(\left(\frac{x^4 - xy^3}{x - y} + x^2 y \right) : (x^2 + xy) - y \right)^2 . \frac{1}{4x^2}$$

е равен на $\frac{1}{4}$.

2. Да се реши уравнението

$$\frac{1}{x^2 - 12x + 36} + \frac{12}{36 - x^2} = \frac{1}{x + 6}.$$

3. В правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) медианата CM ($M \in AB$) е равна на 10. Окръжността, вписана в триъгълника AMC се допира до AC в точката T. Да се намерят $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$, ако $AT : TB = 1 : 3$.

9. клас

4. За числата a и b е известно, че $a + b = -18$ и $a.b = 3$. Да се намери стойността на израза $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{|b|b^2}$.

5. Да се реши неравенството $\sqrt{8 + 2x - x^2} \leqq 2x + 1$.

6. Петоъгълникът $ABCDE$ е описан около окръжност. Допирната точка на страната BC с окръжността е означена с P. Да се намери дължината на отсечката BP, ако е известно, че дължините на всички страни на петоъгълника са цели числа и $AB = 1$ и $CD = 3$.

10. клас

7. Двама пешеходци тръгнали едновременно един срещу друг от градовете A и B и се срещнали след 50 минути, и без да спират продължили движенията си всеки в своята посока. За колко време всеки от пешеходците ще измине разстоянието между градовете A и B, ако е известно, че първият е изминал разстоянието от A до B за 4 часа по-малко от времето за което вторият е изминал разстоянието от B до A.

8. Да се реши уравнението $2^x.5^{\frac{x+2}{x}} = 100$.

9. Да се реши неравенството $\dfrac{6}{|x|} \geqq 7 + x$.

11. клас

10. Двама пешеходци тръгнали едновременно от градовете A и B един срещу друг и се срещнали след три часа. За колко време ще измине разстоянието AB пешеходецът от A, ако той изминал разстоянието от срещата до град B за 2,5 часа повече, от времето за което пешеходецът от B е изминал разстоянието от срещата им до град A?

11. Да се намери произведението на числата x и y, които удовлетворяват системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x+1}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+1}} = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right. .$$

12. В квадрата $ABCD$ точката M лежи на страната BC, а точката N – на страната AB. Отсечките AM и DN се пресичат в точката O. Да се намери лицето на квадрата, ако $DN = 4$, $AM = 3$ и синусът на $\sphericalangle DOA$ е равен на q.

12. клас

13. В два склада имало захар и сол. В първия склад захарта е 16 тона повече от солта. За един ден от първия склад взели $\dfrac{1}{m}$ част от захарта и $\dfrac{1}{3}$ част от солта, при това взетата захар е с 2 тона повече от солта.

Във втория склад солта е била 4 тона повече от захарта. За едни ден от втория склад взели също $\dfrac{1}{m}$ част от захарта и $\dfrac{1}{5}$ част от солта, при това взетата захар била 3 тона повече от взетата сол. Да се намери колко сол имало в първия и втория склад, ако е известно, че m е цяло число. За кои стойности на m задачата има решение?

14. Да се намерят всички двойки цели числа $(x,\ y)$, удовлетворяващи системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} y^3 - 8x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{array} \right. .$$

15. Основата на пирамидата $SABC$ е правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle BCA = 60^\circ$, катет $AB = 3$ и $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Височината на пирамидата е CS и $\sphericalangle SBC = 30^\circ$. Да се намери обемът на пирамидата.

решения решения

на задачите от бр. 6/2015 г.

76. Велосипедист изминал разстоянието от град A до град B и обратно с постоянна скорост. Втори велосипедист изминал разстоянието от град A до град B със скорост 3 km/h по-голяма от скоростта на първия велосипедист, а разстоянието от B до A – със скорост с 3 km/h по-малка от скоростта на първия велосипедист. Да се намери кой от велосипедистите е изминал целия път за по-малко време.

Решение. Означаваме скоростта на първия велосипедист с x km/h, а разстоянието от A до B с S km. Тогава скоростта на втория велосипедист от A до B е $x+3$ km/h, а от B до A – $x-3$ km/h.

Времето, през което е пътувал първият велосипедист, е $\dfrac{2S}{x}$, а времето на втория велосипедист е $\dfrac{S}{x+3}+\dfrac{S}{x-3}=\dfrac{2Sx}{x\left(x-\frac{9}{x}\right)}$. Тъй като $x>0$, то $\dfrac{2S}{x}<\dfrac{2S}{x-\frac{9}{x}}$. Следователно първият велосипедист е пътувал по-малко време.

77. Да се намери общо реално решение на уравнението $x^3-4x^2+x+6=0$ и неравенството $|5-2x|>(x+2)^2-x(x-4)$.

Решение. Разлагаме на множители израза отляво в първото уравнение и получаваме

$$x^3-4x^2+x+6=0 \iff x^3-x^2-2x-3x^2+3x+6=0 \iff$$

$$(x^2-x-2)(x-3) \iff (x+1)(x-2)(x-3)=0.$$

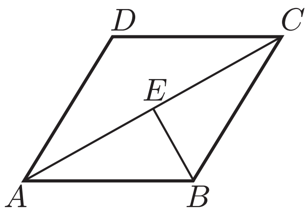
Тъй като множителите са нула при $x=-1$, $x=2$ и $x=3$, то тези числа са неговите решения.

Преобразуваме неравенството

$$|5-2x|>(x+2)^2-x(x-4) \iff |5-2x|>4 \iff 5-2x>4 \cup 5-2x<-4.$$

То има решенията $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{9}{2},\infty\right)$. Следователно уравнението и неравенството имат общо решение $x=-1$.

78. През върха B на успоредника $ABCD$ е прекаран перпендикулярът BE към диагонала AC ($E\in AC$). Да се определи видът на успоредника, ако $\triangle ABE\cong\triangle BEC$.



Решение. Тъй като $BE \perp AC$, то $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC$. Отсечката BE е обща за двата еднакви триъгълника. Следователно $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECB$, откъдето следва, че $AB = BC$ и успоредникът е ромб.

79. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{xy}{ay+bx} = c \\ \dfrac{xz}{az+cx} = b \\ \dfrac{yz}{bz+cy} = a \end{array}\right. \quad \text{при} \quad abc \neq 0 \quad \text{и} \quad xyz \neq 0.$$

Решение. Системата при $y \neq -\dfrac{b}{a}x$, $z \neq -\dfrac{c}{a}x$ и $z \neq -\dfrac{c}{b}y$ може да се преобразува така

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{xy}{ay+bx} = c \\ \dfrac{xz}{az+cx} = b \\ \dfrac{yz}{bz+cy} = a \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{a}. \end{array}\right.$$

Ако от първото уравнение извадим второто и прибавим третото уравнение, се получава $\dfrac{2b}{y} = \dfrac{ab-ac+bc}{abc}$ или $y = \dfrac{2ab^2c}{ab-ac+bc}$.

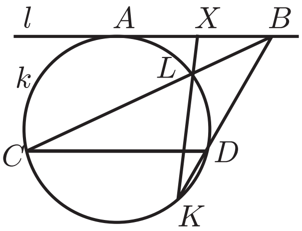
По аналогичен начин получаваме $x = \dfrac{2a^2bc}{ab+ac-bc}$ и $z = \dfrac{2abc^2}{ac+bc-ab}$.

80. Да се реши неравенството $\left|\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right| \geqq 1$, където $a > 0$ е реален параметър.

Решение. Решение на неравенството е всяко $x \neq \pm a$.

81. Правата l се допира до окръжност k в точката A. Нека CD е хорда на окръжността и е успоредна на l. Произволна точка B от l е съединена с точките C и D. Правите BC и BD пресичат k съответно в точките L и K. Да се докаже, че правата KL разполовява отсечката AB.

Решение. Означаваме с X пресечната точка на правите AB и KL. Триъгълниците XBL и XKB са подобни, защото $\sphericalangle KXB$ е общ, $\sphericalangle XBL = \sphericalangle LCD = \sphericalangle LKD$ $(\sphericalangle LCD = \sphericalangle LKD = \frac{\overset{\frown}{LD}}{2})$. Тогава $\frac{XL}{XB} = \frac{XB}{XK}$, откъдето $XB^2 = XL.XK$. Като вземем предвид, че $XA^2 = XL.XK$, заключаваме, че $XA = XB$, т.е. KL разполовява отсечката AB.



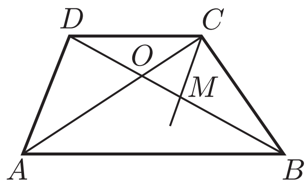
По аналогичен начин се разсъждава и при друго разположение на точките C и D.

82. Да се намери сумата
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right).$$

Решение. Записваме сумата във вида
$$a_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right).$$
Получаваме разлика от суми на геометрична прогресии. Тогава
$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2.3^n}.$$

83. Пресечната точка на диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ $(AB\|CD)$ е означена с O. Права, минаваща през върха C и успоредна на бедрото AD, пресича диагонала BD в точката M. Да се докаже, че ако $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$, то $BM = OD + 2OM$.

Решение. Нека $\frac{AB}{DC} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = \lambda$. От подобните триъгълници ABO и CDO следва, че $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} = \lambda$. Аналогично, от $\triangle ADO \sim \triangle CMO$ получаваме $\frac{DO}{MO} = \frac{AO}{CO} = \lambda$. Означаваме дължината на MO с x. Тогава $DO = \lambda MO = \lambda x$,



$BO = \lambda DO = \lambda^2 x$, така че $BM = BO - OM = (\lambda^2-1)x$, $DO + 2OM = (\lambda+2)x$.

За да решим задачата, достатъчно е да проверим, че за числото $\lambda = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ е изпълнено равенството $\lambda^2 - 1 = \lambda + 2$, т. е. че $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ е корен на квадратното уравнение $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$. Лесно се проверява, че $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ е корен на уравнението $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$.

84. За кои стойности на x съществува ъгъл α, за който е изпълнено равенството $\cos\alpha = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$?

Решение. Тъй като множеството от стойности на функция cos е интервалът $[-1,\ 1]$, достатъчно е да намерим стойностите на x, за които $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqq 1$. Това неравенство е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} -1 \leqq \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \leqq 1 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} \dfrac{x(2x-5)}{(x-2)(x+2)} \geqq 0 \\ \dfrac{5x-8}{(x-2)(x+2)} \geqq 0. \end{array}\right.$$

Оттук следва, че решенията на задачата са числата от множеството $\left[0,\ \dfrac{8}{5}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2},\ \infty\right)$.

85. Да се реши уравнението $\dfrac{\log_9\left(\frac{9}{x}\right)}{(\log_9 x)^2} = 2$.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение и получаваме

$$\frac{\log_9\left(\frac{9}{x}\right)}{(\log_9 x)^2} = 2 \iff \frac{\log_9 9 - \log_9 x}{(\log_9 x)^2} = 2 \iff$$

$$1 - \log_9 x = 2\,(\log_9 x)^2 \iff 2\,(\log_9 x)^2 + \log_9 x - 1 = 0.$$

Полагаме $\log_9 x = y$ и получаваме квадратното уравнение $2y^2 + y - 1 = 0$. Корените на това уравнение са $y_1 = \dfrac{1}{2}$ и $y_2 = -1$.

От $\log_9 x = \dfrac{1}{2}$ и $\log_9 x = -1$ намираме $x_1 = 3$ и $x_2 = \dfrac{1}{9}$.

86. Да се реши уравнението $2\sin 4x + 3\text{tg }2x = 5$.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение и получавамее

$$\frac{4\text{tg }2x}{1+\text{tg }^2 2x} + 3\text{tg }2x = 5 \iff$$

$$4\text{tg }2x + 3\text{tg }2x + 3\text{tg }^3 2x - 5 - 5\text{tg }^2 2x = 0 \iff$$

$$3\text{tg }^3 2x - 5\text{tg }^2 2x + 7\text{tg }2x - 5 = 0 \iff$$

$$3\text{tg }^3 2x - 3\text{tg }^2 2x - 2\text{tg }^2 2x + 2\text{tg }2x + 5\text{tg }2x - 5 = 0 \iff$$

$$3\text{tg }^2 2x(\text{tg }2x - 1) - 2\text{tg }2x(\text{tg }2x - 1) + 5(\text{tg }2x - 1) = 0 \iff$$

$$(\text{tg }2x - 1)(3\text{tg }^2 2x - 2\text{tg }2x + 5) = 0.$$

Тъй като $3\text{tg}\,^2 2x - 2\text{tg}\,2x + 5 \neq 0$, решенията на даденото уравнение се получават от $3\text{tg}\,^2 2x - 2\text{tg}\,2x + 5 \neq 0 - 1 = 0$, откъдето $2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

87. Да се реши уравнението $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$.

Решение. Уравнението има смисъл за всяко реално x. Всяко негово решение удовлетворява неравенството $\cos x \leqq 0$. Но при $\cos \leqq 0$ равенствата $\sqrt{1 + \sin x} = -\cos x$ и $(\sqrt{1 + \sin x})^2 = (-\cos x)^2$ са еквивалентни. Следователно е достатъчно да решим уравнението $1 + \sin x = \cos^2 x$ и да проверим за кои негови решения е вярно неравенството $\cos \leqq 0$. Записваме уравнението във вида $\sin x(1 + \sin x) = 0$. Решенията на това уравнение са $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = (4l + 3)\dfrac{\pi}{2}$, $l \in \mathbf{Z}$. За всяко цяло l имаме $\cos(4l + 3)\dfrac{\pi}{2} = 0$, а неравенството $\cos k\pi \leqq 0$ е изпълнено само при нечетни стойности на k. Тогава решенията на даденото уравнение са: $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = (4l + 3)\dfrac{\pi}{2}$, $l \in \mathbf{Z}$.

88. Да се докаже, че ако k е реален параметър и уравнението

$$x^2 - 4kx + 4k^2 + k - 2 = 0 \tag{1}$$

има различни реални корени, то уравнението

$$x^2 - 4kx - 5k^3 + 15k^2 - 3k + 2 = 0 \tag{2}$$

няма реални корени и обратно.

Решение. Нека (1) има различни реални корени. Дискриминантата му $D_1 > 0$, откъдето $k \in (-\infty, 2)$. Тогава, за да докажем, че уравнението (2) няма реални корени, е достатъчно да установим, че дискриминантата му D_2 приема отрицателна стойност за всяко $k \in (-\infty, 2)$. Но $D_2 = (k - 1)(5k^2 - k + 1)$. Тъй като квадратната функция $f(k) = 5k^2 - k + 1$ има положителен коефициент пред втората степен на аргумента и отрицателна дискриминанта, то тя приема положителна стойност за всяка стойност на $k \in (-\infty, 2)$ и при $k \in (-\infty, 2)$ множителят $k - 2 < 0$, то за тези стойности на k $D_2 < 0$. Следователно уравнението (2) няма реални корени.

Като използваме представянето на D_2, лесно се доказва обратното твърдение.

89. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x + y} \geqq 2 + x^2 \\ 2^{x+y-4} \leqq \dfrac{1 - (z - x)^2}{1 + (4 - y)^2}. \end{array}\right.$

Решение. От първото неравенство на системата следва $\sqrt{x + y} \geqq 2$, т. е. $x + y \geqq 4$.

За дясната страна на второто неравенство на системата имаме $\dfrac{1 - (z - x)^2}{1 + (4 - y)^2} \leqq 1$. Това означава, че $2^{x+y-4} \leqq 1$, т. е. $x + y \leqq 4$. Тогава от $x + y \geqq 4$ и $x + y \leqq 4$ следва, че $x + y = 4$.

От първото неравенство на системата получаваме $\sqrt{4} \geqq 2 + x^2$, т. е. $x = 0$ и $y = 4$.

От второто неравенство на системата имаме $1 \leqq \dfrac{1-z^2}{1}$, откъдето $z=0$.

Следователно решението на системата е $x = 0$, $y = 4$, $z = 0$.

90. Да се намери дефиниционната област на функцията

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2 - 11x - 6x^2}}.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията е множеството от решенията на системата неравенства

$$\left|\begin{array}{l} \cos x \geqq \dfrac{1}{2} \\ 2 - 11x - 6x^2 > 0. \end{array}\right.$$

Първото неравенство е изпълнено за всяко $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$, където k е произволно цяло число. Решенията на второто неравенство са числата от интервала $\left(-2,\ \dfrac{1}{6}\right)$. Интервалът от вида

$$\delta_k = \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

който има общи точки с интервала $\left(-2,\ \dfrac{1}{6}\right)$, е $\delta_0 = \left[-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right]$. Следователно търсената дефиниционна област е $D = \left[-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{6}\right)$.

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

IN MEMORIAM . . . 3

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ТЕМИ . . . 5

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА В ИМИ–БАН,
Петър Бойваленков . . . 12

ЛИНЕЙНО-РЕКУРЕНТНИ РЕДИЦИ И ТОЧНИ КВАДРАТИ,
Вълчо Милчев, Цветелина Карамфилова . . . 19

МЕТАПОЛЮС, *Невена Събева* . . . 28

ЗА ЕДНО ЗАБАВНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
ОТ ПРОГРАМАТА „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“
Боянка Савова, Ивайло Кортезов . . . 33

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ, *Д. Димитров* . . . 39

ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС, ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ . . . 48

ТЕСТ ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА . . 53

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ . . . 58

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 61

ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 63

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ . . . 65

ЗАДАЧИ . . . 69

РЕШЕНИЯ . . . 71

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70x100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 11.03.2016 г.
Печат „Силует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.