# мате мати ка

БРОЙ 4
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

---



---



ISSN 0204-6881

# ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

**Задача 1.** (1 т.) Решението на уравнението $\sqrt{2x-7} = 3 - x$ е:

**А)** $\dfrac{7}{2}$ **Б)** 4
**В)** няма решение **Г)** 3

**Задача 2.** (1 т.) Ако $\lg 2, \lg(x-3), \lg(x+9)$ образуват в посочения ред аритметична прогресия, то $x$ е:

**А)** 9 **Б)** $-1$
**В)** 9 и $-1$ **Г)** няма такова $x$

**Задача 3.** (1 т.) Ъгълът между допирателната към графиката на функцията $f(x) = \sqrt{2}\cos x - \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4}{\pi}x^2$ в точката с абсциса $x = \dfrac{\pi}{4}$ и положителната посока на оста $Ox$ е:

**А)** $\dfrac{3\pi}{4}$ **Б)** $\dfrac{\pi}{2}$ **В)** $\dfrac{\pi}{4}$ **Г)** $\dfrac{\pi}{3}$

**Задача 4.** (1 т.) Даден е триъгълник със страни 3, 4 и 6. Най-големият ъгъл на триъгълника е:

**А)** остър **Б)** прав **В)** тъп $< 120^\circ$ **Г)** тъп $> 120^\circ$

**Задача 5.** (1 т.) Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, в която $AC = BC = AD = BD = CD$ и $AB = \dfrac{3}{2}AC$. Двустенният ъгъл между стените $BCD$ и $ACD$ е:

**А)** $45^\circ$ **Б)** $90^\circ$ **В)** $120^\circ$ **Г)** $135^\circ$

**Задача 6.** (5 т.) Дадено е уравнението $|x^2 - 5x| + a = ax - a^{3\log_a 2}$, където $a$ е реален параметър.

а) (2 т.) Да се реши уравнението за $a = 2$.

б) (3 т.) За кои стойности на $a$ уравнението има две различни решения, по-големи от 3?

**Задача 7.** (5 т.) Полуокръжност с радиус $r$ е вписана в правоъгълния трапец $ABCD$ като центърът ѝ $O$ лежи на голямата основа $AB$. Нека $\sphericalangle ABC = \alpha,\ \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

а) (1 т.) Докажете, че $BO = BC$.

б) (2 т.) Докажете, че $S_{ABCD} = \dfrac{r^2}{2}\dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha + 2}{\sin\alpha}$.

в) (2 т.) Докажете, че $S_{ABCD} \geq \dfrac{r^2}{2}(\sqrt{3}+2)$.

**Задача 8.** (5 т.) В пирамидата $ABCDE$ основата $ABCD$ е правоъгълник със страни $AB = \sqrt{3}$ и $BC = 1$. Ръбът $DE$ е перпендикулярен на основата, а ръбът $BE$ сключва с нея ъгъл $60^\circ$. През правата $AC$ е прекарана е равнина $\lambda$, успоредна на $BE$ и пресичаща ръба $DE$ в точката $M$.

а) (3 т.) Да се намери лицето на сечението на пирамидата $ABCDE$ с равнината $\lambda$.

б) (2 т.) Да се намери косинусът на ъгъла и разстоянието между правите $BE$ и $CM$.

## Отговори и упътвания

**1.** В; **2.** А; **3.** В; **4.** В; **5.** В.

**6.** Даденото уравнение всъщност е $|x^2 - 5x| = ax - a - 8,\ a > 0, a \neq 1$. От дефиницията на модул то се разпада на обединението от системите:

$$(1)\left|\begin{array}{l} x^2 - 5x < 0,\ x \in (0,5) \\ 5x - x^2 = ax - a - 8 \end{array}\right. \quad \cup \quad (2)\left|\begin{array}{l} x^2 - 5x \geq 0,\ x \notin (0,5) \\ x^2 - 5x = ax - a - 8. \end{array}\right.$$

а) При $a = 2$ получаваме единственото решение $x = 5$.

б) Сега системата (1) придобива вида

$$\left|\begin{array}{l} x \in (3,5) \\ x_{1,2} = \dfrac{5 - a \pm \sqrt{a^2 - 6a + 57}}{2}, \end{array}\right.$$

с единствено решение $x = \dfrac{5 - a + \sqrt{a^2 - 6a + 57}}{2}$ само при $2 < a < 7$.

Системата (2) няма отрицателни решения и има единствено решение

$$x = \frac{5 + a + \sqrt{a^2 + 6a - 7}}{2} \geq 5$$

само при $a \geq 2$. Окончателно $2 < a < 7$.

Възможни са и други подходи (по същество еквивалентни на изложения) към даденото модулно уравнение.

Да забележим, че фамилията линии $y = ax - a - 8$ представлява сноп прави, минаващи през точката $(1, -8)$, които пресичат абсцисата в точката $x(a) = \dfrac{a+8}{a}$. Ясно е, че уравнението има решение само при $x(a) \leq 5$, т. е. $a \geq 2$. За случая б) правата $y = ax - a - 8$ трябва да пресича абсцисата между пресечните ѝ точки с правите $y = 2x - 10$ и $y = 7x - 15$, откъдето $2 < a < 7$.

**7.** а) Нека $M$ е допирната точка на $BC$ до полуокръжността, а $CH$, $H \in AB$ е височина на трапеца. От еднаквостта на триъгълниците $BOM$ и $BCH$ следва, че $BO = BC$.

б) Ясно е, че височината на трапеца е радиуса на полуокръжността. За търсеното лицето например имаме $AB = AO + BO = r + \dfrac{r}{\sin\alpha}$, $CD = AB - BH$, $BH = r\operatorname{cotg}\alpha$. Тогава

$$S_{ABCD} = \frac{2AB - BH}{2}.CH = \frac{r^2}{2}\frac{2\sin\alpha - \cos\alpha + 2}{\sin\alpha}.$$

в) За да докажем исканото неравенство изследваме функцията

$$f(\alpha) = \frac{2\sin\alpha - \cos\alpha + 2}{\sin\alpha}$$

с производна $\dfrac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, откъдето $f(\alpha)$ има най-малка стойност $\sqrt{3} + 2$ за $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

**8.** а) Нека $O$ е пресечната точка на $AC$ и $BD$. Тогава $OM \parallel BE$ и значи $M$ е среда на $DE$. Търсеното сечение е $\triangle ACM$, като $AC = 2$. Нека $MN$, $N \in AC$ е височината му. Следва, че $DN \perp AC$ и от равностранния $\triangle AOD$ $DN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като $DM = \dfrac{1}{2}DE = \sqrt{3}$, то $MN = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ и търсеното лице е $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Лицето на сечението може да се изчисли и като се намерят страните му, след което се използва например формулата на Херон.

б) Търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle OMC$. С косинусова теорема за $\triangle OMC$ се получава $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

Търсеното разстояние $d$ е височината през върха $B$ в пирамидата $OBCM$. Тъй като обемът ѝ е $\dfrac{1}{4}$, $S_{OMC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, то $d = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

# ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

На 30 март – 1 април 2018 г. в Плевен и Русе се проведоха Пролетните математически състезания (ПМС). В Плевен се състезаваха учениците от 9–12 клас, а в Русе тези от 4–8 клас.

Най-добри резултати в своята възрастова група постигнаха:

*Пети клас.* Александър Гатев (София), Ванеса Калинкова (Бургас), Веселин Маркович (Варна), Добромир Ангелов (Варна), Мария Тодорова (Варна), Християн Тодоров (Бургас), Цветан Тинев (Варна), Албeрт Асенов (София), Александра Цветанова (София), Ангел Христов (Бургас), Борис Младенов (София), Борислава Радоицова (София), Георги Николов (София), Димитър Арденски (Пловдив), Емилия Иванова (Бургас), Йоана Младенова (Бургас), Лора Лукманова (София), Николай Дренчев (София), Рая Монова (София), Рени Паскалева (Варна), Сияна Майсторова (Бургас), Виктор Петков (Бургас), Иван-Асен Марваков (Бургас), Калоян Цанев (София).

*Шести клас.* Борис Гачевски (София), Давид Цаков (София), Елена Димитрова (София), Мария Дренчева (София), Симеон Дочев (София), Недко Нанков (Варна), Ясен Пенчев (Габрово).

*Седми клас.* Божидар Димитров (Силистра), Ивайла Радкова (София), Никола Цачев (София), Йово Йовчев (София), Благо Гунев (София), Цветелина Илиева (Бургас), Петя Чиликова (Бургас), Жара Еленска (В. Търново), Виктор Михайлов (София), Георги Начев (София), Димитър Сомлев (София), Иван Тагарев (София), Камелия Михайлова (Бургас), Кристина Димитрова (Бургас), Мартина Маркова (Пловдив), Михаил Банков (Плевен), Огнян Арсов (Варна), Тереза Ламбова (София), Ива Радоева (София), Иван Шилев (Пловдив), Илияс Номан (София), Мирела Бенова (Бургас), Татяна Петрова (Бургас).

*Осми клас.* Ангел Райчев (София), Мартин Копчев (Габрово), Милко Бакалов (София), Борислав Кирилов (София).

*Девети клас.* Стефан Хаджистойков (София), Диян Димитров (София), Михаела Гледачева (София), Светлин Лалов (София), Никола Стайков (София), Виктор Колев (София), Иван Георгиев (София), Йоан Найденов (София), Йордан Илиев (София), Мартин Василев (София), Кьонг Виет До (София), Маргарита Стефанова (София), Мартин Стефанов

(София), Мая Панова (София), Николай Георгиев (София), Галин Тотев (Бургас), Даниела Бенчева (София), Александър Недков (София), Анна Михалкова (София), Бояна Христова (Бургас), Валери Ванков (София), Димитър Николов (Варна), Захари Маринов (Плевен), Любен Балтаджиев (Хасково), Мартина Илиева (Русе), Ралица Симова (Бургас).

*Десети клас.* Евгени Кайряков (София), Добрин Бараков (Плевен), Димитър Опърлаков (Варна), Иво Петров (София), Кристиан Минчев (Бургас), Петър Лангов (София), Владимир Железарски (София), Мартин Димитров (София), Борис Геренски (Варна), Димитър Ангелов (София), Елена Кескинова (София), Иван Муртов (София), Мартин Германов (София).

*Единадесети клас.* Борис Барбов (София), Борислав Антов (София), Кристиян Василев (София), Орлин Кучумбов (Бургас), Георги Александров (София), Иван-Александър Мавров (София), Иво Зерков (София), Кирил Трифонов (София), Пламен Иванов (София), Чавдар Лалов (Плевен), Стефан Иванов (Бургас), Златомир Папазов (София), Никола Янакиев (София), Георги Ангелов (София), Златина Милева (Варна), Иван Кирев (София), Люба Конова (София), Никола Секулов (София), Георги Паскалев (София), Иван Дурев (София).

*Дванадесети клас.* Атанас Динев (Бургас), Кирил Бангачев (София), Димитър Любенов (София), Калоян Алексиев (София), Константин Гаров (Бургас), Симона Кукова (Варна).

Предлагаме ви условията на задачите с отговори и кратки решения.

## УСЛОВИЯ

### 5. КЛАС

**Задача 5.1.** Да се пресметне $A.0{,}5 + B.0{,}0625$, където

$$A = 20{,}18.237 : 5{,}045 + 2{,}018.26750 : 50{,}45,$$

$$B = 1\frac{1}{3} + 2\frac{4}{15} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{2}{15} + 5\frac{1}{15}.$$

**Задача 5.2.** Александър и Петър наблюдавали светофара на едно кръстовище. Точно когато пристигнали на кръстовището светнала жълтата светлина на светофара. Проследявайки работата му, те измерили по часовник, че времето на червената светлина е $\frac{3}{2}$ пъти по-малко от времето на зелената, а времето на жълтата светлина е 4 пъти по-малко от времето на червената. След като за осемнадесети път угаснала жълтата светлина, светнала зелената и двамата приятели след 17 минути престой пресекли улицата. Колко секунди свети жълтата светлина? (Светлините на светофара се редуват – червена, жълта, зелена, жълта, червена и т.н.)

**Задача 5.3.** Да се намерят последните четири цифри на числото $N = 2018{*}{*}{*}{*}$, ако $N$ е най-малкото осемцифрено число, което се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

**Задача 5.4.** Дъска $8 \times 8$ е разделена на 64 единични квадратчета, които са боядисани в бяло. Оцветете част от квадратчетата в черно така, че до всяко черно квадратче да има точно две съседни черни квадратчета, а до всяко бяло квадратче да има точно две съседни бели квадратчета и

а) броят на белите квадратчета да е равен на броя на черните;

б) белите квадратчета да са 36, а черните квадратчета да са 28;

в) белите квадратчета да са 24, а черните квадратчета да са 40.

Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.

## 6. КЛАС

**Задача 6.1.** Във всяко поле на таблица $2{\times}2$ е записано цяло число. Съседните в колона числа имат разлика 2, а съседните в ред – частно три. Намерете записаните числа.

**Задача 6.2.** От метален прът с форма на цилиндър с радиус $r$ и дължина $2kr$ ($k \in \mathbb{N}$) произвели възможно най-много метални топчета със същия радиус. От металните отпадъци отливали нов метален прът със същия радиус и отново произвели същите топчета. След четвъртото отливане се оказало, че не могат да се произвеждат повече топчета.

а) Ако металният прът е с дължина $2r$, колко пъти обемът на отпадъчният метал е по-малък от обема на топчето.

б) Намерете стойността на $k$, при която могат да се направят най-много метални топчета?

**Задача 6.3.** Сборът на три естествени числа $a < b < c$ е 2018. При деление на $b$ с $2a$ и на $c$ с $2b$ се получава частно едно и един и същи остатък. Намерете тези числа в случая, когато:

а) числото $a$ приема възможно най-голяма стойност;

б) числото $a$ приема възможно най-малка стойност.

**Задача 6.4.** Докажете, че за всяко деветнадесетцифрено число, което не съдържа цифрата 0 в десетичния си запис, може да се задраскат няколко цифри, така че полученото число да се дели на 37.

## 7. КЛАС

**Задача 7.1.** а) Намерете стойностите на параметъра $a$, за които уравнението $\big||x| + 2018 - a\big| = 2$ има три различни решения.

б) При кои стойности на параметъра $a$ уравненията

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1) \text{ и } \big||x| + 2018 - a\big| = 2$$

имат общо решение?

**Задача 7.2.** Върху страните $AD$ и $BC$ на квадрата $ABCD$ са избрани съответно точки $M$ и $N$ такива, че $AM + BN = AB$. Навън от квадрата са построени равностранните триъгълници $AMQ$, $BNT$ и $DCP$. Да се докаже, че $\triangle TPQ$ е равностранен.

**Задача 7.3.** Иван реже квадрат по права линия на две части. След това на всеки ход реже по същия начин на две части някое от парчетата. След $n$ такива рязания, Иван пресмята *височината на рязането*: на всеки триъгълник дава по 2 точки, а на всеки четириъгълник поставя по 1 точка и събира точките (височината на рязането = 2.броя на триъгълниците + броя на четириъгълниците). Съществува ли такова число $n$, че височината на рязането да е по-голяма от 2018?

*Забележка.* (бел. ред.) Много по-съдържателно е да се попита: Съществува ли такова число $n$, че каквито и разрязвания да прави Иван, след $n$ разрязвания височината на рязането да е по-голяма от 2018.

**Задача 7.4.** Върху всяка от девет картички е написано по едно цяло число между 1 и 9, като се изпълнява следното условие: колкото и картички да вземем, сумата от написаните върху тях числа да не се дели на 10. Да се докаже, че върху деветте картички е написано едно и също число.

## 8. КЛАС

**Задача 8.1.** Намерете всички прости числа $p$ и $q$, за които уравнението $x^2 + px + q = 100$ има два различни цели корена.

**Задача 8.2.** Даден е успоредник $ABCD$, за който $AB = 6$ cm и $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Окръжност $k_1$ с център във върха $A$ минава през върха

$B$. Втора окръжност $k_2$ с център точка $C$ също минава през върха $B$. Окръжност $k_3$ с произволен радиус и център точка $D$ пресича $k_1$ и $k_2$ съответно в точките $M_1$, $N_1$ и $M_2$, $N_2$. Намерете отношението $M_1N_1 : M_2N_2$.

**Задача 8.3.** Полетата на таблица $5 \times 8$ отначало са бели. На всеки ход се избира правоъгълник от три полѐта и всяко от тях се преоцветява от бяло в черно или обратно.

а) Колко най-много черни полѐта може да има в таблицата в даден момент?

б) Начертайте всички възможни постижими таблици с максимален брой черни полѐта.

в) определете минималния брой ходове, с които може да бъде получена всяка от таблиците в б).

**Задача 8.4.** Докажете, че най-малкото естествено $n$, за което равенството $50.i^n + 7.j^n = 2018k^n$ е вярно само за краен брой цели числа $i$, $j$, $k$, е $n = 3$.

## 9. КЛАС

**Задача 9.1.** Да се реши уравнението

$$x + \sqrt{x^2 + 2} = 2a + 1 + \sqrt{2ax + 2a + 3},$$

където $a$ е реален параметър.

**Задача 9.2.** Даден е правоъгълен триъгълник $ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$). Точка $O$ от средната отсечка $MN$ ($M$ е среда на $AC$, $N$ е среда на $BC$) е такава, че $\sphericalangle AOC = 90^\circ$, а точка $P$ от отсечката $AO$ е такава, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCO$. Да се докаже, че $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBO$.

**Задача 9.3.** За всяко естествено число $n \geq 10$ с десетичен запис $\overline{abcde\ldots}$ дефинираме числото $f(n) = a^b c^d e \ldots$, като считаме, че $0^0 = 1$, и, ако $n$ има нечетен брой цифри, последната е на първа степен (например $f(235) = 2^3.5 = 40$ и $f(2358) = 2^3.5^8 = 3125000$). Числото $n$ се нарича стабилно, ако $f(n) = n$.

а) Да се намерят всички стабилни естествени числа, които са по-малки от 2018.

б) Съществува ли стабилно число, по-голямо от 2018?

**Задача 9.4.** Дадени са естествени числа $n$ и $m$, за които $n \geq m \geq 2$. Група от няколко монети се нарича $n$-добра, ако в нея няма повече от $n$ монети с една и съща стойност. Число $S$ се нарича $n$-достижимо, ако в групата има $n$ монети със сбор от стойностите им, равен на $S$. Да се намери най-малката стойност на естествено число $D$, за което за всяка $n$-добра група от $D$ монети съществуват поне $m$ различни числа, които са $n$-достижими.

## 10. КЛАС

**Задача 10.1.** Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{ccccc} y & + & 2\cdot 4^{x+y-1} & = & 10 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2y-3}} & + & 2^{2-x-y} & = & 5 \end{array} \right. .$$

**Задача 10.2.** Даден е триъгълник $ABC$, вписан в окръжност $k_1$. Окръжността $k_2$ се допира до $k_1$ в точка $C$ и до страната $AB$ в точка $T$. Правата $CT$ пресича $k_1$ за втори път в точка $Q$. Правата $QN$, $N \in k_2$, е допирателна към $k_2$. Да се докаже, че окръжността, описана около $\triangle ABN$, минава през центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

**Задача 10.3.** За редицата от цели числа $A = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ означаваме с $D_m(A)$ безкрайната редица, получена от $A$ след изтриване на всеки неин $m$-ти член:

$$D_m(A) : a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m+1}, \ldots,$$

а с $S(A)$ означаваме редицата от частичните суми на $A$:

$$S(A) : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots .$$

Нека $A = (a_i)_{i=1}^{\infty}$, където $a_n = 1 + (n-1)d$ за всяко естествено число $n$ и $d$ е естествено число. Да се намерят всички $n$ и $d$, за които редицата $S(D_2(S(D_3(A))))$ съдържа числото $2^{2018}$.

**Задача 10.4.** Вж. Задача 11.4.

## 11. КЛАС

**Задача 11.1.** Да се намерят стойностите на реалния параметър $a$, за които неравенството

$$\log_{a+2-x}\left(\log_{x-a} a\right) > 0$$

има решение.

**Задача 11.2.** В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с център $O_1$, която се допира до страните му $AB$, $BC$ и $AC$ съответно в точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Външновписаната към страната $AB$ окръжност има център $O_2$ и се допира до $AB$ и продълженията на страните $AC$ и $BC$ съответно в точки $C_2$, $B_2$ и $A_2$. Нека $O_1C_1$ пресича $A_1B_1$ в точка $M$, а $O_2C_2$ пресича $A_2B_2$ в точка $N$. Да се докаже, че $C_1M = C_2N$.

**Задача 11.3.** Нека $k \in (1/2, 1)$ и $a_1 > 0$. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_{n+1} = ka_n + \frac{1-k}{a_n}$$

е сходяща и да се намери границата ѝ.

**Задача 11.4.** Съществуват ли взаимнопрости естествени числа $a$ и $b$, за които $a > 2018$, $b > 2018$ и за всяко естествено число $c > 2018$ числото $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$ има прост делител $p$ от вида $p = 3k + 2$?

## 12. КЛАС

**Задача 12.1.** Нека $I$ и $M$ са центърът на вписаната окръжност и медицентърът на $\triangle ABC$, за който $AC \neq BC$. Да се докаже, че $IM \perp AB$ тогава и само тогава, когато $AC + BC = 3AB$.

**Задача 12.2.** Нека $k \in (0, 1/2)$ и $a_1 > 0$. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_{n+1} = ka_n + \frac{1-k}{a_n}$$

е сходяща и да се намери границата ѝ.

**Задача 12.3.** Един след друг, A и B попълват с 0 или 1 някое непопълнено до този момент квадратче в последователност от 66 квадратчета. B печели, ако полученото накрая 66-цифрено число се дели на $\overline{111}$ във всяка бройна система. В противен случай печели A. Кой от двамата има печеливша стратегия, ако числото:

а) може да започва с 0;

б) не може да започва с 0?

**Задача 12.4.** Да се докаже, че за всяко естествено число $n$ съществува единствен полином $P$ от степен $n$ с реални коефициенти, за който

$$xP^2(x) - (P(x) - 1)^2$$

е нечетна функция.

## Решения

**5.1.** Имаме

$$A = \frac{2018.237}{100} \cdot \frac{1000}{5045} + \frac{2018.26750}{1000} \cdot \frac{100}{5045} = \frac{2018}{5045} \cdot (2370 + 2675) = 2018$$

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = 15 + 1 = 16$$

$$\Rightarrow \; A.0{,}5 + B.0{,}0625 = 1009 + 1 = 1010$$

**5.2.** Нека жълтата светлина свети $x$ секунди. Тогава червената светлина свети $4x$ секунди, а зелената – $\frac{3}{2} \cdot 4.x = 6x$ секунди.

Възможните подреждания са:

*Първи случай.* ж з ж ч ж з ж ч . . . *Втори случай.* ж ч ж з ж ч ж з . . .

Тъй като жълтата светлина се е появявала 18 пъти и след нея светва зелена, за да могат двете момчета да пресекат кръстовището, първият случай е невъзможен.

При втория случай имаме ж ч ж з ж ч ж з . . . – жълтите светлини са 18, червените – 9, а зелените – 8. Получаваме

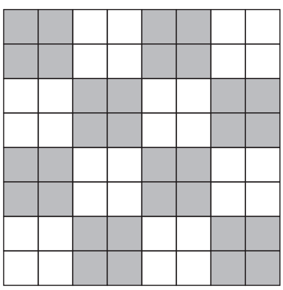
$$18x + 9.4x + 8.6x = 17.60 \iff 18x + 36x + 48x = 1020 \iff 102x = 1020,$$

откъдето $x = 10$. Жълтата светлина свети 10 секунди.

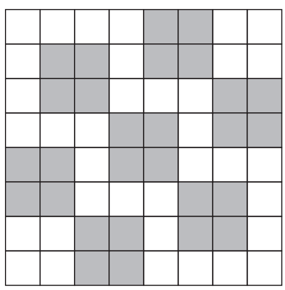
**5.3.** Щом $N$ се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то $N$ се дели на НОК$(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2520$. Тъй като $20180000 : 2520 = 8007$ (остатък 2360), трябва да допълним остатъка до 2520. Следователно $20180000 + (2520 - 2360) = 20180160$ е търсеното число.

**5.4.** Като започнем от горния ляв ъгъл с бяло квадратче и оцветяваме като спазваме условието, се получават 8 различни оцветявания. Аналогично ще получим още 8 като започнем с черно.

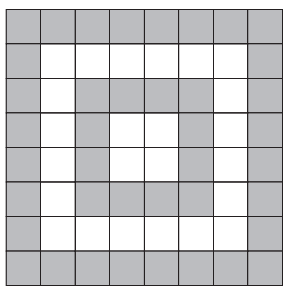
а)



б)



в)



**6.1.** Отговорите са $(-3,-3,-1,-1)$ и $(1,1,3,3)$.

Различните случаи, отговарящи на условията за първия ред и за двете колони, са посочени в четирите таблици:

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x-2$ | $3x-2$ |

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x-2$ | $3x+2$ |

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x+2$ | $3x-2$ |

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x+2$ | $3x+2$ |

Ако разменим местата на $x$ и $3x$, ще се получат симетрични таблици, които няма да доведат до нови стойности за $x$. Остава да проверим за кое $x$ е изпълнено условието във втория ред. Получаваме осем уравнения:

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x-2$ | $3x-2$ |

$3x-6=3x-2$ или $x-2=9x-6$

няма решение. $x=\frac{1}{2}$ решението не е цяло число.

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x-2$ | $3x+2$ |

$3x-6=3x+2$ или $x-2=9x+6$

няма решение. $x=-1$, числата са $-1,-1,-3,-3$.

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x+2$ | $3x-2$ |

$3x+6=3x-2$ или $x+2=9x-6$

няма решение. $x=1$, числата са $1,1,3,3$.

| $x$ | $3x$ |
|---|---|
| $x+2$ | $3x+2$ |

$3x+6=3x+2$ или $x+2=9x+6$

няма решение. $x=-\frac{1}{2}$, решението не е цяло число.

**6.2.** а) Обемът на отпадъка ще намерим като разлика от обемите на цилиндъра и кълбото. Имаме $V_ц=2r\pi r^2=2\pi r^3$, $V_к=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$

$$V_{отп.}=V_ц-V_к=2\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$$

Следователно $V_к=\frac{4}{3}\pi r^3=2\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$, т.е. обемът на отпадъчния метал е два пъти по-малък от обема на топчето.

б) Едно топче се произвежда от цилиндричен прът с радиус $r$ и дължина $2r$.

| | Брой произведени топчета $= k$ | Отпадък от предходно отливане | Брой произведени топчета $= k$ | Отпадък от предходно отливане |
|---|---|---|---|---|
| четвърто отливане | | $\frac{1}{3}V_ц$ | 0 | $\frac{2}{3}V_ц$ |
| Произведено | 1 | 0 | 2 | 0 |
| | | | или 1 | $\frac{1}{3}V_ц$ |
| трето отливане | | $3 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ | разглеждаме 2 | $6 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ |
| Произведено | 3 | 0 | 6 | 0 |
| | | | или 5 | $\frac{1}{3}V_ц$ |
| второ отливане | | $9 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ | разглеждаме 6 | $18 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ |
| Произведено | 9 | 0 | 18 | 0 |
| | | | или 17 | $\frac{1}{3}V_ц$ |
| първо отливане | | $27 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ | разглеждаме 18 | $54 \cdot \frac{1}{3}V_ц$ |
| Произведено | 27 | 0 | 54 | 0 |

Отпадъкът има обем равен на $\frac{1}{3}V_ц$ при означенията от а). При четвъртото отливане е останал отпадък по-малък от обема на цилиндър с обем $V_ц$, следователно $\frac{1}{3}V_ц$ или $\frac{2}{3}V_ц$. По-голям отпадък остава от производството на повече топчета, което искаме да намерим. Задачата ще решим отзад напред, като при различните случаи ще разглеждаме тези, при които са произведени повече топчета.

Както се вижда от горната таблица, ако $k > 54$ след четвъртото отливане ще остане поне още $\frac{1}{3}V_ц$ и ще може да се произведе ново топче.

**6.3.** Означаваме с $r$ остатъка при описаните деления. Тогава $b = 2a + r$ и $c = 2b + r$. От първото равенство имаме $2b = 4a + 2r$, откъдето $c = 4a + 3r$. Сега

$$a + b + c = a + 2a + r + 4a + 3r = 7a + 4r = 2018.$$

Следователно $a$ е четно число. Тъй като $0 \leqq r < 2a$, ако $r = 2a - 1$, то $2018 \leqq 15a - 4$, откъдето $a \geqq 134$.

а) От ограничението $7a \leqq 2018$ следва, че възможно най-голямата стойност на $a$ е 288, но тогава $r = \dfrac{1}{2}$. Следващата възможна стойност е $a = 286$, при която $r = 4$. Следователно $a = 286$ е търсената възможно най-голяма стойност. Тогава $b = 576$, $c = 1156$.

б) От $a \geqq 134$ с проверка отхвърляме $a = 134$ (тогава $r = 271 > 2a$) и $a = 136$ (тогава $r$ не е цяло).

При $a = 138$, намираме $b = 539$ и $c = 1341$.

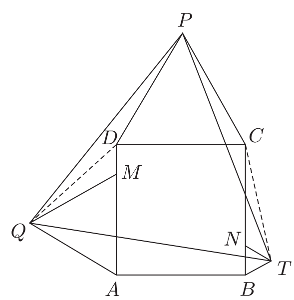
**6.4.** Тъй като 37 дели 111, то 37 дели и $a.111 = \overline{aaa}$. За записа на числата са използвани цифрите 1, 2, …, 9 (9 цифри). За запис на деветнадесетцифрено число са необходими 19 цифри, следователно от принципа на Дирихле ще има цифра, която е записана поне 3 пъти. Нека означим тази цифра с $a$. Задраскваме всички цифри без трите цифри $a$. Остава $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$. Полученото число отговаря на условието.

**7.1.** а) Даденото уравнение се свежда до $|x| = a - 2016$ и $|x| = a - 2020$. Двете уравнения имат точно три различни решения, ако едното има един корен, а другото – две различни решения или ако и двете уравнения имат по две решения, от които едното е общо. След разглеждане на случаите се оказва, че $a = 2020$.

б) Второто уравнение се свежда до $(x+1)(x^2+x+1) = 0$. Единственият корен на второто уравнение е $x = -1$.

Първото уравнение при $a = 2017$ има решение $x = 1$ и $x = -1$ и при $a = 2021$ има решение $x = 1$, $x = -1$, $x = 5$ и $x = -5$. Общият им корен е $x = -1$.

**7.2.** Построяваме отсечките $QD$ и $TC$. Тогава $\triangle DQM \cong \triangle TCN$ по първи признак. Следователно $DQ = TC$, $\sphericalangle DQM = \sphericalangle TCN = \alpha$. Имаме $\sphericalangle PDQ = 150^\circ + \alpha$, $\sphericalangle PCT = 150^\circ + \alpha$, оттук $\triangle PQD \cong \triangle PTC$ (по първи признак). Тогава $\triangle PQT$ е равнобедрен ($PQ = PT$) и тъй като $\sphericalangle QPT = \sphericalangle DPC = 60^\circ$, следователно $\triangle TPQ$ е равностранен.




**7.3.** Нека $a$ е броят на триъгълниците, а $b$ е броят на четириъгълниците при рязането. Да означим с $S_n$ броят на върховете на получените парчета след $n$-тото рязане.

С всяко рязане по права линия броят на върховете расте с най-много 4 и получените многоъгълници са изпъкнали. Следователно

$$S_n \leqq 4 + 4n.$$

От друга страна броят на върховете

$$S_n \geqq 3.a + 4.b + 5(n+1-a-b).$$

Тогава

$$4 + 4n \geqq 3a + 4b + 5(n+1-a-b) \Rightarrow 2a + b \geqq n+1,$$

т.е. след 2017 рязания височината на рязането ще е по-голяма или равна на 2018.

**7.4.** Нека написаните числа са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$. Допускаме, че върху картичките са написани поне две различни числа $a_1 \neq a_2$. Да разгледаме сумите:

$S_1 = a_1,$
$S_2 = a_1 + a_2,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
$\ldots$
$S_9 = a_1 + a_2 + \cdots + a_9.$

Ако последната цифра на някои от тези суми е 0, получаваме противоречие с условието.

Ако две различни суми завършват на една и съща цифра, от по-голямата сума изваждаме по-малката сума и получаваме отново противоречие с условието.

Остава случая, когато всички последни цифри на сумите $S_1, S_2, \ldots S_9$ са всички различни цифри от 1 до 9. Значи някоя от сумите (например $S_k$) завършва на $a_2$ и това не е $S_1$. Тогава $S_k - a_2$ се дели на 10 и отново получаваме противоречие с условието.

Следователно допускането, че има две различни числа $a_1 \neq a_2$ не е вярно, значи на всички картички е написано едно и също число.

**8.1.** Сумата и произведението на корените не могат да са нечетни едновременно, следователно поне един от коефициентите $p$ и $q$ е равен на 2.

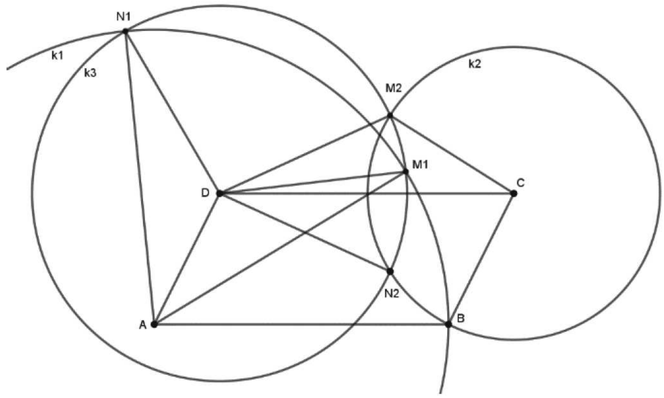
– При $p = q = 2$ , уравнението $x^2 + 2x - 98 = 0$ няма цели корени;

– Нека $q = 2$, $p$ е нечетно. Корените на уравнението $x^2 + px = 98$ са с различни знаци и ще търсим положителния. В равенството $x(x+p) = 98$ множителите са с различна четност. $98 = 2.7^2$ и следователно $p = 7, 47, 97$.

– Нека $p = 2$, $q$ е нечетно. Уравнението е: $(x+1)^2 = 101 - q$, т.е. $101 - q$ е четен точен квадрат и може да бъде: 64, 36, 16 или 4. След проверка, решенията са $q = 37$ или 97.

*Отговор.* $(p, q) = (2, 37);\ (2, 97);\ (7, 2);\ (47, 2);\ (97, 2).$

**8.2.** По трети признак за еднаквост на триъгълници имаме $\triangle ADM_1 \cong \triangle CM_2D$.




Следователно тези триъгълници имат равни лица. $\triangle DM_1N_1$ е равнобедрен и $M_1N_1$ е удвоеното разстояние от точка $M_1$ до $AD$, т.е. дължината на $M_1N_1$ е два пъти по-голяма от височината в $\triangle ADM_1$. Аналогично дължината на $M_2N_2$ е два пъти по-голяма от височината към страната $CD$ в $\triangle CM_2D$. Следователно $M_1N_1 : M_2N_2 = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

**8.3.** Да номерираме полетата, както следва:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |

При всеки ход се променя цветът на точно по едно поле с 1, 2 и 3, така че броят на черните полета от всеки вид трябва да е еднакъв. Но има 14 полета от вид 2 и по 13 от останалите видове, така че поне едно поле от вид 2 ще е бяло. Ако това поле е единствено, то трябва да носи номер 2 и при двете номерации, а такива са само полетата в ред 3, колони 3 или 6.

Всяко поле с номер 1 трябва да бъде преоцветено, така че са нужни поне 13 хода. В долната таблица е показано как може получим бяло поле само в ред 3, колона 3 с 13 хода (правоъгълниците са обозначени с 13 различни букви):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $c$ | $d$ | $e$ | $e$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | | $c$ | $d$ | $k$ | $k$ | $k$ |
| $g$ | $h$ | $i$ | $i$ | $i$ | $l$ | $l$ | $l$ |
| $g$ | $h$ | $j$ | $j$ | $j$ | $m$ | $m$ | $m$ |

Аналогично постъпваме за полето в ред 3, колона 6.

*Отговор.* а) 39 черни полета; б) таблица от черни полета, освен полето в ред 3, колони 3 или 6; в) 13 хода.

**8.4.** При $n = 1$ има безбройно много решения, например $i = 37m$, $j = 24m$, $k = m$ за всяко цяло $m$. При $n = 2$ има безбройно много решения, например $i = 19m$, $j = 4m$, $k = 3m$ за всяко цяло $m$. Нека $n = 3$. Явно $(0; 0; 0)$ е решение. Да допуснем, че има и друго решение; след съкращаване на най-големия общ делител на $k$, $m$, $n$ можем да считаме, че той е 1. При деление с 7 остатъците на точните трети степени могат да са само 0 и $\pm 1$. Понеже 2018 дава остатък 2 при деление на 7, равенство по модул 7 може да има само ако $k$ и $n$ се делят на 7. Но тогава $7m^3$ се дели на $7^3$, така че и $m$ се дели на 7: противоречие.

**9.1.** Уравнението има смисъл при $2ax + 2a + 3 \geq 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{x^2+2} = 2a + 1 + \sqrt{2ax+2a+3} \\ \iff\quad & \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2ax+2a+3} = 2a + 1 - x \\ \iff\quad & \frac{x^2 - 2ax - 2a - 1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2ax+2a+3}} = 2a + 1 - x \\ \iff\quad & \frac{(x+1)(x-2a-1)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2ax+2a+3}} = 2a + 1 - x. \end{aligned}$$

При $x = 2a+1$ получаваме решение, защото $2a(2a+1)+2a+3 = 4a^2+4a+3 = (2a+1)^2 + 2 > 0$. При $x \neq 2a + 1$ достигаме до уравнението

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2ax+2a+3}} + 1 = 0,$$

което няма решение. Действително, при $x \geq -1$ лявата страна очевидно е положителна, а при $x < -1$ имаме

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2ax+2a+3}} > \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} > \frac{x+1}{|x|} > -1$$

(последното е еквивалентно на $x+|x|+1 > 0$, което очевидно е изпълнено).

Окончателно, за всяко реално $a$ уравнението има единствено решение $x = 2a + 1$.

**9.2.** Тъй като $OM$ е медиана в правоъгълния $\triangle AOC$, имаме $\sphericalangle OAC = \sphericalangle AOM$. Оттук и от $MN \| AB$ имаме $2\sphericalangle OAM = \sphericalangle OMC = \sphericalangle BAC := \alpha$. Следователно $\sphericalangle OAC = \sphericalangle AOM = \dfrac{\alpha}{2}$. Тогава имаме $\sphericalangle BCO = 90^\circ - \sphericalangle ACO = \sphericalangle OAC = \dfrac{\alpha}{2}$ и от условието следва, че $\sphericalangle ACP = \dfrac{\alpha}{2}$.

От $\sphericalangle ACP = \sphericalangle PAC = \dfrac{\alpha}{2}$ следва, че $\triangle APC$ е равнобедрен. Тогава $PM$ е медиана и височина, т.е. $PM \perp AC$, откъдето $PM \| BC$.

Нека правата $MP$ да пресича $AB$ в точка $K$. Тогава $MK$ е средна отсечка в $\triangle ABC$. Освен това $\triangle AKP \sim \triangle CNO$ по първи признак. Следователно $\triangle ABP \sim \triangle CBO$, защото $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BCO = \dfrac{\alpha}{2}$ и от $\dfrac{AP}{AK} = \dfrac{CO}{CN}$ следва $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{CO}{CB}$. От последното подобие получаваме исканото $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBO$.

*Забележка.* Допълнителното построение може да се избегне с намиране на подобието $\triangle PCO \sim \triangle ABC$.

**9.3.** а) Отговор – няма такива!

Ако $n = \overline{abc}$ е стабилно трицифрено число, то $100a + 10b + c = a^b c \iff 10(10a + b) = (a^b - 1)c$. Очевидно $a \geq 2$, $b \geq 2$ и $c > 0$ (иначе $a^b.c \leq ac \leq 81$). Ще разгледаме различните възможности за $b$.

При $b \geq 5$ имаме $999 \geq n \geq 4^5.c \geq 1024$ при $a \geq 4$. Ако $a = 2$, получаваме $10(20 + b) = (2^b - 1)c$, където $c$ очевидно е четно и значи $5 | 2^b - 1$, т.е. $b = 8$ (показателят на 2 по модул 5 е 4) и $280 = 255c$, противоречие. Ако $a = 3$, имаме $(3^b - 1)c = 10(30 + b) \in [350, 390]$, откъдето $b = 5$ и $350 = 242c$, противоречие. Следователно $b \in \{2, 3, 4\}$.

При $b = 2$ получаваме $20(5a + 1) = (a^2 - 1)c$, откъдето $5 | a^2 - 1$, т.е. $a = 4$ или 6 или $5 | c$, т.е. $c = 5$. И в двата случая нямаме решение. Аналогично се отхвърля и случаят $b = 3$ (само $a = 6$ или $c = 5$). При $b = 4$ получаваме $20(5a + 2) = (a^4 - 1)c$. Ако $a$ е четно, то $8 | c$, т.е. $c = 8$ и нямаме решение. Ако $a$ е нечетно, имаме противоречие по модул 8.

Ако $n = \overline{abcd}$ е стабилно четирицифрено число, ненадминаващо 2018, то $n = c^d$. Възможностите за последното в интервала $[1000, 2018]$ са $4^5 = 1024$ и $6^4 = 1296$ (ясно е, че има максимум една степен на цифра в този интервал) и те не водят до решение.

б) Да, $n = 2592 = 2^5.9^2$.

*Забележка.* Понятието стабилно число в смисъла на тази задача е въведено от Конуей през 2007 г. Освен едноцифрените числа и 2592 е известно още само едно стабилно число, а именно

$$24547284284866560000000000.$$

Известно е още, че няма други стабилни числа, по-малки от $10^{100}$.

**9.4.** Да разгледаме група от $n + m - 2$ монети, в която има $n$ монети от 1 лев и $m - 2$ монети от 2 лева. Всяко $n$-достижимо число има вида $x + 2y$, където $x$ е броя на монетите от 1 лев, а $y$ е броя на монетите от 2 лева и $x+y=n$. Следователно $x+2y=n+y$. Тъй като монетите от 2 лева са $m-2$, то $y$ може да приема стойности $0,1,2,\dots,m-2$, т.е. $m-1$ стойности. Следователно $n$-достижимите числа са $m-1$, т.е. $D>n+m-2$.

Да разгледаме произволна група от $n+m-1$ монети и да ги подредим по големина:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n+m-1}.$$

За всяко $i=1,2,\dots,m$ да разгледаме сборовете

$$S_i = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{n+i-1}.$$

Тъй като групата е $n$-добра, то не може да има $n+1$ последователни равни числа. Това означава, че $a_{n+i} > a_i$ за всяко $i=1,2,\dots,m-1$. Понеже $S_{i+1}-S_i = a_{n+i}-a_i > 0$, то

$$S_i < S_{i+1} < \cdots < S_m.$$

Следователно числата $S_1, S_2, \dots, S_m$ са различни и са $n$-достижими, т.е. $D=m+n-2$.

**10.1.** Да запишем системата във вида

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2y-3 & + & 4^{x+y} & = & 17 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2y-3}} & + & \dfrac{4}{2^{x+y}} & = & 5 \end{array} \right. .$$

Полагаме $u=\sqrt{2y-3}$ и $v=2^{x+y}$, $u\ge 0, v>0$ и получаваме

$$\left| \begin{array}{ccccc} u^2 & + & v^2 & = & 17 \\ \dfrac{1}{u} & + & \dfrac{1}{v} & = \dfrac{5}{4} & \end{array} \right. ,$$

т.е. $(u+v)^2-2uv=17, u+v=\dfrac{5}{4}uv$.

Ако $X=uv$, то получаваме

$$\frac{25}{16}X^2-2X-17=0$$

с корени $X_1=4$ и $X_2=-\dfrac{68}{25}$. Тъй като $uv\ge 0$, то вторият корен не води до решение. Оттук получаваме $u+v=5, uv=4$, т.е. $u,v$ са корени на уравнението $Y^2-5Y+4=0$. Това води до два случая,

$$\text{(i)} \quad u=4, v=1, \qquad \text{(ii)} \quad u=1, v=4,$$

от които получаваме решенията (i) $x = -\dfrac{19}{2}, y = \dfrac{19}{2}$ и (ii) $x = 0, y = 2$.

**10.2.** От пресмятане на $\sphericalangle BAC$ чрез дъги в $k_2$ следва, че дъгите в тази окръжност, отговарящи на $\sphericalangle ACT$ и $\sphericalangle BCT$, са равни, т.е. $CT$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Тогава $Q$ е среда на дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от $k_1$ и $QA = QB = QI$, където $I$ е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Ще докажем, че $QN = QI$, откъдето исканото следва.

Имаме $QN^2 = QT.QC$ и остава да изразим $QT$ и $QC$. От $\triangle ACT \sim QCB$ получаваме $QC = \dfrac{AC.QB}{AT}$, а от $\triangle BTQ \sim \triangle CTA$ имаме $QT = \dfrac{QB.AT}{AC}$. Умножаването на последните две равенство дава $QN = QI$.

**10.3.** Нека редицата $A$ има исканото свойство. Да означим с $B = (b_i)_{i=1}^{\infty}$ редицата $S(D_3(A))$. Тогава

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= (a_1 + a_4 + \ldots + a_{3k+1}) + (a_2 + a_5 + \ldots + a_{3k-1}) \\ &= \frac{(2a_1 + k \cdot 3d)(k+1)}{2} + \frac{(2a_2 + (k-1) \cdot 3d)k}{2} \\ &= 2k + 1 + (3k^2 + k)d. \end{aligned}$$

Нека по-нататък $C = S(D_2(B)) = (c_i)_{i=1}^{\infty}$. Тогава

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1 + (3k^2 + k)d) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + 3d \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + d \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= n^2 + 3d\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + d\frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2(1 + (n-1)d). \end{aligned}$$

Следователно $(1+(n-1)d)n^2 = 2^{2018}$ за някои естествени $n$ и $d$. Тогава $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, откъдето

$$(2^t - 1)d = 2^{2018-2t} - 1.$$

Следователно $2^t - 1$ дели $2^{2018-2t} - 1$, което означава, че $t$ дели $2018 - 2t$. Сега е ясно, че $t$ е едно от числата 1, 2, 1009, 2018. Тъй като $2018 - 2t > 0$, имаме $t = 1$ или 2. Това дава решенията

$$n = 2, d = 2^{2016} - 1, \quad n = 4, d = \frac{2^{2014} - 1}{3}.$$

**11.1.** Допустимите стойности са $a > 0$, $x \in (a, a+2)$, $x \neq a+1$ и $\log_{x-a} a > 0$.

1. При $x \in (a, a+1)$ имаме $a+2-x > 1$ и $x-a < 1$. Неравенството е еквивалентно на

$$a < x - a \iff x > 2a.$$

За да има решение неравенството трябва $2a < a+1$, т.е. $0 < a < 1$.

2. При $x \in (a+1, a+2)$ имаме $a+2-x < 1$ и $x-a > 1$. Неравенството е еквивалентно на

$$0 < \log_{x-a} a < 1,$$

откъдето получаваме

$$1 < a < x - a.$$

За да има решение неравенството трябва $1 < a$ и $2a < a+2$, т.е. $1 < a < 2$.

Окончателно търсените стойности са $0 < a < 2, a \neq 1$.

**11.2.** Ако $AC = BC$, то поради $AB_1 = AB_2 = BA_1 = BA_2$ отсечката $AB$ е средна отсечка в трапеца $B_2A_2A_1B_1$. Тогава точките $C_1$ и $C_2$ съвпадат и $C_1$ е среда на $MN$.

Нека $AC > BC$ и да означим пресечните точки на $AB$ с $A_1B_1$ и $A_2B_2$ съответно с $P$ и $Q$. От $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ Следва, че $\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BQA_2$ и $\sphericalangle AB_1P + \sphericalangle BA_2Q = 180^\circ$. Сега от $AB_1 = AC_1 = BC_1 = BA_2$ следва, че

$$AP = \frac{AB_1 \sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{BA_2 \sin(180^\circ - \psi)}{\sin\varphi} = BQ,$$

откъдето $PC_1 = QC_2$. Следователно $\triangle PC_1N \cong \triangle QC_2N$, т.е. $C_1N = C_2N$.

**11.3.** Имаме, че

$$a_{n+1} - a_n = (1-k)(1/a_n - a_n), \quad a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)(k - (1-k)/a_n).$$

Понеже $m = (1-k)/k \in (0,1)$, по индукция следва, че:

ако $a_1 \geq 1$, то $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 1$;

ако $0 < a_1 \leq m$, то $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 1$;

ако $m < a_1 < 1$, то $a_1 < a_2 < \cdots < 1$.

Значи редицата $a_2, a_3 \ldots$ е монотонна и ограничена, и следователно е сходяща. За границата ѝ $l$ имаме, че $l = kl + (1-k)/l$, откъдето $l = 1$.

**11.4.** Да допуснем, че такива $a$ и $b$ съществуват и да изберем $c = a + b$. Тогава

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = (a^2 + ab + b^2)^2.$$

Нека $p = 3k+2$ е просто число, което дели $a^2+ab+b^2$. Ако $p|a$, то $p|b^2$, т.е. $p$ е общ делитер на $a$ и $b$, противоречие. Следователно $p$ не дели нито $a$, нито $b$.

Имаме $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$. Следователно $a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p}$, а от друга страна $a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod{p}$ (от теоремата на Ферма). От последните две сравнения получаваме $a \equiv b \pmod{p}$. Тъй като $p$ дели $a^2+ab+b^2$, то $p$ дели $3a^2$. Понеже $p = 3k+2 \neq 3$, то $p$ дели $a$ и $b$, противоречие.

**12.1.** *Първо решение.* Нека $D$ и $E$ са проекциите на $C$ и $I$ върху правата $AB$, а $F$ е средата на страната $AB$. Тогава

$$(1) \qquad IM \perp AB \Leftrightarrow ME||CD \Leftrightarrow FD = 3FE.$$

Ще следваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Можем да считаме, че $a < b$. Тогава

$$(2) \qquad FE = AE - AF = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2},$$

$$(3) \qquad FD = AD - AF = b\cos\alpha - \frac{c}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{b^2-a^2}{2c}.$$

От (1), (2) и (3) следва, че $IM \perp AB \Leftrightarrow a+b = 3c$.

*Второ решение.* Нека $C_1 = CI \cap C_1$, а $A_1$ и $B_1$ са такива точки съответно върху страните $BC$ и $AC$, че $AB_1 = AC_1$ и $BA_1 = BC_1$. Понеже $AI$ и $BI$ са симетрали на $B_1C_1$ и $A_1C_1$, то $I$ е центърът на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$. Следователно $IC_2 \perp A_1B_1$, където $C_2$ е средата на $A_1B_1$. От друга страна,

$$\frac{AB_1}{BA_1} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}$$

и значи $A_1B_1||AB$. Тогава $IC_2 \perp AB$ и $C_2 = CM \cap A_1B_1$. Понеже $AC \neq BC$, то $I \notin CM$. Следователно

$$IM \perp AB \Leftrightarrow C_2 = M \Leftrightarrow \frac{AC}{3} = AB_1 = AC_1 = \frac{AB.AC}{AC+BC}$$
$$\Leftrightarrow AC + BC = 3AB.$$

*Забележка.* Друго решение се получава, ако се използва, че $MI \perp AB$ влече, че $AM^2 - r^2 = (p-a)^2 BM^2 - r^2 = (p-b)^2$.

**12.2.** *Първо решение.* Да допуснем, че не съществува $n$, за което $a_n \in [1, m]$, където $m = (1-k)/k > 1$. Тогава от

$$(1)\ a_{n+1} - a_n = (1-k)(1/a_n - a_n), \quad (2)\ a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)(k - (1-k)/a_n)$$

по индукция следва, че $a_2 > a_3 > \cdots > m$ и значи редицата е сходяща. За границата ѝ $l$ имаме, че $l = kl + (1-k)/l$, откъдето $l = 1$, което е противоречие.

По-нататък можем да считаме, че (3) $a_1 \in [1, m]$. От (2) и

$$(4)\ a_{n+2} - a_n = k(1-k)(1-a_n^2)(1/a_n + 1/a_{n+1})$$

по индукция следва, че (5) $a_1 \geq a_3 \geq \cdots \geq 1$ и $a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq 1$. Значи тези две подредици са сходящи и от (4) заключаваме, че (6) $a_n \to 1$.

*Второ решение.* (Стефан Герджиков) Да разгледаме разликите $a_n - 1/a_n$. Директно заместване в рекурентната зависимост показва, че:

$$a_{n+1} - 1/a_{n+1} = (a_n - 1/a_n)(k - (1-k)/(ka_n^2 + 1 - k)).$$

Коефициентът в скобите е между $k-1$ (при $a_n \to 0$ ) и $k$ (при $a_n \to \infty$). Следователно:

$$|a_{n+1} - 1/a_{n+1}| < \max(k, 1-k)|a_n - 1/a_n|.$$

Нека $c = \max(k, 1-k) \in (0;1)$. Оттук $|a_{n+m} - 1/a_{n+m}| < c^m |a_n - 1/a_n|$ и значи $|a_n - 1/a_n| \to 0$. Накрая от $a_{n+1} - a_n = (1-k)(a_n - 1/a_n)$ получаваме, че:

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n| &= (1-k)\left|\sum_i a_{n+i} - 1/a_{n+i}\right| \\ &\leq (1-k)\sum_i c^i |a_n - 1/a_n| \\ &< (1-k)/(1-c)|a_n - 1/a_n|. \end{aligned}$$

Следователно $(a_n)$ е редица на Коши и има граница (тъй като $\mathbb{R}$ е пълно метрично пространство). Границата се смята директно.

**12.3.** Ако числото е $a_0 a_1 \dots a_{64} a_{65}$, то B печели, когато $x^2 + x + 1$ дели $a_0 x^{65} + a_1 x^{64} + \cdots + a_{64} x + a_{65}$ за всяко цяло число $x \geq 2$. Понеже $x^2 + x + 1$ дели $x^{n+3} - x^n$, това означава, че $c(x) = \dfrac{C_0 x^2 + C_1 + C_2}{x^2 + x + 1}$ е цяло число, където

$$C_0 = a_0 + a_3 + \cdots + a_{63},\ C_1 = a_1 + a_4 + \cdots + a_{64},\ C_2 = a_2 + a_5 + \cdots + a_{65}.$$

Тъй като $|c(x) - C_0| < 1$ при $x \geq \max\{|C_1 - C_0|, |C_2 - C_0|\}$, то B печели, ако $C_0 = C_1 = C_2$.

а) B печели при следната стратегия: след попълнена от A цифра $a$ от групата (със сума) $C_i$, попълва с $1 - a$ цифра от същата група (накрая $C_0 = C_1 = C_2 = 11$).

б) А печели при следната стратегия: никога не попълва $a_0$, отначало и след ход на В в $C_0$ попълва 1 в същата група (ако тя не е запълнена), а иначе попълва попълва 0 в $C_1 \cup C_2$ (накрая $C_0 \geq 12 > \min\{C_1, C_2\}$).

**12.4.** Нека $P(x) = Q(x^2) + xR(x^2)$ е полином, изпълняващ условието на задачата, което ще бележим с (1). Тъй като

$$xP^2(x) - (P(x) - 1)^2 = -(Q(x^2) - 1)^2 - x^2R^2(x^2) + 2x^2Q(x^2)R(x^2)$$

$$+x[Q^2(x^2) + x^2R^2(x^2) - 2Q(x^2)R(x^2) + 2R(x^2)],$$

това означава, че

$$(2) \quad (Q(x) - 1)^2 + xR^2(x) - 2xQ(x)R(x) = 0.$$

Оттук лесно следва, че $\deg Q = \deg R$ или $\deg Q = \deg R + 1$. Значи, ако $\deg P = 2n - 1$, то $\deg Q = \deg R = n - 1$, а ако $\deg P = 2n$, то $\deg Q = \deg R + 1 = n$.

По-нататък ще използваме метода на безкрайното спускане.

Нека $\deg P = 2n$. От формулите на Виет следва, че $f(x) = -Q(x) + 2xR(x) + 2$ и $R(x)$ изпълняват (2), като $Q(x)f(x) = xR^2(x) - 1$. В частност, $\deg f = n - 1$. Значи полиномът $g(x) = f(x^2) + xR(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg g = 2n - 1$ (защо?).

По подобен начин се вижда, че ако $\deg P = 2n-1$ и $h(x) = 2Q(x)-R(x)$, то полиномът $g(x) = Q(x^2) + xh(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg g = 2n - 2$.

Продължавайки по този път, накрая ще достигнем до константен полином $P_0$, изпълняващ (1), т.е. до $P_0 = 1$.

Обратно, ако $Q_0 = 1$, $R_0 = 0$,

$$Q_{2n-1} = Q_{2n-2},\ R_{2n-1} = 2Q_{2n-2} - R_{2n-2},$$

$$Q_{2n} = 2xR_{2n-1} + 2 - Q_{2n-1},\ R_{2n} = R_{2n-1},$$

то $P_n(x) = Q_n(x^2) + xR_n(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg P_n = n$.

С това задачата е решена.

*Задачите са предложени от:* 5.1 и 5.3 – Иван Ангелов; 5.2 – Катя Чалъкова; 5.4 и 7. 4 – Емил Карлов; 6.1, 6.2 и 6.4 – Велислав Йончев; 6.3 – Таня Тонова; 7.1 и 7.3 – Йовка Николова; 7.2 – Юлиан Цветков; 7.4 – Емил Карлов; 8.1 и 8.2 – Гергана Николова; 8.3 и 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 и 10.2 – Диана Данова; 9.3 – Петър Бойваленков; 10.1 и 10.3 – Иван Ланджев; 9.4, 10.4(11.4) и 11.2 – Александър Иванов; 11.1 – Емил Колев; 11.3, 12.1, 12.2, 12.3 и 12.4 – Николай Николов.

# ВСЕРУСИЙСКА ОЛИМПИАДА 2018

Петър Бойваленков (ИМИ–БАН, София),
Асен Божилов (ФМИ–СУ, София)

На 23–28.04.2018 г. в Екатеринбург се проведе заключителният етап на тазгодишната Всерусийската олимпиада по математика. В рамките на традиционното сътрудничество между България и Русия в олимпиадата участва и наш отбор.

Българския отбор беше определен след контролни състезания на 9–10 април, които се проведоха в Института по математика и информатика на БАН – Иван-Александър Мавров (СМГ), Борис Барбов (СМГ), Орлин Кучумбов (ППМГ Бургас), Иво Петров (СМГ), Петър Лангов (СМГ) и Стефан Хаджистойков (СМГ). Ръководители на отбора бяха пишещите тези редове.

Въпреки непривичните за нашите ученици теми, те се справиха отлично, като Иво Петров стана победител*, Петър Лангов, Орлин Кучумбов и Борис Барбов са призьори, а Иван-Александър Мавров и Стефан Хаджистойков получиха грамоти. Резултатите ни по задачи са в следващата таблица.

| Клас | Име/Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Общо |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | Стефан Хаджистойков | 2 | 1 | 0 | 2 | 7 | 7 | 7 | 7 | 32 |
| 10 | Иво Петров | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 0 | 48 |
| 10 | Петър Лангов | 7 | 7 | 6 | 0 | 7 | 7 | 7 | 0 | 41 |
| 10 | Орлин Кучумбов | 7 | 7 | 5 | 0 | 7 | 7 | 7 | 0 | 40 |
| 10 | Борис Барбов | 7 | 7 | 4 | 0 | 7 | 7 | 1 | 0 | 33 |
| 11 | Иван-Александър Мавров | 7 | 6 | 1 | 0 | 7 | 7 | 0 | 0 | 28 |

Предлагаме ви условията и решения на задачите от олимпиадата.

**Задача 9.1.** (А. Голованов) Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е безкрайна строго растяща редица от естествени числа, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ е редица от прости числа, такава, че $a_n$ се дели на $p_n$ за всяко естествено $n$. Оказало се, че за всички естествени $n$ и $k$ е в сила равенството $a_n - a_k = p_n - p_k$. Да се докаже, че всички числа $a_1, a_2, \ldots$ са прости.

**Задача 9.2.** (И. Богданов) Окръжност $\omega$ се допира до страните $AB$ и $AC$ на триъгълника $ABC$. Окръжност $\Omega$ се допира до страната $AC$, до продължението на страната $AB$ след точка $B$ и до $\omega$ в точка $L$, лежаща на

*На Всерусийска олимпиада се връчват три вида награди – победител, призьор и почетна грамота.

страната $BC$. Правата $AL$ пресича за втори път $\omega$ и $\Omega$ съответно в точките $K$ и $M$. Оказало се, че $KB \parallel CM$. Да се докаже, че триъгълникът $LCM$ е равнобедрен.

**Задача 9.3.** (С. Берлов, А. Храбров) Нека $a_1, \ldots, a_{25}$ са цели неотрицателни числа, а $k$ е най-малкото от тях. Да се докаже, че

$$[\sqrt{a_1}\,] + [\sqrt{a_2}\,] + \cdots + [\sqrt{a_{25}}\,] \geq \left[\sqrt{a_1 + \cdots + a_{25} + 200k}\,\right].$$

(Както обикновено, със $[x]$ се означава цялата част на числото $x$, т.е. най-голямото цяло число, ненадминаващо $x$.)

**Задача 9.4.** (С. Берлов, А. Сафиуллина) На дъска $n \times n$ са отбелязани няколко клетки така, че лявата долна $(L)$ и дясната горна $(R)$ ъглови клетки не са отбелязани. Известно е, че всеки път на шахматен кон от $L$ до $R$ непременно съдържа отбелязана клетка. Да се намерят всички $n > 3$, за които със сигурност може да се твърди, че съществуват три клетки, лежащи последователно на един и същи диагонал, поне две от които са отбелязани?

**Задача 9.5.** (С. Берлов) Върху окръжност са отбелязани 99 точки, които я разделят на 99 равни дъги. Петя и Вася играят игра, редувайки се. Първи започва Петя, като оцветява в червено или синьо някоя от отбелязаните точки. След това всеки от играчите на своя ход може да оцвети в червено или синьо неоцветена дотогава отбелязана точка, която е съседна на вече оцветена точка. Вася печели, ако след оцветяването на всички точки има равностранен триъгълник с три отбелязани върха, оцветени в един и същи цвят. Може ли Петя да попречи на това?

**Задача 9.6.** (А. Голованов) Дадени са естествени числа $a$ и $b$. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа $n$, за които числото $a^n + 1$ не се дели на $n^b + 1$.

**Задача 9.7.** (И. Богданов, К. Кноп, Ю. Кузменко) В игра на карти всяка карта има цяла стойност от 1 до 100, като карта с по-голяма стойност е по-силна от карта с по-малка стойност с едно изключение – картата 1 е по-силна от картата 100. Пред играч лежат 100 карти с различни стойности, обърнати със стойностите надолу. Крупие, което знае подредбата на картите, има право да съобщи на играча за коя да е двойка карти коя от двете е по-силна. Да се докаже, че крупието може да направи 100 такива съобщения така, че след това играчът да определи точно стойността на всяка карта.

**Задача 9.8.** (Б. Обухов) В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ъглите $A$ и $C$ са равни. Точките $M$ и $N$ съответно от страните $AB$ и $BC$ са такива, че $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Нека $K$ е средата на отсечката $MN$, а $H$ е ортоцентърът на триъгълника $ABC$. Да се докаже, че $KH \perp CD$.

**Задача 10.1.** (В. Дубинская) Да се намери броят на решенията на уравнението

$$|x| + |x+1| + \cdots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

**Задача 10.2.** (К. Иванов) Даден е остроъгълен триъгълник $ABC$, в който $AB < AC$. Нека $M$ и $N$ са съответно средите на страните $AB$ и $AC$, а $D$ е петата на височината, спусната от $A$. Точка $K$ от отсечката $MN$ е такава, че $BK = CK$. Лъчът $KD$ пресича окръжността $\Omega$, описана около триъгълника $ABC$, в точка $Q$. Да се докаже, че точките $C$, $N$, $K$ и $Q$ лежат на една окръжност.

**Задача 10.3.** (Г. Челноков) Дадено е естествено число $k$. В безкрайна клетъчна мрежа първоначално са отбелязани $N$ клетки. *Кръст* на клетката $A$ се нарича множеството от всички клетки, намиращи се в един и същи ред или стълб с $A$. Разрешено е да бъде отбелязана клетка $A$ (ако тя още не е отбелязана), ако в нейния кръст има поне $k$ други отбелязани клетки. Оказало се, че всяка отнапред зададена клетка може да бъде отбелязана с краен брой такива операции. Да се намери най-малкото $N$, за което това е възможно.

**Задача 10.4.** (Д. Крачун) На дъската е записано естествено число. На всяка секунда заменяме текущото число с числото, което се получава от него с добавяне на произведението на всичките му ненулеви цифри. Да се докаже, че съществува естествено число, което ще бъде добавяно безбройно много пъти.

**Задача 10.5.** (П. Кожевников) В таблица $10 \times 10$ са записани положителни числа така, че числата във всеки ред образуват аритметична прогресия (отляво надясно), а числата във всеки стълб – геометрична прогресия (отгоре надолу). Да се докаже, че частните на всички тези геометрични прогресии са равни.

**Задача 10.6.** Вж. Задача 9.6.

**Задача 10.7.** Вж. Задача 9.8.

**Задача 10.8.** (И. Богданов, М. Дидин) Дъска за игра се състои от лява и дясна част. Във всяка част има няколко полета. Отсечки свързват някои двойки полета от различни части, като от всяко поле може да се стигне по отсечки до всяко друго поле. Първоначално на едно от полетата на лявата част е разположен пул, оцветен в люляково, а на едно от полетата на дясната част е разположен пул, оцветен в доматено. Любен и Данчо играят, редувайки се, като пръв е Данчо. Играчът на ход премества своя пул (Любен – люляковия, Данчо – доматения) по отсечка на поле, което не е заето от другия пул. Забранено е да се достига до позиция, която вече се е срещала (две позиции съвпадат, ако в тях люляковият пул е на едно и също място, доматеният – също). Губи играчът, който не може да направи ход. Съществуват ли дъска и начално положение на пуловете, при които Данчо има печеливша стратегия?

**Задача 11.1.** (К. Сухов) Полиномът $P(x)$ е такъв, че полиномите $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ са строго монотонни върху цялата реална ос. Да се докаже, че $P(x)$ също е строго монотонен върху цялата реална ос.

**Задача 11.2.** (Ф. Петров) Дадени са положителни числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, където $n \geq 2$. Да се докаже, че

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

**Задача 11.3.** Вж. Задача 10.3.

**Задача 11.4.** (А. Кузнецов) Върху страните $AB$ и $AC$ на триъгълника $ABC$ са избрани точки $P$ и $Q$ съответно така, че $PQ \parallel BC$. Отсечките $BQ$ и $CP$ се пресичат в точка $O$. Точката $A'$ е симетрична на точка $A$ относно правата $BC$. Отсечката $A'O$ пресича окръжността $\omega$, описана около триъгълника $APQ$, в точка $S$. Да се докаже, че окръжността, описана около триъгълник $BSC$, се допира да окръжността $\omega$.

**Задача 11.5.** (О. Подлипский) Хиляда карти са разположени в кръг върху маса. На всяка карта е написано естествено число, като написаните числа са две по две различни. Отначало Вася избира една от картите и я маха от масата. По-нататък той повтаря следната операция: ако на последната махната карта е написано числото $k$, то Вася маха $k$-тата поред (по посока на часовниковата стрелка) карта, като броенето започва от следващата (отново по посока на часовниковата стрелка) след махнатата карта. Това продължава, докато не остане само една карта. Може ли да се окаже, че в началното разположение има карта $A$, такава, че ако първата махната карта не е $A$, то последната карта непременно ще бъде $A$?

**Задача 11.6.** (М. Дидин) Три от диагоналите на правилна $n$-ъгълна призма се пресичат в една вътрешна точка $O$. Да се докаже, че $O$ е центърът на призмата. (Диагонал на призма е отсечка, съединяваща два върха на призмата, които не са в една и съща стена.)

**Задача 11.7.** (С. Кудря, И. Рубанов) Редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е зададена с формула за общия член $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Да се докаже, че съществува естествено число $N$, такова, че измежду кои да е $N$ последователни члена на редицата съществува такъв, който има цифрата 5 в десетичния си запис. (Както обикновено, със $[x]$ се означава най-голямото цяло число, ненадминаващо $x$.)

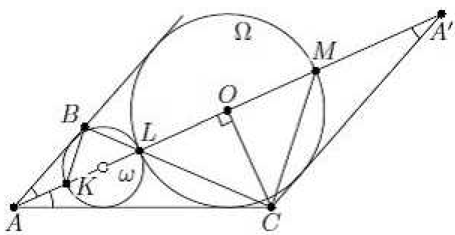
**Задача 11.8.** (И. Богданов, М. Дидин) Първоначално в левия долен и десния долен ъгъл на дъска $2018 \times 2018$ стоят два *скакалеца* – съответно червен и син. Чавдар и Сашо играят, редувайки се, като започва Чавдар. Играчът на ход мести своя скакалец (Чавдар – червения, Сашо – синия), придвижвайки го едновременно на 20 клетки по едната координата и на 17 по другата на поле, което не е заето от другия скакалец. Забранено е да се достига до позиция, която вече се е срещала (две позиции съвпадат, ако в тях червеният скакалец е в една и съща клетка, синият – също). Губи играчът, който не може да направи ход. Кой от двамата играчи има печеливша стратегия?

## Решения

**9.1.** Да означим $c = a_1 - p_1 \geq 0$. От условието следва, че $a_n - a_1 = p_n - p_1$, т.е. $a_n - p_n = a_1 - p_1 = c$ за всяко естествено $n$. Да допуснем, че $c > 0$. Нека $n$ е такова, че $a_n > 2c$. Тогава $a_n > p_n = a_n - c > a_n - \dfrac{a_n}{2} = \dfrac{a_n}{2}$, т.е. $2p_n > a_n > p_n$. Последното означава, че $a_n$ не се дели на $p_n$, противоречие. Следователно $c = 0$ и $a_n = p_n$ е просто число за всяко $n$.

*Забележка.* Друго кратко доказателство на $c = 0$ следва от наблюдението, че от $c = a_n - p_n$ следва, че $c$ се дели на $p_n$ за всяко $n$.

**9.2.** От симетрията следва, че $AL$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и минава през центровете на окръжностите $\omega$ и $\Omega$.




Тъй като съответните страни на триъгълниците $KBL$ и $MCL$ са успоредни, съществува хомотетия с център $L$, изпращаща първия от тези триъгълници във втория. Тази хомотетия изпраща $\omega$ в $\Omega$ (проследяваме диаметри). Отсечката $AB$, допираща се до $\omega$, отива в успоредна на нея отсечка $CA'$, която се допира до $\Omega$. При това, тъй като $\sphericalangle CA'A = \sphericalangle A'AB = \sphericalangle A'AC$, триъгълникът $A'CA$ е равнобедрен.

Нека $O$ е центърът на $\Omega$. Понеже $CA$ и $CA'$ са допирателни към $\Omega$, то $CO$ е ъглополовяща в равнобедрения $\triangle A'CA$, откъдето $CO \perp AA'$. Тогава $CO$ е медиана и височина в $\triangle LCM$ и исканото следва.

**9.3.** Да положим $n_i = [\sqrt{a_i}\,]$. Тогава $a_i < (n_i+1)^2$, а тъй като числата $a_i$ са цели, имаме $a_i \leq n_i^2 + 2n_i$. Достатъчно е да докажем, че

$$\sqrt{a_1 + \cdots + a_{25} + 200k} < n_1 + n_2 + \cdots + n_{25} + 1. \qquad (*)$$

Действително, тогава дясната част на даденото неравенство няма да надминава $n_1 + n_2 + \cdots + n_{25}$ и исканото ще следва.

Нека за определеност $k = a_1$. Да оценим израза под корена в $(*)$:

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_{25} + 200k &\leq (n_1^2 + 2n_1) + \cdots + (n_{25}^2 + 2n_{25}) + 200k = \\ &= (n_1^2 + \cdots + n_{25}^2) + 2(n_1 + \cdots + n_{25}) + 200(n_1^2 + 2n_1). \end{aligned}$$

Квадратът на дясната част на $(*)$ е равен на

$$(n_1^2 + \cdots + n_{25}^2) + 2(n_1n_2 + n_1n_3 + \cdots + n_{24}n_{25}) + 2(n_1 + \cdots + n_{25}) + 1.$$

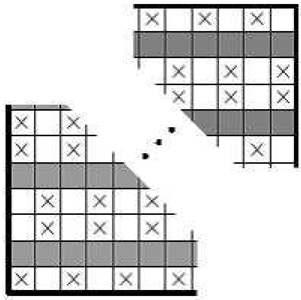
Сравняването на тези изрази показва, че е достатъчно да докажем, че

$$100(n_1^2 + 2n_1) \leq n_1n_2 + n_1n_3 + \cdots + n_{24}n_{25}.$$

Но при $i < j$ имаме $n_in_j \geq n_1^2 \geq n_1$, а в дясната част има $\dfrac{25 \cdot 24}{2} = 300$ събираеми от този вид. Оценявайки 100 от тях с $n_1^2$, а останалите 200 с $n_1$, получаваме исканото.

*Забележка.* В ключовото неравенство $(*)$ разликата между квадратите на дясната и лявата част може да достига 1. Както следва от решението, това се случва при $a_1 = a_2 = \cdots = a_{24} = 0$, както и при $a_1 = a_2 = \cdots = a_{25} = 3$.

**9.4.** Първо ще докажем, че $n = 3k$ и $n = 3k+2$ не са решения на задачата. При $n = 3k$ можем да отбележим всички клетки на редовете, чиито номера дават остатък 2 при деление на 3. Тогава лесно се вижда, че кон, тръгващ от $L$, може да стъпва само в клетките, означени с кръстче на Фиг. 1, което означава, че не може да достигне до $R$. Аналогично, при $n = 3k+2$ можем да отбележим всички клетки в редовете, чиито номера се делят на 3.

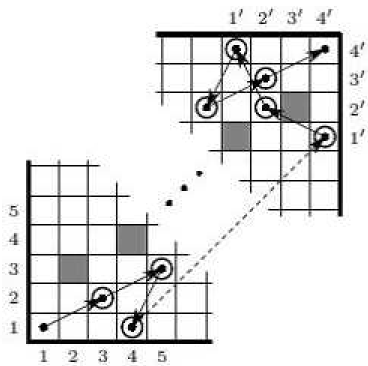


Фиг. 1

Сега ще докажем с индукция по $k$, че при $n = 3k + 1$ винаги ще има клетки с исканите свойства. При $k = 1$ твърдението е очевидно – ако някоя от клетките $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не е отбелязана, през нея конят ще достигне до целта.

Нека $k > 1$ и за по-малките дъски твърдението да е вярно. Да допуснем, че измежду всеки три последователни диагонални клетки е отбелязана не повече от една, но въпреки това конят не може да премине от $L$ в $R$. За клетката $(a, b)$ за означим $(a', b') = (a + 3k - 3, b + 3k - 3)$ (ако е от дъската). Тогава, ако $(a, b)$ и $(a', b')$ не са отбелязани, то конят може да премине от $(a, b)$ в $(a', b')$ по индукционното предположение.

Една от клетките $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не е отбелязана. Нека това е $(3, 2)$. Ако $(3', 2')$ не е отбелязана, то конят може да се придвижи по маршрута $L \to (3, 2) \to (3', 2') \to \cdots \to R$, противоречие. Следователно $(3', 2')$ е отбелязана и, съответно, $(2', 3')$ не е отбелязана, а тогава $(2, 3)$ трябва да е отбелязана по аналогични причини. По-нататък, $(4, 4)$ трябва да е отбелязана, защото в противен случай ще имаме път $L \to (3, 2) \to (4, 4) \to (4', 4') = R$. Аналогично се вижда, че клетката $(1', 1')$ е отбелязана (Фиг. 2).




Фиг. 2

От предположението следва, че клетките с кръгчета на Фиг. 2 не са отбелязани. Тогава конят може да премине от $L$ в $(4, 1)$, откъдето (по индукционно предположение) в $(4', 1')$ и оттам в $R$. Това противоречие приключва индукционния преход.

**9.5.** Ще опишем печеливша стратегия за Вася. Отначало той прави произволни ходове, докато не бъдат оцветени 33 точки. Нека $A$ е една от крайните оцветени точки, а $B$ е неоцветената точка, съседна на другата крайна. Тогава съществува отбелязана точка $C$, такава, че $ABC$ е равностранен триъгълник.

Със следващия си ход Вася оцетява точката $B$ в цвета на $A$ (без ограничение на общността, червен). Достатъчно е да докажем, че Петя ще е принуден първи да оцвети точка, съседна на $C$ – тогава Вася оцветява $C$ в червено и печели. Да допуснем противното, т.е. Вася е принуден първи да оцвети точка, съседна на $C$. Това означава, че са останали точно три неоцветени точки – $C$ и двете и съседни. Тогава дотук са оцветени 96 точки и на ход е Петя, противоречие.

**9.6.** Нека $n$ е четно и $p$ е нечетен прост делител на $n^b + 1$. Ако $p$ не дели $a^n + 1$, то $n$ върши работа. Ако пък $p|a^n + 1$, то $a^n \equiv -1 \pmod p$; в частност $(a, p) = 1$. Сега да забележим, че $p|(n + p)^b + 1$, а от друга страна, $a^{n+p} = a^n a^p \equiv -a \pmod p$ не се дели на $p$, т.е. в този случай $n + p$ върши работа.

*Забележка.* За две други решения забележете, че при четно $n$ работи поне едно от числата $n$ и $n^3$ или че $a^k$ върши работа при $(k, a) = 1$.

**9.7.** Да означим със $c_i$ картата със стойност $i$. Да изберем произволно цяло число $k$, $3 \le k \le 98$, и нека крупието да направи следните 100 съобщения – за двойките $(c_k, c_1)$, $(c_{100}, c_k)$, $(c_1, c_{100})$, както и за $(c_{i+1}, c_i)$ при $i = 2, 3, \ldots, 98$.

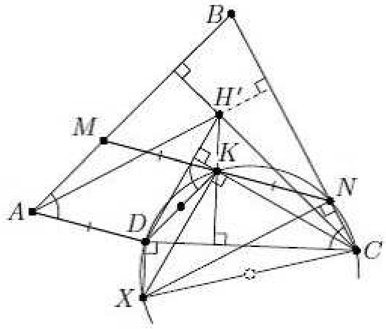
Ще докажем, че по тези данни играчът може еднозначно да възстанови стойностите на всички карти. От това, че картите $c_{100}$, $c_k$ и $c_1$ се бият в цикъл, следва, че една от тях е 1, а следващата в цикъла е 100. Извън този цикъл $c_k$ е бита от $c_{k+1}$, но бие $c_{k-1}$. Тогава $c_k$ не може да е 1 или 100, т.е. 1 и 100 са картите $c_1$ и $c_{100}$.

Накрая, измежду останалите карти $c_2, c_3, \ldots, c_{99}$ във всяка двойка картата с по-голяма стойност бие другата. Тъй като знаем, че всяко $c_{i+1}$ бие $c_i$ при $i = 2, 3, \ldots, 98$, заключаваме, че $c_i$ има стойност $i$.

*Забележка.* Аналогично се вижда, че в колода с $n > 4$ карти, крупието може да направи $n$ съобщения така, че след това играчът да определи точно стойността на всяка карта. Твърдението е в сила и за $n = 4$, макар и горният метод да не работи.

**9.8.** Достатъчно е да докажем, че ортоцентърът $H'$ на $\triangle CDK$ съвпада с $H$.

Тъй като $AMKD$ е успоредник, имаме $KD \parallel AB$, и от $CH' \perp KD$ следва, че $CH' \perp AB$. Остава да докажем, че $AH' \perp CN$.




Да забележим, че $\sphericalangle DCN = \sphericalangle DAM = \sphericalangle DKM$ и следователно четириъгълникът $CNKD$ е вписан в окръжност. Нека $CX$ е диаметър на тази окръжност. Тогава $CK \perp KX$ и значи $KX \parallel DH'$. Аналогично $DX \parallel KH'$ и следователно $KH'DX$ е успоредник. Тогава при централната симетрия относно средата на отсечката $DK$ точка $H'$ се изобразява в $X$. Тъй като $AKND$ също е успоредник, при същата симетрия точка $N$ се изобразява в $A$. Тогава $AH' \parallel XN$ и тъй като $\sphericalangle XNC = 90^\circ$, получаваме $AH' \perp CN$.

**10.1.** При $x \in (-2019, 1)$ двете страни имат различни знаци и уравнението няма корени.

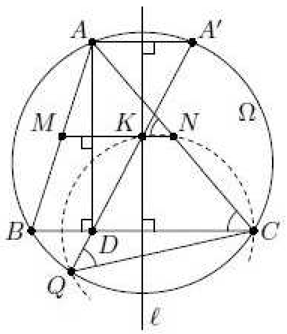
При $x \in [1, \infty)$ всички модули се разкриват със знак $+$ и уравнението придобива вида $g(x) = 0$, където $g(x) = x^2 - x - 2009 + (1 + 2 + \cdots + 2018)$. Тъй като $g(1) < 0$, това квадратно уравнение има единствен корен в интервала $[1, \infty)$.

Тъй като графиките на лявата и дясната част са симетрични относно правата $x = -1009$, в интервала $(-\infty, -2019]$ има толкова корени, колкото и в $[1, +\infty)$, т.е. точно един. В крайна сметка получаваме, че даденото уравнение има два корена.

**10.2.** Нека $\ell$ е симетралата на $BC$. Да отбележим, че $\ell$ минава през $K$. Нека $A'$ е симетрична на точка $A$ относно $\ell$. Очевидно $A'$ лежи върху $\Omega$, като от симетрията следва, че дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'C}$ са равни.

Тъй като точка $D$ е симетрична на $A$ относно правата $MN$, то $D$ и $A'$ са симетрични относно $K$. Това означава, в частност, че $D$, $K$ и $A'$ лежат на една права, т.е. правата $QD$ минава през $A'$. Тогава

$$\sphericalangle KQC = \sphericalangle A'QC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A'C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle ACB.$$




Тъй като $MN \parallel BC$, имаме $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ANK$. Оттук $\sphericalangle KQC = \sphericalangle ANK$, т.е. четириъгълникът $CNKQ$ е вписан.

**10.3.** Отговор: $N = \left[\dfrac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{k+2}{2}\right] = \begin{cases} m(m+1), & \text{ако } k = 2m; \\ m^2, & \text{ако } k = 2m-1 \end{cases}.$

Да означим търсеното число с $N(k)$ и да положим $f(k) = \left[\dfrac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{k+2}{2}\right]$. Ще докажем, че

$$N(k) \geq N(k-1) + \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \text{при } k \geq 2. \qquad (*)$$

След отбелязването на първоначалните $N(k)$ клетки можем да отбележим поне една клетка и това означава, че или в стълба, или в реда на тази клетка има отбелязани $\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$ други клетки. Нека за определеност това е редът $\ell$.

Да отбележим мислено всички клетки на $\ell$. Ясно е, че можем, както и досега, да отбележим всяка друга клетка (извън $\ell$). Да премахнем $\ell$ и да слепим двете оставащи полуравнини. Сега можем да отбележим всяка клетка в новата мрежа, използвайки на всяка стъпка кръст с $k-1$ отбелязани клетки. Следователно в новата мрежа е имало отбелязани първоначално поне $N(k-1)$ клетки, които са такива и в изходната мрежа. Това доказва $(*)$.

Тъй като $N(1) = 1$, от $(*)$ следва, че

$$N(k) \geq \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+\ldots}_{k \text{ събираеми}} = f(k).$$

Оставяме на читателя да посочи пример, в който $f(k)$ клетки са достатъчни.

**10.4.** Лесно се вижда, че съществува естествено число $t$, такова, че

$$9^m < 10^{m-1} \quad \text{при } m \geqslant t. \tag{$*$}$$

Действително, исканото неравенство е еквивалентно на $(10/9)^{m-1} > 9$ и е достатъчно да отбележим, че отляво имаме показателна функция с основа, по-голяма от 1. Всъщност $t = 22$ е минималното с исканото свойство, но това не е нужно за разсъжденията по-долу.

За дадено естествено число $d$ ще означаваме с $p(d)$ произведението на всички ненулеви цифри на $d$.

Да разгледаме момента, в който на дъската за пръв път се появява число $B \geq \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$ при някое $n > 2t$. Нека $B$ е получено от $A$, т.е. $B = A + p(A)$. Тъй като $p(A) \leq 9^n < 10^{n-1}$, то $A > B - 10^{n-1} > 10^n$. Нека $A$ да започва с $k$ единици. Тогава след тези единици идва 0, т.е.

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{n-k+1} \leqslant A \leqslant \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k}.$$

Произведението на ненулевите цифри на такова число не надминава $9^{n-k}$. Но $A + p(A) \geq \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$, откъдето

$$p(A) \geq \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k} > \underbrace{11\ldots1}_{n-k}.$$

Тогава $9^{n-k} \geq p(A) > \underbrace{11\ldots1}_{n-k} > 10^{n-k-1}$ и, поради $(*)$, оттук следва, че $n - k \leq t - 1$. Тогава $p(A) \leq 9^{t-1}$.

Доказахме, че безкрайно много пъти ще добавяме число, ненадминаващо $9^{t-1}$. Следователно някое от тези числа ще бъде добавяно безбройно много пъти.

**10.5.** Достатъчно е да решим задачата за квадрат $3\times3$ (тогава частните на прогресиите във всеки два съседни стълба ще са равни и оттам ще са равни всички частни). От условието следва, че разположението на числата в такъв квадрат е следното:

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{a-d}{p}$ | $\dfrac{a}{q}$ | $\dfrac{a+d}{r}$ |
| $a-d$ | $a$ | $a+d$ |
| $(a-d)p$ | $aq$ | $(a+d)r$ |

От аритметичните прогресии в първия и третия ред получаваме

$$\frac{a-d}{p}+\frac{a+d}{r}=2\frac{a}{q} \quad \text{и} \quad (a-d)p+(a+d)r=2aq.$$

Да положим $x=\dfrac{p}{q}$ и $y=\dfrac{r}{q}$. Тогава от горните равенства имаме

$$(a-d)y+(a+d)x=2axy \quad \text{и} \quad (a-d)x+(a+d)y=2a.$$

Събираме тези две равенства, съкращаваме на $2a\neq 0$ и получаваме $x+y=xy+1 \iff (x-1)(y-1)=0$. Нека например $x=1$ (случаят $y=1$ е аналогичен). Тогава $(a-d)+(a+d)y=2a$, $(a+d)y=a+d$, откъдето $y=1$. В крайна сметка $p=q=r$, с което доказателството е завършено.

*Забележка.* Запознатите с линейната алгебра сигурно са забелязали краткото решение – ако частните са две по две различни, то стълбовете са линейно независими (защото детерминантата е Вандермондова), което означава, че и редовете са линейно независими и тогава не могат да съдържат едновременно аритметични прогресии.

**10.6.** Вж. Задача 9.6.

**10.7.** Вж. Задача 9.8.

**10.8.** Отговор – Не! Ще опишем стратегия, която позволява на Любен да спечели.

Нека $L$ и $D$ са полетата, на които са разположени първоначално съответно люляковия ($\ell$) и доматения пул ($d$). По условие от $L$ може да се достигне до $D$ по отсечки. Нека Любен да избере един път ($L=L_1, D_1, \ldots, L_n$, $D_n=D$), в който няма повторение на полета. Ще означаваме позициите в играта като наредени двойки $(A,B)$, където $A$ и $B$ са полетата, на които съответно се намират $\ell$ и $d$.

След като е избрал пътя, Любен ще действа по следния начин. Ако неговият пул $\ell$ е в полето $L_i$, той го премества на полето $D_i$. Ако $\ell$ е на $D_i$, ходът зависи от положението на пула на Данчо $d$: ако $d$ е на полето $D$, то Любен мести на $L_{i+1}$, в противен случай на $L_i$.

Ясно е, че играта рано или късно ще свърши (защото броят на различните позиции е краен). Следователно е достатъчно да докажем, че Любен винаги ще има ход (по описаната стратегия). Да отбележим първо, че след ход на Данчо пуловете се намират от една и съща страна на дъската, което означава, че стратегията на Любен не може да се провали чрез ход на поле, заето от $d$.

Нека в даден момент Любен (дотогава той е играл по стратегията) е на ход и $\ell$ е на някое от полетата $L_i$ или $D_i$, а $d$ в същия този момент е на някакво поле $U$. Множеството от срещаните досега позиции, в които пултът $\ell$ е бил в $L_i$ или $D_i$ се описва така: първо $\ell$ се е появил на $L_i$ в позиция $(L_i, D)$ преди ход на Данчо (това може да е било например в началото на играта). По-нататък при всяка двойка ходове на Любен и Данчо са били използвани (в някакъв ред) позициите $(L_i, X)$ и $(D_i, X)$, където $X \neq D$.

Ако преди хода на Любен $\ell$ е на $L_i$, а $d$ на $U$, то позицията $(D_i, U)$ не се е срещала дотогава. Ако пък $\ell$ е на $D_i$, а $d$ на $U \neq D$, то позицията $(L_i, U)$ също не се е срещала дотогава. И в двата случая Любен може да направи ход по стратегията. Накрая, ако $\ell$ е на $D_i$, а $d$ на $U = D$, то $i < n$ (иначе пуловете ще са на едно и също поле) и полето $L_{i+1}$ съществува, като $\ell$ още не е бил на това поле. Следователно Любен може да мести на $L_{i+1}$, с което доказателството е завършено.

**11.1.** *Първи начин.* Да допуснем, че $P(x)$ не е монотонен. Тогава съществуват $a \neq b$, за които $P(a) = P(b)$. Оттук $P(P(a)) = P(P(b))$, т.е. $P(P(x))$ не е монотонен, противоречие.

*Втори начин.* Тъй като $P(P(x))$ е монотонен, неговата степен е нечетна и той приема всички реални стойности.

Нека $a > b$ са произволни, а $x_a$ и $x_b$ са такива, че $P(P(x_a)) = a$ и $P(P(x_b)) = b$. Тъй като старшият коефициент на $P(P(x))$ е положителен, този полином е растящ и следователно $x_a > x_b$.

Ако старшият коефициент на $P(x)$ е положителен, то $P(P(P(x)))$ расте, откъдето следва, че $P(P(P(x_a))) > P(P(P(x_b)))$, т.е. $P(a) > P(b)$ и значи $P(x)$ е растящ. Ако пък старшият коефициент на $P(x)$ е отрицателен, то аналогично $P(P(P(x_a))) < P(P(P(x_b)))$, т.е. $P(a) < P(b)$ и $P(x)$ е намаляващ.

**11.2.** Да забележим, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ е в сила неравенството $(1+x_i^2)(1+x_{i+1}^2) \geqslant (1+x_i x_{i+1})^2$, защото $(1+x_i^2)(1+x_{i+1}^2)-(1+x_i x_{i+1})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 \geq 0$. Умножавайки почленно всички такива неравенства, получаваме

$$(1+x_1^2)^2(1+x_2^2)^2 \cdots (1+x_n^2)^2 \geq (1+x_1x_2)^2(1+x_2x_3)^2 \cdots (1+x_nx_1)^2,$$

или

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} \cdot \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} \cdot \cdots \cdot \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq 1.$$

Сега даденото неравенство следва от неравенството между средното аритметично и следното геометрично

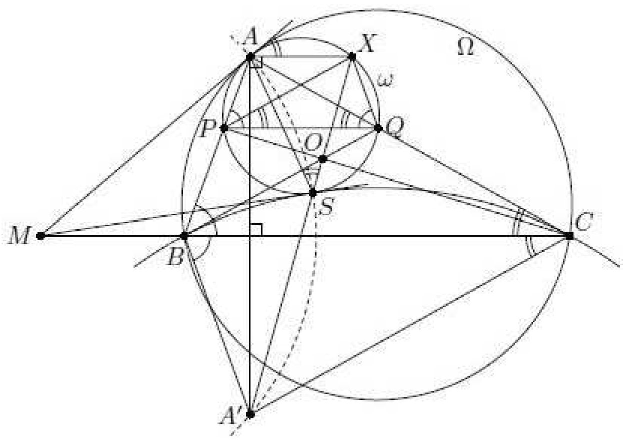
$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq$$

$$\geq n \sqrt[n]{\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} \cdot \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} \cdot \cdots \cdot \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}} \geq n.$$

**11.3.** Вж. Задача 10.3.

**11.4.** *Първи начин.* Случаят $AB = AC$ е тривиален и затова без ограничение на общността ще считаме, че $AC > AB$.

Нека точката $X \in \omega$ е такава, че $PAXQ$ е равнобедрен трапец. Тогава $\sphericalangle XQP = \sphericalangle APQ = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA'$ и, аналогично, $\sphericalangle XPQ = \sphericalangle BCA'$. Следователно $XQ \parallel BA'$ и $XP \parallel CA'$. Тогава хомотетията с център $O$, изпращаща отсечката $PQ$ в $CB$, изпраща $\triangle XPQ$ в $\triangle A'CB$. Следователно точка $O$ (оттам и точка $S$) лежи на $A'X$.

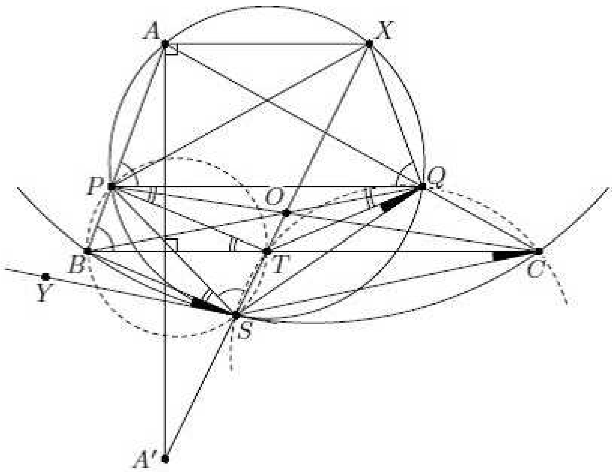



Нека $M$ е центърът на окръжността, описана около $\triangle ASA'$. Тогава $\sphericalangle MAA' = 90^\circ - \sphericalangle ASX$. Тъй като $XA \parallel BC \perp AA'$, получаваме $\sphericalangle MAX = \sphericalangle MAA' + 90^\circ = 180^\circ - \sphericalangle ASX$, т.е. $MA$ се допира до $\omega$ в точка $A$. Тъй като $MA = MS$, то $MS$ също се допира до $\omega$.

Нека $\Omega$ е окръжността, описана около $\triangle ABC$. Тогава $\omega$ и $\Omega$ са съответни при хомотетия с център $A$, защото $PQ \parallel BC$. Следователно $MA$ е допирателна съм $\Omega$. Освен това $M$ лежи върху симетралата $BC$ на отсечката $AA'$ и оттук $MA^2 = MB \cdot MC$. Получихме $MS^2 = MA^2 = MB \cdot MC$, т.е. $MS$ се допира до описаната около $\triangle BSC$ окръжност и до $\omega$ в точка $S$, откъдето следва исканото.

*Втори начин.* Както по-горе въвеждаме точката $X$. Ще докажем, че $S$ лежи върху $A'X$.

Тъй като $\triangle A'XA$ е правоъгълен, центърът $T$ на описаната му окръжност е средата на хипотенузата $XA'$. Точка $T$ лежи върху $BC$, защото $BC$ е симетрала на $AA'$. Освен това $T$ лежи и на симетралата на $AX$, оттам и на симетралата на $PQ$. Следователно $TP = TQ$. Да означим $\sphericalangle TPQ = \sphericalangle TQP = \alpha$.

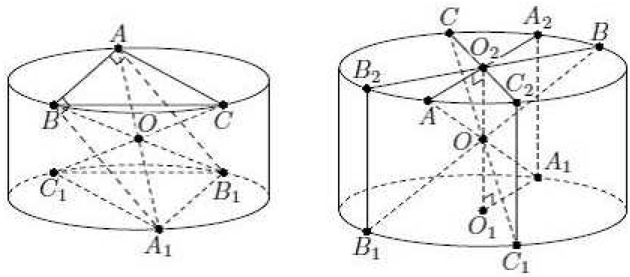



Да забележим, че $\sphericalangle XSP = \sphericalangle XQP = \sphericalangle APQ = \sphericalangle PBT$, откъдето точките $P$, $S$, $T$ и $B$ лежат на една окръжност. Аналогично се вижда, че точките $Q$, $S$, $T$ и $C$ лежат на една окръжност. Тогава $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PTB = \sphericalangle TPQ = \alpha$ и $\sphericalangle SCB = \sphericalangle SQT = |\alpha - \sphericalangle PQS|$. Нека $Y$ е точка от допирателната в точка $S$ към окръжността $\omega$, която лежи в една и съща полуравнина относно $A'X$, както и $A$. Тогава $\sphericalangle PSY = \sphericalangle PQS$ и, следователно, $\sphericalangle BSY = |\alpha - \sphericalangle PSY| = |\alpha - \sphericalangle PQS| = \sphericalangle SCB$. Получихме, че окръжността, описана около $\triangle BCS$, се допира до правата $SY$ в точка $S$. Тогава тя се допира и до $\omega$.

**11.5.** Отговор – Да! Да се откажем временно от изискването за различни числа на картите. Нека $A$ и $B$ са две съседни карти ($A$ е след $B$ по посока на часовниковата стрелка). Да напишем върху $A$ произволно число, върху $B$ числото 2, а върху всички останали карти – единици. Ако Вася махне на първия ход карта, различна от $A$, оттам нататък той винаги ще прескача $A$ (защото върху $B$ е написана двойка) и $A$ ще остане последна.

Остава да направим числата различни. За това е достатъчно към всички числа да добавим различни естествени числа, които се делят на 1000!. Действително, ако при премахването на карта $x$ на масата остават $d$ карти, то резултатът от процеса не се променя, ако към $x$ добавим число, кратно на $d$ (Вася просто ще направи няколко допълнителни пълни завъртания).

**11.6.** *Първи начин.* Нека диагоналите $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ се пресичат в точка $O$, като върховете $A$, $B$ и $C$ са в едната основа на призмата, а върховете $A_1$, $B_1$ и $C_1$ – на противоположната основа. Тогава точките $A$, $A_1$, $B$ и $B_1$ лежат в една равнина $\alpha$, която пресича успоредните основи на призмата в успоредни отсечки $AB$ и $A_1B_1$. Аналогично се вижда, че $AC \parallel A_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Тогава триъгълниците $ABC$ и $A_1B_1C_1$ са подобни. Но описаните около тези триъгълници окръжности са еднакви, значи и самите триъгълници са еднакви.




Да впишем призмата в сфера $S$. Равнината $\alpha$ пресича $S$ по окръжност, на която лежат точките $A$, $B$, $A_1$ и $B_1$. Тъй като $AB$ и $A_1B_1$ са успоредни и равни, четириъгълникът $ABA_1B_1$ е правоъгълник с център $O$, откъдето $OA = OB = OA_1 = OB_1$. Аналогично получаваме $OA = OC = OA_1 = OC_1$. Следователно $O$ всъщност е центърът на $S$, т.е. центърът на призмата.

*Втори начин.* Ще използваме същите означения. Да разгледаме хомотетията с център $O$, изпращаща равнината $(ABC)$ в равнината $(A_1B_1C_1)$. Тогава описаната около $\triangle ABC$ окръжност отива в описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Тъй като тези окръжности са еднакви, коефицентът на хомотетията е равен на $-1$, а описания около призмата цилиндър се изобразява в себе си. Тогава $O$ е центърът на този цилиндър, т.е. е центърът на призмата.

**11.7.** Да означим $\beta = \dfrac{1}{2017}$. Да отбележим, че частният случай на неравенството на Бернули $(1+x)^{2017} \geq 1 + 2017x$ (при $x \geq -\beta$) може да се запише във вида $1 + \beta y \geq (1+y)^\beta$ (при $y = 2017x \geq -1$).

*Лема 1.* За всяко естествено число $n$ са в сила неравенствата $\dfrac{n+1+\beta}{n+1} \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\beta \leq \dfrac{n+\beta}{n}$.

*Доказателство.* Дясното неравенство следва непосредствено от споменатото неравенство на Бернули. За лявото пак с помощта на неравенството на Бернули получаваме

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta \leq 1 - \frac{\beta}{n+1} = \frac{n+1-\beta}{n+1},$$

откъдето $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\beta = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-\beta} \geq \dfrac{n+1}{n+1-\beta} \geq \dfrac{n+1+\beta}{n+1}$.

*Лема 2.* За всяко естествено число $n$ са в сила неравенствата $n^\beta - 1 \le a_{n+1} - a_n \le 2n^\beta + 1$.

*Доказателство.* Тъй като $n^{1+\beta} - 1 < a_n \le n^{1+\beta}$, достатъчно е да докажем, че $n^\beta \le (n+1)^{1+\beta} - n^{1+\beta} \le 2n^\beta$, или

$$1 \le (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \le 2. \qquad (*)$$

Прилагайки Лема 1, получаваме

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \ge (n+1)\frac{n+1+\beta}{n+1} - n = 1+\beta > 1,$$

което доказва лявото неравенство. Аналогично, за дясното неравенство имаме

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \le \frac{(n+1)(n+\beta)}{n} - n = \frac{n(1+\beta)+\beta}{n} < 2,$$

с което доказателството на лемата е завършено.

Да преминем към решението на задачата. Ще докажем, че числото $N = 2^{2017} + 1000$ върши работа. За целта е достатъчно да докажем, че за всяко естествено $n \ge 2^{2017}$ число с петица в десетичния си запис ще има даже измежду числата $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$. Тъй като $n \ge 2^{2017}$, съществува естествено число $k$, за което $10^{k-1} \le n^\beta/2 < 10^k$. Ще покажем, че даже измежду $(k+2)$-те цифри в края на числата $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$ ще се срещне петица.

От Лема 2 следва, че при всяко $d = n, n+1, \ldots, n+999$ имаме

$$a_{d+1} - a_d \le 2d^\beta + 1 \le 2\cdot(2n)^\beta + 1 < 4\cdot n^\beta + 1 < 9\cdot 10^k.$$

Това означава, че $(k+2)$-рата цифра при прехода от $a_d$ към $a_{d+1}$ или няма да се промени, или ще се увеличи с 1 (като 9 преминава в 0). От друга страна, по същата лема имаме

$$a_{d+100} - a_d \ge 100(n^\beta - 1) \ge 2\cdot 10^{k+1} - 100 \ge 10^{k+1},$$

което означава, че за 100 такива прехода $(k+2)$-рата цифра поне веднъж ще се промени (на следващата). Следователно за 1000 прехода тя ще приеме всичките 10 възможни стойности, в частност, и 5.

**11.8.** *Упътване.* Съобразете, че след шахматно оцветяване задачата става частен случай на Задача 10.8. Това не изглежда да я прави по-лесна, но стратегията от 10.8. работи.

# НЯКОЛКО БЕЛЕЖКИ ЗА ХЬОЛДЕРОВИТЕ ФУНКЦИИ

Петър Попиванов,
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

През 80-те години на 19. век немският математик О. Хьолдер въведе понятието Хьолдерова функция.

**Дефиниция.** Функцията $f(x)$, определена в $n$-мерното Евклидово пространство, се нарича Хьолдерова с показател $0 < s < 1$, ако съществува такава константа $C > 0$, че за всяка двойка вектори $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ да бъде изпълнено неравенството

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^s.$$

При $s = 1$ ще казваме, че $f$ е Липшицова.

По-долу ще установим, че $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^s$, $0 < s < 1$ е Хьолдерова с показател $s$. Както е прието $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Ще започнем разсъжденията ни при $n = 1$.

**Предложение.** Нека $x \geqq 0$, $y \geqq 0$. Тогава

$$|x^s - y^s| \leqq |x - y|^s \text{ при } 0 < s < 1, \tag{1}$$

$$|x^s - y^s| \geqq |x - y|^s \text{ при } s > 1. \tag{2}$$

Очевидно (1), (2) са изпълнени при $x = 0$ и $y = 0$. Без ограничение на общността $0 \leqq x \leqq y$, $y > 0$. Означаваме $z = \dfrac{x}{y} \in [0, 1]$. Тогава (1), (2) са еквивалентни на

$$|1 - z^s| \leqq |1 - z|^s, 0 < s < 1, \tag{3}$$

$$|1 - z^s| \geqq |1 - z|^s, s > 1, \tag{4}$$

За да докажем (3), (4), разглеждаме функцията

$$0 \leqq g(z) = \frac{1 - z^s}{(1 - z)^s}, \qquad 0 \leqq z \leqq 1.$$

Очевидно
$$g'(z) = \frac{s(1-z^{s-1})}{(1-z)^{1+s}}, \qquad g(0) = 1.$$
Чрез правилото на Лопитал намираме, че
$$\lim_{z\to 1} g(z) = 0 \;\text{ при }\; 0 < s < 1$$
и
$$\lim_{z\to 1} g'(z) = -\infty, \;\text{ докато }\; g'(z) < 0.$$
По същия начин намираме, че
$$g'(z) > 0 \;\text{ при }\; 0 < z < 1,\; s > 1,\; \lim_{z\to 1} g(z) = +\infty.$$
Следователно при $0 < s < 1$ имаме $0 \leqq f(z) \leqq f(1) = 1$, а при $s > 1$: $f(z) \geqq f(1) = 1$. С това всичко е доказано.

Нека $xy < 0$. Тогава

$$\text{(5)} \qquad \big||x|^s - |y|^s\big| \leqq (|x|^s + |y|^s) \leqq 2\,(|x| + |y|)^s = 2|x-y|^s.$$

При $s = 1$ знаме, че $|x-y| \geqq \big||x| - |y|\big|$ при всички $x$, $y$. От (1) и (5) заключаваме, че $f(x) = |x|^s$, $0 < s < 1$ е Хьолдерова функция, а при $s = 1$ – Липшицова. Убедете се сами, че при $s > 1$ Хьолдеровите функции са константи.

Нека $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^s$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $0 < s < 1$. От неравенството на триъгълника в Евклидовото пространство и (1) имаме
$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^s \geqq \big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big|^s \geqq \big||\mathbf{x}|^s - |\mathbf{y}|^s\big|,$$
т.е. е пак Хьолдерова.

Очевидно неравенството $\big||\mathbf{x}|^s - |\mathbf{y}|^s\big| \geqq C|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^s$, $s > 1$, $0 < C$ – константа не е вярно при $\mathbf{xy} < 0$.

Нека $s$ е нечетно число. Докажете, че съществува константа $C$, такава, че за всяка двойка реални числа имаме
$$|x^s - y^s| \geqq C|x-y|^s.$$

Хьолдеровите и Липшицовите функции често се използват в анализа и по-специално – в диференциалните уравнения.

# ОКОЛО ТЕОРЕМАТА НА ПТОЛЕМЕЙ

По материали на Стенли Рабинович

*Аз съм математик в сърцето си; а компютърен програмист по професия* – така Стенли Рабинович (Stanley Rabinowitz) се представя в своя интернет-сайт. Но най-добрата визитка за д-р Рабинович са неговите математически книги и статии. Той владее изкуството да открива математически *бисери* и да разказва увлекателно и достъпно решенията на трудни задачи. Книгите му са вдъхновяващи и крият опасност от пристрастяване.

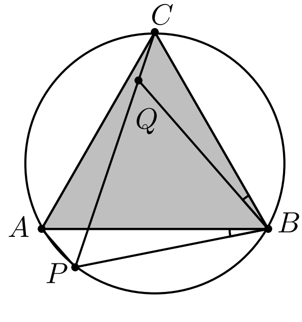
Представяме ви материал по ръкописа Ptolemy's Legacy на Стенли Рабинович, любезно предоставен ни от проф. Йордан Табов.

## I. От теоремата на Van Schooten до теоремата на Ptolemy

Да разгледаме равностранния триъгълник $ABC$, вписан в окръжност. Да изберем произволна точка $P$ на дъгата $AB$ и да построим отсечките $PA, PB$ и $PC$. Като движим $P$ по дъгата, дължините на трите отсечки, съответно $a, b$ и $c$, се менят. Може да забележим, че докато $P$ се движи по дъгата, е в сила равенството $c = a + b$. Този елегантен резултат е известен като теорема на Van Schooten.

**Теорема 1.** (*Van Schooten*) Нека $ABC$ е равностранен триъгълник, вписан в окръжност и $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$. Ако $PA = a, PB = b$ и $PC = c$, то

$$c = a + b.$$



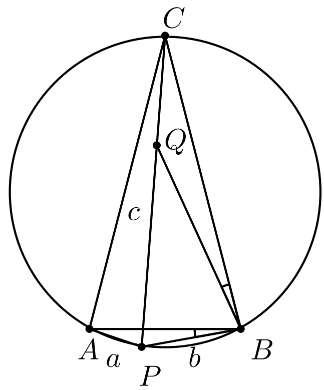
*Доказателство.* Тъй като $\sphericalangle ABP < 60^\circ$, а $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, може да се построи права $BQ$ ($Q$ лежи на $CP$) така, че ъглите $QBC$ и $PBA$ да са равни. Тогава $\sphericalangle PBQ = 60^\circ$. Но $\sphericalangle CPB = 60^\circ$, следователно $BQP$ е равностранен триъгълник и $QB = PB = b$. Освен това, триъгълниците $QBC$ и $PBA$ са еднакви, оттук $QC = PA = a$. Следователно е в сила равенството $CP = CQ + QP = a + b$.

**Какво ще се случи, ако триъгълникът не е равностранен?**

Нека първо вместо равностранен, разгледаме равнобедрен триъгълник $ABC$ със страни $AB = 1$ и $BC = AC = 2$. Да опишем около него окръжност и да изберем произволна точка $P$ на дъгата $AB$. Може да измерим отсечките $PA = a, PB = b$ и $PC = c$ и ще забележим, че $c = 2(a + b)$. Ако това е вярно в този случай, то ще е вярно и за всички подобни на дадения триъгълник, т.е. равнобедрен триъгълник с отношение на бедрото и основата $2 : 1$.

**Твърдение 1.** Нека $ABC$ е равнобедрен триъгълник, вписан в окръжност и $BC = AC = 2AB$. Ако $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$, то

$$PC = 2(PA + PB).$$




*Доказателство.* Построяваме права $BQ$ ($Q$ лежи на $CP$) така, че ъглите $QBC$ и $PBA$ да са равни. Тогава $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle CPB$, следователно $BQP$ е равнобедрен триъгълник, подобен на дадения и $QB = 2PB = 2b$. Освен това, триъгълниците $QBC$ и $PBA$ са подобни с коефициент 2, оттук $QC = 2PA = 2a$. Следователно $CP = CQ + QP = 2a + 2b$.

**Какво ще се случи, ако променим отношението на бедрото и основата?**

Може да предположим, че ако отношението на бедрото и основата е равно на $k$, то $PC = k(PA + PB)$.

**Твърдение 2.** Нека $ABC$ е равнобедрен триъгълник, вписан в окръжност и $BC = AC = kAB$. Ако $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$, то
$$PC = k(PA + PB).$$

Доказателството повтаря това на твърдение 1, като 2 се замени с $k$.

**Какво ще се случи, ако триъгълникът не е равнобедрен?**

Може да предположим, че $PC = k_1PA + k_2PB$, където $k_1$ и $k_2$ зависят от отношението на страните на дадения триъгълник.

Но вместо да експериментираме, може да се обърнем към математическата литература. В книгата Almagest (The Great Treatise) на римския математик Claudius Ptolemy е доказана звисимост за разстоянията между четири точки по окръжност, използвана за определяне на разположението на различни астрономически обекти.

**Теорема 2.** (*Ptolemy*) Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник. Тогава
$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

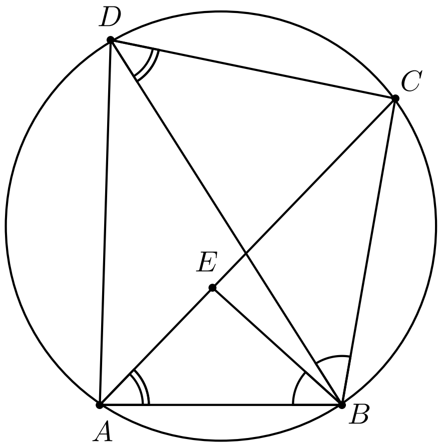
Ако използваме този факт, може да отговорим на последния въпрос. Да разгледаме произволен триъгълник $ABC$, вписан в окръжност и произволна точка $P$ на дъгата $AB$. Нека $PA = a, PB = b$ и $PC = c$. По теоремата на Ptolemy имаме
$$a.BC + b.AC = c.AB \iff c = \frac{BC}{AB}a + \frac{AC}{AB}b,$$
т.е. в сила е

**Твърдение 3.** (*Обобщение на теоремата на Van Schooten за произволен тригълник*) Нека $ABC$ е произволен триъгълник, вписан в окръжност и точката $P$ лежи на дъгата $AB$ (която не съдържа $C$). Тогава съществуват константи $k_1 = \dfrac{BC}{AB}$ и $k_2 = \dfrac{AC}{AB}$, за които
$$PC = k_1PA + k_2PB$$
за всяко положение на точката $P$ на дъгата $AB$.

**Как се доказва теоремата на Ptolemy?**

Ще разгледаме оригиналното *доказателство.*

Да построим точка $E$ на $AC$ така, че ъглите $ABE$ и $CBD$ да са равни. Тъй като и ъглите $CAB$ и $CDB$ са равни, то триъгълниците $ABE$ и $DBC$ са подобни, т.е.
$$AB : BD = AE : CD \iff AB.CD = AE.BD.$$




По същия начин, триъгълниците $ABD$ и $EBC$ са подобни и оттук

$$AD.BC = EC.BD.$$

Като съберем двете равенства, получаваме

$$AB.CD + AD.BC = (AE + EC).BD = AC.BD.$$

**Какви интересни следствия могат да се получат от теоремата на Птолемей?**

- Когато триъгълникът $ABC$ е равностранен, от теоремата на Птолемей следва теоремата на Van Schooten.
- Когато $DA = DC$, от теоремата на Птолемей следва Твърдение 2.
- Когато $ABCD$ е правоъгълник, от теоремата на Птолемей следва питагоровата теорема.
- Когато $ABCD$ е трапец, от теоремата на Птолемей следва косинусовата теорема ($ab + c^2 = d^2$ и $b = 1 - 2c\cos\varphi$).

**Няколко задачи**

**Задача 1.** Нека $ABC$ е произволен триъгълник. Външно за него са построени равностранните триъгълници $BCD, CAE$ и $ABF$. Да се докаже, че $AD, BE$ и $CF$ се пресичат в една точка $P$ и

$$PA + PB + PC = AD = BE = CF.$$

**Задача 2.** Нека $ABCD$ е равнобедрен трапец и $AB||CD$. Да се докаже, че

$$\frac{AB}{BD+AD}=\frac{BD-AD}{CD}.$$

**Задача 3.** Нека $ABCD$ е четириъгълник със страни $a,b,c,d$ и полупериметър $p$, вписан в окръжност с радиус $R$. Да се докаже, че

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

**Задача 4.** (Формула на Brahmagupta) Нека $ABCD$ е четириъгълник със страни $a,b,c,d$, вписан в окръжност и има лице $S$. Да се докаже, че

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

**Задача 5.**(Диагонално отношение, Hobson and Jessop, 1892) Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=x, BD=y$, то

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

## II. Обобщения за правилни многоъгълници

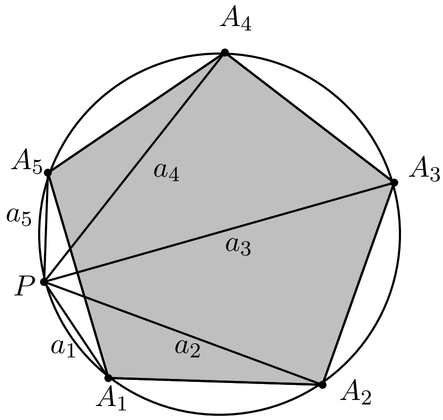
Да се върнем към теоремата на Van Schooten, която е частен случай на теоремата на Ptolemy.

**Какво ще се получи, ако равностранния триъгълник заменим с друг правилен многоъгълник?**

Да разгледаме правилен петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$, вписан в окръжност, и нека $P$ е произволна точка от по-малката дъга $A_5A_1$. Съществува ли зависимост, подобна на тази от теоремата на Van Schooten, между отсечките $PA_1=a_1, PA_2=a_2, PA_3=a_3, PA_4=a_4, PA_5=a_5$?

**Твърдение 4.** За така дефинираните отсечки е в сила равенството

$$a_1+a_3+a_5=a_2+a_4.$$




*Доказателство.* Да означим страната на петоъгълника с $a$, а диагонала с $b$. По теоремата на Птолемей получаваме:

$$\text{за } A_1PA_5A_2: \quad a_1b + a_5a = a_2a$$

$$\text{за } A_1PA_5A_3: \quad a_3a = a_1b + a_5b$$

$$\text{за } A_1PA_5A_4: \quad a_5b + a_1a = a_4a$$

Като съберем почленно горните равенства и разделим на $a$, получаваме даденото.

**Има ли обобщение за "нечетен"правилен $n$-ъгълник?**

**Твърдение 5.** Нека $A_1A_2\dots A_n$ е правилен $n$-ъгълник ($n$ е нечетно число), вписан в окръжност. Нека $P$ е произволна точка от по-малката дъга $A_nA_1$, а $PA_i = a_i$,, $i = 1\dots n$. Тогава

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n = a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}.$$

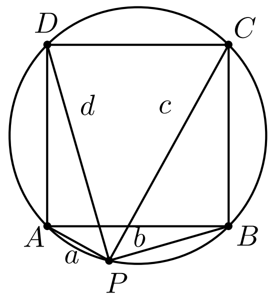
Доказателството е аналогично на това за правилен петоъгълник.

**Сега да погледнем на теоремата на Van Schooten от друга гледна точка.**

Ако запишем равенството $c = a + b$ във вида $\dfrac{c}{a+b} = 1$, може да кажем, че стойността на израза $\dfrac{c}{a+b}$ не зависи от положението на точката $P$ на дъгата $AB$, т.е. $\dfrac{c}{a+b}$ е инвариант при това движение.

**Теорема 3.** (A Little Square Theorem) Нека квадратът $ABCD$ е вписан в окръжност и $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$. Ако $PA = a, PB = b, PC = c, PD = d$, то

$$c + d = (1 + \sqrt{2})(a + b).$$




*Доказателство.* Без ограничение може да считаме, че страната на квадрата е 1. От теоремата на Птолемей за четириъгълниците $APBC$ и $APBD$ имаме

$$b\sqrt{2} + a = c, \qquad a\sqrt{2} + b = d.$$

Като съберем горните равенства, получаваме даденото.

По подобен начин се получават и следващите две теореми. Тяхното доказателство и възможно обобщение оставяме на читателя.

**Теорема 4.** (A Little Pentagon Theorem) Нека правилният петоъгълник $ABCDE$ е вписан в окръжност и $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$. Тогава

$$PC + PE = k(PA + PB),$$

където $k = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

**Теорема 5.** (A Little Hexagon Theorem) Нека правилният шестоъгълник $ABCDEF$ е вписан в окръжност и $P$ е произволна точка от по-малката дъга $AB$. Тогава

$$PC + PF = (1 + \sqrt{3})(PA + PB).$$

# конкурсни задачи

***Уважаеми читатели,***

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:


проф. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.


* * *

**Задача 1.** Известно е, че съществува единствена тройка прости числа $(p, q, r)$, за които $p < q < r$ и $\dfrac{p^3 + q^3 + r^3}{p + q + r} = 249$. Да се намери $r$.

**Задача 2.** Даден е триъгълник $ABC$ с радиус на описаната окръжност 17 и радиус на вписаната окръжност 4. Външновписаната окръжност, която се допира до страната $BC$, е $k_a$. Симетричната окръжност на $k_a$ спрямо правата $BC$ се допира до описаната около $ABC$ окръжност. Да се намери лицето на $ABC$.

**Задача 3.** Да се намери броят на пермутациите $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ на числата $1, 2, \dots, 2018$, за всяка от които неравенството $a_k > k$ е изпълнено за точно една стойност на $k$.

*Срокът за представяне на решенията е 30.09.2018 г.*

# Конкурсни задачи

## Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 2/2018 г.

**Задача 1.** Естественото число $C$ е с 22% по-малко от естественото число $A$ и с 16% по-голямо от естественото число $T$. Намерете най-малката възможна стойност на сбора $C + A + T$.

**Решение на Златимир Петров** (5. клас, ППМГ, Монтана).
Тъй като $C$ е с 22% по-малко от $A$, то

$$C = 78\%\ A = \frac{39}{50}\ A.$$

Числата $C$ и $A$ са естествени, следователно $A$ се дели на 50.

Освен това $C$ е с 16% по-голямо от $T$, т.е.

$$C = 116\%\ T = \frac{29}{25}\ T.$$

Числата $C$ и $T$ са естествени, следователно $T$ се дели на 25.

От горните равенства следва, че

$$\frac{39}{50}\ A = \frac{29}{25}\ T = \frac{58}{50}\ T, \quad \text{т.е.} \quad 39\ A = 58\ T.$$

Тъй като 39 и 58 са взаимнопрости, то $A$ се дели на 58, а $T$ се дели на 39.

Като вземем предвид, че $A$ и $T$ се делят на 25, получаваме, че най-малките им стойности са $A = 2.29.25 = 1450$ и $T = 3.13.25 = 975$. Тогава $C = 1131$ и

$$C + A + T = 3556.$$

Задачата е решена и от **Христо Георгиев** (5. клас, ППМГ, Стара Загора), **Любен Карбанов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Йоан Василев** (7. клас, МГ, Плевен).

**Задача 2.** Тази година Ясен участвал в 7 математически състезания, на които получил 7 различни резултата, всеки от които е естествено число между 91 и 100 включително. След всяко състезание Ясен пресмятал средния си резултат до момента и всеки път получавал естествено число. Намерете резултата на Ясен от шестия тест, ако на седмия тест получил 95 точки.

**Решение на Марин Христов** (6. клас, СМГ).

Нека сборът от първите шест резултата е $n$. Тъй като средният резултат след шестия тест е естествено число, то $n$ се дели на 6.

Средният резултат след седемте теста е естествено число, следователно $n + 95$ се дели на 7. Това означава, че $n$ дава остатък 3 при деление на 7.

Освен това,

$$n \geqq 91 + 92 + 93 + 94 + 96 + 97 = 563 \text{ и}$$

$$n \leqq 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 94 = 584.$$

От естествените числа между 563 и 584 кратните на 6 са 564, 570, 576 и 582. От тях остатък 3 при деление на 7 дава само 570, т.е. $n = 570$.

Нека резултатът на шестия тест е $x$. Тогава $(n - x) = (570 - x)$ се дели на 5, т.е. $x$ се дели на 5. Тъй като $x$ е между 91 и 100 и е различно от 95, то $x$ е 100. Получихме, че на шестия тест Ясен има 100 точки.

Задачата е решена и от **Дениз Потурлиев** (6. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен), **Мария Дренчева** (6. клас, СМГ), **Ясен Пенчев** (6. клас, ППМГ, Габрово), **Любен Карбанов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Йоан Василев** (7. клас, МГ, Плевен).

**Задача 3.** Дадена е квадратна мрежа с $n \times n$ единични квадратчета.

а) Намерете $n$, за което 30% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати.

б) Намерете най-малкото $n$, за което по-малко от 3% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати.

**Решение на Мария Дренчева** (6. клас, СМГ).

Първо ще отбележим, че броят на правоъгълниците със страни по линиите на мрежа $n \times n$ е

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

а броят на квадратите измежду тях е

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

а) Тъй като 30% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати, то

$$30\%\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Оттук получаваме $(n-4)(9n+5)=0$, т.е. търсената стойност е $n=4$.

б) Тъй като по-малко от 3% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати, то

$$3\%\frac{n^2(n+1)^2}{4} > \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Оттук получаваме $n(9n-391) > 200$. Тъй като $n>0$, то $9n-391>0$, следователно $n>43$. Лесно се вижда, че неравенството е изпълнено при $n=44$ и това е търсената най-малка стойност.

Задачата е решена и от **Марин Христов** (6. клас, СМГ), **Ясен Пенчев** (6. клас, ППМГ, Габрово), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Йоан Василев** (7. клас, МГ, Плевен).

# ЗАДАЧИТЕ ОТ TIMO 2018

Елина Димова, Деан Дечев

(продължение от брой 3)

## ТЕМА ЗА 7. КЛАС

*Логическо Мислене*

**1.** Нека $A$, $B$, $C$ са цифри различни от нула и нека са изпълнени и трите условия:

а) $\overline{CBA}$ се дели на 9;

б) $\overline{ABC}$ е точен куб;

в) $B > 1$.

Намерете трицифреното число $\overline{CAB}$.

**2.** Разделете числата 2, 6, 9, 17, 25, 35, 42 и 64 в две групи по четири така, че сборовете на числата в двете групи да са равни. Намерете произведението на числата от групата, съдържаща числото 9.

**3.** В редица са застанали 32 деца, номерирани от 1 до 32, по ред на номерата. Всяко от децата държи по едно число. Дете номер 1 държи числото 1, дете номер 2 държи числото 2, и дете номер 3 държи числото 3. Като имате предвид, че сборът от числата на всеки 9 последователно номерирани деца е равен на 30, пресметнете сбора от числата на всички деца.

**4.** В едно математическо състезание участниците решават 16 задачи. Оценяването се извършва по следния начин: 1 точка се дава за верен отговор; 0 точки – за непосочен отговор и 1 точка се отнема, ако отговорът е грешен. Възможно е да има и отрицателни резултати. Колко най-малко трябва да са участниците, за да сме сигурни, че поне трима от участниците ще имат равен брой точки?

**5.** В една кошница има 3 чифта бели, 5 чифта жълти и 7 чифта кафяви китайски пръчици за хранене. Ако искате да вземете 4 чифта китайски пръчици за хранене с различен цвят без да гледате, колко най-малко пръчици трябва да извадите от кошницата?

**6.** Използвайте цифрите 1, 2, 3 и 4, за да съставите четирицифрени числа с различни цифри. Намерете сбора от всички такива четирицифрени числа.

*Алгебра*

**7.** Намерете $b$, ако $(3b+3)-(5b-9)=2$.

**8.** Ако $|y+2|+x^2-6x+9=0$, намерете стойността на

$$(2y+x)+(2y+x)^3+(2y+x)^5+\cdots+(2y+x)^{4037}\,.$$

**9.** Намерете стойността на $1^3+2^3+3^3+\cdots+39^3$ .

**10.** Ако $a$ и $b$ са естествени числа, такива че $a>b$ и $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=27+12\sqrt{5}$, намерете стойността на $a-b$.

**11.** Нека $x$ и $y$ са естествени числа, такива че $xy-2x-3y=6$. Намерете сбора от всички възможни стойности на $x$.

**12.** Ако $x^2+x+1=0$, пресметнете стойността на $x^3+2x^2+2x+2018$.

*Теория на числата*

**13.** Намерете най-малката положителна цяла стойност за $n$, така че $240n$ да има нечетен брой положителни делители.

**14.** Колко положителни цели решения $(x,\,y)$ има уравнението

$$3x+4y=66\ ?$$

**15.** Намерете сбора на всички цифри на $A$, ако $A=\underbrace{333\ldots333^2}_{2018}$.

**16.** Ако $x>0$ и $x^2+\dfrac{1}{x^2}=79$, намерете стойността на $\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$.

**17.** Намерете най-малкото сред три последователни естествени числа, ако най-малкото им общо кратно е 1680.

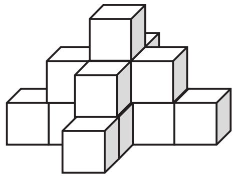
**18.** Ако $x$ е рационално число, $x>0$ и $x=5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}$, намерете стойността на $x$.

*Геометрия*

**19.** Правоъгълен паралелепипед е сглобен от 2431 кубчета с дължина на ръба 1 см. Намерете възможно най-малкото лице на повърхнината на паралелепипеда в квадратни сантиметри.

**20.** Триъгълник има страни с дължина 21 cm, 28 cm и 35 cm. Намерете лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.

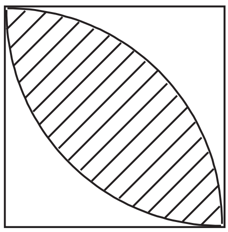
**21.** Малки кубчета с дължина на ръба 1 cm са подредени, както е показано на фигурата по-долу:



Ако има 10 слоя кубчета, намерете лицето на повърхнината на фигурата.

**22.** Сборът на три вътрешни ъгъла на четириъгълник е с 50 градуса по-голям от сбора на три вътрешени ъгъла на триъгълник. Четвъртият вътрешен ъгъл на четириъгълника е $X$. Намерете $X$.

**23.** На чертежа е показан квадрат и защрихован участък, образуван от две припокриващи се четвъртинки от кръгове. Намерете лицето на защрихованата част. ($\pi \approx 3.14$)




**24.** В правоъгълна координатна система точката $M\ (x; y)$ е среда на отсечката $AB$. Ако са дадени $A(5; 17)$ и $B(11; -3)$, пресметнете $x + y$.

*Комбинаторика*

**25.** Ако има $x$ начина да подредите 3 момичета и 3 момчета в редица, намерете стойността на $x$.

**26.** Две момчета Боби и Бенсън и две момичета Габи и Джорджия са подредени в редица по следните правила:

1) Момче не може да стои до друго момче;

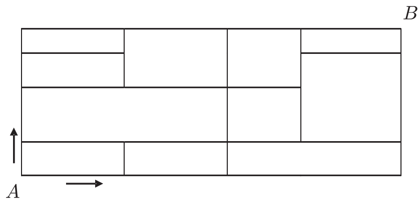
2) Бенсън трябва да стои до Джорджия.

Ако $x$ е броят на различните начини за подреждане, намерете $x$.

**27.** По колко различни начина можем да разпределим 6 различни топки в 3 еднакви кутии, като във всяка кутия трябва да има поне по 1 топка?

**28.** Колко от трицифрените числа, съставени от различни цифри измежду цифрите 1, 2, 6, 7, 8 и 9, се делят на 3?

**29.** Сами трябва да се придвижи от точка $A$ до точка $B$, като може да прави само стъпка нагоре или стъпка надясно. По колко начина Сами може да стигне от точка $A$ до точка $B$?




**30.** Хвърляме 4 шестостенни стандартни зарчета (с брой на точките върху всяка страна от 1 до 6). Резултатите се записват в ред (например 1112 и 2111 се броят за две различни хвърляния). Намерете броя на различните хвърляния, при които сборът от резултатите е 10.

## ТЕМА ЗА 8 КЛАС

*Логическо Мислене*

**1.** $A$ и $C$ са две цифри, различни от нула, такива че:

а) $\overline{CAA}$ се дели на 9;

б) $\overline{ACA}$ се дели на 3;

в) $\overline{AAC}$ има нечетен брой делители.

Намерете трицифреното число $\overline{CAA}$.

**2.** Числата 2, 6, 8, 9, 11, 14, 15 и 17 са разделени в две групи по четири числа във всяка така, че сборовете на числата в двете групи са равни. Намерете сбора на числата в групата, в която е числото 17.

**3.** В редица са застанали 30 деца, номерирани от 1 до 30, по ред на номерата. Всяко от децата държи по едно число. Дете номер 1 държи числото 1, дете номер 2 държи числото 2, и дете номер 3 държи числото 3. Като имате предвид, че сборът на числата на всеки 6 последователно номерирани деца е равен на 40, пресметнете произведението на числата, които държат децата с номер 14 и номер 27.

**4.** В едно математическо състезание участниците решават 16 задачи. Оценяването се извършва по следия начин: 1 точка се дава за верен отговор; 0 точки – за непосочен отговор и 1 точка се отнема, ако отговорът е грешен. Възможно е да има и отрицателни резултати. Колко най-малко трябва да са участниците, за да сме сигурни, че поне 4-ма от участниците ще имат равен брой точки?

**5.** В една кошница има 6 бели, 3 жълти и 4 кафяви китайски пръчици за хранене. Ако искате да вземете по 1 чифт китайски пръчици за хранене от всеки цвят без да гледате, колко най-малко пръчици трябва да извадите от кошницата?

**6.** Колко от четирицифрените числа, съставени с различни цифри измежду цифрите 5, 6, 7, 8 и 9, се делят на 11?

*Алгебра*

**7.** Намерете $x$, ако $x < 0$ и $|x-6|+|x+2|=9$.

**8.** Разложете на множители $x^3-y^3+3y^2-3y+1$.

**9.** Ако $a$ е реално число, намерете най-голямата стойност на израза $3a-a^2+16$.

**10.** Намерете стойността на $x$, ако $x$ е реално число и

$$\frac{x-2}{(x-3)(x-6)}=\frac{x-5}{(x-4)(x-6)}.$$

**11.** Ако $a$ е реално число и $a+2-\dfrac{3}{a+2}=2$, намерете стойността на $a$.

**12.** Пресметнете $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+40^2}{1\times 2+2\times 3+\cdots+39\times 40}$.

*Теория на числата*

**13.** Намерете остатъка при деление на $2018^{2018}$ на 18.

**14.** Колко са целите решения за $x$, ако $-99 \leq 6x+5 \leq -8$?

**15.** Намерете последната цифра $A$, ако $A=7^2+7^5+7^8+\cdots+7^{2015}+7^{2018}$.

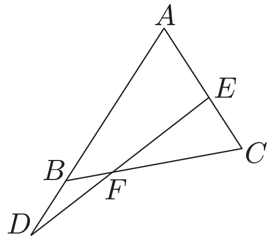
**16.** Ако $x>0$ и $x+\dfrac{1}{x}=2023$, намерете стойността на $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

**17.** Ако $2x$ е точен куб на цяло число и $3x$ е цяло число, повдигнато на четвърта степен, намерете стойността на $x$.

**18.** Ако $x$ е рационално число, $x>0$ и $x=\sqrt{5+4\sqrt{5+4\sqrt{\ldots}}}$, намерете $x$.

*Геометрия*

**19.** На фигурата по-долу $AB = 2AC$, а $E$ е точка от $AC$ и $D$ е точка от продължението на $AB$. Правата $DE$ пресича $BC$ в точка $F$.




Ако $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{EF}{DE} = \dfrac{2}{5}$, намерете стойността на $\dfrac{AE}{EC}$.

**20.** Спрямо координатна система три точки $A$, $B$ и $C$ имат координати: $A(1;2)$, $B(5;6)$ и $C(8;10)$. Намерете лицето на триъгълника, образуван от тези три точки.

**21.** Дължините на трите страни на правоъгълен триъгълник са цели числа. Един от катетите му е 1009. Намерете сбора от дължините на другите две страни.

**22.** $ABCDEF$ е правилен шестоъгълник. Ако диагоналът $AD = 2018$, намерете лицето на $ABCDEF$. (Изразете отговора си с число, което не може да бъде опростено при премахване на квадратния корен)

**23.** Намерете $n$, ако един ъгъл на правилен $n$-ъгълник е $150^\circ$.

**24.** Намерете разстоянието между правите с уравнения $3x + 4y - 6 = 0$ и $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{8}$.

*Комбинаторика*

**25.** Ако има $c$ начина да подредим 2 момчета и 5 момичета в редица, намерете стойността на $c$.

**26.** Четири момчета Боби, Бенсън, Бени, Бенджамин и три момичета Грейс, Глория и Джорджия трябва да седнат в редица по следните правила:

1) Момче не може да седи до друго момче и момиче не може да стои до друго момиче;

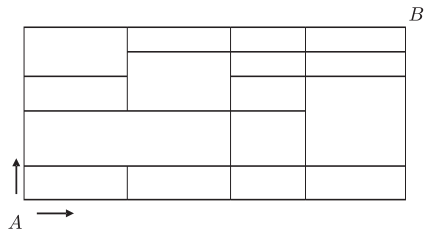
2) Бенджамин не може да седи до Грейс.

Ако $X$ е броят на различните начини за сядане, намерете $X$.

**27.** Стандартен 6-стенен зар е хвърлен 3 пъти. Пресметнете вероятността сборът от цифрите, които са се паднали, да е равен на 7.

**28.** 19 карти са номерирани с числата от 1 до 19 и две от тях са изтеглени на случаен принцип. Намерете вероятността сборът на тези две карти да се дели на 5.

**29.** Ана трябва да се придвижи от точка $A$ до точка $B$, като може да прави само стъпка нагоре или стъпка надясно. По колко начина Ана може да стигне от точка $A$ до точка $B$?




**30.** При игра на покер, Джон изтеглил 5 карти от едно тесте на случаен принцип. Комбинацията от изтеглените карти е стрейт. Каква е вероятността да се падне стрейт? (Стрейт означава комбинация от 5 поредни карти например A, 2, 3, 4, 5.)

## ТЕМА ЗА 9–12 КЛАС

*Логическо Мислене*

**Задача 1.** Нека $A$, $B$ и $C$ са цифри, различни от нула, и нека са изпълнени и трите условия:

а) $\overline{CBA}$ се дели на 8;

б) $\overline{BAC}$ се дели на 9;

в) $A + B = C$.

Намерете трицифреното число $\overline{ACB}$.

**2.** Средноаритметичното, медианата и диапазонът (разликата между най-голямото и най-малкото) на 80 цели числа е 45. Ако $A$ е най-голямото число сред тези 80 числа, намерете най-голямата възможна стойност на $A$.

**3.** В кръг са застанали 9992 деца, номерирани от 1 до 9992, по ред на номерата. Всяко дете държи цяло число в ръка. Детето с номер 1 държи числото 1. Детето с номер 2 държи числото 2. Детето с номер 3 държи числото 3. Като имате предвид, че сборът от числата на всеки 1248 последователно номерирани деца е равен на 2018, колко е произведението на числата, които държат децата с номер 1217 и номер 2018?

**4.** В едно математическо състезание участниците решават 22 задачи. Оценяването се извършва по следия начин: 2 точки се дават за верен отговор, 1 точка се отнема за грешен отговор и 2 точки се отнемат, ако не е даден отговор. За да се гарантира, че поне 4-ма участници ще имат равен резултат, в състезанието трябва да участват най-малко $S$ участници. Намерете стойността на $S$.

**5.** Използвайте числата 1, 2, 3, 4 и 5 за да попълните долната таблица така, че петте числа във всеки ред и всяка колона да са различни. Кое е числото, което трябва да попълним в клетка $X$?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | | 2 | |
| | 2 | | | |
| $X$ | | | 4 | |
| | | | | 1 |

**6.** С цифрите 0, 1, 6, 7, 8 съставете четирицифрени числа с различни цифри. Намерете сбора на тези четирицифрени числа.

*Алгебра*

**7.** Нека $\alpha$ и $\beta$ са корени на уравнението $x^2 - 2018x + 1 = 0$. Ако $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ и $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ са корените на уравнението $x^2 - Sx + 1 = 0$, пресметнете $\dfrac{S}{2018}$.

**8.** Нека $c$ е свободният член от нормалния вид на $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^3 \left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^4$, намерете стойността на $c$.

**9.** Ако $x$ е реално число и $3^{x-1} - 2^{x-1} = 2^{x+2} - 3^x$, намерете стойността на $x$.

**10.** Ако $a$ е цяло число, определете най-голямата стойност на $a$, така че уравнението $2ax^2 + (a-1)x - (a+2) = 0$ да няма реални корени.

**11.** Ако $-2 \leq x \leq 2$ и $y = 16x^4 + 24x^3(3-2x) + 12x^2(3-2x)^2 + 2x(3-2x)^3$, намерете най-малката стойност на $y$.

**12.** Дадено е, че $y$ е неотрицателно реално число. Намерете най-голямата стойност на $\sqrt{\dfrac{(y-1)(y-5)+8}{(y-3)^2+1}}$.

**13.** Ако $\overline{A2018B}$ е 6-цифрено число, което се дели на 72, намерете стойността на $A$.

**14.** Нека $x$ е естествено число, което удовлетворява и трите условия:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$$

Намерете сбора на всички $x < 7000$.

**15.** Колко са целите числа $x$, такива че $\sqrt{\dfrac{2018}{\sqrt{\frac{1}{4}(x^2+6x+10)}}} > 2$?

**16.** Съставете четирицифрени числа с различни цифри измежду цифрите 2, 4, 6 и 8. Намерете сбора на всички такива числа, които се делят на 11.

**17.** Коя е най-голямата целочислена стойност на $a$, която удовлетворява неравенството $a^4 \le 5^{10}$?

**18.** Нека $n$ е положително цяло нечетно число, такова че $110n^3$ има точно 110 положителни делителя. Колко положителни делителя има $2018n^5$?

*Геометрия*

**19.** Намерете лицето на фигурата, заградена от ординатната ос и правите $y = 2x + 4$, $2y = 3x - 5$.

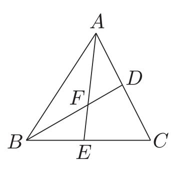
**20.** Начертайте правилен шестоъгълник и правилен осмоъгълник вписани в една и съща окръжност. Ако лицето на шестоъгълника е 72 см$^2$, колко квадратни сантиметра е лицето на осмоъгълника?

**21.** Ако дължината на страната в равностранен триъгълник е $x$ cm, тогава дължината на страната на най-големия квадрат, вписан в него, е $kx$ cm. Намерете $k$.

**22.** Дадени са острите ъгли $x$ и $y$, такива че $\sin y = 2\sin(x+y)\cos x$. Намерете най-малката стойност на $\operatorname{tg} y$.

**23.** Разстоянието между правите $y = \dfrac{12x}{5} + c$ и $5y = 12x + 2$ е с 5 повече от разстоянието между правите $5y = 12x + 2$ и $\dfrac{12x}{5} - y + \dfrac{28}{5} = 0$. Намерете най-голямата стойност на $c$.

**24.** На чертежа $AE$ и $BD$ се пресичат в точка $F$. Ако $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{4}{5}$ и лицето на триъгълника е 792, намерете лицето на $\triangle ADF$.



**25.** Ако има $c$ начина за подреждане на 4 момичета и 3 момчета в кръг, намерете стойността на $c$.

**26.** Имаме пет топки с надписи $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и съответно 5 джоба с надписи $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Във всеки джоб има сложена по една топка на случаен принцип. Намерете вероятността топката $C$ да не е в джоб $D$ и топката $D$ да не е в джоб $E$.

**27.** Стандартен 6-стенен зар е хвърлен 3 пъти. Нека с $\frac{x}{216}$ изразим вероятността да се падне една тройка или две шестици. Намерете стойността на $x$.

**28.** Върху 16 карти са написани числата от 1 до 16 и 2 от тях са изтеглени на случаен принцип. Намерете вероятността произведението на числата върху двете изтеглени карти да има нечетен брой делители.

**29.** Нека $(a, b, c, d)$ е наредена четворка от цели числа и $a \geq -1$, $b \geq 0$, $c \geq -4$, $d \geq 0$. Намерете броя на четворките, които са решения на $a + 2b + c + d = 1$.

**30.** Има осем ученици $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ и един ред от пет седалки. Петима от учениците са седнали. Намерете вероятността $A$ да не седи на крайната лява седалка и поне един от двамата, $B$ или $C$, да е седнал.

**Отговори:**

**За 7 клас:** 1) 972; 2) 28 800; 3) 99; 4) 67; 5) 21; 6) 711040; 7) 5; 8) $-2019$; 9) 5; 10) 3;11) 46; 12) 2017; 13) 15; 14) 608 400; 15) 18 162; 16) 9; 17) 16; 18) 25; 19) 1102; 20) 294; 21) 390; 22) 30; 23) 2052; 24) 15; 25) 720; 26) 8; 27) 90; 28) 54; 29) 25; 30) 80.

**За 8 клас:** 1)522; 2) 3808; 3) 6; 4) 100; 5) 12; 6) 24; 7) $-5/2$; 8) $(x-2y+1)(x^2+xy+y^2-x-2y+1)$; 9) 73/4; 10) 7/2;11) 1; 12) 27/26; 13) 4; 14) 15; 15) 9; 16) 45; 17) 6912; 18) 5; 19) 7/2; 20) 2; 21) 1018081; 22) $\frac{3,054,243\sqrt{3}}{2}$; 23) 12; 24) 19/10; 25) 5040; 26) 84; 27) 5/72; 28) 35/171; 29) 62; 30) 128.

**За 9–12 клас:** 1) 297; 2) 34; 3) 1; 4) 171; 5) 2; 6) 571956; 7) 4,072,322; 8) $2(y+z)(y^2-yz+z^2)$; 9) -3/2; 10) $-5$; 11) 9; 12) $16\sqrt{2}+10\sqrt{10}$; 13) 16; 14) $\sqrt{7}$; 15) 0; 16) $5+\sqrt{14}$; 17) $\leq 937$; 18) 4; 19) 27/2; 20) 36; 21) 36; 22) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$; 23) 26; 24) 6/5; 25) 120; 26) 40; 27) 143/216; 28) 71/171; 29) 49; 30) 9/70.

# МАТЕМАТИЧЕСКА ЩАФЕТА

ЗА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИ

Математическата щафета е състезание, при което в за решението на всяка следваща задача е необходим верният отговор на предишната задача. Трябва да сме много внимателни, за да успеем да стигнем до края без грешка! Предлагаме ви да опитате силите си със следващите 18 задачи.

**Задача 1.** Числото $A$ е най-малкото число, което може да се получи, ако се зачертаят три от цифрите в числото 9132607.

**Задача 2.** В колекцията на Асен има $B$ марки. Иво има със 7 марки повече от Асен, а Боби има два пъти повече марки от Асен. Тримата имат общо $A$ марки.

**Задача 3.** Симеон участвал в състезание на 1000 метра заедно с още $B$ ученици. Ако половината от учениците, изпреварили Симеон, се бяха класирали след него, то състезателите след Симеон щяха да са 4 пъти повече от състезателите преди него. Симеон се е класирал на $C$-то място.

**Задача 4.** В плик има общо $C$ бонбона, ментови, ягодови и малинови. Най-много са малиновите бонбони. Малиновите бонбони са най-малко на $D$ брой.

**Задача 5.** Ако числото $E$ увелича 5 пъти, към резултата прибавя 7 и получения сбор разделя на 2, ще получа $D$.

**Задача 6.** Едната страна на правоъгълник е $E$ см. Ако я увеличим с 4 см, лицето на правоъгълника ще се увеличи с 40 кв.см. Първоначалното лице на правоъгълника е равно на $F$.

**Задача 7.** В училище учат $F$ ученици, всеки от които обича музика или математика. Третината от тези, които обичат математика, обичат и музика, а 100 ученици обичат музика. Броят на тези, които обичат и математика, и музика, е $G$.

**Задача 8.** Десет заека за 10 минути изяждат $G$ зелки. Тогава 8 заека за 3 минути ще изядат $H$ зелки.

**Задача 9.** В квадратна мрежа очертали квадрат с $H$ реда и $H$ стълба. Броят на всички квадрати на чертежа е $I$.

**Задача 10.** Баба раздала на своите 19 внучета общо $I$ бонбона. Всяко момиче получило 4 бонбона, а всяко момче – 5 бонбона. Броят на момчетата е $J$.

**Задача 11.** Ако купя 3 сладоледа, ще ми останат $J$ стотинки, но $3.J$ стотинки не ми стигат, за да купя 4 сладоледа. Имам $K$ стотинки.

**Задача 12.** За украсата на бал общо $K$ рози натопили по 9 или по 11 във ваза. Вазите са най-малко на $L$ брой.

**Задача 13.** В таблицата сборовете на числата във всеки ред, всеки стълб и всеки диагонал са равни.

| | | |
|---|---|---|
| | $L$ | 6 |
| | 10 | |
| $M$ | | |

**Задача 14.** Ани има $M$ различни блузки и син, черен и кафяв панталон. Тя може да комбинира панталон и блузка по $N$ различни начина.

**Задача 15.** Сборът от годините на Иво и сестра му е $N$. Сестра му е с 4 години по-малка от него. Иво е на $P$ години.

**Задача 16.** $Q$ е броят на трицифрените числа, сборът от цифрите на всяко от които е равен на $P$.

**Задача 17.** $R$ е най-малкото трицифрено число със сбор на цифрите, равен на $P$.

**Задача 18.** Кики трябва да събере числата от 1 до $S$, но пропуснал едно число и получил сбор $R$. Пропуснатото число е $T$.

А сега е време да сверите своите **отговори**!

**1.** $A = 1207$.

**2.** Марките на Асен са $B$, на Иво– $B + 7$, а на Боби – $2.B$. Трите имат общо $4.B + 7 = 1207$ марки. Оттук $B = 300$.

**3.** Ако състезателите след Симеон са 4 пъти повече от състезателите преди него, пред него има $300 : 5 = 60$ деца. Но това ще се случи, ако Симеон изпревари половината от децата пред него. Следователно пред него има $60.2 = 120$ деца. $C = 121$.

**4.** Тъй като $121 = 3.40 + 1$, по принципа на Дирихле следва, че $D = 41$.

**5.** По обратен път намираме $E = (41.2 - 7) : 5 = 15$.

**6.** Страната с дължина 15 см е увеличена с 4 см, при което към правоъгълника се добавя правоъгълник със страни 4 см и неизвестната страна на правоъгълника. Тъй като лицето на добавения правоъгълник е 40 кв.см, то неизвестната страна на правоъгълника е $40 : 4 = 10$, а първоначалното му лице е $F = 15.10 = 150$.

**7.** Само математика обичат $150 - 100 = 50$ ученици. И математика, и музика обичат $G = 50 : 2 = 25$ ученици.

**8.** Два заека за 2 минути ще изядат $(25 : 5) : 5 = 1$ зелка. Осем заека за 2 минути ще изядат 4 зелки, значи за 1 минута ще изядат 2 зелки, а за 3 минути – $H = 6$ зелки.

**9.** Има $I = 6.6 + 5.5 + 4.4 + 3.3 + 2.2 + 1 = 91$ квадрати.

**10.** Ако бабата първо раздаде на всички по 4 бонбона, ще останат $91 - 19.4 = 15$ бонбона. Тях тя трябва да раздаде по един на всяко момче. Значи $J = 15$.

**11.** Един сладолед струва $15 + 3.15 = 60$ стотинки, а имам $K = 3.60 + 15 = 195$ стотинки.

**12.** За да е възможно най-малък броят на вазите, вазите с 11 рози трябва да са възможно най-много. Тъй като никое от числата $195 - 17.11$, $195 - 16.11$, $195 - 15.11$, $195 - 14.11$, $195 - 13.11$ не се дели на 9, то вазите с 11 рози са най-много 12. В този случай вазите с 9 рози са $(195 - 12.11) : 9 = 7$ и общо вазите са $L = 12 + 7 = 19$.

**13.** Числото в долния десен ъгъл е $(19+6)-10 = 15$, а $M = (19+10)-15 = 14$.

**14.** $N = 14.3 = 42$.

**15.** $P = (42 + 4) : 2 = 23$.

**16.** Сбор на цифрите 23 имат числата с цифри $(9, 9, 5)$, $(9, 8, 6)$; $(9, 7, 7)$, $(8, 8, 7)$. От три различни цифри се образуват 6 числа, а ако има две еднакви цифри, числата са 3. Затова $P = 3.3 + 6 = 15$.

**17.** $R = 159$.

**18.** Тъй като $1 + 2 + \cdots + 17 = 153$, а $1 + 2 + \cdots + 19 = 190$, то $S = 18$. Тогава $T = (1 + 2 + \cdots + 18) - 159 = 171 - 159 = 12$.

## 4. клас

**46.** Господин Николов преподава на 15 ученици. Той оценявал тестовете им и забелязал, че преди да провери последния тест (на Ани), средната оценка на проверените тестове била 80. След като проверил теста на Ани, средната оценка станала 81. Колко точки е имала Ани на теста?

**47.** На колко е равно числото МОРЕ?

$$\begin{array}{rcccc} & \text{М} & \text{О} & \text{Р} & \text{Е} \\ + & & \text{О} & \text{Р} & \text{Е} \\ & & & \text{Р} & \text{Е} \\ \hline & 2 & 9 & 6 & 8 \end{array}$$

**48.** В сладкарницата две близалки и парче торта струват 3 лв. Явор купил три близалки и две парчета торта и платил 5 лв. 40 ст. Калоян купил близалка и парче торта, а Боян купил две парчета торта. Колко е платил Калоян и колко – Боян?

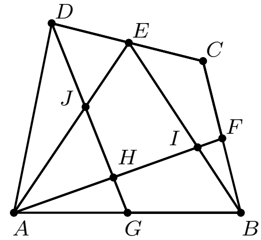
**49.** Кики трябва да събере числата от 1 до $X$, но пропуснал едно число и получил сбор 159. Кое е пропуснатото число?

## 5. клас

**50.** Ани, Ния, Руми и Антон общо имат повече от 1000, но по-малко от 1500 календарчета. Ани, Ния и Руми имат съответно $\frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ от всичките календарчета. Колко календарчета има Антон?

**51.** Иво решавал тест. След като решил 25% от задачите и още 10 задачи, останало да реши 50% от задачите без 4 задачи. Колко са задачите в теста?

**52.** Точките $E$, $F$ и $G$ са среди на съответните страни на четириъгълника $ABCD$ на чертежа. Ако лицето на $\triangle AHJ$ е 7, лицето на $\triangle JED$ е 6 и лицето на $GBIH$ е 19, колко е лицето на $IFCE$?



**53.** Да се намери най-малкото естествено число $n$, такова че сборът на остатъците при делението на това число с числата 5, 6, 7, 8 и 9 е равен на 30.

## 6. клас

**54.** Намислих число, прибавих към него 24, сбора намалих три пъти и получих намисленото число. Кое е то?

**55.** Ако $a = \dfrac{3^{10} + 4.3^9}{3^{10} - 2.3^9}$, да се пресметне стойността на израза

$$\frac{a^3.(-a^2)^5}{(-a)^2.(a^3)^3}.$$

**56.** Николай имал 5 лв. Той дал на Олег 40% от парите си, след което Олег дал на Николай 40% от парите си. Ако накрая двамата имали поравно пари, колко лева е имал Олег в началото?

**57.** Прав кръгов конус с радиус $r = 4$ m и височина $h = 3$ m има лице на околната повърхнина, равно на $20\pi$ m$^2$. Намерете образуващата и обема на конуса.

## 7. клас

**58.** Да се намери общият корен на уравненията $|x + 21| = 14$ и $(x + 4)^2 = 9$.

**59.** В 10 часа от град A към B тръгнал автобус със скорост 75 km/h, а в 10 h 20 min по същия път от B към A отпътувал камион със скорост 90 km/h. Автобусът и камионът се срещнали, като до момента на срещата камионът изминал 20 km повече от автобуса. Да се намери в колко часа са се срещанали и колко километра е разстоянието от A до B.

**60.** На страната $CD$ на правоъгълника $ABCD$ е отбелязана точка $M$ така, че $DM = 1$ cm, $CM = 2$ cm. На страната $BC$ е отбелязана точка $N$ така, че триъгълниците $AMD$ и $MNC$ са еднакви. Да се намерят ъглите на триъгълника $AMN$.

# за по-малките решения

**на задачите от бр. 3/2018**

**31.** Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое число записахте в оцветеното квадратче?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 216 | : | | = | 6 |
| | | + | | |
| 808 | – | | = | 777 |
| | | = | | |
| 15 | · | | = | ? |

*Отговор.* Числото в оцветеното квадратче е $(36+31).15=1005$.

**32.** Попитали Петър на колко години е, а той отговорил: *Ако намалите 4 пъти моите години и полученото число намалите с 5, ще получите 6.* На колко години е Петър?

**Решение.** Петър е на $(6+5).4=44$ години.

**33.** Коко, Чоко и Боко си купили кутия с бонбони и си ги разпределили, като Коко взел третината от бонбоните. Бонбоните на Чоко били с 3 повече от бонбоните на Коко и 2 пъти повече от бонбоните на Боко. Колко бонбона е взел всеки от тях?

**Решение.** След като Коко взел третината от бонбоните, а Чоко взел с 3 повече от третината, за Боко останали с 3 по-малко от третината. Значи Чоко взел с 6 бонбона повече от Боко. В същото време, бонбоните на Боко са 2 пъти по-малко от тези на Чоко. Значи Боко е взел 6 бонбона, а Чоко 12. Коко е взел 9 бонбона.

**34.** Колко са двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е с 2 по-голяма или по-малка от цифрата на десетиците?

**Решение.** Сред търсените числа има едно с цифра на десетиците 1, 9 и 8 и по две с цифра на десетиците от 2 до 7. Числата са $3+6.2=15$.

**35.** Вдясно на числото 2018 допишете една цифра така, че полученото петцифрено число да се дели на 4, но да не се дели на 6. Вляво на това петцифрено число допишете една цифра така, че полученото шестцифрено число да се дели на 9. Колко е произведението на двете дописани цифри?

**Решение.** Петцифреното число е 20184, а шестцифреното е 320184. Произведението на двете дописани цифри е 12.

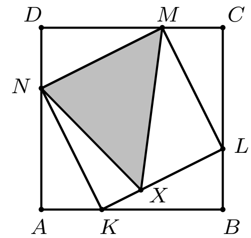
**36.** Кари получила плик с бонбони, от които $\frac{2}{5}$ били ягодови, а останалите – ментови. Кари изяла $\frac{2}{3}$ от ягодовите и $\frac{3}{4}$ от ментовите бонбони и в кутията останали 34 бонбони. Колко бонбони е получила Кари?

**Решение.** Останали са $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{60}$ от бонбоните. Следователно Кари получила $34 : \frac{17}{60} = 120$ бонбони.

**37.** На чертежа квадратът $ABCD$ има страна 9 cm. Върховете на квадрата $KLMN$ лежат на страните на $ABCD$, като

$$AK = BL = CM = DN = 3 \text{ cm}.$$

Точката $X$ е от страната $KL$. Намерете лицето на триъгълника $XMN$.




**Решение.** Лицето на квадрата $KLMN$ е $9^2 - 4 \cdot \frac{3.6}{2} = 45 \text{ cm}^2$. Оттук $S_{XMN} = \frac{1}{2} \cdot S_{KLMN} = 22,5. \text{ cm}^2$.

**38.** Намерете лицето на успоредник със страна $a = 4,5$ cm, ако тази страна е с 10% по-малка от височината към нея.

**Решение.** От $4,5 = 0,9h_a$ намираме $h_a = 5$ и $S = 22,5 \text{ cm}^2$.

**39.** Да се намери неизвестното число $x$ в равенството $a.x = b - a$, ако $a = -2 - 8 : 5$ и $b = 12 - 2.(-3)$.

**Решение.** Намираме $a = -3,6$ и $b = 18$. От $-3,6x = 18 - (-3,6)$ намираме $x = 21,6 : (-3,6) = -6$.

**40.** Конус и цилиндър имат равни обеми, като радиусът на конуса е с 20% по-голям от радиуса на цилиндъра. С колко процента височината на цилиндъра е по-малка от височината на конуса?

**Решение.** Ако радиусът на цилинъра е $R$, радиусът на конуса е $120\%R = 1,2R$. От равенството на обемите получаваме

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1,2R)^2 \cdot h_k = \pi \cdot R^2 \cdot h_c \iff 0,48h_k = h_c.$$

Височината на цилиндъра $h_c$ е равна на 48% от височината на конуса $h_k$ т.е. е с 52% по-малка от нея.

**41.** Ако $a = \frac{3^{10} + 3^9}{3^{10} - 3^9}$, кое е числото $x$ в равенството $a^x = \frac{4^6 \ . \ 8^7}{16^9}$?

**Решение.** Имаме $a = \dfrac{3^{10}+3^9}{3^{10}-3^9} = \dfrac{4.3^9}{2.3^9} = 2$, откъдето

$$2^x = \frac{4^6\ .\ 8^7}{16^9} = \frac{2^{12}\ .\ 2^{21}}{2^{36}} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

и намираме $x = -3$.

**42.** Запишете в празните полета на таблицата две естествени числа така, че за всеки квадрат от вида $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ да е изпълнено или равенството $a.d = b.c$, или $a + d = b + c$.

| | |
|---|---|
| 21 | 25 |
| | |
| 24 | 30 |

Колко е сборът на числата, които записахте?

**Решение.** Нека във втория ред отляво надясно са записани числата $x$ и $y$.

*Първи случай.* Ако за числата в горния квадрат е изпълнено равенството $21+y = 25+x$, то $y = 4+x$. Тъй като $y+24 = 28+x \neq 30+x$, то за числата в долния квадрат може да е изпълнено само равенството $30.x = 24.y$, т.е. $5x = 4y$. В последното заместваме с $y = 4 + x$ и получаваме $5x = 4(4 + x)$, откъдето $x = 16$. Тогава $y = 20$.

*Втори случай.* Ако за числата в горния квадрат е изпълнено равенството $21.y = 25.x$, то за числата в долния квадрат може да е изпълнено само равенството $30 + x = 24 + y$, т.е. $6 + x = y$. Получаваме $25x = 21(6 + x)$, откъдето $x = 31,5$; не е естествено число.

Следователно сборът на записаните числа е $16 + 20 = 36$.

**43.** Да се реши неравенството $\dfrac{x-9}{-2} \geqq \dfrac{x+2}{0,2}$. За кои стойности на параметъра $a$ коренът на уравнението $2(x + a) = 3$ е решение на даденото неравенство?

**Решение.** Имаме

$$\frac{x-9}{-2} \geqq \frac{x+2}{0,2} \iff \frac{9-x}{2} \geqq 5(x+2) \iff 9 - x \geqq 10x + 20 \iff$$

$$\iff 11x \leqq -11,$$

т.е. $x \leqq -1$. Решението на уравнението е $x = 1,5 - a$ и то е решение на неравенството при $1,5 - a \leqq -1$, т.е. $a \geqq 2,5$.

**44.** От град $A$ за град $B$ в 6 ч сутринта тръгнал камион. Шест часа по-късно от град $B$ за град $A$ по същия път тръгнала лека кола. Камионът и леката кола едновременно пристигнали в град $C$ по пътя между $A$ и $B$. Те останали в град $C$ два часа. След това камионът и леката кола продължили всеки по своя път и пристигнали едновременно съответно в градовете $B$ и $A$ в 20 ч същия ден. Да се намери отношението на скоростите на камиона и леката кола. В колко часа те са пристигнали в $C$?

**Решение.** Камионът тръгнал в 6 часа, пристигал в 20 часа с 2 часа почивка, т.е. се движил $20 - 6 - 2 = 12$ часа. Колата тръгнала в 12 часа, пристигнала в 20 часа с 2 часа почивка, т.е. се движила $20 - 12 - 2 = 6$ часа.

Тъй като колата и камионът са изминали едно и също разстояние и времето на колата е 2 пъти по-малко от времето на камиона, то отношението на скоростите на колата и камиона е $2 : 1$.

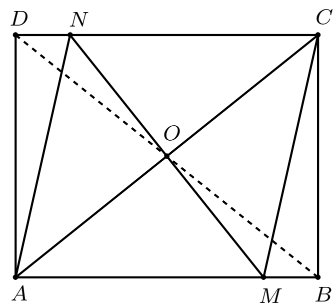
Камионът е изминал разстоянието от C до B за същото време, за което колата е изминала разстоянието от C до A. Тъй като колата се движи 2 пъти по-бързо от камиона, то CA $=$ 2 CB.

Следователно колата е изминала пътя от B до C за $\frac{1}{3}$ от времето, за което е изминала пътя от B до A, т.е. за $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ часа. Тя е стигнала до C в $12 + 2 = 14$ часа.

**45.** На страните $AB$ и $CD$ на правоъгълника $ABCD$ са отбелязани точките $M$ и $N$ така, че $AMCN$ е ромб и $\sphericalangle NAD = 10^\circ$.

а) Да се намерят $\sphericalangle MAO$ и $\sphericalangle OMC$, ако $O$ е центърът на ромба.

б) Да се докаже, че диагоналите на ромба и на правоъгълника се пресичат в една точка и да се намери $\sphericalangle ODC$.




**Решение.** а) Имаме $\sphericalangle MAN = 90^\circ - \sphericalangle NAD = 80^\circ$. Тъй като диагоналите на ромба са ъглополовящи, то $\sphericalangle MAO = \frac{1}{2}\sphericalangle MAN = 40^\circ$. Диагоналите на ромба са перпендикулярни, откъдето $\sphericalangle AMO = 90^\circ - \sphericalangle MAO = 50^\circ$ и оттук $\sphericalangle OMC = \sphericalangle AMO = 50^\circ$.

б) Ромбът и правоъгълникът имат общ диагонал $AC$, който другите им диагонали разполовяват, т.е. $BD$ и $MN$ минават през средата $O$ на $AC$. Тъй като диагоналите на правоъгълника са равни, то $\triangle AOB$ е равнобедрен и $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB = 40^\circ$. Оттук $\sphericalangle ODC = \sphericalangle BDC = \sphericalangle DBA = 40^\circ$.

# ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

## Бакалавърски програми

### „Информатика“

**Специализации:** *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

**Компетенции на завършилите:** теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

### „Мрежови технологии (на английски език)“

**Специализации:** *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

**Компетенции на завършилите:** проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

### „Мултимедия и компютърна графика“

**Специализации:** *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

**Компетенции на завършилите:** алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

### „Информационни технологии“

**Специализации:** *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

**Компетенции на завършилите:** теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

## Магистърски програми

### „Софтуерни технологии в Интернет“

**Специализации:** *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

**Компетенции на завършилите:** теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

### „Мултимедия, компютърна графика и анимация“

**Компетенции на завършилите:** моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

### „Управление на проекти по ИТ“

**Компетенции на завършилите:** управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Математика“

Подготвя специалисти с фундаментални знания в класическите и съвременни математически направления. Завършилите успешно специалността могат да се реа-лизират като преподаватели и научни работници във висшите училища и научни институти. Същевременно тяхната солидна математическа подготовка им дава възможност за специализация в икономиката, банковото и застрахователно дело, физиката, биологията, философията и др.

Бакалавърска програма „Информатика“

Подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и ком-пании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

## БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

### Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

### Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

### Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

### Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

## МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

### Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

### Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

### Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

### Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

### Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

### Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

**Природо-математическият факултет** е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

# С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е



**АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:**
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат $70\times100/16$. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 21.05.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.