МАТЕМАТИКА

БРОЙ 5
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

В ръцете Ви е следваканционният 5. брой на списание *Математика.*

Тук ще намерите обширни репортажи от мястото на най-горещите математически събития през изминалото лято – от Международната олимпиада в Рио де Жанейро, Балканиадата в Охрид и Младежката балканиада във Варна, до септемврийския Фестивал на младите математици в Созопол.

С удоволствие ще отбележим не само успехите на българските ученици и студенти, но и желанието им да се включат като автори на материали за списанието. Част от решенията на състезателните задачи в този брой са написани от самите състезатели, конкурсните задачи са предложени от Кирил Бангачев, а в рубриката за ученическо творчество публикуваме два от прекрасните материали, които ни изпратихте.

Благодарни сме и на Станислав Димитров, един от авторите на предлагания вече и от Amazon UK бестселър „555 задачи по геометрия“ за статията му върху една от задачите от Младежката балканиада.

И накрая, сред летните спомени в рубриката *Математика на открито*, се промъкват тестове от изпити и задачи за подготовка, за да напомнят, че вече започна новата учебна година…

Пожелаваме Ви творческо вдъхновение и успешна учебна година!

58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков (ИМИ–БАН),
Емил Колев (ИМИ–БАН),
Александър Макелов (MIT)

От 13 до 23 юли в Рио де Жанейро, Бразилия, се проведе 58. Международна олимпиада по математика за ученици. Участваха 615 ученици от 111 страни. България беше представена от **Кирил Бангачев** (11. клас, СМГ, учител Румяна Караджова), **Виолета Найденова** (12. клас, СМГ, учител Стойчо Стоев), **Христо Папазов** (12 клас, АК София, учител Десислава Йорданова), **Константин Гаров** (11. клас, ППМГ Бургас, учител Динко Раднев), **Атанас Динев** (11. клас, ППМГ Бургас, учител Магдалена Янева) и **Иван Ганев** (12. клас, АК София, учител Борислава Кирилова). Ръководители на отбора бяха проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ–БАН) и проф. дмн. Емил Колев (ИМИ–БАН), а като научен консултант на отбора участва Александър Макелов (докторант в MIT). Подготовката на отбора беше проведена в Пампорово от 19 юни до 9 юли и беше подпомогната от Американска Фондация за България и Фондация Георги Чиликов.

Представянето на нашия отбор беше на ниво – 4 сребърни и 2 бронзови медала, 18-то място в неофициалното отборно класиране (4-то място в ЕС). Особено важно е изключителното постижение на Виолета Найденова, която спечели новоучредената специална награда на името на Мариам Мирзахани[1] като най-добре представила се ученичка от Европа.

[1]Проф. Мирзахани (1977–2017) е първата и засега единствена жена, носител на Фил-

Предлагаме Ви резултатите по задачи на българските участници и задачите с решения и кратки коментари. Резултатите на всички участници, заедно с интересна статистика, са на официалния сайт на международните олимпиади

`www.imo-official.org`.

Ето резултатите на нашия отбор по задачи.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Общо**	**Медал**
Кирил Бангачев	7	4	0	7	1	0	19	сребърен
Виолета Найденова	7	7	0	7	0	0	21	сребърен
Христо Папазов	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
Константин Гаров	5	7	0	7	0	0	19	сребърен
Атанас Динев	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
Иван Ганев	7	7	0	7	0	2	23	сребърен
Общо	40	31	0	42	1	2	116	

Струва си да отбележим мненията (потвърдени до голяма степен от статистиката[2]), че тазгодишната тема беше най-трудната, предлагана на МОМ досега. Например трета задача беше решена изцяло само от двама души, а средният резултат по нея (0.042 точки) е най-ниският досега на МОМ.

Задача 1. За всяко цяло число $a_0 > 1$ дефинираме редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ по следното правило:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число,} \\ a_n + 3 & \text{в противен случай,} \end{cases} \qquad \text{за всяко } n \geqslant 0.$$

Да се намерят всички стойности на a_0, за които съществува такова число A, че $a_n = A$ за безбройно много стойности на n.

Решение. Да отбележим, че ако някой член на редицата е сравним с 2 по модул 3, няма да има точни квадрати оттам нататък и редицата ще расте неограничено. В частност, всички $a_0 \equiv 2 \pmod 3$ не са решения.

Ако $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, ще докажем по индукция, че рано или късно в редицата ще има член, който е сравним с 2 по модул 3 и следователно това a_0 също не е решение.

дсова награда.

[2] `https://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=2017`.

Базата на индукцията е $a_0 = 4$ и е очевидна. Да предположим, че достигаме до член, сравним с 2 по модул 3 за всяко $a_0 = 3k + 1$, където $k < n + 1$, и нека $a_0 = 3(n + 1) + 1 \geq 7$. Нека k^2 е първият точен квадрат в редицата. Тъй като $(a_0 - 3)^2 > a_0$ (Проверете!), имаме $k^2 \leq (a_0 - 3)^2$, т.е. $k \leq a_0 - 3$, като при това $k \equiv 1, 2 \pmod 3$. Ако $k \equiv 2 \pmod 3$, няма какво да доказваме, а в противен случай твърдението следва от индукционното предположение.

Ще докажем по индукция, че всички $a_0 \equiv 0 \pmod 3$ са решения. Базата $a_0 = 3$ е очевидна. Нека е вярно за всички $a_0 < 3(n + 1)$, кратни на 3. Нека $a_0 = 3(n + 1)$ и k^2 е първият точен квадрат в редицата. Тогава $3 \mid k^2$ и следователно $3 \mid k$. След k^2 в редицата идва k. Ако k вече се е появявало в редицата, имаме исканата периодичност. В противен случай твърдението следва от индукционното предположение.

Окончателно, решенията са всички $a_0 \equiv 0 \pmod 3$.

Коментар. Нашият отбор представи 5 пълни решения на тази лесна задача и само наивна логическа грешка попречи на Константин да има 7 точки.

Задача 2. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такива, че за всеки две реални числа x и y е изпълнено равенството

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x + y) = f(xy).$$

Решение. Ще покажем, че единствените решения са

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 1 - x, \quad f(x) = x - 1.$$

Основната трудност в уравнението е, че всеки член в него е стойност на функцията f. Решението, показано тук, се стреми да открие начин да намери обратна функция на f, първо в $x = 0$, след това за цяло x, и накрая за всяко x.

Да забележим, че ако $f(0) = 0$, полагайки $x = 0$ в уравнението дава

$$f(f(0)f(y)) + f(y) = f(0) \implies f(y) = 0$$

за всяко y, и попадаме в решението $f \equiv 0$. Нека отсега нататък търсим решения $f \not\equiv 0$ (и да считаме, че $f(0) \neq 0$).

Сега да забележим, че можем да приравним членовете $f(x+y)$ и $f(xy)$ в уравнението като изберем x, y такива, че

$$x + y = xy.$$

За всяко $x \neq 1$, $y = \dfrac{x}{x-1}$ изпълнява горното равенство, откъдето

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \quad \text{за всяко } x \neq 1.$$

В частност, съществува x_0, за което $f(x_0) = 0$, например $x_0 = f(0)^2$. Но ако $x_0 \neq 1$ за някое такова x_0, от горното следва, че $f(0) = 0$, в противоречие със случая в който сме. Следователно

$$f(x) = 0 \iff x = 1$$

и в частност $f(0) = \pm 1$. Понеже ако f е решение, то и $-f$ е решение, без загуба на общност може да считаме, че $f(0) = -1$. Полагайки $x = 1$ в уравнението и използвайки намереното дотук, получаваме

$$f(y+1) = f(y) + 1,$$

откъдето по индукция

$$f(z) = z - 1 \quad \text{за всяко } z \in \mathbb{Z}.$$

Но имаме и нещо повече: понеже $f(x) = 0 \iff x = 1$, имаме

$$\begin{aligned} f(x) = z - 1 &\iff f(x - (z-1)) + z - 1 = z - 1 \\ &\iff f(x - (z-1)) = 0 \iff x - (z-1) = 1 \\ &\iff x = z \end{aligned}$$

за всяко $z \in \mathbb{Z}$. В частност, ако $f(z) = -1$, то $z = 0$.

Сега ще използваме горното наблюдение, за да покажем, че f е инективна. Нека $f(a) = f(b)$ за $a, b \in \mathbb{R}$. Използвайки $f(a) = f(b)$, ще направим такова полагане, че да получим $f(f(x)f(y)) = -1$, откъдето ще следва силното твърдение, че $f(x) = 0$ или $f(y) = 0$, т.е. $x = 1$ или $y = 1$. По-точно, нека $N \in \mathbb{N}$ е достатъчно голямо число така, че системата

$$\begin{aligned} a + N + 1 &= x + y \\ b + N &= xy \end{aligned}$$

да има решение. Полагайки това решение в уравнението, стигаме до

$$\begin{aligned} & f(f(x)f(y)) + f(a + N + 1) = f(b + N) \\ \implies & f(f(x)f(y)) + f(a) + N + 1 = f(b) + N \\ & \qquad \implies f(f(x)f(y)) = -1 \end{aligned}$$

и както обяснихме по-горе, $x = 1$ или $y = 1$, откъдето $a = b$ и f е инекция.

Има много начини да се довърши решението оттук нататък. Например, може да положим $x = 0$ в уравнението за $y = z, y = -f(z)$ и получаваме

$$f(-f(z)) + f(z) = -1$$
$$f(-f(-f(z))) + f(-f(z)) = -1$$

откъдето

$$f(-f(-f(z))) = f(z) \implies -f(-f(z)) = z$$

и връщайки се в първото от горните две уравнения получаваме

$$f(z) = -1 - f(-f(z)) = z - 1,$$

както искахме.

Коментар. Представихме се отлично на тази задача (макар, че можеше и още по-добре) и благодарение на това по резултати от първия ден делим 9-12 място в отборното класиране.

Задача 3. Ловец и невидим заек играят в равнината следната игра. Началната точка A_0 на заека и началната точка B_0 на ловеца съвпадат. Нека след $n-1$ рунда на играта заекът се намира в точка A_{n-1}, а ловецът се намира в точка B_{n-1}. Тогава в n-я рунд на играта последователно се изпълняват следните три действия:

(i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка A_n, за която разстоянието между A_{n-1} и A_n е точно 1.

(ii) Проследяващо устройство докладва някаква точка P_n на ловеца, като гарантира единствено това, че разстоянието между точките P_n и A_n е най-много 1.

(iii) Ловецът, оставайки видим, се придвижва до точка B_n, за която разстоянието между B_{n-1} и B_n е точно 1.

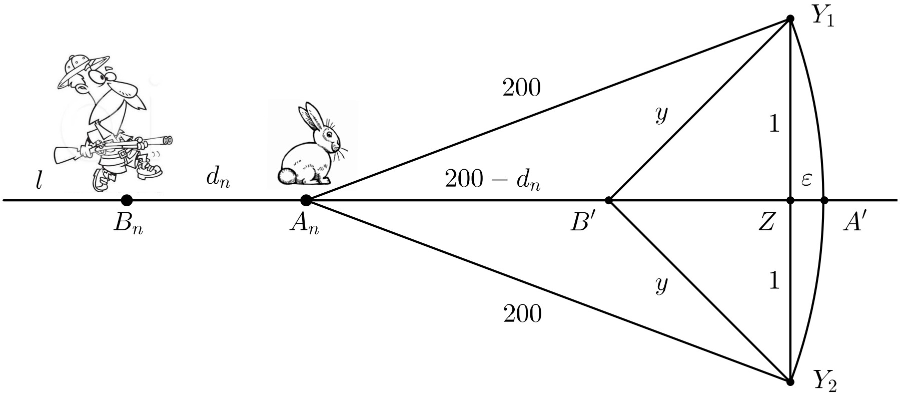
Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен, че след 10^9 рунда разстоянието между него и заека е най-много 100?

Решение. Ще докажем, че ловецът няма такава стратегия.

Нека d_n е разстоянието между заека и ловеца след n хода. Ако $d_n \geq 100$ за всяко $n < 10^9$, то заекът ще победи – достатъчно е да се отдалечава от ловеца по права линия и разстоянието между тях ще бъде винаги по-голямо от 100.

Ще покажем, че ако $d_n < 100$, то при всяка стратегия на ловеца заекът може да увеличава d_n^2 с $\dfrac{1}{2}$ на всеки 200 стъпки. По този начин d_n^2 ще достигне 10^6 за по-малко от $2.10^4.200 = 4.10^6 < 10^6$ рунда и заекът побеждава.

Нека ловецът е в точка B_n, а заекът е в A_n. Да допуснем, че заекът разкрива своята позиция на ловеца. Нека l е правата B_nA_n, а Y_1 и Y_2 са точките на разстояние 1 от l и 200 от A_n. Стратегията на заека е да избере една то точките Y_1 или Y_1 и да се движи към нея през следващите 200 скока. Тъй като заекът винаги е на разстояние не повече от 1 от l, проследяващото устройство може да посочва точки върху l и така ловецът да не знае коя от двете точки е избрана.



По този начин ловецът ще се придвижи на разстояние 200 по l до точка B'. Той няма по-добра алтернатива, тъй като за 200 рунда той не може да мине вдясно от B'; ако е над l, ще е по-далече от Y_2, ако е под l, ще е по-далече от Y_1. Така след 200 рунда разстоянието между него и заека е поне $y = B'Y_1$.

За да пресметнем y^2, нека Z е средата на Y_1Y_2, а точката $A' \in l$ е на разстояние 200 от A_n и $\varepsilon = Z'$; ясно е, че $A'B' = d_n$. Тогава

$$y^2 = 1 + B'Z^2 = 1 + (d_n - \varepsilon)^2,$$

където

$$\varepsilon = 200 - A_nZ = 200 - \sqrt{200^2 - 1} = \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

Освен това $\varepsilon^2 + 1 = 400\varepsilon$ и получаваме

$$y^2 = d_n^2 - 2d_n\varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = d_n^2 + \varepsilon(400 - 2d_n).$$

Тъй като $\varepsilon > \dfrac{1}{400}$ и допуснахме, че $d_n < 100$, от горното равенство следва, че

$$y^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Това означава, че при избраните показания на проследяващото устройство и произволни ходове на ловеца, заекът може да си осигури $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \dfrac{1}{2}$ и да победи.

Коментар. Само шест отбора (Австралия, Русия, Великобритания, Чехия, Ю. Корея и Беларус) имат ненулев резултат на тази задача. При това положение стратегията на нашите ученици да отделят повече време на втора задача се оказа правилна.

Задача 4. Нека R и S са различни точки от окръжността Ω, като RS не е диаметър. Правата ℓ се допира до Ω в точка R. Точка T е такава, че S е средата на отсечката RT. Точка J е избрана върху малката дъга RS на Ω така, че описаната около триъгълник JST окръжност Γ пресича ℓ в две различни точки. Нека A е пресечната точка на Γ и ℓ, която е по-близка до R. Правата AJ пресича Ω за втори път в точка K. Да се докаже, че правата KT се допира до окръжността Γ.

Решение. От окръжността Ω имаме, че $\sphericalangle KRS = \sphericalangle KJS$, и от окръжността Γ имаме, че $\sphericalangle KJS = \sphericalangle STA$, тъй като $ATSJ$ е вписан. От тези две равенства,

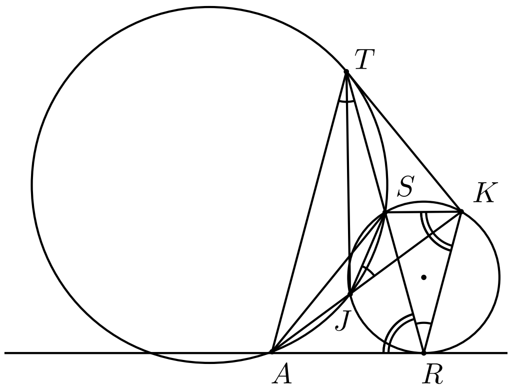
$$\sphericalangle KRS = \sphericalangle STA.$$

Понеже AR е допирателна към Ω, имаме и че $\sphericalangle RKS = \sphericalangle SRA$. Сега да разгледаме триъгълниците $\triangle RSK$ и $\triangle TAR$: от горните равенства на ъгли следва, че $\sphericalangle KRS = \sphericalangle RTA$ и $\sphericalangle TRA = \sphericalangle RKS$, откъдето

$$\triangle RSK \sim \triangle TAR.$$

Така получаваме, че

$$\frac{TA}{RS} = \frac{TR}{RK} \quad (*)$$



От друга страна, разглеждайки триъгълниците $\triangle ATS$ и $\triangle TRK$, забелязваме, че $\sphericalangle ATS = \sphericalangle TRK$ както вече видяхме, и

$$\frac{AT}{TS} = \frac{AT}{RS} = \frac{TR}{RK}$$

използвайки, че S е средата на RT и (*). Оттук

$$\triangle ATS \sim \triangle TRK.$$

В частност, $\sphericalangle TAS = \sphericalangle RTK$ откъдето TK е допирателна към Г.

Коментар. На тази задача нормално бяха получени пълен брой точки.

Задача 5. Дадено е естествено число $N \geqslant 2$. Група от $N(N+1)$ футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, са подредени в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата $N(N-1)$ играчи така, че за оставащата редица от $2N$ играчи да са изпълнени следните N условия:

(1) няма играч между двамата най-високи,

(2) няма играч между третия и четвъртия по височина,

$\vdots$

(N) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това винаги е възможно.

Решение. За разделим играчите на N групи от по $N+1$ човека. В първата група G_1 поставяме първите $N+1$ най-високи състезатели. Във втората група G_2 поставяме следващите $N+1$ най-високи и т.н.

Започваме да се движим последователно по състезателите в първоначалната редица отляво надясно. В момента, в който срещаме втори състезател от някоя от групите, спираме. Тъй като имаме N групи, това ще се случи най-късно при $(N+1)$-ия състезател. Да означим тези двама състезатели от една и съща група с A и B (като B е втори) и нека тяхната група е G_i. Запазваме A и B, като изваждаме от редицата всички от тази група и всички състезатели, които сме срещнали преди B. Единствено хората от група G_i могат да разделят A и B, а тези хора са извадени от редицата.

Оставаме с $N-1$ групи, като във всяка група има поне N състезатели (защото всяка група е загубила най-много един състезател).

Продължаваме по същия начин, като избираме следващите двама от една и съща група, като изваждаме всички от тази група и всички, посетени до момента.

Повтаряме този процес N пъти, като накрая оставаме с по двама от всяка група, т.е. с $2N$ човека. Хората от една и съща група са съседи, което показва, че условието на задачата е изпълнено.

Коментар. Тази комбинаторна задача ни изненада и само Кирил Бангачев записа положителен резултат. Горното решение (сканирай и изваждай), както и неговото ”дуално”, не изглеждат толкова трудни, но това е подвеждащо. Средният резултат по тази задача е 0.969 точки.

Задача 6. Наредената двойка (x, y) от цели числа е *примитивна*, ако най-големият общ делител на x и y е равен на 1. Дадено е крайно множество S от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число n и цели числа a_0, a_1, $\ldots$, a_n, такива, че за всяка двойка (x, y) от S е изпълнено равенството

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Решение. Ще извършим доказателството по индукция по $|S|$.

Базата ($|S| = 1$) следва директно от Теоремата на Безу. Нека за $|S| \leq m$ е изпълнено исканото.

Нека $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m), (x_{m+1}, y_{m+1})\}$ и да предположим, че един полином от индукционното допускане за множеството $S_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)\}$ е $g(x, y)$, като $\deg(g) = \ell$. Тогава забелязваме, че за S_1 върши работа и

$$f(x, y) = g(x, y)^M - C(xu + yv)^{M\ell - m} \prod_{i=1}^{m} (xy_i - yx_i),$$

където $M > 0$ и C са цели константи, а u, v са такива, че $ux_{m+1} + vy_{m+1} = 1$.

Ще докажем, че

$$\left(g(x_{m+1}, y_{m+1}), \prod_{i=1}^{m}(x_{m+1}y_i - y_{m+1}x_i)\right) = 1.$$

В противен случай получаваме, че съществува просто p, за което $p|g(x_{m+1}, y_{m+1})$ и

$$p|\prod_{i=1}^{m}(x_{m+1}y_1 - y_{m+1}x_1).$$

Но сравнения по модул p дават последователно

$$\begin{aligned} 0 &\equiv y_1^{\ell} g(x_{m+1}, y_{m+1}) \equiv g\left(y_1 x_{m+1}, y_1 y_{m+1}\right) \\ &\equiv g\left(x_1 y_{m+1}, y_1 x_{m+1}\right) \equiv y_{m+1}^{\ell} g(x_1, y_1) \equiv y_{m+1}^{\ell} \pmod{p}, \end{aligned}$$

откъдето $p|y_{m+1}$. Аналогични разсъждения за x_{m+1} водят до $p|x_{m+1}$, т.е. $p|(x_{m+1}, y_{m+1})$, което е противоречие.

Да изберем $M > m$ такова, че

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{m}(x_{m+1}y_i - y_{m+1}x_i)\right)|M.$$

Сега от

$$(g(x_{m+1}, y_{m+1}), \prod_{i=1}^{m}(x_{m+1}y_i - y_{m+1}x_i)) = 1$$

и теоремата на Ойлер можем да изберем C, такова че $f(x_{m+1}, y_{m+1}) = 1$. Но тогава f е необходимият полином и задачата е решена.

Коментар. И по тази задача очаквахме повече, но само Иван Ганев се ориентира към носеща точки идея.

ПОБЕДА В 34. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Драгомир Драгнев, Ивайло Кортезов, Олег Мушкаров

От 2 до 7 май 2017 г. в гр. Охрид, Република Македония, се проведе 34-тата Балканска олимпиада по математика. Българският отбор беше в състав **Виолета Найденова** (12 клас, СМГ), **Кирил Бангачев** (11 клас, СМГ), **Атанас Динев** (12 клас, ПМГ Бургас), **Иван Ганев** (12 клас, АК София), **Константин Гаров** (12 клас, ПМГ Бургас), **Борислав Антов** (10 клас, СМГ), д-р Драгомир Драгнев (ИМИ–БАН) – ръководител, доц. Ивайло Кортезов (ИМИ–БАН) – заместник-ръководител и чл.-кор. Олег Мушкаров (ИМИ–БАН) – научен консултант.

В БОМ участваха балканските страни Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния, Сърбия, Турция и Черна Гора, както и отбори-гости от Азербайджан, Великобритания, Италия, Казахстан, Катар, Киргизстан, Саудитска Арабия, Туркменистан и втори отбор на Македония.

Нашите състезатели спечелиха четири златни и два сребърни медала, откъсвайки се далеч напред в отборното класиране с с 226 точки; втори се класира отборът на Сърбия (208 точки), а трети – този на Румъния

(182 точки). Следва да се отбележи, че постигнатият от българския отбор резултат е само на 14 т. от теоретическия максимум, като дори тази разлика е по-малка от разликата между нас и втория отбор в класирането. Със златни медали са Виолета Найденова ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки – пълен сбор), Кирил Бангачев ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки – пълен сбор), Константин Гаров ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки – пълен сбор) и Атанас Динев ($10 + 10 + 10 + 9 = 39$ точки), а сребърни медали получиха Иван Ганев ($10 + 10 + 10 + 4 = 34$ точки) и Борислав Антов ($10 + 10 + 10 + 3 = 33$ точки).

Благодарим на Министерството на образованието и науката и на генералния спонсор на отбора – Американска фондация за България, които подпомогнаха нашето участие на състезанието. Благодарим на А. Динев, В. Найденова и К. Бангачев за оформянето на решенията съответно на задачи 2, 3 и 4 в настоящата статия. По-долу ви предлагаме условията и решенията на задачите от Балканиадата.

Задача 1. Да се намерят всички наредени двойки $(x; y)$ от цели положителни числа, за които

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

Решение. Нека $d = (x; y)$, $x = ad$, $y = bd$, $(a; b) = 1$. Получаваме

$$d^3(a^3 + b^3) = d^2(a^2 + 42ab + b^2)$$

$$d(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 + 42ab + b^2$$

$$(da + db - 1)(a^2 - ab + b^2) = 43ab.$$

Ако положим $c = da + db - 1$, то от $a^2c - abc + b^2c = 43ab$ следва $b|a^2c$, така че $b|c$ и аналогично $a|c$, откъдето $ab|c$. Нека $c = kab$; тогава

$$k(a^2 - ab + b^2) = 43.$$

Ако $a^2 - ab + b^2 = 1$, то $(a - b)^2 = 1 - ab \geq 0$, така че $a = b = 1$, $d + d - 1 = 43$, $d = 22$, $(x; y) = (22; 22)$.

Ако $a^2 - ab + b^2 = 43$, то без ограничение на общността $a \geq b$. Имаме $43 = a^2 - ab + b^2 \geq b^2$, така че $b \leq 6$.

При $b = 1$ имаме $a = 7$, $7d + d - 1 = 7$, $d = 1$, $(x; y) = (7; 1)$ или $(1; 7)$.

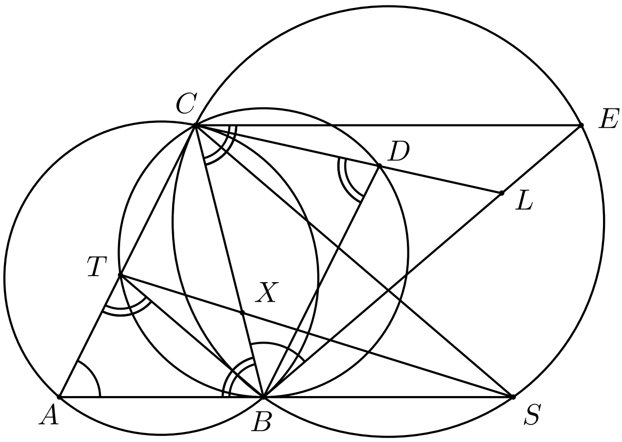
При $b \in \{2; 3; 4; 5\}$ не получаваме цели положителни a.

При $b = 6$ имаме $a = 7$, $7d + 6d - 1 = 42$ и d не е цяло.

Директно се проверява, че намерените двойки $(x; y) = (22; 22)$, $(7; 1)$ и $(1; 7)$ изпълняват уравнението.

Задача 2. Нека ABC е остроъгълен триъгълник, за който $AB < AC$ и нека Γ е описаната му окръжност. Допирателните към Γ в точките C и B са означени с t_C и t_B съответно и се пресичат в точка L. Правата през B, успоредна на AC, пресича t_C в точка D, а правата през C, успоредна на AB, пресича t_B в точка E. Описаната около триъгълник BDC окръжност пресича правата AC в точка T, която е между точките A и C, а описаната около триъгълника BEC окръжност пресича правата AB за втори път в точка S, като точка B е между точките A и S. Да се докаже, че правите ST, BC и AL се пресичат в една точка.

Решение. Щом LB е допирателна към Γ, имаме $\sphericalangle LBC = \sphericalangle CAB$. От $CE||AB$ следва $\sphericalangle ECB = \sphericalangle CBA$, така че $\sphericalangle CEB = \sphericalangle ACB$. Четириъгълникът $CBSE$ е вписан, така че $\sphericalangle CSB = \sphericalangle CEB = \sphericalangle ACB$.



Щом LC е допирателна към Γ, имаме $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CAB$. От $BD||AC$ следва $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$, така че $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABC$. Четириъгълникът $CDBT$ е вписан, следователно $\sphericalangle BTA = \sphericalangle CDB$ и

$$\sphericalangle TBA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC,$$

така че $TB||CS$. Сега CA допира описаната около $\triangle BCS$ окръжност и

$$AC^2 = AB.AS.$$

Нека TS пресича отсечката BC в точка X. От подобията на триъгълниците $\triangle BXT \sim \triangle CXS$ и $\triangle ABT \sim \triangle ASC$ следва

$$\frac{CX}{BX} = \frac{CS}{BT} = \frac{AB}{AS} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

така че AX е симедиана в $\triangle ABC$. Следователно правите ST, BC и AL се пресичат в една точка.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството от всички цели положителни числа. Намерете всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които $n + f(m)$ дели $f(n) + nf(m)$ за всички $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. По условие $n + f(m)|f(n) + nf(m)$. Също така

$$n + f(m)|n^2 + nf(m)$$

и следователно $n + f(m)|f(n) - n^2$.

Явно функцията $f(n) = n^2$ е решение. Да допуснем, че съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, за което $f(n_0) - n_0^2 \neq 0$ и следователно $f(n_0) - n_0^2$ има краен брой естествени делители. Имаме $n_0 + f(m)|f(n_0) - n_0^2$ за всяко естествено m и следователно f приема краен брой стойности. Тогава има такова c, за което съществуват безброй a_i, такива, че $f(a_i) = c$. Получаваме

$$a_i + f(a_i)|f(a_i) + a_i f(a_i),$$

т.е. $a_i + c|c + a_i c$, но и $a_i + c|a_i c + c^2$, следователно $a_i + c|c^2 - c$. Има безброй a_i и тогава $c^2 - c$ има безброй различни естествени делители, следователно $c^2 - c = 0$, т.е. $c = 1$.

Да допуснем, че съществува b, за което $f(b) > 1$. Тогава

$$a_i + f(b)|1 + a_i f(b),$$

но и $a_i + f(b)|a_i f(b) + f(b)^2$, т.е.

$$a_i + f(b)|f(b)^2 - 1.$$

Има безброй a_i, за които това е вярно, следователно $f(b)^2 - 1$ има безброй делители, т.е. $f(b)^2 - 1 = 0$, противоречие. Получаваме $f(n) = 1$ за всяко n, което също е решение на задачата.

Задача 4. Около кръгла маса седят $n > 2$ ученици; първоначално всеки има един бонбон. На всеки ход всеки ученик извършва една от следните две операции:

(1) дава един бонбон на съседа отляво или на съседа отдясно;

(2) дава част от бонбоните си (нула или повече) на съседа отляво, а останалите (ако има такива) на съседа отдясно.

Всеки ход се извършва едновременно от учениците. Едно разпределение на бонбоните се нарича *допустимо*, ако може да се получи след краен брой ходове. Да се намери броят на всички допустими разпределения. (Две допустими разпределения са различни, ако поне един ученик различен брой бонбони в тях.)

Решение. Първо ще докажем следната

Лема. За всеки двама ученици, които стоят през един е възможно да вземем бонбон от единия (ако той има поне един бонбон) и с два хода до го преместим при другия, така че да няма други промени.

Доказателство на лемата. Нека ученик A има поне един бонбон, B е съседът му през един по часовниковата стрелка и C е ученикът помежду им. На първия ход всеки дава всичките си бонбони на съседа си по часовниковата стрелка. На втория ход всеки освен C дава всичките си бонбони на съседа си срещу часовниковата стрелка, а C дава един бонбон на B и останалите си на A, с което се постига желаният ефект.

Да се върнем сега към задачата. Ще разгледаме два случая.

Случай 1: Ако n е нечетно, между всеки двама ученици има дъга с нечетен брой други ученици. Тогава съгласно лемата можем да преместим един бонбон от всеки един ученик до всеки друг без други промени. Следователно всички конфигурации са допустими; техният брой е $\binom{2n-1}{n}$.

Случай 2: Ако n е четно, да оцветим учениците шахматно в цветове 1 и 2. Винаги ще има ученик от всеки цвят с поне един бонбон, тъй като ако ученик в цвят 1 (2) има бонбон, той ще даде поне един бонбон на ученик в цвят 1 (1). Сега ще докажем, че учениците от цвят 1 могат да имат произволен брой бонбони от 1 до $n-1$.

Да допуснем противното, тоест има число $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, за което няма разпределение на учениците, при което тези с цвят 1 имат общо m бонбона. Нека k е най-малкото такова число (без ограничение може да приемем, че $k \leq \frac{n}{2}$, иначе разменяме цвят 1 и цвят 2). Тогава съществува разпределение с $k+1$ бонбона у децата в цвят 1. Съгласно лемата, тъй като между всеки двама едноцветни има нечетен брой ученици, е възможно да подредим така бонбоните, че A да има 1, B да има $n-k-1$ бонбона, C да има k, а останалите да нямат бонбони (A, B, C са съседни ученици в този ред по масата). Ако всеки даде по един бонбон на левия си съсед, достигаме до разпределение с k бонбона у децата в цвят 1, което е противоречие.

От горните разсъждения и лемата стигаме до извода, че *допустимите* разпределения са тези, при които и от двата цвята има поне по един бонбон. Но лесно се вижда, че ако всички бонбони са само при ученици от един цвят, има $\binom{\frac{3}{2}n-1}{n}$ разпределения. Следователно отговорът при четно n е

$$\binom{2n-1}{n} - 2\binom{\frac{3}{2}n-1}{n}.$$

21. МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА

Най-добрите млади математици от Балканите и от девет гостуващи страни се състезаваха на 21. Младежка Балканска олимпиада по математика (до 15,5 години), която се проведе от 24 до 29 юни в СОК *Камчия* край Варна.

Страните от Балканския полуостров – Албания, България, Босна и Херцеговина, Македония, Кипър, Гърция, Черна гора, Молдова, Румъния и Сърбия – изпратиха общо 57 ученици. Като гости в състезанието се включиха и 51 ученици от Франция, Азербайджан, Казахстан, Филипините, Саудитска Арабия, Таджикистан, Туркменистан, както и втори отбор на България и домакински отбор Бургас - Варна.

Темата за състезанието бе избрана от предложенията на страните-участници на заседание на Журито с председател **проф. Иван Тонов**. Състезанието се проведе на 26 юни в училище *Юрий Гагарин* в СОК Камчия, а работите на учениците бяха оценени чрез координация на 27 юни. В оценяването се включиха учители, специалисти от ИМИ – БАН и доскорошни наши олимпийци, които в момента са студенти в престижни университети.

България се представи с общо 18 участници в три отбора. Всички наши ученици завоюваха медали:

Златен медал: **Светлин Лалов** (СМГ);

Сребърен медал: **Стефан Хаджистойков** (СМГ), **Борислав Кирилов** (ПЧМГ), **Галин Тотев** (ППМГ, Бургас), **Мартин Стефанов** (СМГ), **Диян Димитров** (СМГ), **Мартин Копчев** (ППМГ, Гарбово), **Матей Петков** (НПМГ), **Георги Златинов** (ПМГ, Благоевград), **Михаела Гледачева** (ПЧМГ), **Марк Киричев** (МГ, Варна), **До Виет Кьонг** (СМГ);

Бронзов медал: **Димитър Николов** (МГ, Варна), **Георги Петков** (МГ, Варна), **Андрей Цочев** (ППМГ, Бургас), **Калоян Янчев** (МГ, Варна), **Веселина Иванова** (ППМГ, Бургас), **Марина Бояджиева** (ППМГ, Бургас).

Ръководители на нашите отбори бяха **Ирина Шаркова**, **Велислав Йончев**, **Стоян Ненков**, **Петя Тодорова**, **Иван Ангелов** и **Елена Киселова**.

В неофициалното отборно класиране първият отбор на България се нареди на второ място (след Румъния), вторият ни отбор зае почетното пето място, а отборът на Бургас и Варна е на десето място.

Предлагаме Ви състезателните задачи, придружени с коментари и решения.

Задача 1. Намерете всички множества от шест последователни естествени числа, такива, че произведението на две от числата, събрано с произведението на други две от тях, да е равно на произведението на останалите две числа.

Решение. Точно две от шестте последователни числа се делят на 3 и те трябва да са умножени едно с друго (в обратен случай две от произведенията ще се делят на 3, а третото няма да се дели).

Нека кратните на 3 числа са n и $n+3$. Две от останалите четири числа дават остатък 1 при деление на 3, а другите две дават остатък 2 при деление на 3. Както и да се групират по двойки тези четири числа, произведенията им ще дават един и същ остатък при деление на 3 (проверете!). Следователно в сбора на произведенията по двойки $n(n+3)$ е събираемо.

Освен това три от дадените числа са четни, три са нечетни и точно едно от числата n и $n+3$ е четно, т.е. произведението $n(n+3)$ е четно. Следователно две от останалите числа са четни и те са в различни двойки.

Възможни са следните случаи:

I. Числата са $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$.

Единственото произведение, което е по-голямо от $n(n+3)$, е $(n+1)(n+2)$ и равенството може да е само

$$(n-2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2).$$

Оттук $n=3$ и получаваме решението $1\cdot 2+3\cdot 6=4\cdot 5$.

II. Числата са $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$.

Числото $n+4$ може да е в лявата част на равенството само в произведение с $n-1$, т.е. при

$$(n+4)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2),$$

което няма цяло решение. Следователно $n+4$ е от дясната част на равенството и е умножено с едно от числата с различна от неговата четност, т.е. с $n-1$ или $n+1$.

При

$$(n+2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$$

намираме $n=3$ и решението е $2\cdot 5+3\cdot 6=4\cdot 7$.

При

$$(n+2)(n+1)+n(n+3)=(n-1)(n+4)$$

не получаваме решение.

III. Числата са n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$. Разглеждаме възможните случаи:

$$(n+1)(n+2)+n(n+3)=(n+4)(n+5),$$

откъдето $n=6$ и получаваме решението $7\cdot 8+6\cdot 9=10\cdot 11$;

$$(n+2)(n+5)+n(n+3)=(n+1)(n+4),$$

откъдето не получаваме естествено решение,

$$(n+1)(n+4)+n(n+3)=(n+2)(n+5),$$

откъдето $n=2$ (не е кратно на 3).

Получихме три решения: $1\cdot 2+3\cdot 6=4\cdot 5$, $2\cdot 5+3\cdot 6=4\cdot 7$, и $7\cdot 8+6\cdot 9=10\cdot 11$.

Коментар. Задачата позволява различни решения с разглеждане на случаи. Средният резултат на състезателите по тази най-лесна задача в темата е приблизително 7,6 точки.

Задача 2. Нека x, y, z са естествени числа такива, че $x\neq y\neq z\neq x$. Да се докаже, че

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)\geq 9xyz.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Неравенството е симетрично спрямо x, y и z, което позволява да въведем наредба. Нека $y=x+a$ и $z=y+b$, където a и b са естествени числа. Като заместим в даденото неравенство с $y=x+a$ и $z=x+a+b$, получаваме

$$2(a^2+ab+b^2-3)x+(2a+b)(a^2+ab-2)\geqq 0. \tag{1}$$

Тъй като $a\geqq 1$ и $b\geqq 1$, то $a^2+ab+b^2-3\geqq 0$ и $(2a+b)(a^2+ab-2)\geqq 0$. Следователно неравенството (1) е изпълнено при естествени x, a и b, като равенство се достига при $a=b=1$, т.е. когато x, y и z са последователни естествени числа.

Коментар. Това решение получихме с любезното съдействие на координаторите по задачата **Драгомир Драгнев** и **Станислав Харизанов**, които го определиха като *най-красиво* от предложените. Решението на авторите на задачата може да видите на сайта на състезанието jbmo2017.bg/index.html.

Задача 3. Нека триъгълникът ABC е остроъгълен и $AB\neq AC$. Около него е описана окръжност k с център O. Точката M е среда на BC, а D е такава точка от k, че $AD\perp BC$. Точката T е такава, че $BDCT$ е успоредник, а точката Q е в една полуравнина с A спрямо BC и $\sphericalangle BQM = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CQM = \sphericalangle CBA$. Правата AO пресича окръжността k за втори път в точката E, а описаната около триъгълника ETQ окръжност пресича k в точката $X \neq E$. Да се докаже, че точките A, M и X лежат на една права.

Коментар. Шестте най-интересни решения на тази задача ще намерите в статията на **Станислав Димитров** в този брой на списанието.

Задача 4. Даден е правилен $2n$-ъгълник $P = A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$, където $n > 1$ е естествено число. Казваме, че точката S от страна на P *се вижда* от точка E, външна за P, ако отсечката SE не съдържа друга точка от P, освен S. Оцветяваме страните (без върховете) на P в три цвята така, че:

- всяка страна е оцветена в точно един цвят;
- всеки цвят е използван поне веднъж;
- от всяка точка в равнината, външна за P, се виждат страни, оцветени в не повече от два различни цвята.

Намерете броя на различните оцветявания на P, които удовлетворяват горните условия. (Две оцветявания са различни, ако поне една от страните A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{2n}A_1$ е оцветена различно).

Решение. Ще докажем, че при $n = 2$ отговорът е 36; при $n = 3$ оцветяванията са 30 и при $n \geq 4$ са $6n$.

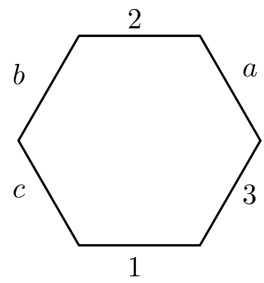
Първо ще отбележим, че за правилен $2n$-ъгълник с n последователни страни $s_1, s_2, \ldots, s_n$ съществува външна точка Q, от която се вижда цвета на всяка от отсечките s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тези n последователни страни се намират в една и съща полуравнина спрямо един от големите диагонали на $2n$-ъгълника и могат да се видят от достатъчно отдалечена точка върху симетралата на този диагонал.

Освен това, за всеки $n + 1$ последователни страни $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ на правилен $2n$-ъгълник не съществува външна точка Q, от която да се вижда цвета на всяка от отсечките s_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Това е така, тъй като страните s_1 и s_{n+1} са успоредни.

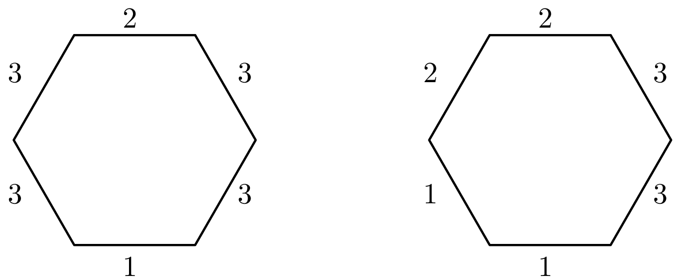
При $n = 2$ имаме квадрат. От външна точка се виждат най-много две страни на квадрата, следователно всяко оцветяване на страните му в три цвята изпълнява условието. Щом са използвани и трите цвята, две страни на квадрата са оцветени в един и същ цвят. Едноцветните страни може да изберем по $(4.3) : 2 = 6$ начина, при всеки от които може да оцветим по $3! = 6$ начина. Следователно различните оцветявания са $6.6 = 36$.

При $n = 3$ получаваме правилен шестоъгълник. Ако всяка двойка срещуположни страни са едноцветни, то трите двойки ще са оцветени в трите различни цвята. Но тогава всеки три поредни страни ще са оцветени в три различни цвята, противоречие. Следователно има поне една двойка срещуположни страни, които са различно оцветени.

Нека срещуположните разноцветни страни са оцветени в цвят 1 и 2. Някоя от останалите страни (без значение коя) е оцветена в цвят 3; нека имаме ситуацията на фиг. 1. Страната a може да е оцветена само в цвят 3 (в останалите случаи има три поредни страни в три различни цвята). По същата причина страната b е оцветена в цвят 2 или 3, страната c – в цвят 1 или 3, като ако една от страните b и c е оцветена в цвят 3, то и другата е в същия цвят. Двете възможни оцветявания са на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

В първия случай двете разноцветни срещуположни страни могат да се изберат по 3 начина и да се оцветят по $3.2 = 6$ начина; получаваме $3.6 = 18$ оцветявания.

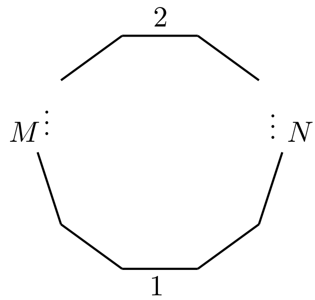
Във втория случай страните могат да се разделят на двойки едноцветни по 2 начина и след това да се оцветят по $3! = 6$ начина; получаваме $2.6 = 12$ оцветявания.

Общо оцветяванията на шестоъгълника са $18 + 12 = 30$.

Накрая да разгледаме $n \geqq 4$. Както и в предишния случай, има две срещуположни разноцветни страни. (Да допуснем, че всяка двойка срещуположни са едноцветни и да изберем n последователни страни. Те са оцветени в най-много два различни цвята, следователно и срещуположните им са оцветени в тези два цвята, т.е. третият цвят не се среща; противоречие.)

Нека срещуположните разноцветни страни са оцветени в цвят 1 и цвят 2. Те разделят многоъгълника на две начупени линии M и N с по $(n-1)$ отсечки (фиг. 3). Нека M е тази начупена линия, в която се среща цвят 3. Ако към M добавим страната в цвят 1, получаваме n последователни страни, в които се среща цвят 1 и цвят 3, следователно в M няма страна в цвят 2. Ако към M добавим страната в цвят 2, получаваме n последователни страни, в които се среща цвят 2 и цвят 3, следователно в M няма страна в цвят 1. Получихме, че всички страни в M са от цвят 3.

Ако някоя страна в N е оцветена в цвят 3, по същия начин ще получим, че всички страни в N са оцветени в цвят 3. Да допуснем, че в N се срещат само цветовете 1 и 2. Ако разгледаме n последователни страни, които включват страната с цвят 1, съседната и страна от M, оцветена в цвят 3, и $(n-2)$ последователни страни от N, получаваме, че тези $(n-2)$ последователни страни от N са оцветени в цвят 1. По същия начин имаме $(n-2)$ последователни страни от N, оцветени в цвят 2.



Фиг. 3

Но това е невъзможно, тъй като при $n \geq 4$ е в сила неравенството $2(n-2) > n-1$.

Това означава, че при $n \geq 4$ оцветяването се получава само като се оцветят две срещуположни страни в два различни цвята, а всички останали страни се оцветят в третия цвят. Двойката срещуположни страни може да се избере по n начина и да се оцвети в различни цветове по $3.2 = 6$ начина. Следователно оцветяванията са $6n$.

Коментар. Тази задача бе предложена от Кипър и по нея нито един участник не получи максималните 10 точки. От българските ученици *почти пълни* решения представиха Борислав Кирилов и Георги Златинов, чиито са и най-високите резултати по задачата. Предложеното решение е по идея на **Емил Колев**, а авторското е публикувано на сайта на състезанието jbmo2017.bg/index.html.

ТРЕТА ЗАДАЧА ОТ МБОМ'2017

Станислав Димитров

Предлагам на Вашето внимание пет решения на задача 3 от Младежката балканска олимпиада по математика, която се проведе тази година във Варна. Те представят различни варианти за използване на симетрия.

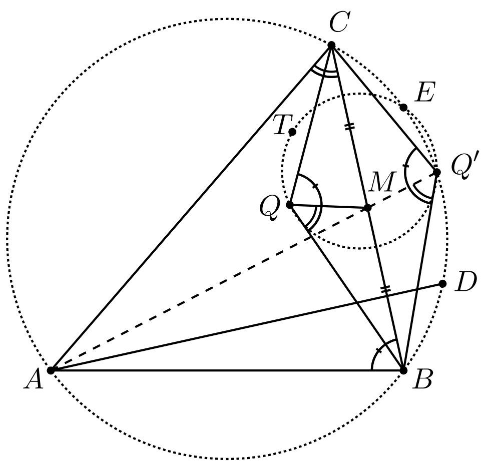
Задача 3. Нека триъгълникът ABC е остроъгълен и $AB \neq AC$. Около него е описана окръжност k с център O. Точката M е среда на BC, а D е такава точка от k, че $AD \perp BC$. Точката T е такава, че $BDCT$ е успоредник, а точката Q е в една полуравнина с A спрямо правата BC и $\sphericalangle BQM = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CQM = \sphericalangle CBA$. Правата AO пресича окръжността k за втори път в точката E, а описаната около триъгълника ETQ окръжност пресича k в точката $X \neq E$. Да се докаже, че точките A, M и X лежат на една права.

Коментар. Всички решения минават през факта, че точките E и T са симетрични относно BC. От равенството $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$ следва, че $\widehat{CE} = \widehat{DB}$, откъдето $CE = BD$ и $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ECB$. От успоредника $BDCT$ имаме $\sphericalangle DBC = \sphericalangle TCB$ и $CT = DB$. Тогава $CT = CE$ и $\sphericalangle BCT = \sphericalangle BCE$, откъдето точките E и T са симетрични относно BC.

Първо решение. Нека Q' е симетричната точка на Q относно BC. Понеже

$$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BQM + \sphericalangle CQM = \sphericalangle BCA + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle BAC,$$

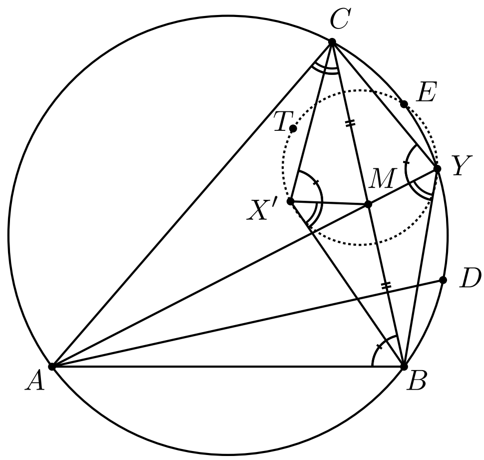
то $\sphericalangle BQ'C = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, откъдето $Q' \in k$.



От симетрията следва равенството $\sphericalangle CQM = \sphericalangle CQ'M = \sphericalangle CBA$. От друга страна $\sphericalangle CQ'A = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CQ'M$, откъдето получаваме, че Q', M и A са на една права. Следователно Q' е втората пресечна точка на правата AM и окръжността k.

От друга страна $QTEQ'$ е равнобедрен трапец, следователно е и вписан. Така Q' се явява пресечната точка на k с описаната окръжност около $\triangle ETQ$, която е различна от E. Следователно Q' съвпада с X и тогава точките A, M и X са колинеарни.

Второ решение. Да пресечем правата AM с k в точка Y. Нека X' е симетричната точка на Y относно BC. Твърдим, че X' съвпада с Q.

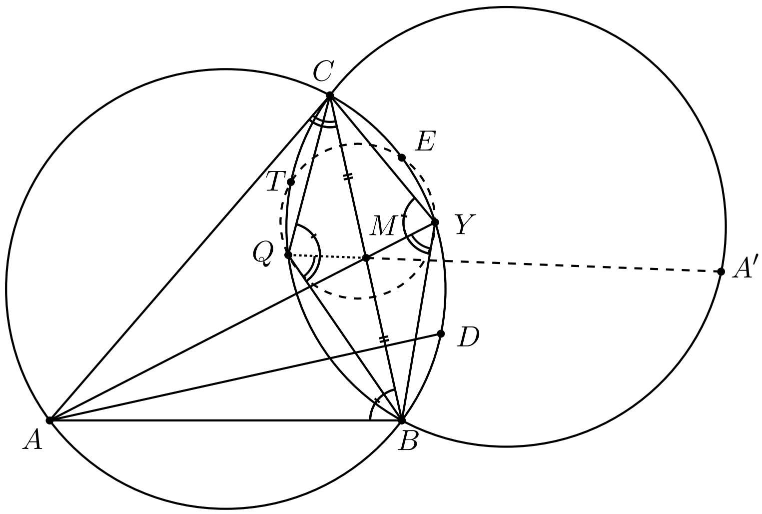


Да допуснем, че тези две точки не съвпадат. От симетрията имаме $\sphericalangle CX'M = \sphericalangle CYM = \sphericalangle CYA = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CQM$. От друга страна Q и X' лежат в една и съща полуравнина спрямо BC. От равенството $\sphericalangle CX'M = \sphericalangle CQM$ следва, че X', Q, M и C лежат на една окръжност. Аналогично X', Q, M и B лежат на една окръжност. Следователно B, C, X', Q и M лежат на една окръжност, но точките A, B и M са колинеарни, което е противоречие. Тогава Q и X' са симетрични относно BC, което означава, че $QTEY$ е равнобедрен трапец следователно е и вписан. Така Y е пресечната точка на k с описаната около $\triangle ETQ$ окръжност, различна от E. Последното означава, че Y съвпада с X.

Трето решение. Да пресечем правата AM с k в точка Y. Нека A' е симетричната точка на A относно BC. Както в първото решение получаваме $\sphericalangle BQC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, а от симетрията $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA'C$, откъдето следва, че $A'BQC$ е вписан и следователно

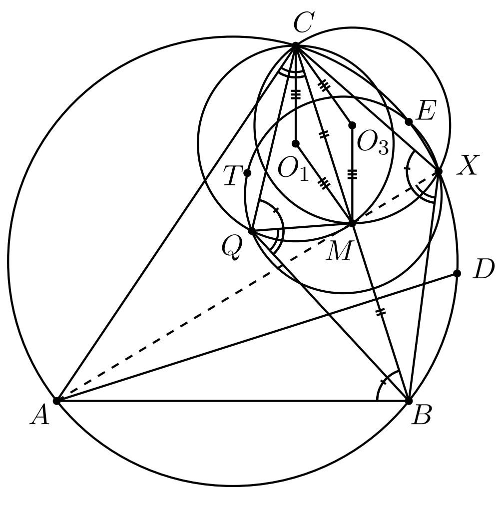
$$\sphericalangle CQA' = \sphericalangle CBA' = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CQM.$$

Така получаваме, че A', M и Q са колинеарни. Тогава правите AM и $A'M$ са симетрични относно правата BC.



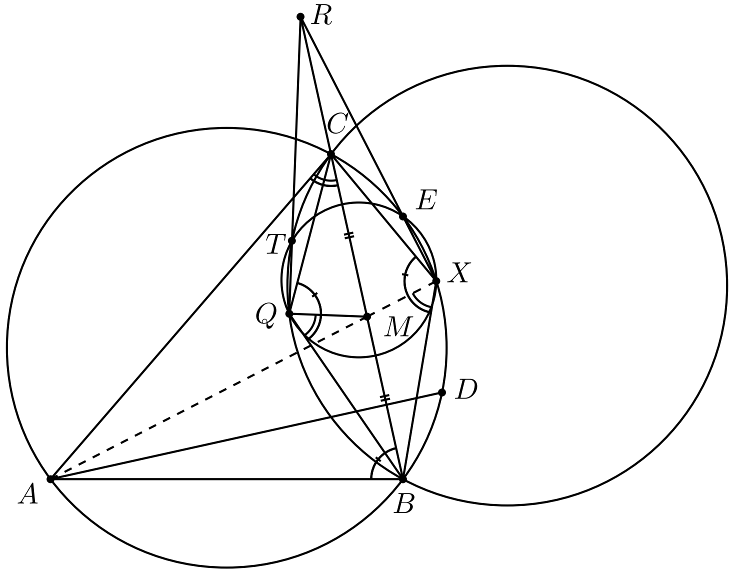
От друга страна описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle A'BC$ са симетрични. Тогава вторите пресечни точки на правите AM и $A'M$ съответно с описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle A'BC$ са симетрични относно правата BC. Оттук Q и Y са симетрични относно BC. Фигурата $QTEY$ е равнобедрен трапец и решението завършва по същия начин като второто.

Четвърто решение. Нека k_1, k_2, k_3 и k_4 са описаните окръжности около $\triangle CQM$, $\triangle BQM$, $\triangle CXM$ и $\triangle BXM$ съответно. Означаваме с O_1, O_2, O_3 и O_4 съответно центровете на тези окръжности.



Тъй като $\sphericalangle MXC = \sphericalangle AXC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle MQC$, получаваме, че $\sphericalangle MO_3C = 2 \sphericalangle MQC = \sphericalangle MO_1C$. Триъгълниците MO_1C и MO_3C са равнобедрени с обща основа и равни ъгли между бедрата. Следователно $\triangle MO_1C \cong \triangle MO_3C$. Тогава O_1 и O_3 са симетрични относно BC, а следователно k_1 и k_3 се симетрични относно BC. Аналогично k_2 и k_4 са симетрични относно BC. Обаче $k_1 \cap k_2 = \{M, Q\}$ и $k_3 \cap k_4 = \{M, X\}$. Тогава Q и X са симетрични относно BC. Тогава $\sphericalangle CXM = \sphericalangle CQM = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CXA$, откъдето A, M и X са колинеарни.

Пето решение. От третото решение имаме, че $\sphericalangle BQC = 180° - \sphericalangle BAC$. От друга страна $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BTC = 180° - \sphericalangle BAC$. Така $BQTC$ е вписан.



Прилагаме радикалните оси за окръжностите, описани около ABC, $BQTC$ и $QTEX$. Правите BC, TQ и EX се явяват радикални оси за тези окръжности, следователно те се пресичат в една точка R (ако тези прави са успоредни, то $AC = AB$). Тогава правите RT и RE са симетрични относно BC. От друга страна окръжностите, описани около $\triangle BTC$ и $\triangle BEC$ са симетрични относно BC. Тогава Q и X са симетрични относно BC. Следователно $\sphericalangle MXC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle AXC$, което означава, че A, M и X са на една права.

Ако намерите и шесто решение, ще се радвам да ми го изпратите на адреса на редакцията.

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

Петър Бойваленков, Емил Колев, Невена Събева

На 17 юни 2017 в Института по математика и информатика на БАН се проведе финалният (очен) кръг на конкурса на списание „Математика“ за малките. За участие в състезанието бяха поканени 33 ученици от 5, 6 и 7 клас, които се бяха представили най-добре в задочния етап на конкурса.

До очния кръг бяха допуснати следните ученици:

5 клас: Александра Ветова (Плевен), Кристина Апулчева (Плевен), Асен Николов (Кърджали), Анна - Русалия Димитрова (Плевен), Стойчо Стефанов (Казанлък), Теодор Патов (Казанлък), Айлин Маневска (Крън), Михаил Михов (Стара Загора), Георги Стратиев (Крън), Александра Дечева (Казанлък);

6 клас: Иван Тагарев (София), Георги Тончев (Плевен), Никола Емилов (Видин), Мирослава Мирчева (Казанлък), Ясмин Бехич Ердим (Плевен), Виктория Маринова (Казанлък), Радослав Попов (Видин), Виктор Витанов (Видин), Мирослав Минчев (Стара Загора), Станислав Матев (Плевен), Виктор Цанов (Мездра);

7 клас: Александър Проданов (Казанлък), Борислав Кирилов (София), Георги Игнатов (Враца), Мартин Димитров (София), Здравко Захариев (Казанлък), Теодор Танков (Стара Загора). teodor.tankov@gmail.com

Журито в състав проф. Петър Бойваленков, доц. Емил Колев и Невена Събева присъди следните награди за най-добро представяне на очния кръг.

За *пети клас* – първо място за **Георги Митков Стратиев**, второ място за **Михаил Петков Михов** и трето място за **Айлин Смаил Маневска**.

За *шести клас* – първо място за **Иван Тодоров Тагарев**, второ място за **Георги Станимиров Тончев**, трето място за **Мирослав Динков Минчев**.

За *седми клас* – първо място за **Мартин Димитров Димитров**, второ място за **Георги Цветелинов Игнатов**, трето място за **Теодор Живков Танков**.

Ето условията и кратки решения на задачите.

Задача 5.1. Дадени са 7 различни естествени числа, от които точно 5 се делят на 2, точно 5 се делят на 3 и точно 5 се делят на 5. Най-малко на колко е равно най-голямото от седемте числа?

Решение. Сред числата има поне $2.5 - 7 = 3$ числа, които се делят на 3 и на 5, т.е. на 15. Най-малките такива числа са 15, 30 и 45. Следователно най-голямото от седемте числа е равно най-малко на 45.

Лесно се намират 7 числа, които изпълняват условието и най-голямото от тях 45; например 6, 10, 12, 15, 20, 30, 45.

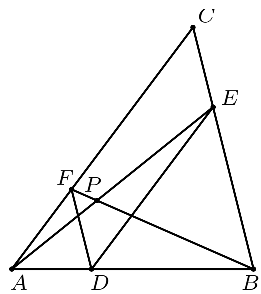
Задача 5.2. В редица са подредени черни и бели топки. Измежду всеки 2000 поредни топки има равен брой черни и бели, а измежду всеки 2002 поредни топки броят на черните не е равен на броя на белите. Най-много колко топки има в редицата?

Решение. Тъй като измежду топките с номер от 1 до 2000, а също измежду топките с номер от 2 до 2001 броят на черните е равен на броя на белите, то цветът на първата топка съвпада с цвета на 2001-та. По същия начин разбираме, че цветът на втората съвпада с цвета на 2002-та и т.н.

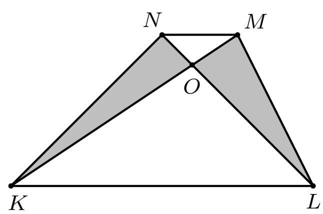
Да разгледаме първите 2002 топки; там броят на черните и белите не е един и същ. Но сред първите 2000 има равен брой черни и бели; следователно последните две топки (2001-та и 2002-та) трябва да са едноцветни. Да приемем, че са бели; следователно първата и втората също са бели.

Като приложим това разсъждение за топките от втората до 2003-тата, ще получим, че третата и 2003-тата топки са бели и т.н. Така разбираме, че редицата започва и завършва с бели топки; те са най-много 1000 (тъй като измежду първите 2000 топки има 1000 бели). Следователно топките са най-много $2000 + 1000 = 3000$ и са подредени първо 1000 бели, след това 1000 черни и накрая 1000 бели.

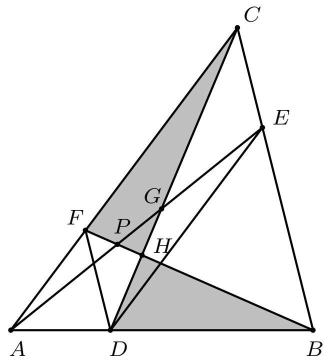
Задача 5.3. Даден е триъгълник ABC. На страната AB е отбелязана произволна точка D, а точките E от страната BC и F от страната CA са такива, че DE е успоредна на AC, а DF е успоредна на BC. Отсечките AE и BF се пресичат в точката P. Докажете, че лицето на триъгълника ABP е равно на лицето на четириъгълника $CEPF$.



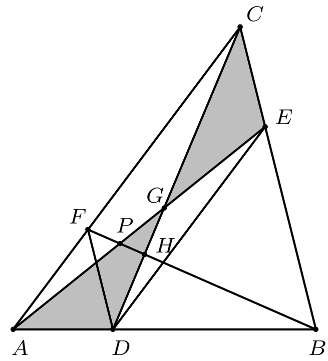
Решение. Ще използваме *правилото на пеперудата*, което гласи, че в трапец $KLMN$ с основи KL и MN и пресечна точка на диагоналите O лицата на триъгълниците KON и LOM са равни.



В трапеца $BCFD$ диагоналите DC и FB се пресичат в точката H и имаме равенството $S_{DBH} = S_{FCH}$. В трапеца $ADEC$ диагоналите AE и DC се пресичат в точката G и имаме $S_{ADG} = S_{CEG}$.



$S_{DBH} = S_{FCH}$



$S_{ADG} = S_{CEG}$

Събираме почленно двете равенства и получаваме

$$S_{DBH} + S_{ADG} = S_{FCH} + S_{CEG}.$$

В лявата част на равенството сборът на лицата на DBH и ADG може да се представи като сбор на лицата на ABP и PGH (вж. чертежа). Вдясно сборът на лицата на FCH и CEG може да се представи като сбор на лицата на $CEPF$ и PGH. Следователно

$$S_{ABP} + S_{PGH} = S_{CEPF} + S_{PGH},$$

откъдето следа равенството $S_{ABP} = S_{CEPF}$.

Задача 6.1. Група ученици пътували с влак: 80% от момчетата били правостоящи, а 80% от момичетата пътували седнали. Стоян пътувал седнал, а когато слязъл от влака на своята спирка, Мила успяла да седне на мястото му (други пътници не слизали и не се качвали на тази спирка). След това се оказало, че общият брой седящи момчета и правостоящи момичета е равен на 16% от общия брой правостоящи момчета и седящи момичета. Колко ученици пътували във влака в началото?

Решение. В началото пътниците във влака са:

	пътници	правостоящи	седнали
момчета	x	$0,8x$	$0,2x$
момичета	y	$0,2y$	$0,8y$

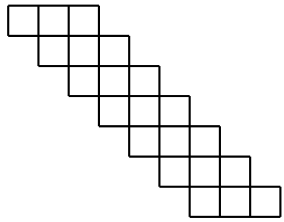
След като Стоян слязъл и Мила седнала на неговото място, ситуацията се променила:

	пътници	правостоящи	седнали
момчета	x	$0,8x$	$0,2x-1$
момичета	y	$0,2y-1$	$0,8y+1$

Получаваме равенството

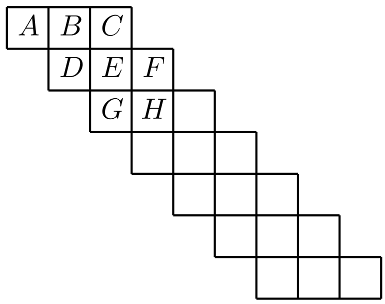
$$16\%(0,8x+0,8y+1)=0,2x-1+0,2y-1 \iff 0,072(x+y)=2,16,$$

откъдето намираме $x+y=30$.



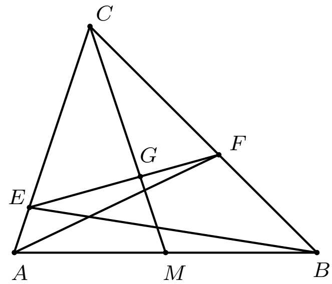
Задача 6.2. В квадратчетата от стълбичката трябва да се запишат естествените числа от 1 до 21 така, че числото във всяко квадратче да е по-голямо от числото вляво от него и от числото над него (ако има такива числа). По колко различни начина може да попълни стълбичката?

Решение. Ако се спускаме надолу по попълнената стълбичка, т.е. като се движим надясно или надолу, числото във всяко следващо квадратче ще е по-голямо от числото в предишното, т.е. числата по пътя са наредени в нарастващ ред.



Тъй като от квадратче A може да се спуснем до всяко от останалите квадратчета, то в A е записано най-малкото от числата, т.е. 1. По същия начин, в B е записано числото 2. От квадратчета C и D може да се спуснем към E, а оттам – към всяко от неразгледаните до момента квадратчета. Следователно в C и D са записани 3 и 4 (в някакъв ред), а в E е числото 5.

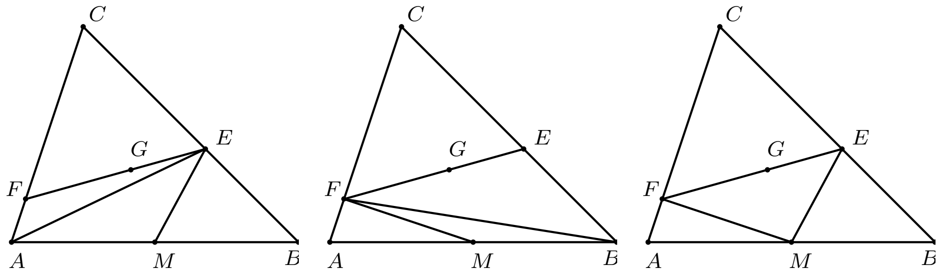
Аналогично, в F и G са 6 и 7, а в H е 8 и т.н. Получаваме, че разположението на 1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 и 21 е определено еднозначно, а числата от всяка от шестте двойки $(3,4)$, $(6,7)$, $(9,10)$, $(12,13)$, $(15,16)$, $(18,19)$ могат да се разположат до два начина. Следователно броят на различните попълвания е $2^6=64$.



Задача 6.3. Даден е триъгълник ABC. Точката M е среда на страната AB, а точката G е от отсечката CM и $CG:GM=2:1$. През G е построена права, която пресича страната AC в точка E, а страната BC – в точка F. Докажете, че лицето на триъгълника EFC е равно на сбора на лицата на триъгълниците AEF и BEF.

Решение. Ще използваме, че медианата разделя триъгълника на равнолицеви триъгълници. В $\triangle ABE$ с медиана EM имаме $S_{AME}=S_{BME}$, следователно

$$S_{ABEF}=S_{AEF}+2S_{BME}.$$



$$S_{ABEF} = S_{AEF} + 2S_{BME} = S_{BEF} + 2S_{AMF} = S_{MEF} + S_{BME} + S_{AMF}$$

По същия начин, в $\triangle ABF$ с медиана FM имаме $S_{AMF} = S_{BMF}$, значи

$$S_{ABEF} = S_{BEF} + 2S_{AMF}.$$

Като съберем двете равенства, получаваме

$$2S_{ABEF} = S_{AEF} + S_{BEF} + 2S_{BME} + 2S_{AMF}.$$

Като използваме, че $S_{ABEF} = S_{MEF} + S_{BME} + S_{AMF}$, от горното равенство получаваме

$$2(S_{MEF} + S_{BME} + S_{AMF}) = S_{AEF} + S_{BEF} + 2S_{BME} + 2S_{AMF},$$

т.е. $2S_{MEF} = S_{AEF} + S_{BEF}$.

Остава да забележим, че от $CG = 2GM$ следва, че $S_{CGF} = 2S_{MGF}$ и $S_{CGE} = 2S_{MGE}$. Тогава

$$S_{CEF} = S_{CGF} + S_{CGE} = 2S_{MGF} + 2S_{MGE} = 2S_{MEF} = S_{AEF} + S_{BEF}.$$

Задача 7.1. Сборът на целите числа a, b и c е равен на 0. Докажете, че числото

$$M = -(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab)$$

е точен квадрат. (M е точен квадрат, ако $M = X^2$ за някое цяло число X.)

Решение. Като използваме, че $a + b + c = 0$, т.е. $a = -b - c$, преобразуваме първия множител:

$$2a^2+bc = 2(-b-c)^2+bc = 2b^2+4bc+2c^2+bc = (b+2c)(2b+c) = (c-a)(b-a).$$

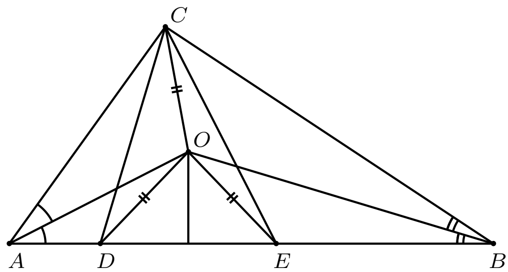
Аналогично $2b^2 + ca = (a - b)(c - b)$ и $2c^2 + ab = (a - c)(b - c)$, следователно

$$-M = [(a - b)(b - c)(c - a)]^2,$$

т.е. M е точен квадрат.

Задача 7.2. На най-голямата страна AB в триъгълника ABC са отбелязани точките E и D така, че $AE = AC$ и $BD = BC$. Симетралата на DE пресича ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ в точката O и $\sphericalangle EOD = 80^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Решение. В равнобедрения триъгълник ACE ъглополовящата на $\sphericalangle A$ е симетрала на CE. В равнобедрения триъгълник BCD ъглополовящата на $\sphericalangle B$ е симетрала на CD. Пресечната точка на тези две прави е пресечна точка на ъглополовящите в триъгълника ABC и пресечна точка на симетралите в триъгълника CDE; следователно тя е точно точка O.



Тъй като O е пресечната точка на симетралите на триъгълника ECD, то $EO = DO = CO$ и от равенството $\sphericalangle EOD = 80^\circ$ лесно следва, че $\sphericalangle ECD = 40^\circ$ (защо?).

От друга страна, $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AEC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC$ и от сбора на ъглите в триъгълника CDE намираме $\dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC + \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC = 40^\circ$, откъдето $\sphericalangle ACB = 100^\circ$.

Задача 7.3. Естественото число N наричаме **порядъчно**, ако съществуват естествени числа a, b и c със следните свойства:

- $a > b > c$;
- $N = a + b + c$;
- a се дели на b;
- b се дели на c.

Докажете, че множеството на непорядъчните естествени числа е крайно и намерете най-голямото непорядъчно число.

Решение. Първо да отбележим, че ако N е порядъчно число, то kN е порядъчно число за всяко естествено число k (ако за N съществуват числа a, b, c с желаните свойства, то $kN = ka + kb + kc$ и числата ka, kb, kc също притежават тези свойства).

Всяко нечетно естествено число $N = 2k + 1$, $N \geq 7$, е порядъчно, тъй като

$$N = 2(k-1) + 2 + 1.$$

Следователно и всяко число, което има по-голям или равен на 7 нечетен делител, е порядъчно.

Остава да разгледаме числата от вида 2^k, 3.2^k и 5.2^k. Тъй като $16 = 1 + 3 + 12$ е порядъчно, то при $k \geq 4$ числата и от трите вида са се делят на 16 и следователно са порядъчни.

При $k \leq 3$ разглеждаме числата от трите вида 2^k, 3.2^k и 5.2^k. Най-голямото от тях е 40 и е порядъчно, тъй като $40 = 1 + 3 + 36$. Следващото по големина число е 24. Ще покажем, че то е непорядъчно.

Да допуснем, че 24 е порядъчно, т.е. $24 = a + b + c$, като $b = lc$ и $a = kb = klc$, където $k > 1$ и $l > 1$ са естествени числа. Тогава

$$24 = c + lc + klc = c(1 + l + kl).$$

Тъй като $1 + l + kl \geqq 1 + 2 + 2.2 = 7$, то $c \leq 3$.

При $c = 1$ получаваме $1 + l + kl = 24$, т.е. $l(1 + k) = 23$, което е невъзможно, тъй като 23 е просто число и $l > 1$.

При $c = 2$ имаме $1 + l + kl = 12$, т.е. $l(1 + k) = 11$, което също е невъзможно.

При $c = 3$ получаваме $1 + l + kl = 8$, т.е. $l(1 + k) = 7$, невъзможно.

Следователно 24 е най-голямото непорядъчно число.

8. ФЕСТИВАЛ НА МЛАДИТЕ МАТЕМАТИЦИ

Емил Колев, Динко Раднев

От 3 до 10 септември в Созопол се проведе 8. Фестивал на младите математици. Този математически празник в края на лятото за поредна година събра приятелите на математиката в един от най-красивите градове по нашето Черноморие. Участваха рекорден брой отбори – 50, разделени в три възрастови групи: 6.-7. клас (21 отбора), 8.-9. клас (20 отбора) и 10.-12. клас (9 отбора). Във възрастовата група 8.-9. клас участва и отбор от Виетнам.

Както обикновено, математическите боеве се провеждат в 4 кръга и финал. На всеки кръг учениците получават списък с осем задачи, отборът се събира и има около 5 часа да ги реши. Боевете започват следобед, когато се провеждат директни срещи отбор срещу отбор. Състезателите излагат решенията си пред критичния поглед на противника и Журито.

В оспорвана битка победител във възрастовата група 6.-7. клас стана отборът Силистра (**Божидар Димитров, Иван Богданов, Даниел Шиков, Михаил Илиев, Николай Георгиев, Крум Савов**). Победител във възрастовата група 8.-9. клас е отборът на СМГ 9-3 (**Иван Георгиев, Мартин Стефанов, Къонг Виет До, Александър Недков, Никола Стайков, Калоян Фачиков**), а във възрастовата група 10.-12. клас победи отборът на Бургас + Хасково (**Константин Гаров, Атанас Динев, Орлин Кучумбов, Кристиан Минчев, Нури Хасан**).

В почивния ден на състезанието учениците имаха възможност да посетят аквапарка в село Равадиново, но повечето от тях предпочетоха да се включат в Иранската геометрична олимпиада или в отборното състезание „30 задачи на 30 езика“. По традиция, последното се проведе на плаж *Харманите*.

Бихме искали да споделим с Вас емоцията от това морско математическо преживяване, но тази по-скоро литературна задача е трудна за математици. Затова Ви предлагаме само някои от най-интересните задачи и техните решения.

Задачи за 5. – 6. клас

Задача 1. Високо в планината Алпи има 2017 хижи, част от които са в Швейцария, а друга част са във Франция. Между всеки две хижи има пътека. Всяка пътека е или френска, или швейцарска и по нея може да преминават само граждани на съответната страна. Да се докаже, че от двама човека – французин и швейцарец, поне единият може да посети всички хижи.

Решение. Да допуснем, че французинът Пиер не може да посети всички хижи. Нека предположим, че той може да посети n хижи и това са $X_1,\ X_2,\dots,X_n$. Нека $Y_1,\ Y_2,\dots,Y_m$ са хижите, които не могат да бъдат посетени от Пиер. Тогава всяка от пътеките X_iY_j е швейцарска и очевидно швейцарецът може да посети всички хижи.

Задача 2. Джуджетата Трор, Фрор и Грор получили по едно кюлче с тегло 1 кг. Всяко кюлче има различно съдържание на злато. Количеството злато в кюлчето на Трор се отнася към количеството злато в кюлчето на Фрор така, както 3 : 5. Ако се сплавят 500 грама от кюлчето на Трор и 200 грама от кюлчето на Фрор, получената сплав ще съдържа толкова злато, колкото има в 300 грама от кюлчето на Грор. В колко грама от кюлчето на Грор се съдържа толкова злато, колкото общо в двете кюлчета на Трор и Фрор?

Решение. Количеството злато в кюлчето на Трор, Фрор и Грор означаваме съответно с x, y, z. Имаме $x : y = 3 : 5$, т.е. $5x = 3y$. Освен това $0,5x + 0,2y = 0,3z$, т.е. $5x + 2y = 3z$. Като заместим и изключим x от второто равенство, получаваме $5y = 3z$. Оттук $x : y : z = 9 : 15 : 25$, т.е. $(x + y) : z = 24 : 25$. Това означава, че в $\frac{24}{25}$ от кюлчето на Грор се съдържа толкова злато, колкото общо в двете кюлчета на Трор и Фрор; това са $\frac{24}{25}.1000 = 960$ грама.

Задача 3. Възрастта на бабозавъра е трицифрено число, но тя често я бърка, като разместева цифрите и се представя с възраст, с 40% по-малка от истинската. Сред внукозаврите няма трима на една и съща възраст и сборът от годините им е равен на истинската възраст на бабозавъра. Най-малко на колко години е най-големият внукозавър?

Решение. Нека възрастта на бабозавъра е $\overline{abc}$. От условието следва, че след разместване на цифрите (възможни са 5 такива числа: $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$,) трябва да се получи числото 60% $\overline{abc} = \frac{3}{5}\ \overline{abc}$. От петте възможни диофантови уравнения само едно води до решение (проверете!) и намираме, че бабозавърът е на 180 години.

Тъй като $2(1 + 2 + \cdots + 12) = 156$, то най-големият внукозавър е поне на 13 години. Това е възможно, например, ако има по двама внукозаври на възраст от 2 до 13 включително.

Задача 4. В турнир по футбол 16 отбора играли всеки с всеки по един мач (за победа се дават 3 точки, за равен – 1 точка и за загуба – 0 точки). Имало само един отбор с 15 точки и само един с по-добър резултат. Колко са били равните мачове в турнира?

Решение. От мачовете помежду си всички отбори без победителя имат поне $15.14 = 210$ точки.

Ако вторият е победил първия, то той има 12 точки от мачовете с останалите 14 отбора, така че те са разделили помежду си поне 198 точки, което е абсурд, защото никой от тях няма повече от 14 точки.

Ако вторият е загубил от първия, то той има 15 точки от мачовете с останалите 14 отбора, така че е победил поне един от тях, а от останалите 13 отбора има 12 точки, следователно е загубил от поне един от тях. Тогава всички отбори без победителя имат поне 212 точки. Тогава от мачовете помежду си последните 14 отбора имат поне $212\breve{}15 = 197$ точки, което е абсурд, защото никой от тях няма повече от 14 точки.

Следователно вторият е завършил наравно с първия и има 14 точки от мачовете с останалите 14 отбора, така че те са разделили помежду си 196 точки. Това е възможно само ако всеки от тях има по 14 точки и никой от тях не е спечелил точки от мача си с първия. Тогава последните 15 отбора имат от мачовете помежду си общо 210 точки, което е възможно само ако всички мачове между тях са равни.

Окончателно, равни са всичките $16.15 : 2 = 120$ мача, с изключение на мачовете на първия с последните 14.

Задача 5. В първия кръг на състезание по математика за ученици от 5. от 6. клас били раздадени общо 80 медала, като медал получили 36% от петокласниците и 35% от шестокласниците. Средният резултат на петокласниците бил с 5% по-голям от средния резултат на шестокласниците, които пресметнали, че ако всеки от тях бе получил с 25 точки повече, биха събрали общо толкова точки, колкото петокласниците. Намерете средния резултат на всички участници в състезанието (с точност до десети).

Решение. Ако петокласничите са x, а шестокласниците – y, то

$$\frac{9}{25}x + \frac{7}{20}y = 80,$$

което означава, че x се дели на 25, а y се дели на 20. Ако $x = 25m$ и $y = 20n$ получаваме диофантовото уравнение $9m + 7n = 80$ с единствено решение $m = n = 5$. Следователно петокласниците са 125, а шестокласниците са 100.

Ако средният резултат на шестокласниците е S, то средният резултат на петокласниците е $1,05S$; шестокласниците са събрали общо $100S$ точки, а петокласниците са събрали $125.1,05S = 131,25$ точки. Разликата от $31,25S$ точки може да се компенсира, ако всеки шестокласник има с 25 точки повече, т.е. $31,25S = 25.100$. Оттук намираме, че средният резултат на шестокласниците е 80 точки, а на петокласниците е 84 точки. Средният резултат на всички участници е $\dfrac{125.84 + 100.80}{125 + 100}$, приблизително 82,2 точки.

Задача 6. Пипи, Томи и Аника имат общо 12 топчета. Всяко от топчетата е оцветено в един от n дадени цвята. Както и да разпределят топчетата поравно, някой ще има топчета от поне три цвята. Намерете най-малката възможна стойност на n.

Решение. Ще докажем, че n е най-малко 5. Ако има 8 бели топчета и по едно топче от още 4 цвята, то винаги у някого ще има най-много 2 бели топчета, а значи и топчета от поне три цвята.

Ако има не повече от 4 цвята, винаги можем да разпределим топчетата така, че всеки да има само два цвята: първо даваме на Пипи всички от цвят 1, на Томи от цвят 2 (ако има такива) и на Аника от цвят 3 (ако има такива). Ако някой има повече от 4 топчета, то друг има по-малко от 4; да допълним притежанието на втория до 4 топчета с топчета от първия (при това първият може да се окаже с по-малко от 4 топчета) и да пуснем втория да си ходи. Ако някой от останалите има повече от 4 топчета, то друг има по-малко от 4; да допълним притежанието на втория до 4 топчета с топчета от първия (при това първият може да се окаже с по-малко от 4 топчета) и да пуснем втория да си ходи. Ако в някакъв момент всички останат с по-малко от 4 топчета, то допълваме притежанието на всеки до 4 с топчета от четвъртия цвят.

Задачи за 8. – 9. клас

Задача 1. Нека $a_1 < a_2 < \cdots < a_{53}$ са естествени числа със следното свойство: сумата на всеки 27 от тях е по-голяма от сумата на останалите 26. Да се намери минималната възможна стойност на a_1.

Решение. (Оценка) Свойството е еквивалентно на

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{27} > a_{28} + \cdots + a_{53}.$$

Тъй като $a_{i+26} \geq a_{i+25}+1 \geq \cdots \geq a_i+26$ за $i = 1, 2, \ldots, 27$, то $a_{i+26}-a_i \geq 26$. Тогава

$$a_1 \geq 1 + \sum_{i=2}^{27}(a_{i+26} - a_i) \geq 1 + 26^2 = 677.$$

(Конструкция) Ако $a_1 = 677$, навсякъде в горните оценки трябва да има равенство. Това е възможно при произволно $a_2 > a_1$ и $a_{i+2} = a_2 + i$ за $i = 1, 2, \ldots, 51$.

Задача 2. Наредена четворка (x, y, z, t) от естествени числа, за които $x \leq y \leq z \leq t$ се нарича цветна, ако можем да оцветим всяко цяло число в един от цветовете червено, синьо, зелено или розово, като:

$*$ от всеки x последователни цели числа поне едно е оцветено в червено;

$*$ от всеки y последователни цели числа поне едно е оцветено в синьо;

$*$ от всеки z последователни цели числа поне едно е оцветено в зелено;

$*$ от всеки t последователни цели числа поне едно е оцветено в розово.

Да се намерят всички цветни четворки, за които $x = 2$.

Решение. Ще покажем, че $y \geq 6$ или $y \geq 4$ и $z \geq 8$.

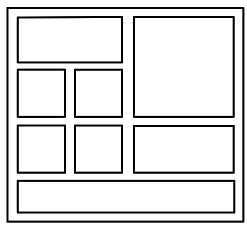
Ако $y \geq 6$, може да оцветим всички четни числа в червено, а всички нечетни последователно в синьо, зелено, розово и т.н.

Ако $y \geq 4$ и $z \geq 8$, може да оцветим всички четни числа в червено; в синьо числата, сравними с 1 по модул 4; в зелено числата, сравними с 3 по модул 8 и в розово числата, сравними с 7 по модул 8.

Ще докажем, че горните два случая са единствено възможните. Да допуснем, че четворката $(2, y, z, t)$ е цветна и да разгледаме едно розово число. Двете му съседни числа трябва да са червени. Следователно $y \geq 4$ и ако $y \geq 6$, попадаме в първия случай. Нека $y = 4$ или 5.

Тъй като имаме три числа ЧРЧ (червено-розово-червено), то поне от единия от двата края ще има синьо число (иначе $y > 5$). Без ограничение нека имаме СЧРЧ (синьо-червено-розово-червено). Тогава отдясно на синьото число трябва да има червено, т.е. получаваме ЧСЧРЧ. Между следващите две числа отдясно трябва да има поне едно С и поне едно Ч. Получихме 7 числа, между които няма зелено число, т.е. $z \geq 8$. Това означава, че ако $y = 4$ или 5, то $z \geq 8$, т.е. попадаме във втория случай.

Задача 3. Алеите в правоъгълен парк го обикалят и го разделят на градинки с правоъгълна форма. Примерен парк е показан на скицата.



С H означаваме броя на градинките. На скицата $H = 8$.

С V означаваме броя на Х-образните кръстовища, т.е. кръстовищата, в които се събират 4 алеи. На скицата те са 2.

С T означаваме броя на Т-образните кръстовища, т.е. кръстовищата, в които се събират 3 алеи. На скицата те са 10.

С S означаваме броя на правите алеи (които са непрекъснати и не могат да се продължат до по-дълги прави алеи). На скицата те са 9.

а) Ако $S = 20$, намерете стойностите, които може да приема T.

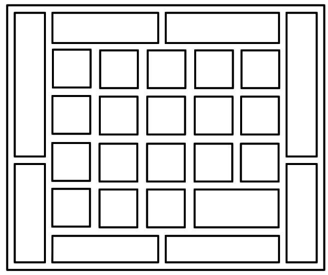
б) Ако $T = 30$ и $V = 11$, намерете възможните стойности на H, т.е. броя на градинките в парка.

Решение. а) Ще докажем, че за всеки такъв парк $2S = T + 8$. Краищата на правите алеи са или в един от четирите ъгли на парка, или в Т-образно кръстовище. Всеки ъгъл на парка е край на две алеи, а във всяко Т-образно кръстовище е краят на една алея. Като преброим по два начина краищата на алеите, получаваме равенството

$$2S = T + 8.$$

Следователно при $S = 20$ единствената възможна стойност е $T = 32$ (например при парк 1×17).

б) Ъглите на градинките са или в ъгъл на парка, или в кръстовище. Всеки ъгъл на парка е ъгъл на една градинка, във всяко Т-образно кръстовище има 2 ъгъла, а във всяко Х-образно кръстовищя – 4 ъгъла. Като преброим по два начина ъглите на градинките, получаваме равенството $4H = 4 + 2T + 4V$. Оттук при дадените стойности $T = 30$ и $V = 11$ намираме $H = 27$. Възможен пример на такъв парк е следният:



Задача 4. За всяко естествено число n определяме n' по следния начин:

- $1' = 0' = 0$;
- $p' = 1$ за всяко просто число p;
- Ако $n = a.b$, то $n' = a'.b + a.b'$.

Колко са по-малките от един милиард естествени числа n, за които $n = n'$?

Решение. По индукция доказваме, че за всяко просто число p и естествено число k е в сила равенството

$$(p^k)' = kp^{k-1}.$$

Оттук лесно следва, че степените на прости числа изпълняват условието $n = n'$ само когато са от вида p^p.

Ако n има повече от един прост делител, т.е. $n = p^k.m$, където $m > 1$ и $p \nmid n$, имаме $n' = kp^{k-1}m + p^k m'$. Условието $n = n'$ води до равенството

$$p^k m = kp^{k-1}m + p^k m',$$

откъдето следва, че p дели km, т.е. k. Но тогава $kp^{k-1}m \geqq p^k m$ и тъй като $m' > 0$ (защо?), равенството е невъзможно.

Търсените числа са четири: 2^2, 3^3, 5^5 и $7^7 = 823543$ (вече 10^{10} надхвърля 10 пъти един милиард.)

Конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2017 г. и бр. 1, 2 от 2018 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Аладин намерил 60 стари лампи, някои от които медни, а останалите – бронзови. Местният магьосник разменял 5 стари медни лампи за една нова бронзова лампа или 10 стари бронзови лампи за една нова медна лампа. Аладин започнал да разменя старите лампи за нови. Получените нови лампи, щом остареели, участвали в следващите размени. Накрая при Аладин останала само една лампа и тя била вълшебната медна лампа. Колко медни лампи намерил Аладин?

Задача 2. Джак Фароу раздал на девет от своите пирати златни монети така, че всеки двама получили различен брой монети. Те започнали да спорят дали монетите са разпределени справедливо, на което Джак отговорил по следния начин: *Ако изхвърля когото и от вас зад борда, ще мога да раздам неговите монети на останалите така, че те да имат по равен брой монети. Това ли искате да направя?*

Мъдрите думи на капитана не вразумили пиратите и се наложило той да отправи по-сериозна заплаха: *Ако изхвърля произволни двама от вас зад борда, ще мога да раздам техните монети на останалите така, че те да имат по равен брой монети.*

Няма сведения как е завършила тази история, но ако приемем, че Джак Фароу е казвал истината, най-малко колко монети е раздал той? (Посочете примерно разпределение на монетите.)

Задача 3. В турнир по футбол всеки отбор изиграл по един мач с всеки от останалите отбори. Оказало се, че в крайното класиране няма отбори с равен брой точки. Последният отбор в класирането спечелил поне 25% от своите срещи, а отборът на второ място спечелил не повече от 40% от изиграните мачове. Най-много колко отбори са участвали в турнира?

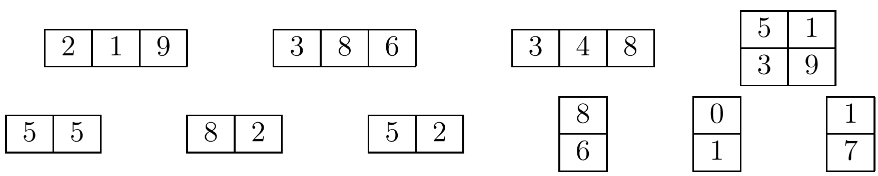
(При победа отборът получава 2 точки, при равен мач всеки отбор получава по една точка, а при загуба – 0 точки.)

Срокът за представяне на решенията е 30.11.2017 г.

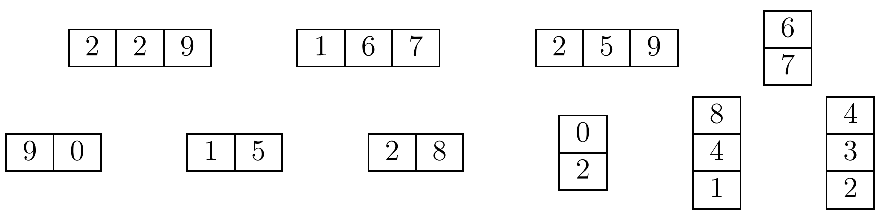
ЗА ЛЮБИТЕЛИТЕ НА ГЛАВОБЛЪСКАНИЦИ

Подредете плочките в квадрат така, че петцифреното число на първия ред (прочетено отляво надясно) да е равно на числото в първия стълб (прочетено отгоре надолу); числото на втория ред да е равно на числото във втория стълб и т.н. до последния (най-долния) ред и последния (най-десния) стълб. (При подреждането плочките не могат да се завъртат или преобръщат.)

Вариант за начинаещи



Вариант за напреднали



Ако сте подредили вярно двата квадрата, ще получите, че сборът на петцифрените числа по диагоналите им (от горното ляво до долното дясно поле), е равен на 113 934.

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

Конкурсните задачи в този брой подготви **Кирил Бангачев**. Очакваме Вашите решения, най-хубавите от които ще публикуваме в брой 1/2018.

* * *

Задача 1. Даден е вписан в окръжност шестоъгълник $ABCDEF$ и точките $P = AE \cap BD$, $Q = AC \cap FD$, $R = FB \cap EC$. Да се докаже, че точките $X = PQ \cap AD$, $Y = QR \cap FC$, $Z = PR \cap EB$ са колинеарни.

Задача 2. Нека с $\varphi(n)$ означаваме броя на числата, по-малки от n и взаимнопрости с n. Да се докаже, че съществува функция $f : N \to N$, за която за всяка двойка естествени числа n и k, е изпълнено, че

$$\varphi(n)/f(k)(a_1^k + a_2^k + \dots a_{\varphi(n)}^k),$$

където естествените числа $a_1, a_2, \dots a_{\varphi(n)}$ са числата, по-малки от n и взаимнопрости с n.

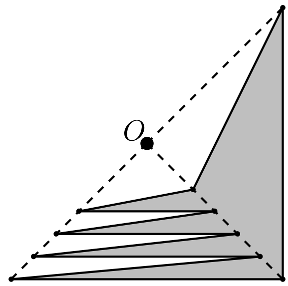
Задача 3. Даден е прост (без двойни ребра и примки) граф G с n върха, в който всички върхове са с нечетна степен. Върховете са разделени на две множества A и B. Да се докаже, че четността на ребрата (a, b), за които $a \in A, b \in B$, зависи само от четността на $|A|.|B|$.

Срокът за представяне на решенията е 31.12.2017 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 2/2017 г.

Задача 1. Даден е n-ъгълник (не задължително изпъкнал). На всяка от страните му като на диаметър са построени окръжности. Възможно ли е n-те окръжности да имат обща точка, която не е връх на дадения многоъгълник, ако: а) $n = 10$; б) $n = 11$?

Решение. а) Възможно е, както се вижда на чертежа.



б) Не е възможно. Да допуснем, че съществува такава точка O за многоъгълника $A_1 \dots A_{11}$. Имаме

$$OA_1 \perp OA_2 \perp OA_3 \perp \dots OA_{11} \perp OA_1,$$

следователно $OA_1 || OA_3 || \cdots || OA_{11} || OA_2$; противоречие.

Задача 2. Във всяко поле на квадратна таблица 1000×1000 е записано число. Таблицата се нарича S-*интересна*, ако сборът от числата във всеки правоъгълник, състоящ се от S полета на таблицата, е един и същ (страните на правоъгълника лежат на линиите на таблицата). Да се намерят стойностите на S, за които всяка S-*интересна* таблица се състои от равни числа.

Решение. Ще докажем, че търсената стойност е $S = 1$. При $S = 1$ таблицата очевидно се състои само от равни числа.

Да допуснем, че $S > 1$; нека p е прост делител на S. Записваме 1 във всяко поле с кратен на p сбор от координатите (ред; стълб), а в останалите полета записваме 0. Всеки правоъгълник T с лице S има страна, кратна на p, т.е. T може да се раздели на S/p ивици с дължина p. Всяка такава ивица съдържа точно една 1, т.е. сборът от числата в T е равен на S/p и не зависи от избора на правоъгълника.

Задача 3. Графиките на две квадратни функции се пресичат в две точки. Допирателните към двете графики във всяка от пресечните точки са перпендикулярни. Вярно ли е, че графиките имат обща ос на симетрия?

Решение. Ще докажем, че не е задължително графиките да имат обща ос на симетрия. Да разгледаме параболите $y = \dfrac{1}{8}(x^2 + 6x - 25)$ и $y = \dfrac{1}{8}(25 + 6x - x^2)$; осите им на симетрия са съответно $x = -3$ и $x = 3$, а пресечните им точки са при $x = \pm 5$. Произведението на ъгловите коефициенти на допирателните във всяка от пресечните точки е равно на $\dfrac{1}{64}(2.5 + 6)(6 - 2.5) = -1$, т.е. те са перпендикулярни.

ТЕСТ

за подготовка за държавен зрелостен изпит

В тази рубрика Ви предлагаме теста за Държавен зрелостен изпит по математика, проведен на 22.05.2017 г.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Кое от числата принадлежи на интервала $(-1{,}5; 1,5)$?

А) $\log_{\frac{1}{5}} 5$ **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}$ **Г)** $(-32)^{\frac{1}{5}}$

2. Стойността на израза $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{8}{9}-\dfrac{1}{3}}$ е:

А) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ **Б)** $\dfrac{5}{6}$ **В)** $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ **Г)** $\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

3. Кое от числата НЕ е от допустимите стойности на израза $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x(x^2-1)}$?

А) 1 **Б)** $\dfrac{2}{3}$ **В)** $\dfrac{5}{3}$ **Г)** $\dfrac{8}{3}$

4. Множеството от решенията на уравнението

$$\frac{x+7}{3-6x}\cdot\sqrt{2x-1}=0 \quad \text{е:}$$

А) $\left\{-7; \dfrac{1}{2}\right\}$ **Б)** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **В)** $\{-7\}$ **Г)** $\varnothing$

5. Стойността на израза $(\log_2 \sqrt{2})^2$ е:

А) $-\dfrac{1}{2}$ **Б)** $\dfrac{1}{4}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** 1

6. Решенията на неравенството $4x^2-12x>-9$ са:

А) $x\in(-\infty;+\infty)$ **Б)** $x\in(-\infty;1{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$

В) $x\in(1{,}5;+\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;1{,}5)$

7. Кое от дадените уравнения има два реални корена с различни знаци?

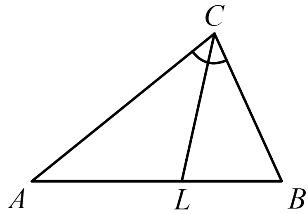
А) $3x^2+x-7=0$ **Б)** $-2x^2-3x-4=0$

В) $x^2-10x+25=0$ **Г)** $3x^2+16x+21=0$

8. Стойността на израза $\dfrac{\cos 780^\circ + \operatorname{tg} 405^\circ}{\sin(-930^\circ)}$ е равна на:

А) 3 **Б)** $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ **В)** $\dfrac{3}{4}$ **Г)** -3

9. Намерете дължината на страната BC на $\triangle ABC$, ако CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$, $AL = 5$ cm, $AB = 9$ cm и $AC = 15$ cm.



А) $\dfrac{4}{3}$ cm **Б)** 3 cm

В) 12 cm **Г)** 45 cm

10. В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) е построена височината CH ($H \in AB$). Ако $AH = 3$ cm, $BH = 9$ cm, то дължината на AC е:

А) $3\sqrt{3}$ cm **Б)** 6 cm **В)** $6\sqrt{3}$ cm **Г)** 9 cm

11. Коя от квадратните функции има най-голяма стойност 9?

А) $y = -2x^2 - 9$ **Б)** $y = 2x^2 + 9$ **В)** $y = 2x^2 - 9$ **Г)** $y = -2x^2 + 9$

12. Коя от посочените числови редици е зададена с равенствата $a_1 = -1$, $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$, $n \geqq 2$, $n \in \mathbb{N}$?

А) $-1, 2, 2, 2, \ldots$ **Б)** $-1, 0, 0, 0, \ldots$

В) $-1, 2, -1, 2, \ldots$ **Г)** $-1, -2, 6, 30, \ldots$

13. Намерете броя на членовете на крайна аритметична прогресия, ако $a_1 = 13$, $a_4 = 1$ и сумата на всичките ѝ членове е 18.

А) 6 **Б)** 9 **В)** 12 **Г)** 24

14. Ако $A(1;1)$ и $B(-1;1)$ са точки в правоъгълна координатна система xOy, то $\sin \sphericalangle AOB$ е равен на:

А) -1 **Б)** 0 **В)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** 1

15. Майка, баща и трите им деца отиват на кино, като билетите им са на един ред и са седнали един до друг. Намерете броя на начините, по които могат да седнат те, ако майката и бащата са седнали един до друг.

А) 12 **Б)** 24 **В)** 48 **Г)** 120

16. На диаграмата са показани годишните оценки по математика на учениците от четири класа.

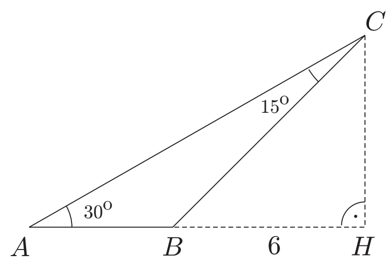
Средният успех по математика на всички ученици е:

А) 4,00 **Б)** 4,33 **В)** 4,43 **Г)** 4,50

17. За подобните $\triangle ABC$и $\triangle A_1B_1C_1$ е дадено, че $AB = \sqrt{3}+1$, $A_1B_1 = \dfrac{3\sqrt{3}+3}{2}$ и $P_{\triangle ABC} + P_{\triangle A_1B_1C_1} = 12{,}5$. Намерете $P_{\triangle A_1B_1C_1}$.

А) 8 **Б)** 7,5 **В)** 5 **Г)** 4,5

18. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle C = 15^\circ$, а проекцията на страната BC върху правата AB е равна на 6 cm. Дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е равна на:



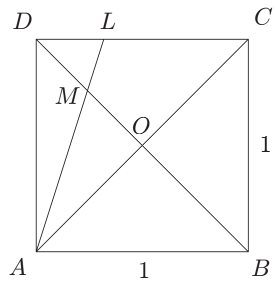
А) 12 cm **Б)** $6\sqrt{6}$ cm

В) $6\sqrt{3}$ cm **Г)** $6\sqrt{2}$ cm

19. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ ($AB \| CD$) са ъглополовящи на ъглите при голямата основа AB и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Ако $AD = 4$ cm, намерете разстоянието между средите на диагоналите на $ABCD$.

А) 2 cm **Б)** 4 cm **В)** 6 cm **Г)** 8 cm

20. Квадратът $ABCD$ е със страна 1 cm. Диагоналите му се пресичат в точка O, а точката M е средата на DO. Ако $AM \cap DC = L$, то $S_{\triangle ALD}$ е равно на:



А) $\dfrac{1}{6}$ cm^2 **Б)** $\dfrac{1}{3}$ cm^2

В) $\dfrac{1}{2}$ cm^2 **Г)** $\dfrac{2}{3}$ cm^2

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Пресметнете $\log_{49} x$, ако $x = \left(\log_5 2^{\log_2 125}\right)^{\log_3 7}$.

22. Пресметнете израза $\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + 3^{-2}\right]^{-2} \cdot \left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + 3.2^{-1}\right]^{2}$.

23. За аритметичната прогресия a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 е известно, че разликата от сбора на членовете с четни номера и сбора на членовете с нечетни номера е равна на -15. Ако $a_6 = 1$, намерете сбора от членовете на прогресията.

24. С цифрите 1, 2, 3, 5 и 7 компютър генерира всички трицифрени числа с различни цифри. Определете каква е вероятността при случаен избор на едно от тези числа, то да се дели на 6.

25. Точките M и N лежат съответно на страните AC и BC на $\triangle ABC$, като $AM = 3$ cm, $MC = 9$ cm, $BN = 12$ cm и $NC = 6$ cm. Намерете дължината на страната AB, ако в четириъгълника $ABNM$ може да се впише окръжност.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Решете системата $\left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\(x+y)(x-1)=(x-y)(y+1)+24.\end{array}\right.$

27. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = BC$, $CD = 4$, $AD = 3$ и ъгли $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ADC = 90^\circ$. Намерете стойността на разликата $BD^2 - AC^2$.

28. Лицето на ромб е 24 cm^2, а периметърът му е с 6 cm по-голям от сбора на диагоналите му. Намерете страната на ромба и стойността на израза $\dfrac{\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha}$, ако $\sphericalangle BAD = \alpha$ и $\alpha < 90$.

ОТГОВОРИ

1. А	**2.** А	**3.** А	**4.** Г	**5.** Б
6. Б	**7.** А	**8.** А	**9.** В	**10.** Б
11. Г	**12.** А	**13.** А	**14.** Г	**15.** В
16. В	**17.** Б	**18.** Г	**19.** А	**20.** А

21. $\frac{1}{2}$; **22.** 12,25; **23.** 81; **24.** $P = \frac{1}{15}$; **25.** $AB = 10$ cm.

26. $\left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\(x+y)(x-1)=(x-y)(y+1)+24\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\x^2-2x+y^2-24=0\end{array}\right. \iff$

$$\left|\begin{array}{l}y=2x\\x^2-2x+y^2-24=0\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l}y=-x\\x^2-2x+y^2-24=0\end{array}\right.$$

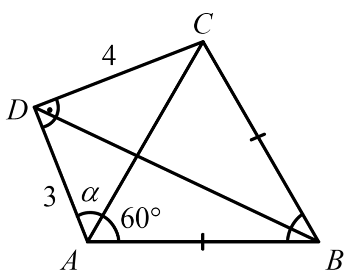
Решаваме първата система, като заместваме $y = 2x$ във второто уравнение и получаваме $5x^2-2x-24=0 \iff x_1=-2,\ x_2=\frac{12}{5}$. Тогава $y_1 = 2x_1 = 4$, $y_2 = 2x_2 = \frac{24}{5}$.

При решаване на втората система заместваме $y = -x$ във второто уравнение и получаваме $x^2-x-12=0 \iff x_3=4,\ x_4=-3$. Съответните стойности на y са $y_2=-4$ и $y_4=3$. Следователно системата има четири решения: $(-2,-4)$, $\left(\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$, $(4,-4)$, $(-3,3)$.

27. Означаваме $\sphericalangle CAD = \alpha$. В правоъгълния $\triangle ACD$ от

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 9 + 16 = 25$$

намираме $AC = 5$ и $\sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$. От $AB = BC$ и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ следва, че $\triangle ABC$ е равностранен, $AB = 5$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. От косинусовата теорема в $\triangle ABD$ пресмятаме



$$\begin{aligned}BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos(\alpha+60^\circ) = \\&= 25 + 9 - 2.5.3.(\cos\alpha.\cos 60^\circ - \sin\alpha.\sin 60^\circ) = \\&= 34 - 30\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 25 + 12\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Следователно $BD^2 - AC^2 = 25 + 12\sqrt{3} - 25 = 12\sqrt{3}$.

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

В тази рубрика Ви предлагаме теста за Национално външно оценяване, проведен на 22 май 2017 г.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Коя е стойността на израза $2(3-c)-c(c-2)$ при $c=-3$?

А) -15 **Б)** -3 **В)** 9 **Г)** 15

2. Изразът $mx-2x-2y+my$ е тъждествено равен на израза:

А) $(x+y)(m-2)$ **Б)** $(x+y)(m+2)$

В) $(x-y)(m+2)$ **Г)** $(x-y)(m-2)$

3. Коренът на уравнението $x(x+4)-x(x+3)=5x+1$ е:

А) -4 **Б)** $-\dfrac{1}{4}$ **В)** $\dfrac{1}{4}$ **Г)** 4

4. Решенията на неравенството $18-6x \geqq 0$ са числата от интервала:

А) $(-\infty;3]$ **Б)** $(-3;\infty)$ **В)** $(-\infty;-3]$ **Г)** $[3;\infty)$

5. Произведението на корените на уравнението $|x-5|-5=1$ е:

А) 11 **Б)** 10 **В)** -10 **Г)** -11

6. Една вафла струва x лева, а един шоколад е с 1,5 лева по-скъп от вафлата. Стойността на 2 вафли и 2 шоколада се пресмята с израза:

А) $4x+3$ **Б)** $4x+1{,}5$ **В)** $4x+2$ **Г)** $2x+1{,}5$

7. Мария почиства сама жилището си за 6 чàса, а нейната майка почиства същото жилище за 4 чàса. За колко чàса ще почистят жилището, ако работят заедно?

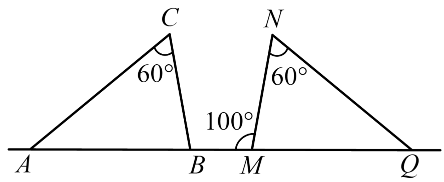
А) 2 чàса **Б)** 2,04 чàса

В) 2 чàса и 24 минути **Г)** 1 час и 44 минути

8. Намерете сбора на целите отрицателни числа, които са решения на неравенството $x(x-1)<x^2+4{,}7$.

А) -15 **Б)** -10 **В)** -5 **Г)** 0

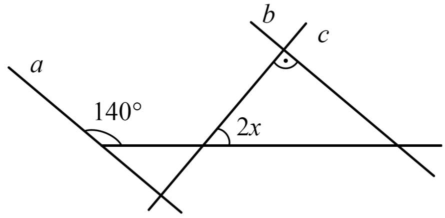
9. Върху правата AQ са построени $\triangle ABC$ и $\triangle MQN$, за които $AC = QN$, $BC = MN$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNQ = 60^\circ$ и $\sphericalangle BMN = 100^\circ$. Градусната мярка на $\sphericalangle CAB$ е:



А) 100° **Б)** 80°

В) 60° **Г)** 40°

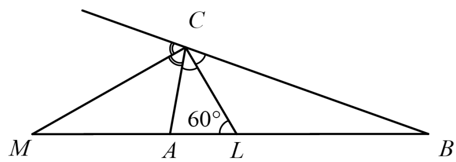
10. На чертежа правата c пресича правите a и b и $a \| b$. Градусната мярка на x е:



А) 10° **Б)** 15°

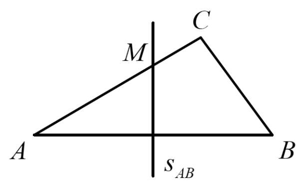
В) 20° **Г)** 25°

11. Лъчите $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CL}$ са съответно ъглополовящите на външния и вътрешния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Ако $CL = 5$ cm и $\sphericalangle ALC = 60^\circ$, то дължината на ML е:



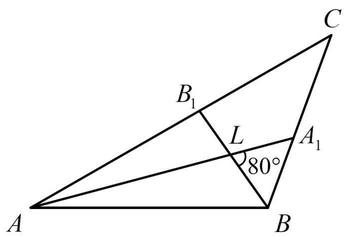
А) 2,5 cm **Б)** 5 cm **В)** 7,5 cm **Г)** 10 cm

12. В $\triangle ABC$ страната $AC = 5$ cm и страната $BC = 4$ cm. Симетралата на страната AB пресича страната AC в точка M. Периметърът на $\triangle BCM$ е равен на:



А) 5 cm **Б)** 8 cm **В)** 9 cm **Г)** 10 cm

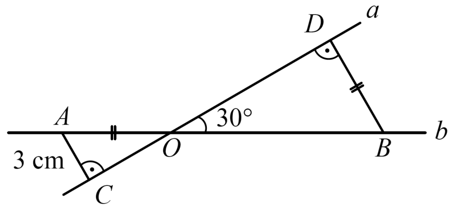
13. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка L. Ако $\sphericalangle BLA_1 = 80^\circ$, то градусната мярка на $\sphericalangle ABC$ е:



А) 15° **Б)** 20°

В) 40° **Г)** 80°

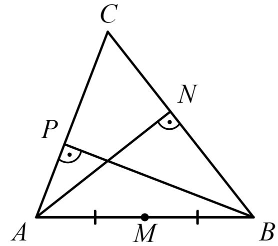
14. На чертежа правите a и b се пресичат под ъгъл 30°, $BD \perp a$ и $AC \perp a$. Ако $AO = BD$ и $AC = 3$ cm, то дължината на отсечката AB е:



А) 18 cm **Б)** 12 cm

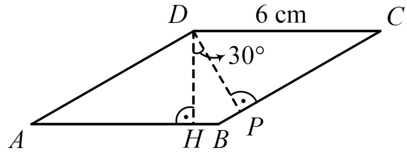
В) 9 cm **Г)** 6 cm

15. В остроъгълния $\triangle ABC$ с височини AN и BP ($N \in BC$, $P \in AC$) точката M е средата на AB. Определете вида на $\triangle MNP$, ако $PN = AM$.



А) разностранен
Б) равностранен
В) равнобедрен, но не равностранен
Г) правоъгълен

16. В ромба $ABCD$ построили $DH \perp AB$ и $DP \perp BC$. Ако $DC = 6$ cm и $\sphericalangle HDP = 30^\circ$, то лицето на ромба е:



А) 9 cm^2 **Б)** 18 cm^2

В) 36 cm^2 **Г)** 72 cm^2

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Иван има 3 лв., за да купи 2 хляба на една и съща цена. За остатъка от парите може да си купи сладолед, чиято цена за 1 брой е равна на стойността на израза $A = \dfrac{111^2 - 90^2}{7.30^2}$.

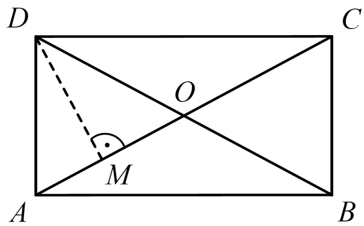
А) Определете в лева цената на 1 сладолед.

Б) Намерете колко най-много сладоледа може да купи Иван, ако цената на 1 хляб е 80 ст.

18. **А)** Изразете $a^2 + b^2$ чрез $a - b$ и $a.b$.

Б) Намерете стойността на израза $a^2 + b^2$, ако $a - b = 3$ и $a.b = 10$.

19. В правоъгълника $ABCD$, $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $\sphericalangle CAB : \sphericalangle ACB = 2 : 3$.
Определете:
(1) градусната мярка на $\sphericalangle CAB$
(2) градусната мярка на $\sphericalangle CAD$
(3) двете двойки еднакви равнобедрени триъгълници
(4) отношението $\sphericalangle ADM : \sphericalangle BDM$.



20. За всяко от уравненията А), Б) и В) запишете номера от (1) до (5), срещу който са дадени съответните му корени.

А)	$x^2 - 3x = 0$
Б)	$\dfrac{3x-1}{6} = -\dfrac{2}{3}$
В)	$x^2 + 5 = 0$

(1)	$x = -1$
(2)	$x = 0$ и $x = 4$
(3)	$x = 0$ и $x = 3$
(4)	няма корени
(5)	$x = 1$ и $x = 2$

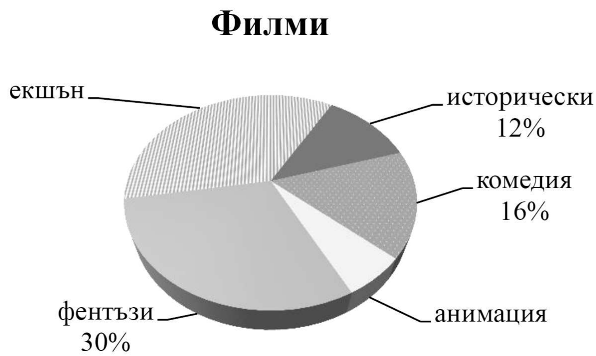
ВТОРИ МОДУЛ

21. ФИЛМИ

На кръговата диаграма са изобразени предпочитанията към филми на част от седмокласниците от едно училище. Любителите на екшън филми са 6 пъти повече от любителите на анимации.

А) Какво е отношението на броя любители на екшън филми към броя любители на комедии? Представете отношението с несъкратима дроб.

Б) Колко са учениците от седми клас в това училище, ако 15 деца нямат предпочитан жанр филми, а любителите на анимация са 9?



22. УЧЕНИЦИ

В понеделник от един клас в едно училище отсъстващите ученици били 5 пъти по-малко от присъстващите ученици. Във вторник отсъстващите ученици от класа се увеличили с 4, а присъстващите били 70% от всички ученици в класа.

А) Пречертайте и попълнете следната таблица.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Брой ученици</td></tr>
<tr><td>отсъстващи</td><td>присъстващи</td><td>общо</td></tr>
<tr><td>понеделник</td><td>x</td><td>.........</td><td rowspan="2">.........</td></tr>
<tr><td>вторник</td><td>.........</td><td>.........</td></tr>
</table>

Б) Съставете уравнение за намиране на общия брой ученици от този клас.

В) Намерете общия брой на учениците от класа.

Запишете пълното решение на задачи 23. и 24. с необходимите обосновки.

23. Дадени са многочлените:

$M = (-2 + 3x)^2 - (2x - 3)(3x + 2) - 6 + 3(1 - x)(x + 1)$

$N = (x - 1)(1 + x + x^2) - 3x(2x - 1) + 3x^2$

$P = 2x(x + 3) - x(y - 1) + 3(1 - y)$.

А) Намерете стойностите на x, за които многочленът M приема неположителни стойности.

Б) Разложете на множители многочлените N и P.

В) Ако $y = \dfrac{121.3^3}{33^2}$, решете уравнението $P = 0$.

24. Даден е $\triangle ABC$ с височина CH ($H \in AB$). Върху страната BC е взета точка P такава, че разстоянията от нея до връх C и до страната AB са равни на 4 cm. През точка P е построена права, перпендикулярна на BC, която пресича правата CH в точка M и $CM = 8$ cm.

А) Намерете дължината на страната BC.

Б) Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AB = 14$ cm.

В) Определете отношението $CM : CH$.

Отговори и решения

1. Б;	**2.** А;	**3.** Б;	**4.** А;
5. Г;	**6.** А;	**7.** В;	**8.** Б;
9. Г;	**10.** Г;	**11.** Г;	**12.** В;
13. Б;	**14.** А;	**15.** Б;	**16.** Б;

17. А) 0,67 лв.; Б) 2 сладоледа;

18. А) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$; Б) 29;

19. (1) $\sphericalangle CAB = 36°$; (2) $\sphericalangle CAD = 54°$; (3) $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$; (4) $\sphericalangle ADM : \sphericalangle BDM = 2 : 1$;

20. А) $\Longrightarrow$ корени (3); Б) $\Longrightarrow$ корени (1); В) $\Longrightarrow$ корени (4);

21. А) $\dfrac{9}{4}$ или 9 : 4; Б) 165 ученици.

22. А) Виж таблицата

	Брой ученици		
	отсъстващи	присъстващи	общо
понеделник	x	$5x$	$6x$
вторник	$x+4$	$5x-4$	

Б) $5x-4=0{,}7.6x$; В) 30.

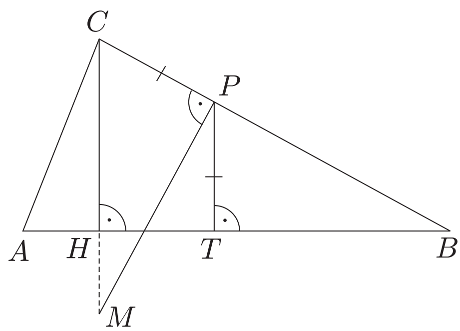
23. А) $M=(-2+3x)^2-(2x-3)(3x-2)-6+3(1-x)(x+1)\leqq 0$
$4-12x+9x^2-4x+9x+6-6+3-3x^2\leqq 0$
$-7x+7\leqq 0$
$x\geqq 1$.

Б) $N=(x-1)(1+x+x^2)-3x(2x-1)+3x^2=$
$=x^3-1-6x^2+3x+3x^2=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

$P=2x(x+3)-x(y-1)+3(1-y)=2x(x+3)-(y-1)(x+3)=$
$=(x+3)(2x-y+1)$

В) $y=3 \quad x=-3,\ x=1$

24. Намираме $\sphericalangle CMP=30^\circ$ и $\sphericalangle CBH=30^\circ$.



Оттук $BC=12$ cm и $CH=6$ cm. Тогава $S_{\triangle ABC}=42$ cm^2 и намираме отношението $CM:CH=4:3$.

УМЕЕТЕ ЛИ ДА РАЗЧИТАТЕ ДАННИ?

Умението да се разчете и интерпретира информация, представена с текст, с графики, с таблици или с диаграми, е един от важните акценти в темите за национално външно оценяване след 7. клас от последните години. Предлагаме Ви две задачи, с които да проверите доколко сте усвоили това умение.

1. Пигмейски скакалец

Пигмейският скакалец има кафяво или черно тяло. Окраската го прави незабележим за хищниците в неговото местообитание. Скакалец с кафяво тяло трудно се забелязва в мътни води или около клони, докато скакалец с черно тяло трудно се откроява на земя, покрита с черни сажди от горски пожар. Изследователи описали популация на пигмейски скакалец с кафява или черна окраска в тропическите гори. Данните от изследването в началото и в края на даден период са представени с таблица.

	Брой скакалци с кафява окраска	Брой скакалци с черна окраска	Процент скакалци с кафява окраска	Процент скакалци с кафява окраска
Начало	220	30		
Край	264	336		

А) Попълнете празните полета в таблицата.

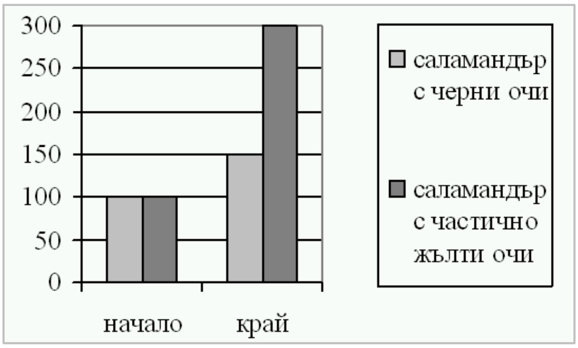
Б) Колко пъти се е увеличила числеността на популацията на пигмейския скакалец за изследвания период?

В) С колко процента се е увеличила числеността на популацията на скакалците с кафява окраска за изследвания период?

Г) Данните за числеността на популацията на скакалците в края на периода са представени с кръгова диаграма. Приблизително колко градуса е централният ъгъл на сектора на скакалците с кафява окраска?

2. Тихоокеански саламандър

Тихоокеанският саламандър е широко разпространен вид земноводно. Срещат се саламандри с напълно черни очи, както и такива с частично жълти очи. Саламандрите с частично жълти очи приличат на някои отровни мравки, затова хищниците често избягват да ядат тези саламандри. Изследователи описали популация на тихоокеански саламандър с черни или частично жълти очи в Канада. Данните от изследването в началото и в края на даден период са представени с хистограма.



А) Колко процента от саламандрите в края на периода са с частично жълти очи? (Закръглете отговора с точност до цяло число.)

Б) С колко процента се е увеличил броят на саламандрите с черни очи през изследвания период?

В) Колко пъти увеличението на броя на саламандрите с частично жълти очи е по-голямо от увеличението на саламандрите с черни очи за дадения период?

Г) При следващо проучване били маркирани 33 саламандри от дадена популация. По-късно изследователите уловили 260 саламандри и установили, че 11 от тях са маркирани. Приблизително колко са саламандрите в изследваната популация? (Предполагаме, че отношението на броя маркирани и немаркирани саламандри в популацията е същото, както при случайно избраните 260.)

Отговори. 1. А) 88%, 12%, 44%, 56%; Б) 2,4 пъти; В) 20%; Г) $158°24' \approx 158°$; **2.** А) 33%; Б) 50%; В) 4 пъти; Г) 780.

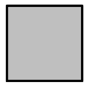
ПЪЗЕЛ ОТ КВАДРАТЧЕТА

Емил Карлов

Децата обичат да редят пъзел. От стотици с необичайна форма плочки, сглобяват картинката, която е показана на капака на кутията. Много е трудно, но децата го правят с лекота.

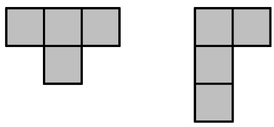
При легото е по-различно, от много цветни блокчета строим фигура, която сам си намислил. Детското въображение създава такива чудеса, че възрастните виждат построения от детето модел например динозавър, а това е лятна къща с две тераси с изглед към градината.

В нашата игра пъзелът е много прост – квадратче. Тук всички плочки са сглобени от квадратчета и трябва да построим фигура, която изпълнява условието на задачата.



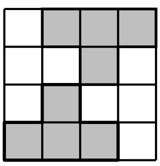
Черт. 1

Задача 1. Намерете фигура, която може да се построи, както от плочки с формата на буква Т, така и от плочки с формата на буква Г.

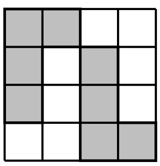


Черт.2.

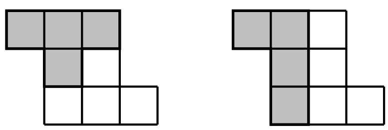
Решение. Постройте квадрат 4×4. На черт. 3а квадратът е сглобен от четири букви Т, а на черт. 3б същият квадрат е сглобен от четири букви Г.



Черт. 3а



Черт. 3б



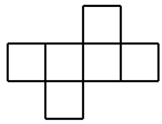
Черт. 3в

Второ решение може да намерите, като долепете две букви Г една до друга (черт. 3в).

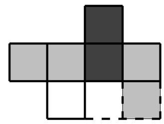
Задача 2. Намерете фигура, която може да се построи както от плочки с формата на буква Т, така и от плочки с формата на буква Z.

Задача 3. Подредете шест квадратчета в свързана фигура F, които да не могат да се покрият от три плочки домино, но ако добавите още една плочка домино към фигурата F, осемте квадратчета да могат да се покрият от четири плочки домино.

Решение. Фигурата F от шест квадратчета е показана на черт. 4а. Опитайте да покриете F с три плочки домино! Но добавяме към фигурата F плочка домино, както е показано с пунктирана линия на черт. 4б, и вече може да покрием фигурата с четирите плочки домино.

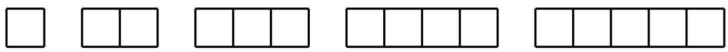


Черт. 4а

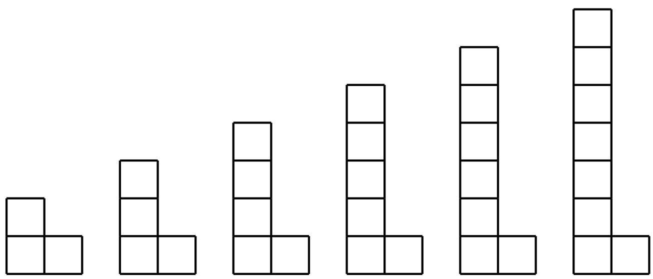


Черт. 4б

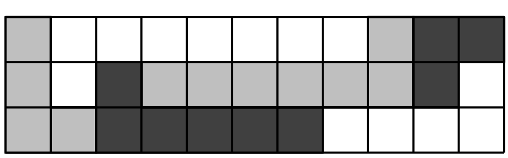
Задача 4. От пет плочки: едната от едно квадратче (*мономино*), втората от две квадратчета (*домино*), третата от три квадратчета (*тримино*), четвъртата от четири квадратчета (*тетрамино*), петата от пет квадратчета (*пентамино*), направете правоъгълник със страни, по-дълги от едно квадратче.



Задача 5. От шестте плочки с формата на буква L сглобете правоъгълник.

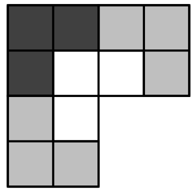


Решение. В шестте *лули* има общо 33 квадратчета, т.е. правоъгълникът трябва да е с размери 3×11. На чертеж 5 сме показали шестте *лули*, разположени в *кутия* с размери 3×11.



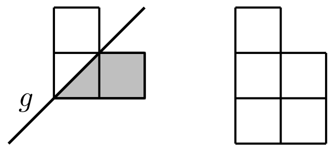
Черт. 5

Задача 6. Плочка, която не е правоъгълник, ще наричаме *водеща фигура*, ако от няколко такива плочки може да направим многоъгълник, подобен плочката, но по-голям от нея. Например ъглова плочка от три квадратчета е водеща плочка, защото от четири малки плочки можем да направим голямо тримино. Намерете водеща плочка от четири квадратчета.

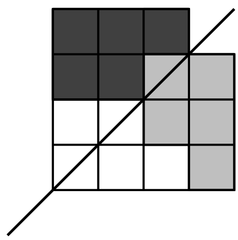


Решение. Водеща плочка с четири квадратчета е буквата Т. На черт. 3а е показано, как може да се построи квадрат от четири букви Т. От четири такива квадрата правим голяма буква Т.

Задача 7. Казваме, че клетъчната фигура F е симетрична, ако има права g, която разделя фигурата F на две еднакви части и тези части, ако сгънем фигурата по правата g, напълно съвпадат. Например, ъгловото тримино е симетрична фигура. От три плочки във формата на буква Ь направете симетрична фигура.



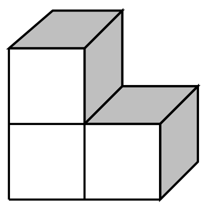
Решение. От квадрат с 16 квадратчета премахваме едно ъглово квадратче (черт. 7). Останалите 15 квадратчета могат да се покрият с три плочки от даденото пентамино. От друга страна, получената фигура е симетрична спрямо диагонала g на квадрата.



Черт. 7

Задача 8. Покажете, че и шестте плочки от задача 5 са водещи фигури в смисъла на задача 6.

Задача 9. Многостен, съставен от единични кубчета, който не е паралелепипед, наричаме *водещ многостен*, ако от няколко негови копия може да направим подобен на дадения многостен. Покажете, че многостенът, съставен от три единични кубчета, е водещ.



Задачите са трудни, но изключително забавни!

МАТЕМАТИЧЕСКИ КВАДРАТ

Динко Раднев, Мадлен Христова

От 3 до 9 юли в Пампорово се проведе Втората национална лагер школа *Състезателна математика*. Школата събра ученици от 5. до 7. клас, заели призови места на математическите състезания през миналата учебна година. Освен лекции, програмата включваше математически игри и забавления.

Сред най-интересните игри беше *Математическият квадрат* – отборна игра, при която всеки отбор получава един и същ списък с 16 задачи и записва отговорите им в съответните полета на квадрат 4×4 Редовете в таблицата съответстват на темите (алгебра, геометрия, комбинаторика, теория на числата). Верният отговор на всяка задача от първия стълб се оценява с 1 точка, от втория стълб – с 2 точки и т.н. Отборите дават своите отговори в произволен ред (без да ги показват на другите отбори). Точките на всеки отбор се нанасят в отделна таблица на дъската, като неверните отговори се отбелязват с X.

Магически квадрат - бланка за отговорите

Отбор ______________________

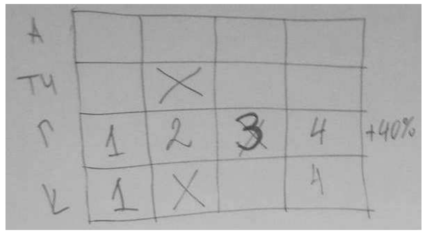
АЛГЕБРА	А1	А2	А3	А4
ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА	ТЧ1	ТЧ2	ТЧ3	ТЧ4
ГЕОМЕТРИЯ	Г1	Г2	Г3	Г4
КОМБИНАТОРИКА	К1	К2	К3	К4

Общо точки:

Отбор, който е решил правилно всички задачи от някоя линия (ред, стълб или голям диагонал), получава премия в размер на 20% от сбора на точките по тази линия. Първият отбор, получил дадена линия, получава двойна премия. Времето за решаване на задачите е 1 час и 30 мин. Печели отборът, събрал наймного точки.

Правилата не са сложни, но позволяват различно развитие на играта в зависимост от избора на стратегиия. Бяхме свидетели на вълнуващо състезание с неочаквани обрати.

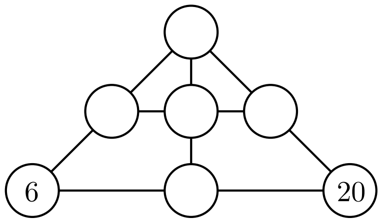
На фиг. 2 виждате междинния резултат на един от отборите – той първи е направил линия от задачите в третия ред и получава удвоена премия в размер 40% от сбора $1 + 2 + 3 + 4$, т.е. 4 точки. По-нататък отборът би могъл да насочи усилията си към първия стълб (но там задача 1 се оказа костелив орех), четвъртия стълб или диагонала. Интересно е да се отбележи, че в хода на играта с един ход може да се спечелят две премии, например от стълб и диагонал.



А ето ги и самите задачи. Опитайте да ги решите и проверете своите отговори!

АЛГЕБРА

1. По колко различни начина могат да се разположат естествени числа в празните кръгчета така, че сборът от числата в трите кръгчета по всяка линия да е един и същ?



2. Намерете всички положителни несъкратими дроби, които се увеличават два пъти, ако числителят и знаменателят им се увеличат с 10.

3. Намерете най-големия прост делител на числото $119.120.126.127 - 144$.

4. Намерете всички прости числа a и b, за които числото $a^b + b^a$ също е просто.

ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

1. Решете уравнението $5x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 1 = 0$.

2. Ако УСП : ЕХ $= 8$, намерете най-голямата възможна стойност на числото УСПЕХ. (Еднаквите букви означават еднакви цифри, а различните букви – различни цифри.)

3. Намерете най-малкото кратно на 99 естествено число, всички цифри на което са четни.

4. В числова редица първото число е 1, второто е 2, а всяко следващо се получава като към предишното се прибави неговият най-голям прост делител.(Например, третото е $2 + 2 = 4$, а четвъртото е $4 + 2 = 6$.) Кое число е на 3999-то място в редицата?

ГЕОМЕТРИЯ

1. В триъгълник ABC точките M и N лежат съответно на страните AC и BC и $AM : MC = 1 : 3$ и $BN : NC = 2 : 1$. Отсечките AN и BM се пресичат в точката P. Намерете отношенията $AP : PN$ и $BP : PM$.

2. През върховете A и C на триъгълника ABC са построени прави, перпендикулярни на ъглополовящата на ъгъл B. Те пресичат страната AB и продължението на страната BC съответно в точките M и K. Намерете AB, ако $BM = 8$ и $KC = 1$.

3. В триъгълника ABC точката M е среда на отсечката BC, а точката N от отсечката AC е такава, че ако AM и BN се пресичат в точка P, то $BP = 4.PN$. Известно е, че лицето на триъгълника APN е равно на 1. Намерете лицето на четириъгълника $NPMC$.

4. Точките M и N лежат върху страната DC на успоредника $ABCD$ и са такива, че $DM = MN = NC$. Точката P е среда на отсечката BC, а точката F е среда на отсечката CP. Правите AN и FM се пресичат в точка O. Намерете сбора $AO : NO + FO : MO$.

КОМБИНАТОРИКА

1. Да забележим, че ако преобърнем цифрите 0, 1, 8, те не се изменят, а ако преобърнем цифрите 6 и 9, те си сменят местата. Останалите цифри губят смисъл при преобръщане. Колко са деветцифрените числа, които не се променят при завъртане на листа, на който са записани?

2. На окръжност са дадени 8 точки A, B, C, D, E, F, G, H. По колко начина могат да се начертаят 4 непресичащи се отсечки с върхове в тези точки?

3. В шахматен турнир участвали двама петокласници и няколко шестокласници. Всеки двама изиграли по една партия, като за победа се дава 1 точка, за равенство – 0,5 точки, а за загуба – 0 точки. Накрая се оказало, че петокласниците имат общо 8 точки, а всички шестокласници имат един и същ брой точки. Колко са били шестокласниците?

4. В равнината са дадени 2 точки. През всяка от тях са прекарани по 2 прави. Най-много на колко части може да се раздели равнината с тези прави?

ОТГОВОРИ

А1. 15; **А2.** $\dfrac{2}{5}$; **А3.** 59; **А4.** $(2; 3)$ и $(3; 2)$.

ТЧ1. $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$; **ТЧ2.** 76 095; **ТЧ3.** 228 888; **ТЧ4.** 3 999 999.

Г1. $1 : 2$ и $8 : 1$; **Г2.** 9; **Г3.** 9; **Г4.** 10,5.

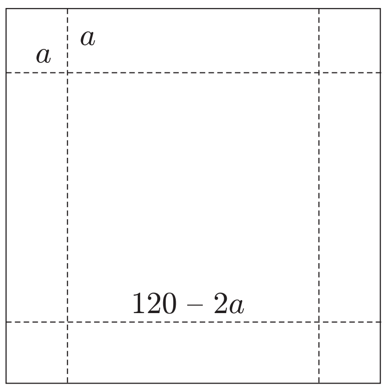
К1. 1500; **К2.** 14; **К3.** 7 или 14; **К4.** 11.

Ученическо творчество

КУТИЯ С МАКСИМАЛЕН ОБЕМ

Мирослав Минчев, 6. клас, Стара Загора

Задача. На един тенекеджия поръчали да направи от квадратно парче тенекия, широко 120 см, кутия без капак с квадратно дъно и му поставили условието кутията да има възможно най-голяма вместимост. Той дълго време пресмятал – каква ширина трябва да имат краищата, които ще подгъне, но не успял да достигне до определено решение. Намерете максималната вместимост на съда.



Фиг. 1

Решение. Нека ширината на подгъваните ивици е a (фиг. 1). Тогава широчината на квадратното дъно е равно на $120-2a$. Обемът v на кутията ще се изрази с произведението

$$v = (120 - 2a)(120 - 2a)a.$$

Въпросът е при каква стойност на a, обемът ще е най-голям? Ако сборът на трите множителя е постоянна величина, произведението им би било най-голямо в случая, когато те са равни помежду си. Но тук сборът на множителите е:

$$120 - 2a + 120 - 2a + a = 240 - 3a$$

и не е постоянна величина (при различните стойности на a се получава различен сбор от множителите). Нека направим сбора от множителите да бъде постоянен: ще умножим двете страни на равенството с 4. Получаваме

$$4v = (120 - 2a)(120 - 2a)4a.$$

Сборът от множителите е равен на

$$120 - 2a + 120 - 2a + 4a = 240,$$

което е постоянна величина. Произведението на тези множители достига най-голяма стойност при равенството помежду им, т.е когато

$$\begin{aligned} 120 - 2a &= 4a \\ 120 &= 6a \\ a &= 20. \end{aligned}$$

Така ще достигнем до най-голямата стойност на обема на кутията. Ще получим кутия с най-голям обем, ако тенекиения лист се подгъне по 20 см. Най-голямата вместимост на кутията е:

$$\begin{aligned} &v = (120 - 2a)(120 - 2a)a, \\ &v = (120 - 2 \times 20)(120 - 2 \times 20) \times 20 \\ &v = 80 \times 80 \times 20 = 128\ 000\ \mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

Ако подгънем един сантиметър повече или по-малко, и в двата случая ще намалим обема. Например,

ако $a = 19$, то $v = 82 \times 82 \times 19 = 127\ 256\ \mathrm{cm}^3$;

ако $a = 21$, то $v = 78 \times 78 \times 21 = 127\ 764\ \mathrm{cm}^3$.

И в двата случая обемите са по-малки.

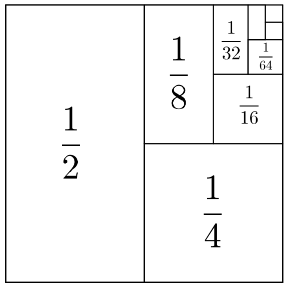
ДОКАЗАТЕЛСТВА БЕЗ ДУМИ

Мария Русинова (6. клас, СМГ),
Ивайла Радкова (7. клас, 125 СУ)

На страницата на Art of Problem Solving в интернет може да разгледаме някои доказателства без думи. Те представят различни начини да се сглоби квадрат със страна 1 с безкраен брой правоъгълници. Интуитивно е ясно, че безкрайният сбор от лицата им е равен на лицето на квадрата, т.е. на 1. Оттук се получават интересни равенства.

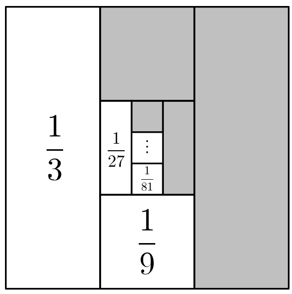
Пример 1. Единичният квадрат може да се сглоби от правоъгълници с лица $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ и т.н., както е показано на чертежа. Следователно

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$



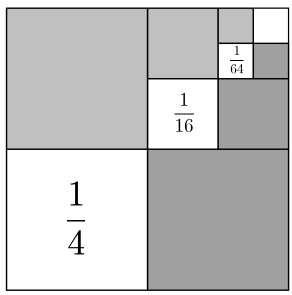
Пример 2. Единичният квадрат може да се разреже на три еднакви вертикални ивици, средната от които – на три еднакви хоризонтални ивици и т.н. Квадратът се разделя на две еднакви фигури – бяла и сива, и лицето на всяка от тях е $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=\frac{1}{2}.$$



Пример 3. При разрязването на чертежа имаме три фигури – бяла, сива и тъмносива, всяка от които включва по един квадрат с лице $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ и т.н. Трите фигури са равнолицеви и покриват квадрата, т.е. лицето на всяка от тях е

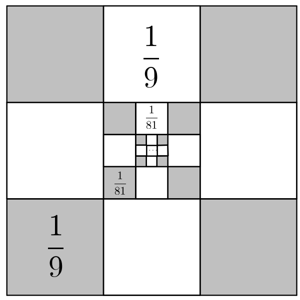
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{3}.$$



Тези примери са достатъчни да предположим, че за естествено число $a>1$ имаме

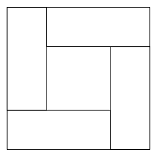
$$(\star) \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}+\cdots=\frac{1}{a-1}$$

(което не е трудно и да се докаже). Забелязахме обаче, че всички геометрични илюстрации на свойството в интернет са за случаите $a = 2$, 3 или 4. Това ни предизвика да измислим *доказателства без думи* и за други стойности на a.

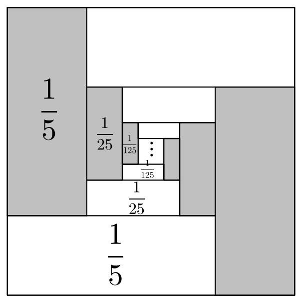


Пример на Ива за $a = 9$. Единичният квадрат е сглобен от $3\times 3 = 9$ еднакви квадрата, средният от които също е сглобен от 9 еднакви квадрата и т.н. По този начин квадратът може да се раздели на 8 фигури (4 сиви и 4 бели на чертежа). Всяка от тях включва по един квадрат с лице $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ и т.н., следователно има лице

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{9^n}+\cdots=\frac{1}{8}.$$



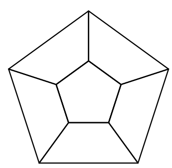
Пример на Мария за $a = 5$. Квадратът може да се разреже на пет равнолицеви правоъгълника по следния начин:



Така разрязваме квадрата в средата и т.н. Получаваме, че единичният квадрат на чертежа е сглобен от четири еднакви фигури (две бели и две сиви). Лицето на всяка от тях е

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

Примерът на Мария може да се обобщи за произволна стойност на $a \geqq 4$, ако *се освободим* от правоъгълната форма.



Показаното разрязване на правилен петоъгълник на шест равнолицеви фигури (приложено безкраен брой пъти!) поражда *доказателство без думи* на $(\star)$ при $a = 6$. За $a = 7$ може да използваме правилен шестоъгълник и т.н.

А сега Вие сте на ход! Ако измислите красиви и интересни доказателства без думи, ще се радваме да ги споделите с нас!

за по-малките  задачи

4. клас

61. Купих два молива и три гуми. Платих два лева и ми върнаха 30 стотинки. Ако един молив струва 55 стотинки, колко стотинки струва една гума?

62. Сборът от годините на 3 деца преди 7 години бил 11. Ако миналата година едното е било на 11 години, а другото е на 11 години сега, след колко години третото ще е на 11 години?

63. Пипи раздала на всеки от гостите си по 5 лимонади и 7 пасти. Общо колко пасти е раздала тя, ако раздадените лимонади са 85?

64. Ако $\heartsuit$ и $\diamondsuit$ са числа и

$$\diamondsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 17, \quad \text{а} \quad \heartsuit + \heartsuit + \diamondsuit = 16,$$

то $\diamondsuit + \heartsuit = ?$

5. клас

65. Двадесет и три деца написали по една дума. Някои написали КОН, други — КОКОШКА, а останалите написали СЛОН. Сред написаното буквите О били 30, а буквите К били 20. Колко деца са написали СЛОН?

66. Динко и Краси играли тенис и Динко спечелил с 3 точки повече от половината точки на Краси. Ако Краси спечелила 13 точки повече от Динко, колко точки е спечелил всеки от тях?

67. Всеки ден учител по математика пише или 5 тройки, или 4 четворки, или 3 петици. За няколко дни сборът на написаните оценки е 107. Колко от тях са четворки?

68. Попитали учител по математика на колко години е и той отвърнал: *Ако увеличите първата цифра на моята възраст с 1, увеличите втората цифра с 2 и след тях допишете 3, ще получите трицифрено число, което се дели на моята възраст.* На колко години е учителят?

6. клас

69. Ако $a = \dfrac{1 - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} : 1\frac{1}{3}}$, намерете неизвестното число x в равенството

$$(x + 2 : 0,2) : a = \frac{1,2.4,5}{0,2.0,75}.$$

70. Даден е трапецът $ABCD$ с основи $AB = 5,5$ cm и $CD = 4,5$ cm.

а) Намерете лицето на $ABCD$, ако лицето на $\triangle ACD$ е 9 cm^2.

б) На страната AB е отбелязана точката N така, че четириъгълникът $ANCD$ е успоредник. Колко процента от лицето на трапеца $ABCD$ е лицето на успоредника $ANCD$?

71. Турист изминал маршрут на три етапа. На първия етап изминал 20 км, на втория етап – с 14% по-голямо разстояние, отколко на първия и с 25% по-малко, отколко на третия етап. Намерете дължината на изминатия от туриста маршрут.

72. Запитали един математик на колко години е и той отговорил: *Ако разменя местата на цифрите на десетците и единиците в моята възраст, ще получа число, което е с 20% по-голямо от възрастта ми.* На колко години е математикът?

7. клас

73. Правоъгълен паралелепипед има измерения x, $(x - 1)$ и $(x + 1)$ cm.

а) Изразете лицето на повърхнината на паралелепипеда чрез x и запишете получения многочлен в нормален вид.

б) Ако лицето на повърхнината на паралелепипеда е равно на 382 cm^2, намерете обема му.

74. Височината на прав кръгов цилиндър с обем 150π cm^3 е с 20% по-голяма от радиуса му. Намерете лицето на повърхнината на цилиндъра.

75. Турист се изкачил до хижа X и се върнал обратно по същия път за общо 1 час и 20 минути. Ако скоростта на изкачване на туриста се отнася към скоростта на слизане както 2 : 3, намерете колко часа туристът се е изкачвал до хижата.

за по-малките решения

на задачите от бр. 4/2017

46. В математическо състезание се включили 96 момичета и 54 момчета, като 68 от участниците били от трети клас, а останалите – от четвърти. Ако момичетата от трети клас били 40, колко момчетата от четвърти клас са участвали в състезанието?

Решение. Момичетата от четвърти клас са $96 - 40 = 56$. Всички ученици са $96 + 54 = 150$, четвъртокласниците са $150 - 68 = 82$, а момчетата от четвърти клас са $82 - 56 = 26$.

47. В 2:58 часа цифрите на електронния часовник имат свойството, че втората от тях е с толкова по-голяма от първата, с колкото е по-малка от третата. След колко минути на часовника отново ще се появят цифри с това свойство?

Решение. Следващият такъв час е 3:45 и е след 47 минути. (Макар да не е изрично казано, се подразбира, че разликата между цифрите не е 0, т.е. 3:33 няма търсеното свойство.)

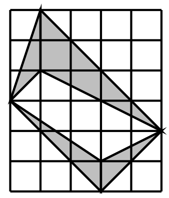
48. Ани и Боби събрали един и същ брой точки на математическо състезание с 25 въпроса. Всеки верен отговор носи 4 точки, всеки грешен отговор намалява резултата с една точка, а за непосочен отговор не се прибавят или отнемат точки. Ани отговорила на всички въпроси, но 12 от нейните отговори се оказали грешни. Боби нямала нито един грешен отговор. На колко въпроса Боби не е посочила отговор?

Решение. Ани сгрешила 12 въпроса и отговорила вярно на останалите 13; тя е получила $13.4 - 12.1 = 40$ точки. Боби събира 40 точки от $40 : 4 = 10$ верни отговора, значи не е посочила отговор на останалите 15.

49. Произведението на 13 и моята възраст (в години) е с 3 повече от сбора на утроената ми възраст след 3 години и увеличената 6 пъти възраст, на която ще съм след 6 години. На колко съм години?

Решение. Нека моята възраст е x. Утроената ми възраст след 3 години е с 9 повече от $3x$, а увеличената 6 пъти възраст, на която ще съм след 6 години, е с 36 повече от $6x$. Следователно $13x$ е с $9+36+3 = 48$ повече от $3x+6x = 9x$, т.е. $13x-9x = 4x$ е 48 и $x = 48 : 4 = 12$ години.

50. Да се намери лицето на оцветената фигура на чертежа, ако страната на квадратчетата е 1 см.



Решение. Оцветената фигура се състои от четири триъгълника с лице общо $\frac{1.2}{2}+\frac{4.2}{2}+\frac{2.1}{2}+\frac{3.1}{2}=$ $7,5\ \mathrm{cm}^2$.

51. Кое е най-малкото кратно на 9 естествено число, в чийто запис участват само цифрите 1 и 3 (всяка от тях поне по веднъж)?

Решение. Сборът на цифрите на числото е най-малко 9 и не всичките са тройки. То е най-малко петцифрено и в този случай се записва с две цифри 3 и три цифри 1. Най-малкото такова число е 11133.

52. Цената на пътуване в едно такси се определя по следния начин: 2,25 лв. за първата $\frac{1}{2}$ миля и по 0,75 лв. за всяка следваща $\frac{1}{4}$ миля. Колко струва пътуване от 3 мили в това такси?

Решение. Пътуването струва $2{,}25+(2{,}5:0{,}25).0{,}75=9{,}75$ лв.

53. За футболен мач продали 100 билета. Цената на билет за възрастни е 13,50 лв, а билетът за ученици е с 20% по-евтин. Приходите от продадените билети са на стойност 1161 лв.

а) Колко ученически билета са продадени?

б) Приблизително колко процента от приходите са от продажбата на ученически билети?

Решение. а) Цената на 100 билета за възрастни е 1350 лв. и е със 189 лв. повече от получените приходи. Тъй като всеки ученически билет е с $20\%.13,50=2,70$ лв. по-евтин от билета за възрастни, то са продадени $189:2,7=70$ ученически билета.

б) Цената на ученическия билет е $13,5-2,7=10,80$ лв. Приходите от ученически билети са $\frac{70.10,8}{1161}\approx 65\%$ от приходите за мача.

54. Да се пресметне стойността на израза $(5^{-1}+6^{-1})^{-1}$.

Решение. Търсената стойност е $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)^{-1}=\frac{30}{11}$.

55. Колко килограма робуста трябва да се прибавят към 100 kg кафе, в което са смесени робуста и арабика в отношение 3 : 2, за да се получи смес, в която отношението на робуста и арабика е 4 : 1?

Решение. В първата смес има $\frac{2}{5}\cdot 100=40$ kg арабика. Те са $\frac{1}{5}$ от новата смес, т.е. тя е $5.40=200$ kg и е получена с добавяне на 100 kg робуста.

56. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(-7, 4)$ и $B(13, -11)$. Точката P от отсечката AB я разделя в отношение $AP : PB = 2 : 3$. Да се намерят координатите на точката P.

Решение. Точката P има абсциса $-7+0{,}4(13-(-7)) = 1$ и ордината $4 + 0{,}4(-11-4) = -2$.

57. Фирма предлага бисквити в цилиндрични кутии. Проучване показало, че по-добре се продават кутии с по-голям даиметър. Ако обемът на кутията се запази и диаметърът се увеличи с 27%, приблизително с колко процента трябва да се намали височината на кутията?

Решение. В началото кутията е с радиус r и височина h; след увеличението тя има радиус $1,27r$ и височина H. Обемът се запазва, т.е. $\pi r^2 h = \pi(1,27r)^2 H$, откъдето намираме $H \approx 0,62h$. Това означава, че височината трябва да се намали приблизително с 38%.

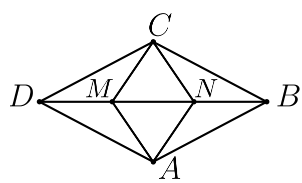
58. Иво направил седем пробни теста и пресметнал, че средноаритметичният му резултат е 80 точки. Ако средният резултат от първите три теста е 60, колко е средното аритметично на резултатите от последните четири теста?

Решение. Ако средноаритметичното от последните четири теста е x, сборът от точките на всички тестове е $3.60 + 4x = 7.80$, т.е. $x = 95$.

59. Да се намери x, ако $16^{x+3} = 2^{5x}$.

Решение. Записваме равенството във вида $2^{4(x+3)} = 2^{5x}$. Следователно $4x + 12 = 5x$, откъдето $x = 12$.

60. В ромб $ABCD$ са отбелязани точки M и N така, че $AM = AN = CM = CN = DM = BN = 1$.

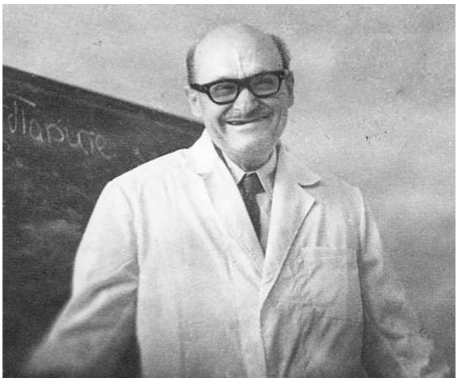


А) Ако $\sphericalangle BAD = 140^\circ$, да се намери $\sphericalangle MCN$.
Б) Ако $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AMC$, да се намери MN.
В) Ако $MN = AC$, да се намери $\sphericalangle ADC$.

Решение. Равнобедрените триъгълници ADM, DCM, BCN и ABN са еднакви по трети признак; да означим с α ъгъла при оснаовата им. Тогава ромбът $ABCD$ има ъгли 2α и $180^\circ - 2\alpha$, а $\sphericalangle MCN = 180^\circ - 4\alpha$.
а) От $\sphericalangle BAD = 180^\circ - 2\alpha = 140^\circ$ намираме $\alpha = 20^\circ$ и $\sphericalangle MCN = 100^\circ$.
б) Четириъгълникът $AMCN$ има равни страни, т.е е ромб и ъглите му са $180^\circ - 4\alpha$ и 4α. От $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AMC$ получаваме $180^\circ - 2\alpha = 4\alpha$, т.е. $\alpha = 30^\circ$. Следователно $\sphericalangle MCN = 60^\circ$, т.е. равнобедреният триъгълник MCN е равностранен и $MN = 1$.
в) От равенството на диагоналите $MN = AC$ на ромба $AMCN$ следва, че той е квадрат. От $4\alpha = 90^\circ$ следва, че $\sphericalangle ADC = 2\alpha = 45^\circ$.

ЗА ТАГИ (ПРОФ. ЯРОСЛВА ТАГАМЛИЦКИ) С ОБИЧ И УСМИВКА

Жен-И-Сен



На 11 септември 2017 г. се навършиха 100 г. от рождението на проф. Ярослав Тагамлицки, наричан с обич от студентите си Таги.

В чест на тази годишнина ФМИ-СУ „Св. Климент Охридски“ организира и проведе от 15-17 септември т.г. Юбилейна научна конференция (http://tagamlitzki-100years.fmi.uni-sofia.bg/). Съорганизатор бе ИМИ-БАН. Беше вълнуващо да се чуят спомените на побелели професори и академици, които с огромно чувство на възхищение и благодарност говореха за своя учител, за това как ги е запалил за математиката и за предаване на щафетата към следващите поколения.

Имах щастието да бъда негова студентка преди около 50 г. Ярослав Тагамлицки бе не просто един от нашите преподаватели, а легендарна фигура, с пословична работоспособност, изпълнен с любов към математиката и музиката, към историята и археологията. Преподаваше с истинска страст, превръщаше лекциите си не толкова в театър (както често казват днес съвременниците му), а в истински пърформанс според съвременната терминология, защото всяка негова лекция се характеризираше с пряко въздействие, фин хумор и провокация чрез директно въвличане на студентите в диалог. Разкази и легенди се носеха за него още докато бяхме ученици, но друго си бе да преживеем всичко от първа ръка. И до днес, като влизам в работната си стая, поглеждам с усмивка портрета му и се зареждам с нова енергия за споделяне на любовта към математиката. По-долу споделям лични спомени и истории, разказани от състуденти, по-възрастни и по-млади колеги:

Катедра „Тънки слоеве и ципи“

До аудитория 272 в СУ, където се провеждаха лекциите по диференциално и интегрално смятане (ДИС), имаше лавка за закуски.

Един ден наш състудент влезе в аудиторията със сандвич в ръка, без да очаква, че лекцията е започнала. Проф. Тагамлицики любезно го запита:

— *Другарю, какво обичате?*

— *Може ли да остана, извинете за закъснението* — беше отговорът.

– *Но тук не е катедра „Тънки слоеве и ципи“, а катедра по ДИС . . .*

Не стига, че студентът не разбра коя посока е по-правилна - навътре или навън, но трябваше да се примири и с висящия месеци наред след това надпис над лавката: **Завеждащ катедра „Тънки слоеве (масло) и ципи (салам)“**. . .

* * *

Как да помним субституциите

Най-неприятните неща за запомняне в лекциите на Таги бяха субституциите. Един ден, след като написа на дъската няколко доста сложни субституции, професорът усети леко недоволство в залата. Възви се рязко и каза:

— *Драги студенти, аз сега ще ви кажа как да запомняте субституциите.*

Всички наострихме уши и се приготвихме да записваме.

— *Запомняйте ги така, както искате!* — гласеше лаконичният съвет . . .

* * *

Формулата за успех в живота

Настъпи денят на последната ни лекция при проф. Тагамлицки. Очаквахме с вълнение и тъга последните му думи към нас:

— *Драги студенти, разделяйки се с вас искам да ви дам последната формула — формулата за успех в живота! Това е: 8 часа труд, 8 часа сън и 8 часа развлечения. Ако не спазвате тази формула, ще платите висока цена рано или късно . . .*

* * *

Числа или магарета

Акад. Любомир Илиев разказва в спомените си (. . . *И математик на този свят*) за гладното време преди 70 г., когато като асистенти с Тагамлицки във Физико-математическия факултет и други техни колеги влезли в някакво скромно заведение да споделят парче сланина. Келнерите съединили две голи маси и донесли по чаша вино на младите хора. На единия край на двете маси се разгорял спор по аксиоматични проблеми между Тагамлицки и Христо Христов (по-късно виден български физик-академик). Тихото жужене от разговорите на останалите младежи на различни математически теми било прекъснато от развълнувания глас на Тагамлицки: *Аз трябва да Ви кажа, другарю Христов, че в математиката думите нямат никакво значение. Под думата „магаре“ аз мога да разбрам едно число.* Позадрямалите посетители от съседните маси се стреснали и спогледали. Един недоумяващо промърморил: *Ама и този, че се е натряскал! Да не различава магарета от числа …*

* * *

Още една история, споделена от акад. Любомир Илиев. Звъни телефон, закачен на стената на дълъг коридор, около който са разположени стаите на катедрите по математика на СУ (от 1944 до 1948 г.) на ул. „Раковски“ 108. Всеки чака някой друг да излезе и да провери кого търсят. Най-после излиза Тагамлицки, а останалите застават пред вратите си и следят с интерес разговора. Изглежда, че позвънилият пита кой е насреща, защото Тагамлицки казва първо като на скоропоговорка фамилията си, а после я изрича на срички: „Та-гамлиц-ки“. Това още повече обърква събеседника, който очевидно не е познавал математическата колегия и вероятно е запитал: „Кой е той?“ На което Тагамлицки най-спокойно отвръща: „Това съм аз.“

* * *

Още спомени, информация, снимки, магнетофонен запис на негови лекции по анализ и музика, както и остроумия за и на проф. Тагамлицки ще намерите в следните източници:

1. Истории и остроумия, приписвани на Ярослав Тагамлицки – `http://www.tagamlitzki.com/bg/folklore.html` (16.09.2017)
2. Ярослав Тагамлицки – учен и учител – `https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/skordev/Tagamlitzki.pdf` (16.09.2017)
3. В памет на проф. Ярослав Тагамлицки – `http://www.tagamlitzki.com/bg/` (16.09.2017)
4. Жен-И-Сен (съст.) Академик Любомир Илиев – човекът (…и математик на този свят), изд. Деметра, 2013
5. Иван Чобанов, Хора като хора или още за математиката, математиците и някои други неща, изд. Софийски университет, 2005
6. Иван Ганчев, Незабравимият хумор на математиците Матеев и Тагамлицки, Стара Загора, 1994
7. Иван Димовски, За математиката и математиците, изд. Наука и изкуство, 1972 г.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви две от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Софтуерно инженерство“

Подготвя специалисти по разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер за цялата област на компютърните приложения. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер; аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрола на качеството, консултанти в бизнес организации или в публичната администрация; преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и други.

Бакалавърска програма „Статистика“

Подготвя аналитични специалисти с умения за прилагане на методите на математическата статистика, съчетани със задълбочена подготовка по математика и информационни технологии. Учебният план осигурява фундаментални познания по основните дисциплини, свързани със стохастиката. Реализация като статистици, актюери в банки и застрахователни компании, консултанти и експерти в научни институти, преподаватели във висши учебни заведения и други.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 25.09.2016 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.