МАТЕМАТИКА

БРОЙ 2
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн Петър Бойваленков – главен редактор
Ас. Невена Събева – зам. главен редактор
Чл.-кор. дмн Генчо Скордев
Проф. дмн Емил Колев
Проф. д-р Иван Тонов
Проф. дмн Николай Николов
Доц. д-р Евгения Сендова
Доц. д-р Ивайло Кортезов
Доц. д-р Марин Маринов
Александър Иванов
Емил Карлов
Татяна Пархоменко – графичен дизайн и предпечат
Йовко Коларов – художествено оформление

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД
ISSN 0204-6881

ЗИМЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АТАНАС РАДЕВ“

Петър Бойваленков, Емил Колев
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

На 20.01-22.01.2018 г. в Ямбол се проведе Зимният математически турнир „Атанас Радев“. Резултатите на всички участници могат да бъдат намерени на сайта на МГ „Атанас Радев “, Ямбол, `http://mgyambol.com/`, както и на няколко други сайта. Ето и имената на победителите:

Осми клас: Андон Тодоров (СМГ) – златен медал, Борислав Кирилов (ПЧМГ) – златен медал, Стефанка Манахова (СМГ) – сребърен медал;

Девети клас: Галин Тотев (ПМГ, Бургас), Захари Маринов (МГ, Плевен), Иван Георгиев (СМГ), Къонг Виет До (СМГ), Маргарита Стефанова (СМГ), Михаела Гледачева (ПЧМГ), Никола Стайков (СМГ), Светлин Лалов (СМГ) – всички със златен медал;

Десети клас: Димитър Опърлаков (МГ, Варна) – златен медал, Алек Димитров (ПЧМГ) – сребърен медал, Иво Петров (СМГ) – сребърен медал, Кристиан Минчев (ПМГ, Бургас) – сребърен медал;

Единадесети клас: Борислав Антов (СМГ) – златен медал, Борис Барбов (СМГ) – сребърен медал, Иван-Александър Мавров (СМГ) – сребърен медал, Иво Зерков (СМГ) – сребърен медал; Кристиян Василев (ПЧМГ) – сребърен медал; Люба Конова (СМГ) – сребърен медал; Никола Секулов (СМГ) – сребърен медал; Орлин Кучумбов (ПМГ, Бургас) – сребърен медал;

Дванадесети клас: Димитър Любенов (СМГ) – златен медал, Кирил Бангачев (СМГ) – златен медал, Атанас Динев (ПМГ, Бургас) – сребърен медал.

Предлагаме ви условията на задачите, отговорите и кратки решения.

Задача 8.1. Да се решат уравненията $x^3 - 6x^2 + 11x + a = 0$ и $x^3 + 4x^2 + x + a = 0$, където a е параметър, ако е известно, че те имат общ корен.

Решение. Нека x_0 е общият корен на двете уравнения, т.е.

$$x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 + a = 0 \ \text{ и } \ x_0^3 + 4x_0^2 + x_0 + a = 0.$$

Елиминирайки a, получаваме $10x_0^2 - 10x_0 = 0$, т.е. $x_0 = 1$ или $x_0 = 0$.

Ако общият корен е $x_0 = 1$, то $a = -x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 = -6$. Тогава уравненията са

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^3 - x) - 6(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

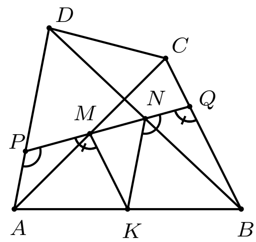
с корени 1, 2 и 3, и

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x^3 - x^2) + (x - x^2) + 6(x^2 - 1) = (x-1)(x+2)(x+3)$$

с корени 1, -2 и -3.

Ако общият корен е $x_0 = 0$, то $a = -x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 = 0$ и уравненията са $x(x^2 - 6x + 11) = 0$ с единствен реален корен 0 и $x(x^2 + 4x + 1) = 0$ с корени 0 и $-2 \pm \sqrt{3}$.

Задача 8.2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, който не е успоредник, а точките M и N са съответно средите на диагоналите AC и BD. Правата MN пресича страните AD и BC съответно във вътрешни точки P и Q. Да се докаже, че $\sphericalangle APN = \sphericalangle BQM$ тогава и само тогава, когато $AD = BC$.



Решение. Нека K е средата на AB. Тогава KM и KN са средни отсечки съответно на триъгълниците ABC и ABD. Следователно

$$\sphericalangle APN = \sphericalangle KNQ \quad \text{и} \quad \sphericalangle BQM = \sphericalangle KMP.$$

Освен това имаме $KN = \dfrac{AD}{2}$ и $KM = \dfrac{BC}{2}$.

Следователно задачата се свежда до това, че един триъгълник е равнобедрен тогава и само тогава, когато ъглите при основата му са равни.

Ако P, N, M и Q са в този ред върху правата PQ, решението е аналогично.

Задача 8.3. Едно естествено число наричаме добро, ако се записва с помощта на само две различни цифри, едната от които е 0, и притежава следното свойство: каквато и ненулева цифра a да допишем отдясно на това число, се получава число, което се дели на a.

а) Да се намери най-малкото добро число.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри числа, в които участва само една нула.

Решение. Ако N е добро число, то $\overline{Na} - a = 10N$ се дели на a за всяка ненулева цифра a. Оттук при $a = 7$ и $a = 9$ следва, че N се дели на 7 и на 9. Тъй като $\overline{N8} = 10N + 8$ се дели на 8, заключаваме, че N се дели на 4. Да отбележим още, че N е кратно на число, което се записва само с цифрите 1 и 0, и че най-малките числа, които се записват само с 1 и 0 и се делят на 7, са 1001, 10101 и 10010 (по-малките кандидати се отхвърлят лесно), а следващите са с поне 6 цифри.

а) Нека N е най-малкото добро число. Ако ненулевата цифра на N е нечетна, от $4|N$ следва, че N завършва на две нули, т.е. е кратно на 100. Тогава $N = 900900$ или N има поне 7 цифри.

Ако ненулевата цифра на N е четна и не е 6, от $9|N$ следва, че N има поне 9 цифри. Ако ненулевата цифра на N е 6, то N завършва на 0 и 6 се среща поне три пъти. Това означава, че $N = 606060$ или N е поне 7-цифрено. Следователно най-малкото добро число е 606060.

б) Такива са например числата $66\dots60$, където броят на шестиците е кратен на 6.

Задача 8.4. Правоъгълник 5×11 е разграфен на 55 единични квадратчета. Ани и Боби играят следната игра. Отначало Ани оцветява всяко квадратче в бяло, зелено или червено. След това Боби избира две едноцветни квадратчета измежду оцветените от Ани, имащи обща страна или връх, и ги оцветява в синьо. След това Боби продължава да повтаря същото действие, докато то е възможно. Когато Боби приключи, Ани му плаща толкова стотинки, колкото е броят на сините квадратчета.

а) Ако Ани се стреми да плати колкото се може по-малко, а Боби – да получи колкото се може повече, колко стотинки ще плати Ани на Боби?

б) Как ще се промени отговорът на въпроса в а), ако Ани няма право да използва зелен цвят?

Решение. а) Отговор: 20. Нека Ани оцвети в бяло нечетните полета от нечетните редове и в зелено четните полета от нечетните редове, а останалите полета – в червено. Тогава Боби няма да може да преоцветява бели, нито зелени полета, а от всеки четен ред ще може да преоцвети в синьо най-много 5 двойки червени полета, така че ще получи не повече от $2.5.2 = 20$ стотинки. От друга страна, от правоъгълника можем да отделим 10 квадрата 2×2 и при всяко оцветяване във всеки от тях ще има поне две едноцветни полета, така че Боби може да си гарантира поне 20 стотинки.

б) Отговор: 36. Ако Ани оцвети в бяло нечетните полета от нечетните редове, а в червено останалите, то Боби няма да може да преоцветява бели полета. Червените полета ще са $55 - 18 = 37$, така ще от тях Боби ще може да оцвети по двойки най-много 36. Ако номерираме полетата от таблицата така:

1	1	2	5	5	9	9	10	11	11	12
1	2	2	5	6	9	10	10	11	12	12
3	3		6	6	13	13	15	15	17	17
3	4	7	8	8	13	14	15	16	17	18
4	4	7	7	8	14	14	16	16	18	18

то при всяко оцветяване на Ани сред всеки три полета с даден номер ще има поне две едноцветни (съседни), така че Боби може да си гарантира поне $18.2 = 36$ стотинки.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които квадратните уравнения $x^2 + 2a^2x + 2a = 0$ и $y^2 + y + a = 0$ имат съответно корени x_1, x_2 и y_1, y_2 и

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2(y_1y_2 + y_1 + y_2).$$

Решение. От формулите на Виет следва, че

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{4a^4 - 4a}{2a} = 2a^3 - 2 \text{ и } y_1y_2 + y_1 + y_2 = a - 1.$$

Равенството от условието е еквивалентно на

$$a^3 - 1 = a - 1 \iff a(a+1)(a-1) = 0$$

и следователно $a = 0, \pm 1$. Тъй като $x_1x_2 \neq 0$, то $a \neq 0$.

При $a = 1$ и двете уравнения нямат корени.

При $a = -1$ уравненията имат корени и следователно $a = -1$ се единствената стойност с исканото свойство.

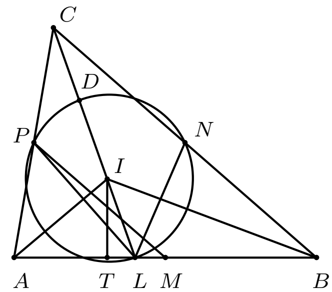
Задача 9.2. В неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC е построена ъглополовящата CL на $\sphericalangle ACB$. Точките M, N и P са среди съответно на страните AB, BC и AC, а точка T е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и страната AB. Описаната окръжност около $\triangle NPL$ пресича CL в точка D. Ако L е среда на MT, да се намери отношението $\dfrac{CD}{DL}$.

Решение. От свойството на ъглополовящата следва, че $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AL}{BL}$, откъдето $AL = \dfrac{cb}{a+b}$ и $BL = \dfrac{ca}{a+b}$. Тъй като $AM = \dfrac{c}{2}$, $BT = \dfrac{a+c-b}{2}$, то $ML = LT$ е еквивалентно на $AL - AM = BL - BT$. След заместване със съответните изрази, получаваме

$$(b-a)(b+a-2c) = 0$$

и тъй като триъгълникът не е равнобедрен, намираме $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Тогава $AL = \dfrac{b}{2}$ и $BL = \dfrac{a}{2}$. Това означава, че $\triangle ALP$ и $\triangle BLN$ са равнобедрени и ъглополовящите AI и BI са симетрали на отсечките PL и NL. Следователно I е център на описаната окръжност на $\triangle PNL$, т.е. $ID = IL$.



От свойството на ъглополовящата AI в $\triangle ALC$ следва, че

$$CI : IL = AC : AL = 2 : 1.$$

Сега от $ID = IL$ и $CI : IL = 2 : 1$ следва, че $CD = DI = IL$, т.е. $CD : DL = 1 : 2$.

Задача 9.3. За всяко естествено число n подреждаме естествените му делители му по големина: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$. Нека

$$A = \sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i}.$$

Възможно ли е: а) $A = 2018$; б) $A = 2019$?

Решение. Нека $s = \sum_{i=1}^{k} d_i$. Тъй като $n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i} = \sum_{i=1}^{k} d_i = s$, получаваме уравнението $nA = s(n+1)$. Тъй като $(n, n+1) = 1$, заключаваме, че $n+1$ е делител на A.

а) Тъй като каноничното разлагане на 2018 е $2018 = 2.1009$, от горното следва, че $n + 1 = 2$, 1009 или 2018, т.е. $n = 1$, 1008 или 2017. За s получаваме съответно $s = 2$, 3224 и 2018, като и трите не водят до решение, т.е. равенството $A = 2018$ е невъзможно.

б) Тъй като каноничното разлагане на 2019 е $2019 = 3.673$, имаме от $n+1 = 3$, 673 или 2019, т.е. $n = 2$, 672 или 2018. За s получаваме съответно $s = 2$, 3224 и 2018, като и трите не водят до решение, т.е. $A = 2018$ е невъзможно. Лесно се проверява, че при $n = 672$ имаме $s = 2016$, което дава решение на уравнението $2019n = s(n+1)$ и значи отговорът е положителен.

Задача 9.4. Дадено е естествено число $k \geq 2$. Естествените числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k}$ са такива, че

$$a_1 + a_{2k}, a_2 + a_{2k-1}, \ldots, a_{k-1} + a_{k+2}, a_k + a_{k+1}$$

са различни. Да се намери най-малката възможна стойност на a_{2k}.

Решение. За всяко $i = 1, 2, \ldots, k-1$ да означим $a_{i+1} = a_i + x_i$ и $a_{2k+1-i} = a_{2k-i} + y_i$. Тогава

$$\begin{array}{llll} a_2 = a_1 + x_1 & a_3 = a_2 + x_2 & \ldots & a_k = a_{k-1} + x_{k-1} \\ a_{2k} = a_{2k-1} + y_1 & a_{2k-1} = a_{2k-2} + y_2 & \ldots & a_{k+2} = a_{k+1} + y_{k-1}. \end{array}$$

Тъй като числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ са различни, то $x_i \geq 1$ и $y_i \geq 1$. Ако за някое i имаме $x_i = y_i$, ще получим $a_{i+1} - a_i = x_i = y_i = a_{2k+1-i} - a_{2k-i}$ и следователно $a_i + a_{2k+1-i} = a_{i+1} + a_{2k-i}$, противоречие. От $x_i \geq 1$, $y_i \geq 1$ и $x_i \neq y_i$ следва, че $x_i + y_i \geq 3$. Пресмятаме:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-1} - a_{2k-2} + \cdots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 \\ &= y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + a_{k+1} - a_k + x_{k-1} + x_{k-2} + \cdots + x_1 + a_1 \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{k-1} + y_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) + a_1 \\ &\geq 3(k-1) + 2 \end{aligned}$$

Следователно

$$a_{2k} \geq 3(k-1) + 2 = 3k - 1. \tag{1}$$

За числата

$$a_1 = 1, a_2 = 3, \ldots, a_k = 2k-1, a_{k+1} = 2k, a_{k+2} = 2k+1, \ldots a_{2k} = 3k-1$$

имаме, че сборовете $a_1 + a_{2k} = 3k$, $a_2 + a_{2k-1} = 3k+1, \ldots, a_{2k} + a_{2k+1} = 4k-1$ са различни. Следователно

$$\min\{a_{2k}\} \leq 3k - 1. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $\min\{a_{2k}\} = 3k - 1$.

Задача 10.1. Даден е триъгълник ABC и точка L върху страната му AB. Окръжност през C и L пресича правата AB и описаната около ABC окръжност k за втори път съответно в точки M и N, като A е между M и B, а N е върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Аналогично, втора окръжност през C и L пресича правата AB и k за втори път съответно в точки P и Q, като B е между P и A, а Q е върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Да се докаже, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Решение. Нека CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Нека K е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Тогава K лежи на правата CL и имаме $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MLC$ и $\sphericalangle KNC = \sphericalangle BLC$, откъдето

$$\sphericalangle MNC + \sphericalangle KNC = \sphericalangle MLC + \sphericalangle BLC = 180^\circ,$$

т.е. точките M, N и K лежат на една права. Аналогично се вижда, че Q, P и K лежат на една права. Сега от $KN.KM = KL.KC = KP.KQ$ следва, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.

Нека M, N, P и Q лежат на една окръжност. Тогава правите MN, CL и PQ се пресичат в една точка, защото са общи хорди на окръжностите, описани около $MNLC$, $PQCL$ и $MNPQ$. Както по-горе получаваме

$$\sphericalangle MNC + \sphericalangle QPC = \sphericalangle MLC + \sphericalangle QLC = 180^\circ$$

и следователно $\sphericalangle KNC + \sphericalangle KPC = 180^\circ$, т.е. K лежи върху k. Сега от $\sphericalangle KPC = \sphericalangle MNC = \sphericalangle ALC$ следва, че $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK}$, т.е. CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Задача 10.2. Да се определи за кои стойности на реалния параметър a, уравнението

$$\sqrt{3 + 2x - x^2} - \sqrt{4 - a^2 + 2ax - x^2} = 1 - a$$

има единствено решение.

Решение. Дефиниционната област $[-1, 3] \cap [a-2, a+2]$ на уравнението е непразно множество за $a \in [-3, 5]$. Ясно е, че за $a = 1$, всяко x е решение. Ще разглеждаме даденото уравнение за $a \in [-3, 5]$ и $a \neq 2$. Пренаписвайки го като

$$\sqrt{3 + 2x - x^2} + (a - 1) = \sqrt{4 - a^2 + 2ax - x^2} \tag{1}$$

и повдигайки на квадрат, получаваме

$$\sqrt{3 + 2x - x^2} = x - a \tag{2}$$

и замествайки в (1), получаваме

$$\sqrt{4 - a^2 + 2ax - x^2} = x - 1. \tag{3}$$

След повдигане на квадрат на (2) (или на (3)) имаме, че

$$f(x) = 2x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - 3 = 0. \tag{4}$$

Преобразуванията на (1) до (4) са еквивалентни за x от дефиниционата област $[-1, 3] \cap [a - 2, a + 2]$, $a \neq 1$ и за $x \geq a$, $x \geq 1$.

Така даденото уравнение има единствено решение тогава и само тогава, когато уравнението (4) има единствено решение, ако $a \in [-3, 5]$, $a \neq 1$, $x \in [-1, 3] \cap [a - 2, a + 2]$, $x \geq a$ и $x \geq 1$.

Уравнение (4) има решение, ако $D_f = -a^2 + 2a + 7 \geq 0$, т. е. за $a \in [1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}] \subset [-3, 5]$ и то ще е единствено за $x \geq a$ и $x \geq 1$, само ако a и 1 са между корените му, т. е. за

$$f(a) = f(1) = a^2 - 2a - 3 \leq 0 \text{ или } a \in [-1, 3] \subset [1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}] \subset [-3, 5].$$

Остава да видим за кои $a \in [-1, 3]$, $a \neq 1$ решението на уравнението (4), за което $x \geq a$ и $x \geq 1$, принадлежи на дефиниционната област. Тъй като

$$f(-1) = f(a + 2) = (a + 1)^2 \geq 0 \text{ и } f(3) = f(a - 2) = (a - 3)^2 \geq 0,$$

то трябва и двата корена на уравнението (4) да се съдържат в интервалите от дефиниционната област, което е еквивалентно на неравенствата

$$-1 \leq \frac{a + 1}{2} \leq 3 \text{ и } a - 2 \leq \frac{a + 1}{2} \leq a + 2,$$

които са изпълнени за всяко $a \in [-1, 3]$.

Даденото уравнение има единствено решение за $a \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, които са точна степен (възможно първа) на просто число и такива, че $\sigma(n)$ дели $n\varphi(n) - 6$. Със $\sigma(n)$ се означава сумата от естествените делители на n, а с $\varphi(n)$ – броят на естествените числа, по-малки от n и взаимнопрости с n.

Решение. Нека $n = p^k$, където p е просто, а k е естествено число. Тъй като $\varphi(n) = p^{k-1}(p - 1)$ и $\sigma(n) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$, условието се записва във вида

$$p^{2k-1}(p - 1) \equiv 6 \pmod{\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}}. \tag{1}$$

Тъй като $p^{k+1} \equiv 1 \pmod{\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}}$, от (1) следва, че

$$p - 1 \equiv 6p^3 \pmod{\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}}.$$

Ако $k \geq 4$, то $p^5 - 1 \leq p^{k+1} - 1 \leq (p - 1)(6p^3 - p + 1)$, откъдето

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 \leq 6p^3 - p + 1 \iff p^3(p - 5) + 2p < 0,$$

което е възможно само при $p = 2$ и $p = 3$. В тези два случая получаваме съответно $6p^3 - p + 1 = 47$ и 160, за които лесно се вижда, че не се делят на числа от вида $p^{k+1} - 1$ за $p = 2$ и 3 и $k \geq 4$.

При $k=3$ имаме

$$p^3+p^2+p+1|6p^3-p+1=6(p^3+p^2+p+1)-6p^2-7p-5,$$

откъдето

$$p^3+p^2+p+1|6p^2+7p+5, \quad \text{т.е. } p^3+p^2+p+1 \leq 6p^2+7p+5.$$

Последното е еквивалентно на $p(p^2-5p-6) \leq 4$, което е възможно само ако $p \leq 5$. Директна проверка на $p=2$, 3 и 5 води до решението $p=3$ ($n=3^3=27$).

При $k=2$ имаме

$$p^2+p+1|6p^3-p+1=6p(p^2+p+1)-6(p^2+p+1)-p+7,$$

откъдето

$$p^2+p+1|p-7, \quad \text{т.е. } p^2+p+1 \leq p-7$$

(което очевидно е невъзможно) или $p=7$. Последното дава решение $n=7^2=49$.

При $k=1$ имаме

$$p+1|6p^3-p+1=(6p^2-6p+5)(p+1)-6(p^2+p+1)-4,$$

откъдето $p+1|4$, т.е. $p=3=n$.

Задача 10.4. Нека n е естествено число. Пермутация $(a_1, a_2, \ldots, a_{2018})$ на числата $(1, 2, \ldots, 2018)$ се нарича *добра*, ако $|a_i - i| \leqq n$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, 2018$. Да се намерят всички стойности на n, за които броят на добрите пермутации е нечетен.

Решение. Отговор: $n=504$ или $n=1008$. Ще разгледаме общия случай (т.е. с N вместо 2018). Ще докажем, че броят на добрите пермутации е нечетен точно когато $2n+1$ дели N или $N-1$.

Да отбележим първо, че ако една пермутация е добра, то и обратната и е такава. Следователно остава да се интересуваме от четността на добрите пермутации, които съвпадат с обратните си (ще ги наричаме инволюции).

Общият брой на инволюциите е нечетен само при $N=0$ и $N=1$ (защото е равен на $N!$ минус броя на пермутациите, които не са инволюции). Ако $2 \leqq N \leqq n+1$ всяка пермутация е добра и броят им е четно число.

Нека $N > n+1$ и да разгледаме добрите инволюции в зависимост от действието (ограничението им) върху множествата $\{n+2; \ldots; N\}$. За всеки клас T с фиксирано действие върху $\{n+2; \ldots; N\}$ действието върху $\{1; 2; \ldots; n+1\}$ също е фиксирано. Ако $f(T)$ е ограничението на тези инволюции върху $\{1; 2; \ldots; n+1\}$, то $|T|$ е равно на броя на инволюциите в $f(T)$. Следователно $|T|$ може да е нечетно само ако последният брой е нечетен, т.е. равен на 1.

Следователно в нашата цяла добра инволюция имаме $1 \to 1$, $i \to n+i$ за $2 \leqq i \leqq n+1$.

Горното свежда задачата от N към $N-(2n+1)$. За да финишираме в нечетен брой, трябва накрая $N-k(2n+1)$ да е равно на 0 или 1 (k е броят на редукциите), т.е. $2n+1$ дели N или $N-1$. При$N=2018$ получаваме $2n+1 \mid 2018$, т.е. $n=504$ или $2n+1 \mid 2017$, т.е. $n=1008$.

Задача 11.1. Да се реши уравнението

$$\operatorname{cotg} 4x + \cos 2x + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin 4x} = 0.$$

Решение. Полагаме $y = \dfrac{\pi}{4} - x$ и получаваме уравнението

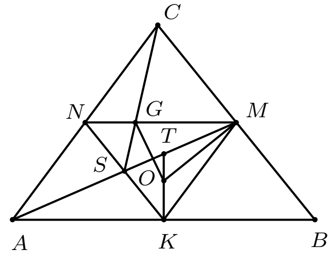
$$-\operatorname{cotg} 4y + \sin 2y + \frac{\cos^2 y}{\sin 4y} = 0,$$

като $y \neq k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Преобразуваме това уравнение до

$$4\cos^3 2y + 4\cos^2 2y - 5\cos 2y - 3 = 0,$$

където полагаме $\cos 2y = u$ и получаваме $4u^3+4u^2-5u-3=0$. Последното уравнение има корени $-\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ и 1. Първият и третият не дават решение на задачата, а от втория получаваме $2y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Замествайки обратно y с $\dfrac{\pi}{4} - x$, получаваме окончателно $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.2. Нека AM е медиана в неравностранния триъгълник ABC, точката O е център на описаната около него окръжност и точката G е медицентър на триъгълника AMC. Да се докаже, че $OG \perp AM$ тогава и само тогава, когато $CA = CB$.



Решение. Нека N и K са средите на страните AC и AB, съответно, а точката T е пресечната точка на KO и AM. Ясно е, че $G \in NM$ и $NG : GM = 1 : 2$ и точката O е ортоцентър на триъгълника MNK. Нека пресечната точка на AM и KN е S. Точката S е среда на отсечката KN, т. е. MS е медиана за триъгълника MNK ($AKMN$ е успоредник).

Имаме, че $OG \perp AM$ тогава и само тогава, когато точката T е ортоцентър на триъгълника GOM. Последното е еквивалентно на $GT \perp OM$ или на
$GT \parallel NK$. Това е вярно тогава и само тогава, когато $MT : TS = 2 : 1$ или когато точката T е медицентър на триъгълника MNK.

Така $OG \perp AM$ е изпълнено, само ако медицентърът T на триъгълника MNK лежи на височината му KO или когато $KN = KM$, което е еквивалентно на $CA = CB$.

Задача 11.3. Нека n е естествено число и X е низ от нули и единици с дължина n.

а) Да се докаже, че броят на низовете от нули и единици, с дължина $n + 3$, съдържащи X като подниз, не зависи от X.

б) Да се намери най-малкото n, за което броят от а) е по-голям от 2018.

(Казваме, че X е подниз на Y, ако X може да се получи от Y чрез изтриване на символи на Y.)

Решение. а) Нека $t \geq 0$ е цяло число. Да означим с $A_t(X)$ множеството от низовете, получени от низа $X = x_1x_2\dots x_n$ с вмъкване на t символа. Ще докажем индукция по n и t, че мощността на $A_t(X)$ не зависи от X. Очевидно имаме $|A_0(X)| = 1$ и $|A_t(X)| = 2^t$, когато $n = 0$ (т.е. X е празният низ). Сега, ако допуснем, че твърдението е вярно за всички низове X с дължина до $n - 1$ и всички t, както и за всички низове с дължина n и всички числа до $t - 1$, желаното следва от факта, че $A_t(X)$ е обединение на множествата $x_1A_t(x_2\dots x_n)$ и $\overline{x}_1A_{t-1}(x_1x_2\dots x_n)$, където $\overline{x}_1 = 1(0)$, ако $x_1 = 0(1)$. Действително, тъй като двете множества са непресичащи се, имаме

$$|A_t(X)| = |A_t(x_2\dots x_n)| + |A_{t-1}(x_1x_2\dots x_n)|$$

и събираемите отдясно не зависят от X по индукционно предположение.

б) Тъй като броят на низовете Y с i единици и $n+t-i$ нули, $0 \leq i \leq t$, е $\dbinom{n+t}{i}$, имаме

$$|A_t(0\dots 0)| = \sum_{i=0}^{t} \binom{n+t}{i}$$

(нулите са n на брой). В нашата задача $t = 3$ и следователно търсим най-малкото n, за което

$$\binom{n+3}{0} + \binom{n+3}{1} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} > 2018.$$

Лявата страна е строго растяща и директно се вижда, че $n = 20$.

Задача 11.4. Първоначално естествените числа са написани в редицата $1, 2, 3, \ldots$. Последователно изтриваме от редицата първите 4 числа и тяхната сума. Числата, които получаваме като суми, записваме в нова редица: $10, 26, 45, 62, \ldots$. Да се докаже, че в новата редица има безбройно много числа, които се делят на 2018.

Решение. Да означим новата редица с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще докажем по индукция, че от множеството $\{1, 2, \ldots, 17k\}$, $k = 1, 2 \ldots$, сме задраскали като суми $S_n = 17(n-1) + d_n$, $n = 1, 2, \ldots k$, където $d_n \in \{9, 10, 11, 12\}$ и

$$d_n = \begin{cases} 10, & \text{ако } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & \text{ако } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 21 - d_{\frac{n+1}{4}}, & \text{ако } n \equiv 3 \pmod 4 \\ 11, & \text{ако } n \equiv 4 \pmod 4 \end{cases}$$

Твърдението е вярно за $k = 1$. Нека е вярно за k. Ще го докажем за $k + 1$. От индукционното предположение имаме, че за $n = 1, 2, \ldots k$ от числата $17(n-1)+1$, $17(n-1)+2$, $\ldots$, $17(n-1)+17$ сме задраскали S_n като сума, а останалите по четворки, на които сме търсили сумата. Освен това, първите, вторите и последните 4 числа ни дават сумите

$$4.17(n-1) + 10 = 17[(4n-3) - 1] + 10,$$

$$4.17(n-1) + 26 = 17[(4n-2) - 1] + 9,$$

$$4.17(n-1) + 62 = 17[(4n) - 1] + 11.$$

От числата $17(n-1)+9$, $17(n-1)+10$, $17(n-1)+11$, $17(n-1)+12$ и $17(n-1)+13$ едното е S_n, а сумата на останалите е

$$5.17(n-1) + 55 - S_n = 17[(4n-1) - 1] + (21 - d_n).$$

Следователно от $17(n-1)+1$, $17(n-1)+2$, $\ldots$, $17(n-1)+17$ получаваме като суми само числа от вида $17[(4n-a)-1]+b$, където $a = 3$, 2, 1 или 0, а $b = 10$, 9, $21 - d_n$ или 11, съответно.

Нека $k + 1 = 4q + r = 4(q+1) - (4-r)$, $r = 1$, 2, 3, 4. Тогава

$$S_{k+1} = 17[(4n-a) - 1] + b,$$

където $n = q + 1$, $a = 4 - r$, а b се определя от a. За $r = 3$, $a = 1$ и $b = 21 - d_{q+1} = 21 - d_{\frac{k+2}{4}}$. С това твърдението е доказано.

От $17.831 \equiv 1 \pmod{2018}$ следва, че $2018 \mid S_n$ се случва при $n \equiv 1 - 831 d_n \pmod{2018}$, т.е. при $n \equiv 594, 1781, 943, 119 \pmod{2018}$.

Задача 12.1. Съществуват ли реални числа x и y, за които

$$2 \sin x + 2 \sin y = 12 \sin(x + y) + 15\,?$$

Решение. Ако $s = \dfrac{x+y}{2}$ и $f(s) = |\sin s| - 3 \sin 2s$, то

$$(1)\ A(x, y) := 2 \sin x + 2 \sin y - 12 \sin z =$$

$$= 4 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 12 \sin(x + y) \leq 4f(s).$$

При $t \in (0, \pi)$ имаме, че

$$(2) \quad f'(t) = \cos t - 6 \cos 2t = \cos t - 6(2 \cos^2 t - 1) = -12(\cos t - 3/4)(\cos t + 2/3).$$

Съществува единствено $t_0 \in (0, \pi)$, за което $\cos t_0 = -2/3$. Тогава имаме $\sin t_0 = \sqrt{5}/3 =: c$. Понеже $f(z) = f(z + \pi)$, лесно намираме, че

$$(3) \quad \max f = f(t_0) = 5c.$$

Оттук $A \leq 20c < 15$ (последното следва след повдигане на квадрат) и значи отговорът е *не*.

Задача 12.2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който

$$\frac{AC^2}{S_{ACD}} = \frac{AB^2}{S_{ABD}} + \frac{BC^2}{S_{BCD}}.$$

Да се докаже, че той е вписан в окръжност.

Решение. Да означим с D' пресечната точка на лъча BD и описаната окръжност $k(O, R)$ около $\triangle ABC$. Нека h_a, h_b, h_c (h'_a, h'_b, h'_c) са дължините на перпендикулярите от D (D') към съответните страни на $\triangle ABC$. Полагаме

$$f(D) = \frac{b}{h_b} - \frac{c}{h_c} - \frac{a}{h_a}.$$

Имаме, че

$$(1)\ \frac{h'_b}{h_b} = \frac{D'E}{DE} =: m, \quad (2)\ \frac{h'_c}{h_c} = \frac{D'B}{DB} = \frac{h'_a}{h_a} =: n,$$

където $E = AC \cap BD$. Очевидно $m > n$ ($m < n$) ако D лежи във вътрешността k_i (външността k_e) на k. Следователно (3) $f(D) > mf(D')$, ако

$D \in k_i$, и (4) $f(D) < mf(D')$, ако $D \in k_e$. От друга страна, ако $a' = AD$, $b' = BD$, $c' = CD$, то

$$(5) \quad f(D') = 4R\left(\frac{b}{a'c'} - \frac{c}{a'b'} - \frac{a}{b'c'}\right) = 4R\frac{bb' - cc' - aa'}{a'b'c'} = 0$$

съгласно теоремата на Птолемей. Значи $f(D) = 0$ само когато $D \in k$.

Задача 12.3. Дадени са реални числа $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Да се докаже, че неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 2(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)$$

е изпълнено за произволни реални числа x_1, x_2, x_3 тогава и само тогава, когато съществуват числа $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi]$ такива, че $|\pi - \theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3$ и $a_1 = \cos\theta_1$, $a_2 = \cos\theta_2$, $a_3 = \cos\theta_3$.

Решение. Разглеждайки даденото неравенство като квадратно спрямо x_3, условието е еквивалентно на

$$D_1 = (a_1x_2 + a_2x_1)^2 + 2a_3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - a_1^2)x_2^2 + (1 - a_2^2)x_1^2 - 2(a_1a_2 + a_3)x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$|a_1| \leq 1 \text{ и } (a_1a_2 + a_3)^3 - (1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$|a_1| \leq 1 \text{ и } (1)\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2a_3 \leq 1.$$

По симетрия $|a_2| \leq 1$, $|a_3| \leq 1$ и значи можем да положим $a_1 = \cos\theta_1$, $a_2 = \cos\theta_2$, $a_3 = \cos\theta_3$, където $0 \leq \theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1 \leq \pi$. Тогава

$$(1) \Leftrightarrow -a_1a_2 - \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)} \leq a_3 \leq -a_1a_2 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)} \Leftrightarrow$$

$$(2)\ \cos(\pi - \theta_1 + \theta_2) \leq \cos\theta_3 \leq \cos(\pi - \theta_1 - \theta_2).$$

Понеже $\pi - \theta_1 + \theta_2, |\pi - \theta_1 - \theta_2| \in [0, \pi]$, то

$$(2) \Leftrightarrow |\pi - \theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3 \leq \pi - \theta_1 + \theta_2.$$

Последното неравенство е автоматично изпълнено и следователно

$$(2) \Leftrightarrow |\pi - \theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3.$$

Задача 12.4. Вж. Задача 11.4.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.2, 8.3 – Иван Тонов, 8.4 – Ивайло Кортезов, 9.1, 9.4 – Емил Колев, 9.2 – Диана Данова, 9.3 – Васил Василев и Петър Бойваленков, 10.1, 11.4(12.4) – Александър Иванов, 10.2, 10.4, 11.2 – Асен Божилов, 10.3 – Петър Бойваленков, 11.1, 11.3 – Иван Ланджев, 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Изразът $\dfrac{\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha}$ е равен на:

А) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$ **Б)** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ **В)** $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ **Г)** $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Задача 2. (1 т.) Стойностите на параметъра m, при които функцията

$$4f(x) = (m+1)x^2 - 2(2m^2 + 6m + 1)x + 3$$

има локален минимум при $x = 3$, са:

А) -2 **Б)** -2 и $\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** -1

Задача 3. (1 т.) Корените на уравнението

$$3\log_8(x-2) = \frac{1}{2}\log_2(2x-1) \quad \text{са:}$$

А) 1 **Б)** 1 и 5 **В)** 5 **Г)** няма корени

Задача 4. (1 т.) В триъгълник две от страните са 4 и 6, а единият от ъглите срещу тях е два пъти по-голям от другия. Третата страна е:

А) 4 **Б)** 5 **В)** 4 или 5 **Г)** 6

Задача 5. (1 т.) Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с катети 6 и 8. Околният ръб е 12. Лицето на сечението на призмата с равнина, перпендикулярна на хипотенузата на основата и минаваща през центъра на описаната около основата окръжност, е:

А) 30 **Б)** 40 **В)** 45 **Г)** $40\sqrt{2}$

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$(a+2)\cos 2x - 4a^2\cos x + 2 - a = 0$$

където a е параметър.

а) (1 т.) За кои стойности на a уравнението има корен $x = 2018\pi$?

б) (2 т.) Да се реши уравнението за $a = 1$.

в) (2 т.) За кои стойности на параметъра a уравнението има точно едно решение от интервала $(-\pi, \pi)$?

Задача 7. (5 т.) Дадени са две окръжности $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, r)$ като $O_1O_2 \geq R + r$ и $R > r$. Построени са общата външна допирателна AB, $A \in k_1,\ B \in k_2$ и общата вътрешна допирателна CD, $C \in k_1,\ D \in k_2$. Нека $AB \cap CD = M$ и $\sphericalangle AO_1C = \varphi$.

а) (1 т.) Да се докаже, че около четириъгълника $AMCO_1$ може да се опише окръжност и в него може да се впише окръжност.

б) (2 т.) Да се докаже, че отношението на радиуса на описаната около четириъгълника $AMCO_1$ окръжност и на радиуса на вписаната в него окръжност е

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}.$$

в) (2 т.) За коя стойност на φ отношението от б) е най-малко? Да се пресметне AB за тази стойност на φ.

Задача 8. (5 т.) Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с основен ръб $AB = a$. Ъгълът между правата AB_1 и околната стена ACC_1A_1 е φ. Нека M е средата на ръба A_1B_1.

а) (1 т.) Да се докаже, че $\sphericalangle MAB_1 = \varphi$ и че $\varphi < 60^\circ$.

б) (2 т.) Да се пресметне обемът на дадената призма, ако $\varphi = 45^\circ$.

в) (2 т.) Да се пресметне тангенсът на ъгъла ψ между равнината (AMB_1) и основите на дадената призма. При коя стойност на $\sin\varphi$ ъгълът между правите AM и BB_1 също е равен на ψ?

ЗА ДИНОЗАВРИТЕ В РАВНИНАТА

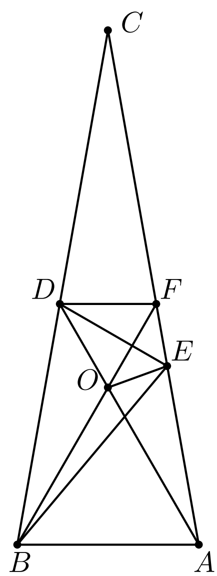
Юлиян Цветков, Емил Карлов

На правилните многоъгълници с голям брой страни, с различни по дължина диагонали и с най-разнообразни по големина ъгли, в днешната училищна геометрия се гледа, като на динозаври – едри, праисторически животни, живели през периода Юра, преди повече от 200 милиона години.

В следващите няколко задачи ще покажем, че тези *геометричните динозаври* са все още живи, а не изкопаеми и дори често се използват за решаване на трудни задачи и най-странното използват се и за съставяне на *нови*[1] задачи.

Всеки осмокласник от кръжока по математика познава тази отдавна станала класическа задача.

Задача 1. На раменете CB и CA на равнобедрения $\triangle ABC$ с основа AB и $\sphericalangle C = 20^\circ$ са така избрани съответно точки D и E, че $\sphericalangle DAB = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABE = 50^\circ$. Намерете $\sphericalangle EDA$.



Решение. *Първи начин.* Построяваме отсечка DF, успоредна на AB. Нека BF пресича AD в точка O. Триъгълниците ABO и DOF са равностранни. Оттук лесно следва, че триъгълниците ABE, EAO и EFO са равнобедрени. Тогава $\triangle EOD \cong \triangle FED$, следователно DE е ъглополовяща на $\sphericalangle FDO$ и $\sphericalangle EDA = 30^\circ$.

Естествено е да се запитаме *как е измислена тази задача*? *Откъде идват красивите задачи*? Да разгледаме друго решение на същата задача. Може би то ще даде отговор на въпросите ни.

Втори начин. Построяваме правилен 18-ъгълник $A_1A_2 \dots A_{18}$ с център O и разглеждаме равнобедрения $\triangle OA_8A_9$ ($\triangle ABC$). Очевидно $\sphericalangle O$ (нашият $\sphericalangle C$) е равен на 20°.

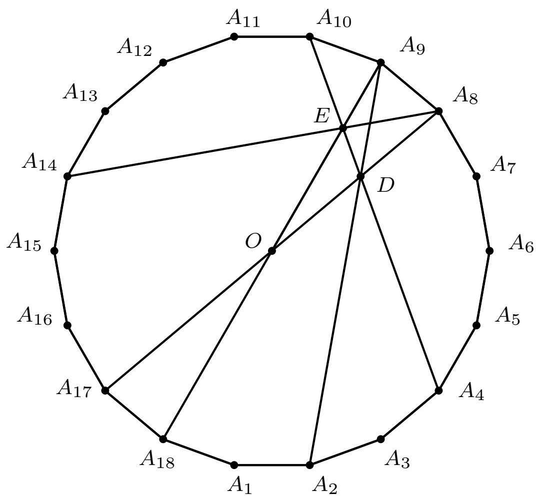
Диагоналите A_9A_2 и A_8A_{14} са правите AD и BE от задачата (проверете!).

Ако покажем, че диагоналите A_9A_{18}, A_4A_{10} и A_8A_{14} се пресичат в точка E и ако покажем, че диагоналите A_8A_{17}, A_4A_{10} и A_2A_9 се пресичат

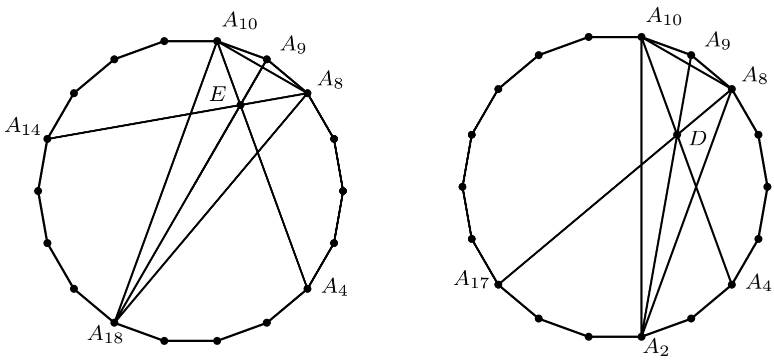
[1] Да се твърди, че една задача е нова е твърде рисковано. Хората през вековете забравят, връщат се и преоткриват едни и същи геометрични факти, понякога от друга гледна точка, но в дълбоката си същност геометричното твърдение е едно и също.

в точка D, тогава

$$\sphericalangle EDA_9 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_{10}A_9} + \overset{\frown}{A_2A_4}) = 30^\circ.$$



В $\triangle A_{10}A_8A_{18}$ диагоналите A_9A_{18}, A_4A_{10} и A_8A_{14} се пресичат в точка E, защото те са ъглополовящи в същия триъгълник (проверете!)



В $\triangle A_{10}A_8A_2$ диагоналът A_2A_9 е ъглополовяща на $\sphericalangle A_{10}A_2A_8$,, а диагоналите $A_{10}A_4$ и $A_{17}A_8$ се пресичат върху ъглополовящата A_2A_9 на триъгълника в точка D, защото перпендикулярите DD_1,DD_2 и DD_3, спуснати от точка D съответно към страните A_8A_2, $A_{10}A_2$, $A_{10}A_8$ изпълняват следните равенства: $DD_2 = a$, $A_{10}D = \dfrac{a}{\sin 20^\circ}$, $DD_3 = \dfrac{a \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 2a\cos 20^\circ$, $DA_8 = \dfrac{DD_3}{\sin 70^\circ} = 2a$, $DD_1 = \dfrac{DA_8}{2} = a$. (Тук спестихме използването на теоремата на Чева, в нейния вариант със синуси.)

Ето откъде идват красивите задачи. Избирате точки, в които се пресичат няколко диагонала от правилния многоъгълник и скривате останалото от картинката.

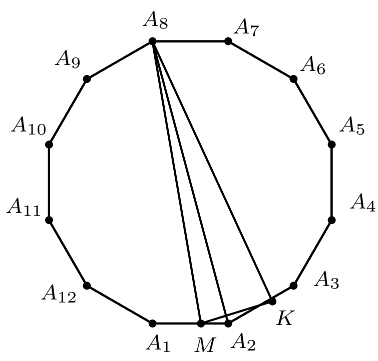
В правилния 18-ъгълник има още много задачи, стига да ги видите. Ето няколко от тях.

Задача 2. В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle A = 30°, \sphericalangle B = 20°$) точката M е вътрешна и $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 10°$. Намерете $\sphericalangle CMA$.
Упътване. Разгледайте $\triangle A_{16}A_8A_{18}$ в правилния 18-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{18}$ и диагоналите A_3A_{17}, $A_{16}A_2$ и $A_{18}A_6$.

Задача 3. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 80°$) срещу основата AB е избрана вътрешна точка M, за която $\sphericalangle MAB = 10°$ и $\sphericalangle MBA = 30°$. Намерете $\sphericalangle CMA$.
Упътване. В правилния 18 - ъгълник $A_1A_2\ldots A_{18}$ разгледайте $\triangle A_{16}A_3A_{18}$. Диагоналите A_3A_{17}, $A_{16}A_2$ и $A_{18}A_6$ се пресичат в дадената точка M.

Да продължим със задача от Московска олимпиада.

Задача 4. В правилния 12-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{12}$ на страните A_1A_2 и A_2A_3 на са избрани точки M и K така, че $\sphericalangle MA_8K = 15°$. Да се докаже, че MA_8 е ъглополовяща за $\sphericalangle A_1MK$.



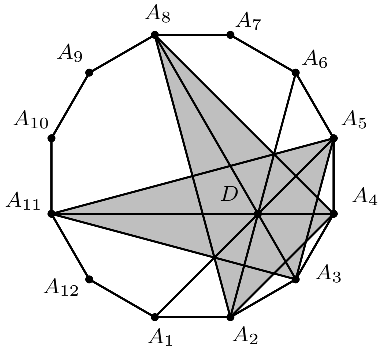
Решение. Отсечката A_2A_8 е ъглополовяща в триъгълника MA_2K с $\sphericalangle MA_2K = 150°$. От друга страна $\sphericalangle MA_8K = (90° - 150°/2) = 15°$, т.е. точката A_8 е център на външновписаната за MA_2K окръжност. Следователно MA_8 е ъглополовяща.

Задача 5. Да се докаже, че в правилния 12-ъгълник могат да се намерят четири диагонала, които минават през една точка и тази точка не е център на 12-ъгълника.

Решение. Построяваме правилен 12-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{12}$ и разглеждаме правоъгълния $\triangle A_3A_5A_{11}$. В този триъгълник диагоналите A_3A_8, A_5A_1

и $A_{11}A_4$ са ъглополовящи (проверете!) и следователно се пресичат в една точка D.

Ще докажем, че диагоналът A_2A_6 минава през същата точка D.



В $\triangle A_2A_4A_8$ диагоналите A_2A_6, A_3A_8 и $A_{11}A_4$ са също ъглополовящи (проверете!) и следователно се пресичат в една точка и това е точка D, защото две от ъглополовящите в разгледаните триъгълници се повтарят.

Задача 6. Намерете правилен n-ъгълник, на който пет диагонала се пресичат в една точка и тази точка не е центъра на многоъгълника.

Упътване. Използвайте задача 5, за да покажете, че в правилния 24-ъгълник $B_1B_2\dots B_{24}$ диагоналите B_2B_{10}, B_4B_{12}, B_6B_{16}, B_8B_{22} и B_7B_{19} се пресичат в една точка.

Задача 7. Точка M е вътрешна за квадрата $ABCD$ и $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 15^\circ$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равностранен. (Игор Шаригин)

Решение. Разгледайте квадрата $A_8A_5A_2A_{11}$ на чертежа от задача 5. Точката M е пресечната точка на диагоналите A_5A_1, A_2A_6, $A_{11}A_4$ и A_8A_3. (вж. задача 5). Остава да пресметнем ъглите на $\triangle A_8A_{11}M$.

Ето една задача от състезание в България.

Задача 8. В $\triangle ABC$ с $\sphericalangle B = 75^\circ$ височината CD е два пъти по-малка от основата AB . Намерете $\sphericalangle CAB$.

Упътване. На чертежа от задача 7 разгледайте триъгълника A_8A_5M с $\sphericalangle MA_5A_8 = 75^\circ$ и височина, равна на половината от страната на квадрата $A_8A_5A_2A_{11}$. Очевидно $\sphericalangle MA_3A_5 = \sphericalangle A = 30^\circ$.

Ето една задача от Националния кръг на олимпиадата в България.

Задача 9. В правилния седмоъгълник със страна a има два вида диагонали: къс диагонал с дължина b и дълъг диагонал с дължина c. Да се докаже равенството

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Упътване. В правилния седмоъгълник $A_1A_2\dots A_7$ използвайте теоремата на Птоломей за четириъгълника $A_1A_2A_3A_5$.

Следващите задачи предлагаме за упражнение на читателя.

Задача 10. За $\triangle ABC$ с $\sphericalangle A = \pi/7$, $\sphericalangle B = 2\pi/7$, $\sphericalangle C = 4\pi/7$ са отбелязани средите на страните му M_1, M_2, M_3, петите на височините му H_1, H_2, H_3 и една от точките X, където описаната окръжност около триъгълника $M_1M_2M_3$ (окръжността на деветте точки за $\triangle ABC$) пресича описаната окръжност около $\triangle ABC$. Да се докаже, че точките M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, X са върхове на правилен седмоъгълник.

Задача 11. За $\triangle ABC$ с $\sphericalangle A = 45^\circ$ и $\sphericalangle B = 60^\circ$ са отбелязани средите на страните му M_1, M_2, M_3, петите на височините му H_1, H_2, H_3 и средите P_1, P_2, P_3 на отсечките от връх до ортоцентър. Да се докаже, че точките M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, P_1, P_2, P_3 са девет от върховете на правилен 12-ъгълник.

Задача 12. За $\triangle ABC$ с $\sphericalangle A = 30^\circ$ и $\sphericalangle B = 70^\circ$ са отбелязани средите на страните му M_1, M_2, M_3 , петите на височините му H_1, H_2, H_3 и средите P_1, P_2, P_3 на отсечките от връх до ортоцентър, както и пресечните точки P и Q на описаната окръжност около $M_1M_2M_3$ с ъглополовящата на $\sphericalangle B$. Да се докаже, че точките M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, P_1, P_2, P_3, P и Q са единадесет от върховете на правилен 18-ъгълник.

Задача 13. В равнобедрения $\triangle ABC$ с $\sphericalangle C = 40^\circ$ срещу основата AB е така избрана вътрешна точка M, че $\sphericalangle MAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 50^\circ$. Намерете $\sphericalangle MCA$.

Задача 14. Във вътрешността на вписания четириъгълник $ABCD$ с $\sphericalangle A = 75^\circ$ и $\sphericalangle B = 120^\circ$ е отбелязана такава точка M, че $\sphericalangle MAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle MCD = 75^\circ$. Намерете $\sphericalangle DMC$ и $\sphericalangle AMB$.

Задача 15. На рамената CB и CA на равнобедрения $\triangle ABC$ с основа AB и $\sphericalangle C = 12^\circ$ са така избрани съответно точки D и E, че $\sphericalangle DAB = 66^\circ$, $\sphericalangle EBA = 54^\circ$. Намерете $\sphericalangle EDA$.

Упътване. Разгледайте правилен 30-ъгълник с център C.

Задача 16. Намерете правилен многоъгълник, на който седем от диагоналите му се пресичат в една точка и тази точка не е в центъра на правилния многоъгълник.

В края да отбележим, че всички гореспоменати задачи може да решите с комплексни числа, ако познавате свойствата на комплексните числа и тяхното приложение в геометрията.

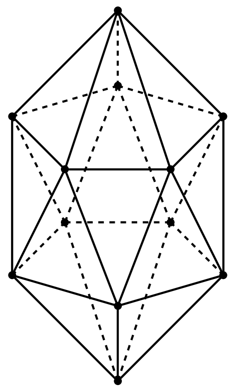
ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ЗА БРОЕНЕ

Невена Събева
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Комбинаторните задачи за броене се срещат във всички състезателни теми. Предложените задачи са избрани от международни и национални математически състезания през последните години. Те бяха разгледани на школата *Математика за напреднали* и са подходящи за подготовка на ученици от 4. до 7. клас.

Да започнем с една задача за *броене на пътища*.

Задача 1. Правилният икосаедър е тяло с 20 стени, всяка от които е равностранен триъгълник и във всеки връх се събират по 5 равностранни триъгълника. Икосаедърът на чертежа има връх най-отгоре, връх най-отдолу, както и по 5 върха в равнината на горния и долния правилен петоъгълник. По колко различни маршрута може да стигнем от най-горния до най-долния връх, като се движим хоризонтално или надолу по ребрата на икосаедъра, ако през всеки връх може да минем не повече от веднъж?



Решение. От най-горния връх може да се *спуснем* в равнината на горния петоъгълник по 5 начина. Може веднага да се спуснем надолу, а може и да направим $1, 2, 3$ или 4 хода наляво или надясно; това са $1+4\cdot 2 = 9$ възможности. От всеки връх има по две ребра надолу, а в равнината на долния петоъгълник отново има 9 възможности за хоризонтално движение, преди да се спуснем до най-долния връх. Така получаваме

$$5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 = 810 \text{ маршрута.}$$

В следващата задача се търси *вероятност*, което изисква да се намери броят на всички възможни избори и на благоприятните измежду тях. Така че отново *броим*.

Задача 2. Две квадратчета от таблица 100×100 са избрани по случаен начин. Намерете вероятността двете квадратчета да са съседни (хоризонтално или вертикално).

Решение. Две от общо 100^2 квадратчета могат да се изберат по

$$\frac{100^2(100^2-1)}{2} \text{ начина.}$$

Сега да преброим по колко начина могат да се изберат две съседни квадратчета. Двойките съседни квадратчета в един ред са 99, което прави 100.99 двойки *хоризонтално съседни* квадратчета. Толкова са и двойките *вертикално съседни* квадратчета. Следователно двойките съседни квадратчета са 2.100.99.

Вероятността при избор на две квадратчета те да са съседни, е

$$\frac{2.100.99}{\frac{100^2(100^2-1)}{2}} = \frac{1}{2525}.$$

Следващите две задачи са формулирани така, че изглеждат трудни. Но да не бързаме да съдим по външния вид!

Задача 3. Нека $p = (a_1, a_2, \ldots, a_9)$ е нареждане (*пермутация*) на цифрите $1, 2, \ldots, 9$. Означаваме

$$s(p) = \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9}.$$

Нека m е минималната стойност на $s(p)$, за която цифрата на единиците на $s(p)$ е 0. Да се намери броят на нарежданията p, за които $s(p) = m$.

Решение. С $s(p)$ е означен сборът на три трицифрени числа, в записа на които участват цифрите от 1 до 9. Ясно е, че за да намерим минималния сбор m, ще *изберем* $(1, 2, 3)$ за цифри на стотиците.

Цифрите на единиците са измежду $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$ и сборът им завършва на 0. С тези цифри не може да се получи сбор 10 (проверете), затова сборът на цифрите на единиците е 20. Трите числа със сбор 20 от множеството $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$ са $(4, 7, 9)$, $(5, 7, 8)$ или $(5, 6, 9)$. Като *изберем* една от тези тройки за цифри на единиците, цифрите на десетиците ще са еднозначно определени – те са останалите три цифри.

Може да пресметнем m. Сборът на цифрите на десетиците е равен на $45 - (1 + 2 + 3 + 20) = 19$ и $m = (1 + 2 + 3).100 + 19.10 + 20 = 810$.

Остава да *подредим* избраните цифри. За всяка от трите възможности за избор на цифри на единиците, цифрите на стотиците могат да се подредят по 6 начина, след което цифрите на десетиците могат да се подредят по 6 начина и накрая цифрите на единиците могат да се подредят по 6 начина. Оттук търсеният брой на подрежданията е $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 648$.

Задача 4. Намерете броя на множествата $\{a, b, c\}$ от три различни естествени числа, за които произведението на a, b и c е равно на произведението на $11, 21, 31, 41, 51$ и 61.

Решение. Първо ще преброим наредените тройки различни числа (a, b, c) с произведение

$$11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot 61 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61.$$

За всеки от шестте прости множители $7, 11, 17, 31, 41$ и 61 има по 3 начина да се разпредели в едно от трите числа a, b и c. За разпределянето на тройките от 3^2 има 6 начина (три, когато двете тройки са заедно, и три, когато има две числа с по една тройка). Така получаваме $3^6 \cdot 6$ начина за разпределяне на простите множители в числата a, b и c. Тук са броени и някои неподходящи тройки, в които има равни числа:

$$(1, 1, 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61) \text{ и } (3, 3, 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61),$$

както и техните пермутации. Неподходящите тройки са $2.3 = 6$. Остават $3^6 \cdot 6 - 6$ наредени тройки от различни числа с желаното произведение.

Тъй като търсим броя на множествата $\{a, b, c\}$, то редът на числата в тройките не е от значение. Всяка тройка е броена по 6 пъти (по толкова начини могат да се разместят 3 различни числа), следователно броят на множествата е

$$\frac{3^6 \cdot 6 - 6}{6} = 3^6 - 1 = 728.$$

Човек и добре да брои, понякога му се налага *да разглежда случаи.* Решения от вида *разделяй и владей* са по-дълги, но се налага да прибегнем към тях, ако не се сещаме за друг вариант.

Задача 5. Трицифрено число наричаме *добро*, ако се дели на 11 или след разместване на цифрите му се получава кратно на 11. Например 121 и 211 са добри числа. Колко са добрите числа?

Решение. Броят на разместванията на цифрите на едно число зависи от това, дали в числото има 0 и дали има еднакви цифри. Затова ще разгледаме следните случаи.

Случай 1. Добрите числа, в записа на които участва 0, се получават от кратни на 11 числа, в чийто запис участва 0. Те са 110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880 и 990, както и 209, 308, 407, 506. От всяко число от вида $aa0$ се получават две добри числа ($aa0$ и $a0a$). От всяко число от вида $a0b$ се получават 4 добри числа ($ab0$, $ba0$, $a0b$ и $b0a$). Следователно в този случай добрите числа са $9.2 + 4.4 = 34$ на брой.

Случай 2. Добрите числа, в чийто запис няма 0, но има еднакви цифри, се получават от кратни на 11 числа, в чийто запис има еднакви цифри. Те са 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979. От всяко такова число aba се получават по 3 добри числа (aab, aba и baa). Следователно в този случай добрите числа са $8.3 = 24$ на брой.

Случай 3. Добрите числа с различни ненулеви цифри се получават от кратни на 11 трицифрени числа $\overline{abc}$, записани с различни ненулеви цифри. От признака за 11 знаем, че $11/a - b + c$, следователно $a - b + c = 0$ или 11 (защо?).

Ако $a - b + c = 0$, имаме следните възможности:

b	3	4	5	6	7
(a, c)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4); (2, 3)	(1, 5); (2, 4)	(1, 6); (2, 5); (3, 4)

b	8	9
(a, c)	(1, 7); (2, 6); (3, 5)	(1, 8); (2, 7); (3, 6); (4, 5)

Числата са 16 и от всяко с разместване на цифрите се получават по 6 добри числа; общо 96 добри числа.

Ако $a + c = b + 11$, имаме

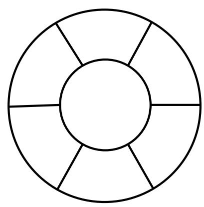
b	6	5	4	3
(a, c)	(8, 9)	(7, 9)	(7, 8); (6, 9)	(9, 5); (8, 6)

b	2	1
(a, c)	(9, 4); (8, 5); (7, 6)	(9, 3); (8, 4); (7, 5)

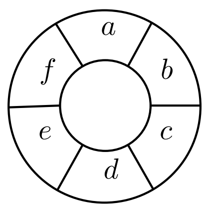
Числата са 12 и като се разместят цифрите им, се получават $12.6 = 72$ добри числа.

Така общо имаме $34 + 24 + 96 + 72 = 226$ добри числа.

Задача 6. Пръстенът на чертежа е направен от 6 сектора. Всеки сектор трябва да се оцвети в един от 4 цвята така, че да няма съседни едноцветни сектори. По колко начина може да стане това?



Решение. Първо ще решим задачата с *разглеждане на случаи.* Нека секторите са a, b, c, d, e, f в този ред. Ще разгледаме три случая в зависимост от оцветяването на a, c, e.



Случай 1. Секторите a, c, e са едноцветни. Техният цвят може да се избере по 4 начина, а цветът на всеки от секторите b, d, f може да се избере по 3 начина; общо са възможни $4 \cdot 3^3 = 108$ оцветявания.

Случай 2. Два от секторите a, c, e са в един цвят, третият е в друг. По 3 начина избираме кой от a, c, e да е различен (нека е a) и по 4 начина определяме цвета му; по 3 начина – цвета на другите два сектора (c и e). За цвета на b и за цвета на f има по две възможности, а за цвета на d има три възможности. Получаваме $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 432$ оцветявания.

Случай 3. Секторите a, c, e са оцветени в три различни цвята. Тогава има $4 \cdot 3 \cdot 2$ начина да изберем цветовете на a, c, e и след това има по 2 възможни оцветявания за всеки от секторите b, d, f; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 192$ оцветявания.

Отговорът е $108 + 432 + 192 = 732$.

Тази задача може да се реши и с **рекурсия.** Това означава да я решим за пръстен с малък брой сектори и да открием как броят на оцветяванията на пръстен с n сектора зависи от броя на оцветяванията на пръстен с по-малък брой сектори.

Нека $C(n)$ е броят на оцветяванията на пръстен с n сектора с 4 цвята. Пръстен с един сектор може да се оцвети по 4 начина, т.е. $C(1) = 4$; пръстен с два сектора може да се оцвети по $4.3 = 12$ начина, т.е. $C(2) = 12$; а пръстен с три сектора може да се оцвети по $C(3) = 4.3.2 = 24$ начина.

Да разгледаме всички оцветени пръстени с n сектора.

Да отделим измежду тях тези, в които първият и $(n-1)$-ият сектор са разноцветни. Като махнем n-тия сектор и слепим краищата, ще получим оцветен пръстен с $(n-1)$ сектора. При това всеки оцветен пръстен с $(n-1)$ сектора ще се получи по 2 пъти (тъй като има две възможности за цвета на n-тия сектор, като фиксираме останалите).

Да разгледаме останалите пръстени. В тях първият и $(n-1)$-ият сектор са едноцветни. Тогава $(n-2)$-ият сектор е в различен от техния цвят и като махнем n-тия и $(n-1)$-ия сектор и слепим краищата, ще получим оцветен пръстен с $(n-2)$ сектора. При това всеки оцветен пръстен с $(n-2)$ сектора ще се получи по 3 пъти (тъй като има три възможности за цвета на n-тия сектор, като фиксираме останалите).

Така откриваме следната зависимост

$$C(n) = 2 \cdot C(n-1) + 3 \cdot C(n-2).$$

Оттук последователно получаваме

$$C(4) = 2.24 + 3.12 = 84, \quad C(5) = 2.84 + 3.24 = 240,$$

$$C(6) = 2.240 + 3.84 = 732.$$

В решението на следващите две задачи ще използваме, че **броят на непразните подмножества** на множество A с n елемента е $2^n - 1$.

Задача 7. Естествено число се нарича *монотонно*, ако е едноцифрено или ако цифрите в записа му са подредени или в строго нарастващ ред, или в строго намаляващ ред. Например, 3, 23578 и 987620 са монотонни, а 88, 7434 и 23557 не са. Колко са монотонните числа?

Решение. Всяко непразно подмножество на множеството от цифрите $\{0, 1, 2, \ldots 9\}$ без подмножеството $\{0\}$ определя едно монотонно намаляващо число (като подредим цифрите от това подмножество в намаляващ ред). Следователно броят на монотонно намаляващите числа е $2^{10} - 2 = 1022$.

В монотонно нарастващите числа не участва 0. Всяко подмножество на цифрите $\{1, 2, \dots 9\}$ определя едно монотонно нарастващо число като подредим цифрите от това подмножество в нарастващ ред. Следователно броят на монотонно нарастващите числа е $2^9 - 1 = 511$.

Едноцифрените числа са броени и като монотонно намаляващи, и като монотонно нарастващи; затова броят на монотонните числа е
$$1022 + 511 - 9 = 1524.$$

Задача 8. Множеството S ще наричаме *свободно от произведения*, ако няма елементи a, b, c на S (които не са непременно различни), за които $a.b = c$. Например, празното множество и множеството $\{16, 20\}$ са свободни от произведения, докато $\{4, 16\}$ и $\{2, 8, 16\}$ не са. Намерете броя на свободните от произведения подмножества на $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Решение. Ясно е, че 1 не е елемент на свободно от произведения множество. Ще разгледаме случаи в зависимост от това дали 2 или 3 са в множеството.

Случай 1. Ако и 2, и 3 не са в множеството. Тогава всяко подмножество на $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ е свободно от произведения; получаваме 2^7 подмножества (включително празното).

Случай 2. Ако 2 е в множеството, а 3 не е. Тогава 4 не е в множеството. От двойката (5, 10) може да участва най-много едно от числата – това са 3 възможности (само 5, само 10 и нито едно от двете). Всяко от числата 6, 7, 8 и 9 може да участва (това са по 2 възможности за всяко от тях). Получаваме $3.2^4 = 48$ множества.

Случай 3. Ако 3 е в множеството, а 2 не е. Тогава 9 не е в множеството, а всяко от числата 4, 5, 6, 7, 8 и 10 може да участва. Получаваме $2^6 = 64$ множества.

Случай 4. Ако и 2, и 3 са в множеството. Тогава 4, 6 и 9 не са в множеството. Всяко от числата 7, 8 и 9 може да участва, както и най-много едно от числата 5 и 10. Получаваме $2^2.3 = 12$ множества.

Броят на свободните от произведения множества е
$$128 + 48 + 64 + 12 = 252.$$

В следващите две задачи ще използваме, че **броят на делителите** на n, което се разлага на прости множители във вида $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, е $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1)$.

Задача 9. Колко от делителите на 18^{81} са нито точни квадрати, нито точни кубове?

Решение. Числото $18^{81} = 2^{81}.3^{162}$ има 82.163 делители.

Делителите, които са точни квадрати, са от вида $2^{2k}.3^{2p}$, където k е от 0 до 40 и p е от 0 до 81; те са 41.82 на брой.

Делителите, които са точни кубове, са от вида $2^{3k}.3^{3p}$, където k е от 0 до 27 и p е от 0 до 54; те са 28.55 на брой.

Делителите, които са точни квадрати и точни кубове, са от вида $2^{6n}.3^{6m}$, където n е от 0 до 13 и p е от 0 до 27; те са 14.28 на брой.

Делителите, които са точни квадрати или точни кубове, са

$$41.82 + 28.55 - 14.28 = 41.110.$$

Делителите, които не са нито точни квадрати, нито точни кубове, са

$$82.163 - 41.110 = 8856.$$

Задача 10. Нека N и k са естествени числа. Числото N наричаме k-*хубаво*, ако за някое естествено число a числото a^k има точно N делители.

а) Посочете три 2-хубави числа. Вярно ли е, че всяко 2-хубаво число е нечетно? Всяко нечетно число ли е 2-хубаво?

б) Колко естествени числа, по-малки от 1000, не са нито 7-хубави, нито 8-хубави?

Решение. а) Например, 3, 5 и 7 са 2-хубави числа, защото 2^2 има точно 3 делители, 4^2 има 5 делители и 8^2 има 7 делители. Всяко 2-хубаво число е нечетно, тъй като числата от вида a^2 (точните квадрати) имат нечетен брой делители.

Също е вярно, че всяко нечетно число $2s + 1$ е 2-хубаво, защото ако изберем $a = 2^s$, то a^2 има $2s + 1$ делители.

б) Ако a^7 има точно N делители, то $N = (7e_1 + 1) \dots (7e_m + 1)$, където e_i са степените на простите множители числа в разлагането на a. Следователно N дава остатък 1 при деление на 7.

Обратно, ако N дава остатък 1 при деление на 7, то N е 7-хубаво число (защо?). Следователно 7-хубавите числа са даващите остатък 1 при деление на 7. По-малките от 1000 такива числа са 143 (проверете!).

Аналогично, 8-хубавите са тези, които дават остатък 1 при деление на 8 и по-малките от 1000 такива числа са 125 (проверете!).

Накрая, числата, които са и 7-хубави, и 8-хубави, дават остатък 1 при деление на 56 и по-малките от 1000 такива числа са 18.

Общо $143 + 125 - 18 = 250$ от първите 999 числа са 7-хубави или 8-хубави, значи търсеният брой е $999 - 250 = 749$.

И накрая *една* задача – *най-лесната*! – за самостоятелна работа.

Задача 11. В компания от 30 души има 20, всеки двама от които се познават, и 10, които не познават никого. Всеки двама в компанията се поздравили: прегърнали се, ако се познават, а ако не се познават, си стиснали ръцете. Колко са били ръкостисканията?

Отговор. 245

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2017/18 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и e-mail адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

проф. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Да се докаже, че за всяка безкрайна редица $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ от 1 и -1 могат да се изберат такива n и k, че

$$|a_0a_1\dots a_k + a_1a_2\dots a_{k+1} + \dots + a_na_{n+1}\dots a_{n+k}| = 2017.$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с център I на външновписаната окръжност, която се допира до страната AB. Нека A_1 и B_1 са допирните точки на тази окръжност с правите BC и AC съответно, M е средата на IC, а отсечките AA_1 и BB_1 се пресичат в точка N. Да се докаже, че точките N, B_1, A и M лежат на една окръжност.

Задача 3. Дадени са 100 врати и 100 ключа за тях, като всеки ключ отваря точно една врата. Вратите са номерирани от 1 до 100 и ключовете са номерирани от 1 до 100 така, че номерът на всеки ключ или е равен на номера на вратата, която отваря, или се различава от него с 1. За един опит се избират врата и ключ и се проверява дали този ключ отключва избраната врата. За да се отключат всички врати, достатъчни ли са:

а) 99 опита; б) 75 опита; в) 74 опита?

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2018 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 6/2017 г.

Задача 1. Да се намерят целите неотрицателни решения (a, b) на уравнението $2017^a = b^6 - 32b + 1$.

Решение на **Валери Ванков**. Ако $b = 0$, то $a = 0$. Нека $b > 0$. Очевидно b е четно. Следователно 64 дели $b^6 - 32b$, т.е. $2017^a \equiv 1 \pmod{64}$. Но $2017 \equiv 33 \pmod{64}$, $2017^2 \equiv 1 \pmod{64}$, следователно a е четно. Това означава, че 2017^a е точен квадрат, следователно $b^6 - 32b + 1$ е точен квадрат.

Лесно се вижда, че за всяко $b > 4$ е изпълнено неравенството

$$(b^3 - 1)^2 < b^6 - 32b + 1 < (b^3)^2,$$

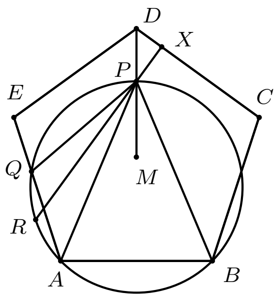
т.е. $b^6 - 32b + 1$ е между два последователни точни квадрата и не може да е точен квадрат.

Остава да проверим случаите $b = 2$ и $b = 4$. Получаваме, че уравнението има две решения $(a, b) = (0, 0)$ и $(a, b) = (0, 2)$.

Задачата е решена и от **Борислав Кирилов** (8. клас, ПЧМГ) и **Евгени Кайряков** (10. клас, СМГ).

Задача 2. Правилният петоъгълник $ABCDE$ има център M. На отсечката MD е избрана точка $P \neq M$. Описаната окръжност около триъгълника ABP пресича отсечката AE в точките A и Q и пресича правата през P, перпендикулярна на CD, в точките P и R. Да се докаже, че $AR = QR$.

Решение на **Евгени Кайряков**. Ще докажем, че $\widehat{AR} = \widehat{QR}$, откъдето следва желаното равенство. Ъгълът на правилния петоъгълник е 108° и намираме $\sphericalangle MDC = 108^\circ/2 = 54^\circ$ и $\sphericalangle DPX = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$, където $X = PR \cap CD$. Симетралата DM на AB разполовява $\widehat{AB}$, следователно



$$(1) \qquad 36^\circ = \sphericalangle RPM = \frac{\widehat{AR}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{4} \iff 72^\circ = \widehat{AR} + \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

От вписания четириъгълник $ABPQ$ имаме $\sphericalangle BPQ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

$$(2) \qquad 72^\circ = \sphericalangle BPQ = \frac{\widehat{AQ}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

От (1) и (2) следва, че $\widehat{AR} = \dfrac{\widehat{AQ}}{2}$, т. е. $\widehat{AR} = \widehat{QR}$, което искахме да докажем.

Задачата е решена и от **Валери Ванков** (8. клас, СМГ) и **Борислав Кирилов** (8. клас, ПЧМГ).

Задача 3. Дадено е множеството $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Да се намери максималното n, за което съществуват n различни подмножества на S, за всеки две от които има елемент на S, който не принадлежи на нито едно от тях.

Решение на **Борислав Кирилов**. Ще докажем, че максималното n с търсеното свойство е $n = 2^{2016}$.

Като пример, че това n се достига, може да вземем подмножествата на S, които не съдържат числото 2017. Очевидно те изпълняват условието на задачата, а броят им е 2^{2016}, защото във всяко от тях или участва, или не, всяко едно от числата от 1 до 2016.

Да допуснем, че съществуват $2^{2016} + 1$ подмножества с исканото в задачата свойство. Общият брой подмножества на S е 2^{2017} и те се разбиват на 2^{2016} двойки подмножества от вида $\{A,\ S \setminus A\}$, които се допълват до S, т.е. всяка двойка подмножества съдържа всяко от числата от S точно по веднъж. От принципа на Дирихле следва, че от някоя двойка сме избрали и двете подмножества. Но тогава те не изпълняват условието на задачата, противоречие.

Забележка. В условието не се уточнява, дали се брои и празното множество. Ако не се брои, отговорът на задачата е $n = 2^{2016} - 1$.

Задачата е решена и от **Мартин Христов** (6. клас, СМГ), **Евгени Кайряков** (10. клас, СМГ) и **Валери Ванков** (8. клас, СМГ).

ДА РЕШИМ НЕРЕШЕНИТЕ ЗАДАЧИ

Навярно сте забелязали, че в коментарите на повечето задачи, публикувани в сайта на Art of Problem Solving, могат да се намерят решенията им. Особен интерес предизвикват задачите без решение. Предлагаме Ви една от тях – последната задача от раздел *Комбинаторика* на CMIMC 2018 (Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition).

> Нека S е подмножество на множеството $\{0, 1, \ldots, 14\}$. Казваме, че S е *разредено*, ако за всяко $x \in S$ числото, сравнимо с $x + 1$ (mod 15), не е в S. Намерете броя на разредените множества T, за които сборът на елементите на T е кратен на 15.

Очакваме Вашите решения!

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2017 г. и бр. 1, 2 от 2018 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Естественото число C е с 22% по-малко от естественото число A и с 16% по-голямо от естественото число T. Намерете най-малката възможна стойност на сбора $C + A + T$.

Задача 2. Тази година Ясен участвал в 7 математически състезания, на които получил 7 различни резултата, всеки от които е естествено число между 91 и 100 включително. След всяко състезание Ясен пресмятал средния си резултат до момента и всеки път получавал естествено число. Намерете резултата на Ясен от шестия тест, ако на седмия тест получил 95 точки.

Задача 3. Дадена е квадратна мрежа с $n \times n$ единични квадратчета.

а) Намерете n, за което 30% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати.

б) Намерете най-малкото n, за което по-малко от 3% от броя на правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати.

Срокът за представяне на решенията е 15.04.2018 г.

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 6/2017 г.

Задача 1. В разследване на банков обир има седем заподозрени:
Атанас, с кафява коса и сини очи;
Борис, с руса коса и зелени очи;
Васил, с руса коса и кафяви очи;
Галя, с руса коса и кафяви очи;
Диана, с кафява коса и сини очи;
Емил, с кафява коса и кафяви очи;
Живка, с руса коса и сини очи.
Детективите Иван, Петър и Кирил знаят, че крадецът е един от заподозрените. След като разследвали случая, те обменили събраната информация.

Иван: *Знам цвета на косата и цвета на очите на крадеца, но не мога да определя кой е той.*

Петър (без да чуе думите на Иван): *Знам цвета на косата, както и пола на крадеца, но не мога да определя кой е той.*

Кирил: *Първоначално знаех само пола на крадеца, но след вашите думи мога да посоча и името му!*
Ако детективите казват истината, кой е крадецът?

Решение на **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора).

Щом Иван знае цвета на косата и цвета на очите, но не знае кой е, тогава заподозрените са с еднаква коса и очи. Възможностите са:

Васил или Галя (руса коса, кафяви очи)

Диана или Атанас (кафява коса, сини очи)

Щом Петър знае цвета на косата и пола, но не знае кой е, тогава заподозрените са с еднакъв пол и цвят на косата. Възможностите са:

Васил или Борис (руса коса, мъжки пол)

Атанас или Емил (кафява коса, мъжки пол)

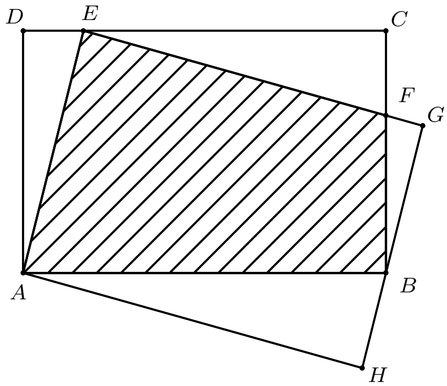
Галя или Живка (руса коса, женски пол)

Виновникът присъства и в двете множества (заподозрените на Иван и тези на Петър). Това са Атанас, Васил и Галя.

Щом Кирил знае само пола на крадеца и се досеща за крадеца в мига, в който Иван и Петър се произнасят, това означава, че крадецът не е мъж (сред трите възможности за крадец има двама мъже). Крадецът е Галя.

Задачата е решена и от **Христо Георгиев** (5. клас, ППМГ, Стара Загора), **Александра Ветова** (6. клас, ПМГ, Плевен), **Мария Дренчева** (6. клас, СМГ), **Любен Карбанов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Мартин Христов** (6. клас, СМГ), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен).

Задача 2. На чертежа правоъгълникът $ABCD$ и успоредникът $AEGH$ са разположени така, че точката E лежи на CD, а точката B лежи на GH.



Лицето на защрихования четириъгълник $ABFE$ е равно на сбора от лицата на четирите триъгълника на чертежа (ADE, CFE, BFG и ABH). Ако $DE = 20\%.CE$ и $BF = k\%.BC$, намерете k.

Решение на **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра).

Първо ще докажем, че $S_{ABCD} = S_{AHGE}$. Да разгледаме $\triangle ABE$ като част от $ABCD$. Неговото лице е $S = \dfrac{1}{2}AB.BD = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Сега да разгледаме $\triangle ABE$ като част от $AHGE$. С h ще означим височината на $AHGE$ към страната AE. Лицето на триъгълника ABE е равно на $S = \dfrac{1}{2}AE.h = \dfrac{1}{2}S_{AHGE}$. От това и горното следва, че

$$S_{ABCD} = S_{AHGE}.$$

Нека $S_1 = S_{ADE}$; $S_2 = S_{FCE}$; $S_3 = S_{BFG}$; $S_4 = S_{ABH}$; $S_5 = S_{ABFE}$. По условие $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5$ и оттук

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_5 + S_1 + S_2 = 2(S_1 + S_2) + S_3 + S_4, \\ S_{AHGE} &= S_5 + S_3 + S_4 = 2(S_3 + S_4) + S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Само че $S_{ABCD} = S_{AHGE}$, следователно $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Оттук

$$S_{ABCD} = 3(S_1 + S_2).$$

От условието $DE = 20\%CE$, т.е. $DE = \dfrac{1}{6}DC$ следва, че $S_1 = \dfrac{1}{12}S_{ABCD}$, т.е. $S_2 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12}\right)S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$. Но

$$S_2 = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot S_{BCD} = \frac{5}{6} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{5}{12} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot S_{ABCD}.$$

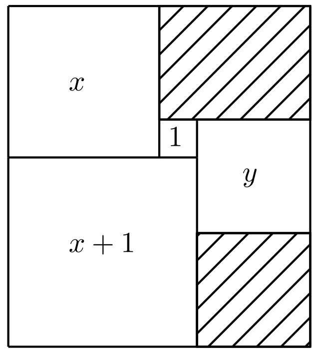
Получаваме

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{FC}{BC}=\frac{1}{4}\Longrightarrow\frac{FC}{BC}=\frac{3}{5}.$$

Това означава, че $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{2}{5}=40\%$, т.е. $k=40$.

Задачата е решена и от **Мария Дренчева** (6. клас, СМГ), **Александра Ветова** (6. клас, ПМГ, Плевен), **Мартин Христов** (6. клас, СМГ), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен).

Задача 3. На чертежа е даден правоъгълник, сглобен от квадрат със страна 1 cm; три квадрата, чиито страни, измерени в сантиметри, са цели числа, и два защриховани правоъгълника. Сборът от лицата на защрихованите правоъгълници е 100 cm^2. Намерете размерите на дадения правоъгълник.



Решение. Да означим с x и y страните на два от квадратите, както е показано на чертежа.

Четвъртият квадрат има страна $x+1$. Единият правоъгълник е със страни $x-1$ и $y+1$, а другият с $x+2-y$ и y. Сборът на лицата им е

$$(x-1)(y+1)+y(x+2-y)=100 \iff 2xy-y^2+x+y=101.$$

Последното равенство умножаваме по 4, прибавяме 3 от двете страни на равенството и групираме по следния начин:

$$(8xy+4x)-(4y^2-1)+(4y+2)=407 \iff$$

$$4x(2y+1)-(2y+1)(2y-1)+2(2y+1)=407 \iff$$

$$(2y+1)(4x-2y+3)=407.$$

Тъй като $407=11.37$, x и y са естествени числа и от чертежа следва, че $x+1>y-1$, т.е. $x+1\geqq y$ и оттук $x-y\geqq -1$, то

$$(4x-2y+3)-(2y+1)=4(x-y)+2\geqq 4.(-1)+2=-2.$$

Освен това $2y+1>1$, следователно $4x-2y+3=37$ и $2y+1=11$. Оттук намираме $x=11$, $y=5$.

Правоъгълникът има размери $2x+1=23$ cm и $x+y+1=17$ cm.

Задачата е решена и от **Любен Карбанов** (6. клас, ППМГ, Стара Загора), **Николай Георгиев** (6. клас, ПМГ, Силистра), **Мартин Христов** (6. клас, СМГ), **Любомир Коцев** (7. клас, СМГ), **Мирослав Минчев** (7. клас, ППМГ, Стара Загора), **Георги Тончев** (7. клас, ПМГ, Плевен).

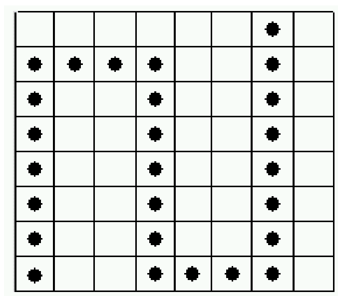
Ученическо творчество

КАК ДА ОТКРИЕМ СЪКРОВИЩЕТО

Ясен Пенчев (6. клас, ПМГ, Габрово)

Ще разгледам следната задача от Есенния кръг на Турнира на градовете през 2017 г.

Задача. В едно от полетата на квадрат 8×8 е заровено съкровище. Разполагаме с детектор и се намираме в едно от ъгловите полета на квадрата. За един ход преминаваме от едно поле в съседно (по страна) поле. Детекторът сигнализира, ако сме в поле със съкровище или в поле, съседно на поле със съкровище. Възможно ли е съкровището да се намери с не повече от 26 хода?



Маршрутът, който измислих, се състои от 25 премествания. Движим се по този маршрут, докато детекторът започне да писука.

Да разгледаме конкретните ситуации, които могат да се случат в зависимост от това, в кое поле от маршрута за първи път детекторът започва да писука. В схемите по-долу оцветеното поле е мястото от маршрута, до което е стигнал детекторът.

Случай 1. Ако детекторът писука в началото (в долния ляв ъгъл), отиваме в поле номер 1 от схемата вдясно.

1	2
	3

– Ако там не писука, съкровището е в поле номер 3.

– Ако там писука, то отиваме в поле номер 2.

  – Ако в поле номер 2 не писука, съкровището е в началото (оцветеното поле).

  – Ако в поле номер 2 писука, то съкровището е в поле номер 1.

Следователно при такива обстоятелства ще са ни нужни най-много 2 хода, за да намерим съкровището.

Случай 2. Ако детекторът за първи път писука след извършване на 24-тия ход, отиваме в поле номер 1 от схемата вдясно.

	3	2
4		1

– Ако там писука, съкровището е в поле номер 1.

– Ако там не писука, то отиваме в поле номер 2.

  – Ако там писука, съкровището е в поле номер 3.

  – Ако там не писука, то съкровището е в поле номер 4.

Следователно при такива обстоятелства ще са ни нужни най-много 26 хода, за да намерим съкровището.

Случай 3. Ако детекторът писука по-рано от извършването на 24-тия ход, следваме стратегията, описана в случай 2. Отново още два хода ще са достатъчни за намиране на съкровището, т.е. общият брой ходове не надхвърля 25.

Случай 4. Какво се случва, ако детекторът не е писукал до извършването на 25-ия ход (и е в оцветеното поле на схемата вдясно)?

3	1		2

– Ако детекторът не писука и при 25-ия ход, то съкровището е в поле номер 3, защото то е единственото, което не е обходено и не е съседно на обходено поле от маршрута.

– Ако детекторът писука на 25-ия ход, то отиваме в поле номер 1.

  – Ако в поле номер 1 писука, то съкровището е в поле номер 1.

  – Ако в поле номер 1 не писука, то съкровището е в поле номер 2.

Следователно при такива обстоятелства ще са ни нужни най-много 26 хода, за да намерим съкровището.

Показах, че 26 хода са достатъчни, за да се намери съкровището. Смятам, че това е минималният брой ходове, които са нужни, за да се открие.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Иванка Зангочева

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

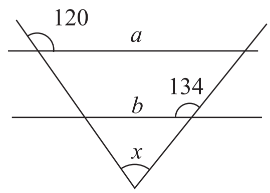
1. Стойността на израза $2a^3 - 4a^2 + 6a - 12$ при $a = 5$ е:

А) 120 **Б)** -32 **В)** 168 **Г)** 248

2. За $c \neq \pm\frac{3}{5}$ изразът $\dfrac{9c^5 - 15c^4}{9c^2 - 25}$ е равен на:

А) $\dfrac{3c^4}{3c+5}$ **Б)** $c^3 - \dfrac{3}{5}c^4$ **В)** $c^3 + \dfrac{3}{5}c^4$ **Г)** $\dfrac{3c^4}{3c-5}$

3. Ако на чертежа $a \| b$, то мярката на x е:



А) 55° **Б)** 74°

В) 101° **Г)** 46°

4. За $\triangle ABC$ е дадено $\sphericalangle BAC = 65^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 55^\circ$. За дължините на страните на триъгълника е вярно, че:

А) $AB < BC < AC$ **Б)** $AC < BC < AB$

В) $BC < AC < AB$ **Г)** $AB < AC < BC$

5. Намерете лицето S и обиколката P на равнобедрен трапец с основи $a = 300$ мм, $b = 20\%$ от a, бедра $c = d = 1{,}3$ дм и $h = \dfrac{1}{6}$ от a.

А) 90 см^2 и 300 см **Б)** 90 см^2 и 62 см

В) 62 см^2 и 90 см **Г)** 62 см^2 и 900 мм

6. Ако мерките на външните ъгли на триъгълник се отнасят както $5 : 3 : 7$, то най-малкият вътрешен ъгъл на този триъгълник е равен на:

А) 120° **Б)** 108° **В)** 12° **Г)** 60°

7. Кой от дадените изрази е тъждествено равен на

$$2x(2a-5) + y(5-2a)\ ?$$

А) $(2x+y)(2a-5)$ **Б)** $2xy(2a-5)$

В) $(2x-y)(2a-5)$ **Г)** $-2xy(2a-5)$

8. Многочленът $(5a+b)^2-(a-5b)^2$ се разлага на множители във вида:

А) $(3a+2b)(3a-2b)$ **Б)** $(3a+2b)(2b-3a)$

В) $4(3a-2b)(2a+3b)$ **Г)** $4(2b-3a)(3a+2b)$

9. Бригада от 6 работника с еднаква производителност може да ремонтира хотел за 3 дни, а друга бригада от 5 работника може да ремонтира същия хотел за 4 дни. Собственикът на хотела наел по един работник от двете бригади, като този от втората бригада работил един ден повече. За колко дни е приключил ремонтът?

А) 10 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 7

10. Кое е най-малкото цяло число, което не е решение на неравенството

$$\frac{x+1}{2}<\frac{4x+3}{4}\ ?$$

А) $\frac{1}{2}$ **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** -1

11. В правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) AL е ъглополовяща и $CL:LB=4:5$. Ако $CB=18$ см, то разстоянието от точка L до хипотенузата AB е равно на:

А) 10 см **Б)** 9 см **В)** 8 см **Г)** 5 см

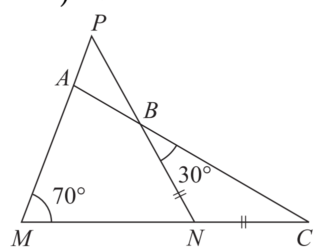
12. В триъгълника ABC симетралата на страната AB пресича BC във вътрешна точка P и продължението на AC в точка Q. Ако $AB=18$ см, $BC=15$ см, $AC=12$ см и $CQ=4$ см, $P_{APC}+P_{ABQ}$ е равен на:

А) 77 см **Б)** 70 см **В)** 57 см **Г)** 47 см

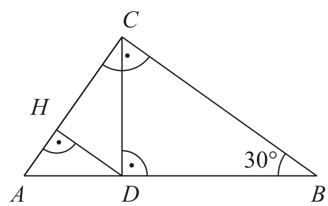
13. На чертежа $NC=NB$ и $\sphericalangle NBC=30^\circ$, $\sphericalangle NMP=70^\circ$. Мярката на $\sphericalangle MPN$ е:

А) 40° **Б)** 30°

В) 50° **Г)** 70°



14. На чертежа CD е височина към хипотенузата AB на правоъгълния $\triangle ABC$, а DH е височина в $\triangle ACD$. Ако $\sphericalangle ABC=30^\circ$ и обиколката на $\triangle ABC$ е a см, колко сантиметра е обиколката на $\triangle AHD$?



А) $\frac{a}{3}$ **Б)** $\frac{a}{4}$ **В)** $\frac{a}{6}$ **Г)** $\frac{a}{8}$

15. Коренът на уравнението

$$(x-1)(x^2+x+1)-x(x-3)^2-6x^2=-10 \text{ е:}$$

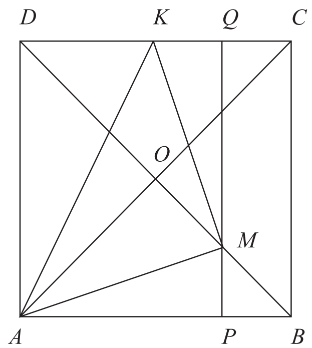
А) 8 **Б)** -1 **В)** 10 **Г)** 1

16. Микровълнова печка струва 117 лв. и е с 30% по-скъпа от един фритюрник. Цената на фритюрника и печката в лева е:

А) 201 **Б)** 204 **В)** 205 **Г)** 207

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Пресечната точка на диагоналите на квадрата $ABCD$ е O. Точката K е средата на CD, а точка Q – средата на KC. Правата през точка Q, успоредна на AD, пресича BO в точка M и AB в точка P.



Попълнете пропуснатия текст в твърденията.

Триъгълниците AMP и KMQ са .... Според страните си, $\triangle AKM$ е .... Според ъглите си, $\triangle AKM$ е ....

18. В бланката за отговори срещу всяка от буквите А), Б) и В) запишете номер от (1) до (4) така, че коренът със съответния номер да е решение на съответното уравнение в лявата колона.

А) $\dfrac{3t}{16}+\dfrac{2t-5}{-12}=\dfrac{t}{8}$	(1) $t=0$; $t=\dfrac{1}{6}$
Б) $12+5\|2t-9\|=2\|2t-9\|$	(2) $t=4$
	(3) всяко x е решение
В) $(6t-1)(6t+1)+(6t-1)^2=0$	(4) няма решение

19. Един ден Панчо излязъл с колелото си в 16 часа. Движението му по улицата е показано на графиката.

А) Колко километра е изминал през първите 10 минути?

Б) На колко километра се е отдалечил от дома си?

В) Колко часа се е движил и колко е почивал Панчо?

20. Дадени са 4 последователни цели числа. Произведението на двете четни е с 15 по-малко от това на двете нечетни.

А) На колко е равно най-малкото от тези числа?

Б) Намерете средноаритметичното на числата.

В) На колко е равен сборът от всички положителни делители на най-малкото от четирите числа?

ВТОРИ МОДУЛ

21. Даден е тъпоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C > 90^\circ$), в който AH е височина. Ако $AB = 2AH$ и $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle CAH$, намерете ъглите на $\triangle ABC$.

22. В магазин получили 50 костюма от два различни модела. След като продали $\dfrac{5}{7}$ от костюмите от първия и $\dfrac{2}{3}$ от костюмите от втория модел, се оказало, че от първия модел са останали с 5 костюма повече, отколкото от втория. По колко костюма от всеки модел са получили в магазина?

23. А) Пресметнете стойността на израза $\dfrac{M}{18}$, където

$$M = \left(\frac{3^4.2^7}{5^2}\right) : \left(\frac{(-3)^2.2^6}{5^3}\right).$$

Б) Решете параметричното уравнение

$$n(nx-3) - 1 = 2n^2 + x.$$

В) Намерете стойността на параметъра n, при която коренът на уравнението съвпада със стойността на на израза $\dfrac{M}{18}$.

24. В успоредника $ABCD$ страната AB е два пъти по-голяма от страната AD. Отсечката BP е перпендикулярна на BC и P е вътрешна точка за страната AD. Точките M и N са съответно средите на страните AB и CD.

А) Докажете, че $AMND$ е ромб.

Б) Докажете, че $\triangle CDM$ е правоъгълен.

В) Ако $MD = 5$ см, $MC = 8$ см, намерете лицето на $\triangle MCD$.

Отговори

1. В; **2.** А; **3.** Б; **4.** Г; **5.** Б; **6.** В; **7.** Г; **8.** В; **9.** А; **10.** Г; **11.** В; **12.** А; **13.** В; **14.** Б; **15.** Г; **16.** Г; **17.** еднакви, равнобедрен, правоъгълен. **18.** А) (2); Б) (4); В) (1). **19.** А) 0,5 km; Б) 1,5 km; В) почивал $\frac{1}{12}$ часа и се движил $\frac{5}{12}$ часа. **20.** А) 6 или -9; Б) $\pm 7{,}5$; В) 12 или 13.

Решения

21. В правоъгълния $\triangle ABH$ от $AB = 2AH$ следва, че $\sphericalangle ABH = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle BAH = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAC = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$. Накрая $\sphericalangle ACB = 110^\circ$.

22. Ако от първия вид са доставени x костюма, от втория са доставени $(50 - x)$ костюма. Останали са $\frac{2}{7}x$ броя от първия вид и $\frac{1}{3}(50 - x)$ броя от втория. Имаме

$$\frac{2}{7}x = \frac{1}{3}(50 - x) + 5,$$

откъдето намираме $x = 35$. Следователно са получени 35 броя от първи вид и 15 броя от втори вид.

23. А) Имаме $M = \frac{3^4.2^7}{5^2} \cdot \frac{5^3}{3^2.2^6} = 2.3^2.5 = 90$, откъдето $\frac{M}{18} = 5$.

Б) Уравнението е еквивалентно на

$$(n - 1)(n + 1)x = (n + 1)(2n + 1).$$

При $n = 1$ то няма решение; при $n = -1$ всяко x е решение; при $n \neq \pm 1$ решението е $x = \frac{2n + 1}{n - 1}$.

В) От равенството $5 = \frac{2n + 1}{n - 1}$ намираме $n = 2$.

24. А) В $AMND$ страните AM и ND са успоредни и равни, следователно $AMND$ е успоредник. От равенството на съседните страни $AM = AD$ следва, че този успоредник е ромб.

Б) В ромба $AMND$ диагоналът MD е ъглополоваща на $\sphericalangle AMN$. Аналогично в ромба $MBCN$ диагоналът MC е ъглополоваща на $\sphericalangle BMN$. Ъглополовящите на съседните ъгли са перпендикулярни (докажете!), следователно $DM \perp MC$, т.е. $\triangle CDM$ е правоъгълен.

В) Имаме $S_{CDM} = \frac{1}{2}DM.CM = 20$ см^2.

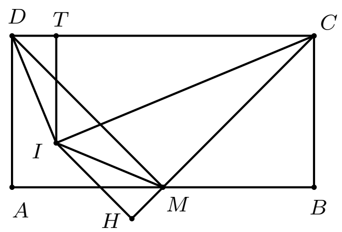
ВЕЛИКОЛЕПНАТА ЪГЛОПОЛОВЯЩА

Невена Събева

С ъглополовящата е свързано едно от най-използваните допълнителни построения: *от подходяща точка на ъглополовящата спускаме перпендикуляри към рамената на ъгъла.* Тъй като всяка точка от ъглополовящата на ъгъл е на равни разстояния от рамената му, спускането на тези перпендикуляри „обогатява“ чертежа с две равни отсечки (които биха могли да са полезни).

Задача 1. Даден е правоъгълник $ABCD$ с $AB = 2AD$. Точката M е среда на AB, а ъглополовящите на $\sphericalangle ADM$ и $\sphericalangle AMD$ се пресичат в точка I. Да се докаже, че CI е ъглополовяща на $\sphericalangle DCM$.

Решение. Нека H и T са петите на перпендикулярите от точка I към правите CM и CD съответно. За да докажем, че CI е ъглополовяща на $\sphericalangle DCM$, е достатъчно да докажем равенството на перпендикулярите $IH = IT$.



По условие $AD = AM$, т.е. $\triangle AMD$ е правоъгълен и равнобедрен (както и $\triangle MBC$). Оттук $\sphericalangle IDM = \sphericalangle IMD = \dfrac{45^\circ}{2}$, т.е. $\triangle IMD$ е равнобедрен и $IM = ID$. Освен това

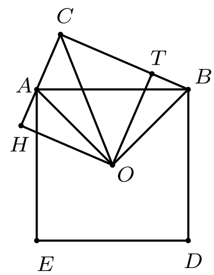
$$\sphericalangle HMI = \sphericalangle HMA + \sphericalangle AMI = \sphericalangle BMC + \sphericalangle AMI = 45^\circ + \frac{45^\circ}{2} = \frac{3}{2} \cdot 45^\circ,$$

както и $\sphericalangle TDI = 90^\circ - \sphericalangle ADI = 90^\circ - \dfrac{45^\circ}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot 45^\circ$.

Следователно правоъгълните триъгълници IHM и ITD са еднакви по втори признак и оттук $IH = IT$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, $\sphericalangle C = 90^\circ$ и външно за него е построен квадрат $ABDE$ с пресечна точка на диагоналите O. Да се докаже, че CO е ъглополовяща на $\sphericalangle C$.

Решение. Спускаме перпендикуляри OH и OT от O към AC и BC.



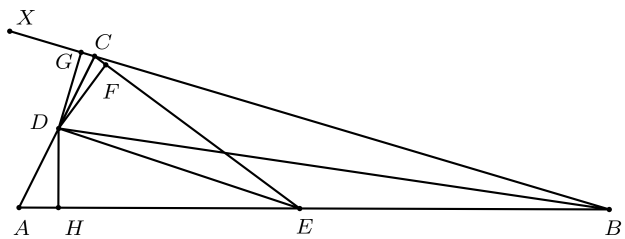
Първо да отбележим, че триъгълникът AOB е правоъгълен и равнобедрен: $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ и $AO = BO$. От сбора на ъглите в четириъгълника $HOTC$ следва, че $\sphericalangle HOT = 360^\circ - 2.90^\circ = 90^\circ$. Тогава

$$\begin{aligned}\sphericalangle BOT &= \sphericalangle BOA - \sphericalangle TOA \\ &= \sphericalangle HOT - \sphericalangle TOA = \sphericalangle HOA.\end{aligned}$$

Следователно $\triangle HAO \cong TBO$ по втори признак и оттук $OH = OT$. Последното означава, че CO е ъглополовяща на $\sphericalangle C$.

Задача 3. В триъгълника ABC с $\sphericalangle C = 100^\circ$ е построена ъглополовящата BD. На страната AB е отбелязана точка E така, че $\sphericalangle BCE = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BDE$.

Решение. Външният ъгъл при върха C на $\triangle ABC$ е $\sphericalangle XCA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Тъй като $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB - \sphericalangle BCE = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$, то CA е ъглополовяща на $\sphericalangle XCE$.



Спускаме перпендикулярите DG, DH и DF от D към BC, AB и CE. Тъй като точка D е от ъглополовящата CA на $\sphericalangle XCE$, то $DG = DF$. Тя е и от ъглополовящата BD на $\sphericalangle ABC$, следователно $DG = DH$. Получихме, че $DH = DF$, което означава, че DE е ъглополовяща на $\sphericalangle AEC$.

Ако $\sphericalangle AEC = 2\alpha$, $\sphericalangle ABC = 2\beta$, то $\sphericalangle AEC$ е външен за $\triangle BEC$ и получаваме

$$2\alpha = 20^\circ + 2\beta \iff \alpha = 10^\circ + \beta.$$

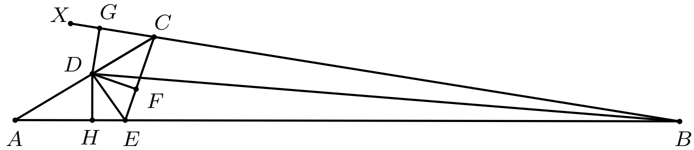
От друга страна, $\sphericalangle AED = \alpha$ е външен за $\triangle EBD$ и получаваме

$$\alpha = \sphericalangle BDE + \beta.$$

От последните две равенства следва, че $\sphericalangle BDE = 10^\circ$.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, $\sphericalangle C = 140^\circ$, в който BD е ъглополовяща. Точката $E \in AB$ е такава, че $\sphericalangle BCE = 100^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BDE$.

Решение. Както в предишната задача, забелязваме, че външният ъгъл при върха C на $\triangle ABC$ е $\sphericalangle XCA = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ и е равен на $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB - \sphericalangle BCE = 140^\circ - 100^\circ = 40^\circ$, т.е. CA е ъглополовяща на $\sphericalangle XCE$.



По същия начин спускаме перпендикулярите DG, DH и DF от D към BC, AB и CE и доказваме, че те са равни и DE е ъглополовяща на $\sphericalangle AEC$.

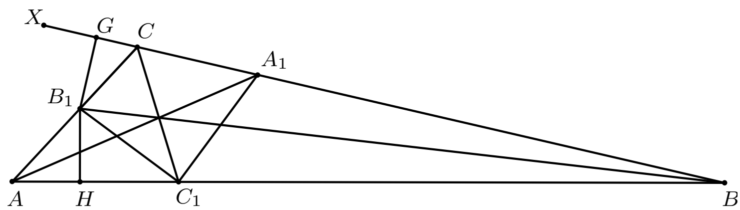
Като разгледаме $\sphericalangle AEC = 2\alpha$ като външен за $\triangle BEC$ с $\sphericalangle ABC = 2\beta$, получаваме $2\alpha = 100^\circ + 2\beta \iff \alpha = 50^\circ + \beta$ и тъй като $\sphericalangle AED = \alpha$ е външен за $\triangle EBD$, намираме $\sphericalangle BDE = 50^\circ$.

Задача 5. В триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 120^\circ$ са построени ъглополовящите AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че:

а) $A_1C_1 \perp C_1B_1$;

б) $\sphericalangle C_1B_1B = 30^\circ$.

Решение. Външният ъгъл при върха C в дадения триъгълник е равен на $\sphericalangle XCA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \sphericalangle ACC_1$, т.е. CA е ъглополовяща на $\sphericalangle XCE$.



Както в предишните две задачи, спускаме перпендикулярите B_1G, B_1H и B_1F от B_1 към BC, AB и CC_1 и доказваме, че те са равни и C_1B_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle AC_1C$.

Аналогично имаме, че C_1A_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle BC_1C$ и $A_1C_1 \perp C_1B_1$ като ъглополовящи на съседни ъгли.

б) Отново $\sphericalangle AC_1C = 2\alpha$ е външен за $\triangle BC_1C$ с $\sphericalangle ABC = 2\beta$, откъдето $2\alpha = 60^\circ + 2\beta \iff \alpha = 30^\circ + \beta$, а тъй като $\sphericalangle AC_1B_1 = \alpha$ е външен за $\triangle C_1BB_1$, намираме $\sphericalangle C_1B_1B = 30^\circ$.

Друго допълнително построение при ъглополовяща е *да се нанесат равни отсечки на рамената на ъгъла.* Ако е даден $\sphericalangle ABC$ и нанесем $BE = BF$ ($E \in BA$, $F \in BC$), а M е произволна точка от ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$, то $ME = MF$.

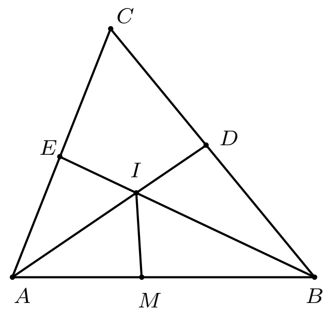
Задача 6. Даден е триъгълникът ABC, в който $\sphericalangle C = 60^\circ$. Ъглополовящите AD и BE се пресичат в точката I. Да се докаже, че $AE+BD = AB$.

Решение. В $\triangle ABC$ с $\sphericalangle A = 2\alpha$, $\sphericalangle B = 2\beta$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ имаме $\alpha+\beta = 60^\circ$. Тогава $\sphericalangle AEB = 60^\circ+\beta$ (външен за $\triangle BEC$) и аналогично $\sphericalangle ADB = 60^\circ+\alpha$. Да построим на страната AB отсечка $AM = AE$. Тогава $\triangle AMI \cong \triangle AEI$, откъдето $MI = EI$ и

$$\sphericalangle AMI = \sphericalangle AEI = 60^\circ + \beta.$$

Изразяваме съседния му ъгъл

$$\sphericalangle BMI = 180^\circ - (60^\circ + \beta) = 60 + \alpha.$$



Тогава $\triangle BMI \cong \triangle BDI$ по втори признак, следователно $BM = BD$ и

$$AE + BD = AM + MB = AB.$$

Забележка. От доказаната еднаквост $\triangle BMI \cong \triangle BDI$ следва и полезното равенство

$$EI = DI,$$

което е в сила за произволен триъгълник с $\sphericalangle C = 60^\circ$ и пресечна точка I на ъглополовящите AD и BE.

Задача 7. На страните AC и BC на триъгълника ABC са избрани съответно точки M и N така, че $\sphericalangle BMN = \sphericalangle ANM = 30^\circ$ и $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BAN + 60^\circ$. Намерете $\sphericalangle ACB$.

Решение. Ако $\sphericalangle BAN = \alpha$, по условие $\sphericalangle ANB = \alpha + 60^\circ$.

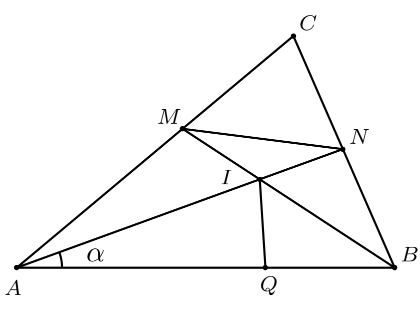
Ако $AN \cap BM = I$, то $\triangle IMN$ е равнобедрен и $IM = IN$, а външният $\sphericalangle BIN = 60^\circ$. От $\triangle NBI$ изразяваме

$$\sphericalangle NBI = 60^\circ - \alpha.$$

От друга страна $\sphericalangle BIN$ е външен за $\triangle ABI$, следователно

$$\sphericalangle ABI = 60^\circ - \alpha.$$

Получихме, че BM е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.



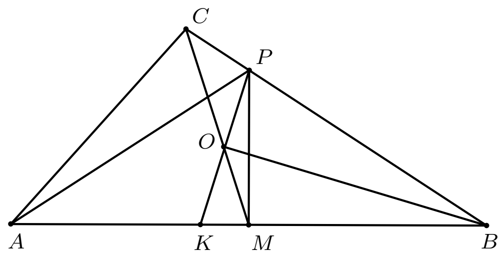
На страната AB нанасяме отсечката $BQ = BN$. Тогава триъгълниците BQI и BNI са еднакви, откъдето $IQ = IN$ и $\sphericalangle BIQ = 60^\circ$. Следователно $\sphericalangle AIQ = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$ и $IQ = IM$, откъдето $\triangle AQI \cong \triangle AMI$. Получихме, че $\sphericalangle QAI = \sphericalangle MAI$, т.е. AI е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$.

Тогава $\sphericalangle C = 180^\circ - 2\alpha - 2(60^\circ - \alpha) = 60^\circ$.

С ъглополовящата е свързано още едно допълнително построение. *Права, перпендикулярна на ъглополовящата на даден ъгъл, отсича от рамената му равни отсечки.* Следващата задача е класически пример, който илюстрира това допълнително построение.

Задача 8. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 90^\circ$ и $\sphericalangle B = 36^\circ$. Ъглополовящата на $\sphericalangle B$ пресича медианата CM в точка O. Докажете, че $BO = AC$.

Решение. През O построяваме права, перпендикулярна на BO. Нека тя пресича BC в точка P и AB в точка K. Тогава $\triangle BKP$ е равнобедрен, $KO = OP$ и $\sphericalangle BKO = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$.



От свойството на медианата към хипотенузата в триъгълника ABC имаме $CM = AM = BM$ и намираме $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle MBC = 72^\circ$ (външен за равнобедрения $\triangle BMC$).

Следователно $\triangle KMO$ е равнобедрен и $OM = OK$. Получихме равенството $OM = OK = OP$, което означава, че е $\triangle KMP$ правоъгълен и $\sphericalangle KMP = 90^\circ$.

Тъй като M е среда на AB и $PM \perp AB$, то PM е симетралата на AB. Следователно $PA = PB$, $\triangle ABP$ е равнобедрен и $\sphericalangle BAP = 36^\circ$. Тогава

$$\sphericalangle CAP = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ = \sphericalangle OBP.$$

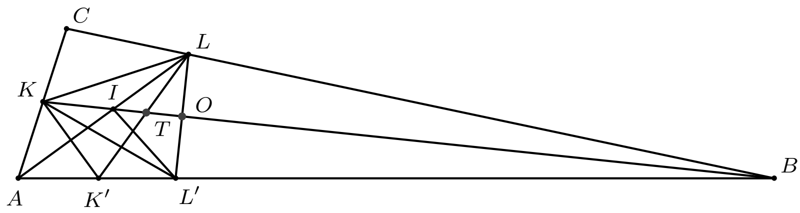
Получаваме, че по втори признак правоъгълните триъгълници APC и OBP са еднакви. Следователно $OB = AC$.

И накрая една олимпийска задача.

Задача 9. В триъгълника ABC са построени ъглополовящите AL и BK. Ако $\sphericalangle ALK = 18^\circ$ и $\sphericalangle BKL = 24^\circ$, да се намерят ъглите на дадения триъгълник.

Решение. Имаме $\sphericalangle C = 180^\circ - 2(18^\circ + 24^\circ) = 96^\circ$.

На страната AB нанасяме $BL' = BL$. Тъй като BK е ъглополовяща, имаме $LL' \perp BK$, $LO = L'O$ ($O = LL' \cap BK$) и $\sphericalangle BKL = \sphericalangle BKL' = 24^\circ$.



По същия начин, нанасяме на страната AB отсечката $AK' = AK$. Тъй като AL е ъглополовяща, имаме $\sphericalangle KLA = \sphericalangle K'LA = 18^\circ$, $KK' \perp AL$ и $\sphericalangle K'KI = 90^\circ - \sphericalangle AIK = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$. Тогава

$$\sphericalangle K'KL' = \sphericalangle K'KI - \sphericalangle BKL' = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ,$$

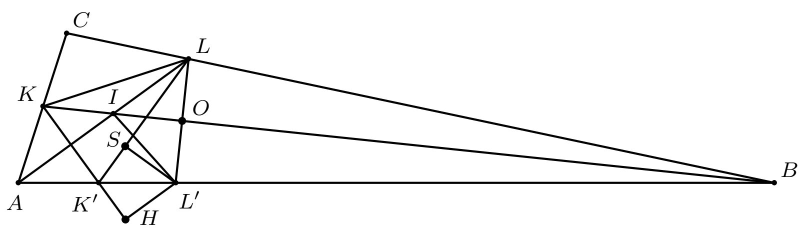
следователно KL' е ъглополовяща на $\sphericalangle BKK'$.

Освен това, ако $T = LK' \cap BK$, имаме

$$\sphericalangle OTL = \sphericalangle K'LA + \sphericalangle TIL = 18^\circ + 42^\circ = 60^\circ,$$

откъдето $\sphericalangle K'LL' = 30^\circ$.

От точка L' да спуснем перпендикуляри към рамената на $\sphericalangle BKK'$. Ако $L'H \perp KK'$, $H \in KK'$, имаме $L'H = L'O = \dfrac{1}{2}LL'$.



Ако $L'S \perp LK'$, $S \in LK'$, от $\sphericalangle L'LS = 30^\circ$ следва, че $L'S = \dfrac{1}{2}LL'$. Следователно $L'S = L'H$, т.е. $K'L'$ е ъглополовяща на $\sphericalangle HK'S$.

Тъй като $\sphericalangle HK'L' = \sphericalangle AK'K = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle A$, а $\sphericalangle SK'L' = 18^\circ + \dfrac{1}{2}\sphericalangle A$, получаваме

$$90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle A = 18^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle A,$$

откъдето $\sphericalangle A = 72^\circ$. Накрая намираме $\sphericalangle B = 12^\circ$.

ТЕСТ

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Задачите от този тест са подбрани от ръкописите на основателя и дългогодишен главен редактор на списание *Математика*, **Руси Русев**.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Дадени са числата $a = \dfrac{36^{\frac{1}{2}}}{9}$, $b = \left(\dfrac{36}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $c = \dfrac{(-2)^2}{3}$. Колко от неравенствата

$$a \geqq c, \quad a \geqq b, \quad b > c$$

НЕ са верни?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

2. Изразът $\left(\sqrt{11} - 2\sqrt{3}\right)^{-1}$ е равен на:

А) $\sqrt{11} + 2\sqrt{3}$ **Б)** $\dfrac{1}{\sqrt{11}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ **В)** $-\sqrt{11} - 2\sqrt{3}$ **Г)** $2\sqrt{3} - \sqrt{11}$

3. Изразът $\dfrac{x-4}{2y+3} : \dfrac{x^2-6x+8}{4y^2-9}$ е тъждествено равен на $\dfrac{2y-3}{x-2}$ при:

А) $y \neq \pm 1,5$ **Б)** $y \neq -1,5,\ x \neq 2$

В) $x \neq 2,\ x \neq 4$ **Г)** $x \neq 4,\ x \neq 2,\ y \neq \pm 1,5$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{4x^2-24x+35}{25-4x^2} \geqq 0$ са:

А) $x \in (-2,5;\ 2,5)$ **Б)** $x \in (2,5;\ 3,5]$

В) $x \in (-2,5;\ 2,5) \cup (2,5,\ 3,5]$ **Г)** $x \in (-2,5;\ 3,5]$

5. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+3x-7=0$, то стойността на израза $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right)^2$ е равна на:

А) $\dfrac{3}{49}$ **Б)** $\dfrac{9}{47}$ **В)** $\dfrac{3}{7}$ **Г)** 2

6. Най-малката стойност на функцията $f(x) = 1 + 2x - x^2$ в интервала $\left[-1,\ \dfrac{2}{3}\right]$ е равна на:

А) -2 **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** 2

7. Корените на уравнението $\sqrt{x-1} = 3 - x$ са:

А) 5 **Б)** 2 **В)** 5 и 2 **Г)** 2

8. Стойността на израза $\log_5 25 - \left(\log_7 7^{-1}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{1}{16}$ е:

А) 2 **Б)** -2 **В)** 1 **Г)** 0

9. Ако $\alpha = 60^\circ$, то стойността на израза

$$A = \frac{\sin\alpha + \cos(\alpha - 15^\circ)}{\cos\alpha}$$

е:

А) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ **Б)** $1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **В)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ **Г)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

10. Ако $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то изразът $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{cotg}^4\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha}$ има стойност:

А) 16 **Б)** 8 **В)** -8 **Г)** -16

11. За аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_9 = 27$. Сумата $a_1 + a_{17}$ е равна на:

А) 50 **Б)** 51 **В)** 52 **Г)** 54

12. Вероятността случайно избрано естествено число от 1 до 15 да не е делител на числото 15 е:

А) $\dfrac{4}{5}$ **Б)** $\dfrac{11}{15}$ **В)** $\dfrac{13}{15}$ **Г)** $\dfrac{1}{2}$

13. Ако $x > 0$, а $y < 0$, то кое от дадените равенства не е вярно?

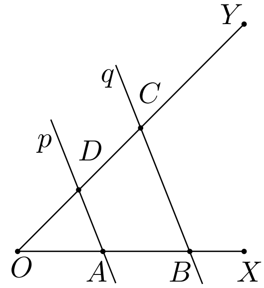
А) $4x^4y^4 = x^2\sqrt{16x^4y^8}$ **Б)** $x^3y = \sqrt{x^6y^2}$

В) $\sqrt{12xy^2} = 2|y|\sqrt{3x}$ **Г)** $3\sqrt{5x^4y^4} = \sqrt{45}x^2y^2$

14. На чертежа раменете на $\sphericalangle XOY$ са пресечени с успоредните прави p и q. Правите p и q пресичат OX съответно в точките A и B, а OY съответно в точките D и C. Ако $OA = 9$, $OB = 15$ и $OD = 6$, то DC е:

А) 3 **Б)** 5

В) 6 **Г)** 4



15. Средната основа на равнобедрен трапец е 45 cm, височината му е 40 cm, а бедрото — 41 cm. Малката основа на трапеца има дължина:

А) 50 cm **Б)** 40 cm **В)** 36 cm **Г)** 30 cm

16. Даден е триъгълникът ABC със страни $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm и $AC = 12$ cm. Отношението, в което центърът на вписаната в триъгълника окръжност разделя ъглополовящата на ъгъл ACB, считано от върха C, е:

А) $2:1$ **Б)** $3:1$ **В)** $3:2$ **Г)** $4:1$

17. В окръжност е вписан $\sphericalangle BAC$, където $AB = 4$, $AC = 2$ и дъгата $\overset{\frown}{BC}$, която не съдържа точката A, е 120°. Радиусът на окръжността е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** $1,5$ **Г)** 1,75

18. В триъгълника ABC страната AB е равна на 16 cm, а височината CH ($H \in AB$) е равна на 8 cm. Отсечката MN ($M \in AC$, $N \in BC$) е успоредна на AB. Окръжност с диаметър MN се допира до AB. Радиусът на окръжността е равен на:

А) 3 cm **Б)** 5 cm **В)** 6 cm **Г)** 4 cm

19. Периметърът на равнобедрен триъгълник е 64 cm, а синусът на ъгъла при основата му е 0,96. По-голямата височина на триъгълника е:

А) 22 cm **Б)** 23 cm **В)** 24 cm **Г)** 25 cm

20. Основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е 8 cm, а ъгълът при основата му е α. Медианата AD ($D \in BC$) е равна на:

А) $2\sqrt{9+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **Б)** $\sqrt{9+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **В)** $3\sqrt{3+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **Г)** $\sqrt{3+\operatorname{tg}^2\alpha}$

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Ако $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, да се намери стойността на $\sin 2\alpha$.

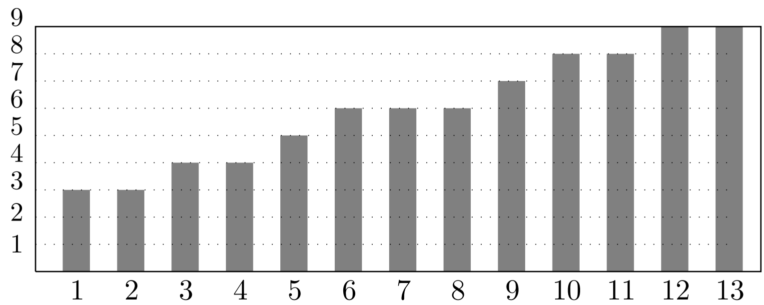
22. Точка се намира на разстояния 20 cm и 12 cm от раменете на ъгъл, равен на 60°, и е вътрешна за него. Да се намери разстоянието от точката до върха на ъгъла.

23. Във вътрешността на прав ъгъл XOY е дадена точката M, разстоянията от която до раменете на ъгъла са равни на 4 cm и 8 cm. Права през точката M отсича от ъгъла триъгълник с лице 100 cm^2. Да се намерят дължините на катетите на триъгълника.

24. Да се намери за коя стойност на x е вярно равенството

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27^{-\frac{2}{3}}.$$

25. Да се намери средната стойност на множеството от данни, представено с диаграмата.



На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. За кои стойности на реалния параметър m корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - (m+5)x + 2m + 3 = 0$ изпълняват условието $(x_1 - x_2)^2 \geqq 12$?

27. Записани са всички четирицифрени числа, по-малки от 7000, в чийто запис участват цифри от множеството $\{0, 3, 5, 7, 8\}$. По случаен начин е избрано едно число. Да се намери вероятността числото да се дели на 5.

28. Около окръжност е описан четириъгълникът $ABCD$. Да се намерят страните BC и CD, ако е дадено, че $AB = 5$, $AD = 12$, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ и $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.

Отговори

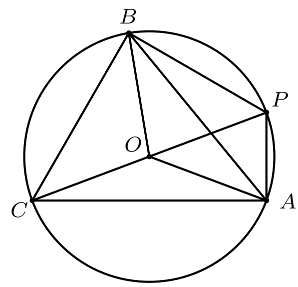
1. В); **2.** В); **3.** Г); **4.** В); **5.** Б); **6.** А); **7.** Б); **8.** Г); **9.** В); **10.** А); **11.** Г); **12.** Б); **13.** Б); **14.** Г); **15.** В); **16.** А); **17.** Б); **18.** Г); **19.** В); **20.** А); **21.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; **22.** $\dfrac{56\sqrt{3}}{3}$; **23.** 10 cm и 20 cm; 40 cm и 5 cm; **24.** $x = 1$; **25.** 6.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 21 ДО 28

21. Намираме $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $\sin 2\alpha = -2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

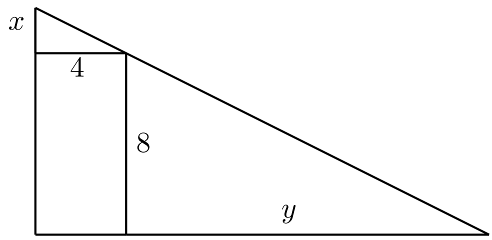
22. Точка P се намира на разстояния $PB = 20$ cm и $PA = 12$ cm от раменете на $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Четириъгълникът $CAPB$ е вписан в окръжност с център O и $\sphericalangle APB = 120^\circ$.
От косинусовата теорема за триъгълника APB имаме

$$AB^2 = 20^2 + 12^2 - 2.20.12\cos 120^\circ = 28^2,$$



т.е. $AB = 28$. От синусовата теорема за триъгълника ABC следва, че $AB = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}$, откъдето $R = \dfrac{28}{\sqrt{3}}$. Оттук разстоянието от точка P до върха C е $CP = 2R = \dfrac{56}{\sqrt{3}}$.

23. Ще използваме означенията на чертежа.



От подобието на правоъгълните триъгълници имаме $\dfrac{x}{4} = \dfrac{8}{y}$, т.е. $xy = 32$.
Лицето на правоъгълния триъгълник с катети и е $\dfrac{1}{2}(x+8)(4+y) = 100$, т.е. $xy + 4x + 8y = 168$. Решенията на получената система са $(x, y) = (2; 16)$ и $(32; 1)$. В първия случай катетите на триъгълника са 10 и 20, а във втория са 40 и 5.

24. Тъй като $27^{-\frac{2}{3}} = 3^{-2}$, уравнението се записва във вида $3^{-2x} = 3^{-2}$ и коренът му е $x = 1$.

25. Средната стойност на представените данни е

$$\frac{2.3 + 2.4 + 5 + 3.6 + 7 + 2.8 + 2.9}{13} = 6.$$

26. От формулите на Виет за даденото уравнение имаме

$$x_1 + x_2 = m + 5 \text{ и } x_1 x_2 = 2m + 3.$$

Тогава

$$(x_1 - x_2)^2 \geqq 12 \iff x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geqq 12 \iff$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 12 \geqq 0.$$

Заместваме $x_1 + x_2$ и x_1x_2 с равните им и получаваме неравенството

$$(m+5)^2 - 4(2m+3) - 12 \geqq 0 \iff m^2 + 2m + 1 \geqq 0 \iff (m+1)^2 \geqq 0.$$

Следователно неравенството $(x_1 - x_2)^2 \geqq 12$ е изпълнено за всяко m.

27. Всяко трицифрено число $\overline{abc}$ с цифри от даденото множество може да се допълни до четирицифрено, като се допише отдясно коя да е от дадените 5 цифри. Когато дописаната цифра е 0 или 5, ще получим число, кратно на 5; т.е. в 2 от 5 случая. Следователно $\dfrac{2}{5}$ от записаните числа са кратни на 5 и търсената вероятност е $\dfrac{2}{5}$.

28. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност, следователно

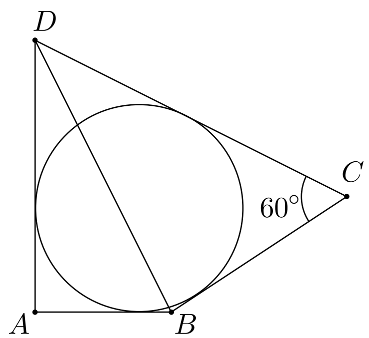
$$AD + BC = AB + CD.$$

От правоъгълния триъгълник ABC намираме

$$BD = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Означаваме $DC = x$ и $BC = y$. Тогава

$$x + 5 = y + 12 \iff y = x - 7.$$



Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle DBC$ и получаваме

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2.BC.CD.\cos 60^\circ \iff$$

$$13^2 = (x-7)^2 + x^2 - 2.x(x-7)\cdot\frac{1}{2} \iff x^2 - 7x - 120 = 0,$$

откъдето намираме $x = 15$. Тогава $y = 8$. Следователно $CD = 15$ и $BC = 8$.

КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Ако $x = -1$ е единият корен на уравнението $x^2 - ax - 2a = 0$, другият е:

А) 2 **Б)** -2 **В)** $-\frac{2}{3}$ **Г)** $\frac{1}{3}$

2. При $x = \frac{2}{3}$ стойността на израза $\frac{(x^2 - x - 2)(x^2 + 5x + 6)}{(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)}$ е:

А) -5 **Б)** $\frac{5}{11}$ **В)** $-\frac{5}{11}$ **Г)** $\frac{1}{5}$

3. Квадратното уравнение $(k + 40)x^2 - 2(k - 20)x + k = 0$ има два различни реални корена, а параметърът k е цяло число. Коя е най-голямата възможна стойност на k?

А) 0 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 20

4. Квадратното уравнение $ax^2 - (a + 3)x + 4 = 0$ има двоен корен. Той е:

А) $\frac{1}{2}$ или 2 **Б)** $\frac{2}{3}$ или 2 **В)** -2 или 1 **Г)** -2 или $\frac{3}{2}$

5. Произведението на корените на уравнението $\frac{x^2}{4} - \frac{3x - 1}{3} = 1$ е:

А) $-8/3$ **Б)** -8 **В)** 4 **Г)** 12

6. За кои стойности на параметъра a корените на уравнението $x^2 - x - a = 0$ удовлетворяват равенството $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 6$?

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** -3

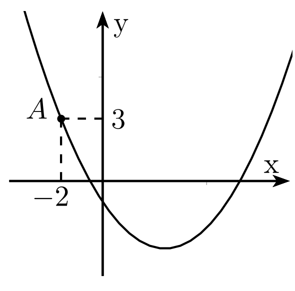
7. Уравнението $x^4 - x^2 + 2014 = 0$ има четири реални корена, означени с $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Колко е $x_1 x_4 + x_2 x_3$?

А) a **Б)** -2014 **В)** $a + 2014$ **Г)** $a^2 - 2014$

8. Решенията на квадратното неравенство $x^2 + 3x + 2 < 0$ са:

А) $(1,\ 2)$ **Б)** $(-2,\ -1)$

В) $(-1,\ 2)$ **Г)** $(-\infty,\ -2) \cup (-1;\ \infty)$



9. Графиката на функцията $f(x) = ax^2 - 6ax - 1$ минава през точката A, отбелязана на чертежа. Стойността на параметъра a е:

А) $-0,5$ **Б)** 2

В) 0,25 **Г)** 1

10. Стойностите на параметъра a, за които уравнението $x^2 - ax + 6a = 0$ има корени $x_1 < 1 < x_2$, са:

А) $(-\infty; -0,2)$ **Б)** $(-0,2;\ 2)$ **В)** $[0;\ 2)$ **Г)** $[24;\ \infty]$

Отговори. 1. А); **2.** А); **3.** Б); **4.** Б); **5.** Б); **6.** А); **7.** А); **8.** Б); **9.** В); **10.** А)

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ЛАГЕР 2017

Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

В есенния математически семинар, проведен от 1 до 5 ноември 2017 в Боровец, взеха участие 66 ученици, постигнали високи резултати в национални математически състезания. Освен че прекараха щастливи и незабравими дни в разходки сред красивата природа, в рамките на семинара учениците взеха участие в поредица от лекции, а също така и в отборните състезания *От 1 до 100*, *Математическа търсачка* и *Математическа рулетка.*

Ето задачите, включени в последното от тези състезания. Опитайте се да ги решите; когато приключите, може да си сравните отговорите с дадените в края на тази статия.

1. Пресметнете $N + P$.

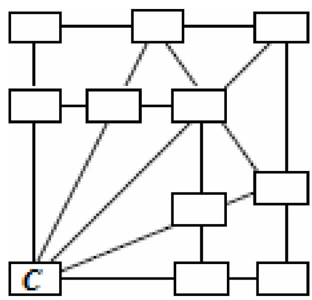
1A. Има N начина да наредим един зад друг Ани, Боби, Вики, Гого и Дани, така че Ани да е някъде пред Гого, а Боби да е някъде след Ани и пред Дани.

1B. Има P четирицифрени числа, в които първата цифра е равна на сбора на другите три цифри.

2. Пресметнете $P + C$.

2A. Пет деца трябва да се наредят в редица за снимка. Всяко от тях може да е мигнало с двете очи или да не е мигнало въобще. Могат да се направят P различни снимки.

2B. Поставете числата от 0 до 10 в полетата на чертежа, така че числата по всяка права линия да имат равни сборове.



3. Пресметнете $M + r$.

3A. С 20 лв. и 17 ст. Мечо Пух може да купи най-много M меденки по 28 ст.

3B. Остатъкът от делението на 3^{2017} с 11 е r.

4. От точно 2017 еднакви кибритени клечки в равнината е построен правоъгълник, разделен на квадратчета със страна по една клечка. Определете възможно най-големия брой на тези квадратчета.

5. Пресметнете $n + x$.

5A. Зайо посреща гости n пъти годишно: само за обяд, и то когато произведението от числата на деня и месеца се дели на 24.

5B. Урна съдържа 3 черни, 4 бѐли и 9 сини топчета; друга съдържа 1 черни, 12 бѐли и 2 сини топчета. Избираме по едно топче от всяка урна. Вероятността сред тях да има бяло е $x\%$.

6. Колко цели числа n изпълняват неравенствата

$$2017 < 20 + 17.n < 7102?$$

7. Пресметнете $x + n$.

7A. В квадрат $ABCD$ със страна 12 cm средите на CD и DA са M и N. Лицето на трапеца, който AC отсича от ΔBMN, е x cm^2.

7B. Равнината може да се разреже с една окръжност и три прави на най-много n части.

Решения

1. Отговор. 234.

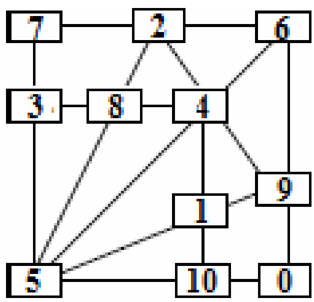
1A. Отговор. 15. Да подредим Боби зад Ани и пред Дани. Сега за Гого има 3 варианта къде да застане (между А и Б, между Б и Д и зад Д). След като сме наредили четиримата, за Вики има пет варианта къде да застане. Така вариантите са $3.5 = 15$.

1B. Отговор 219. Ако първата цифра е a, то разпределянето на сбор a сред другите три позиции се кодира с a букви „Д“ (дай единица на тази позиция) и 2 букви „С“ (премини към следващата позиция). Броят на тези кодове е $\binom{a+2}{2}$. Тогава търсеният брой е

$$\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{11}{2} = \binom{12}{3} - 1 = 219.$$

2. Отговор. 3845.

2A. Отговор. 3840. Има $5.4.3.2.1 = 120$ възможни наредби и $2.2.2.2.2 = 32$ варианта за очите. Получаваме $120.32 = 3840$.



2B. Отговор. 5. Нека числото в долния ляв ъгъл е x, а сборът по всяка права линия е s. Ако съберем всички линии през x, плюс дългия диагонал през x, минус хоризонталните и вертикалните линии, имаме

$2s = 6x$, т.е. $s = 3x$. Събирайки всички линии през получаваме $5s = 4x+55$ и от $s = 3x$ следва $11x = 55$, $x = 5$ и $s = 15$. Нататък всеки разумен подход е успешен. Показано е едно възможно решение.

3. Отговор. 81.

3A. Имаме $2016/28 = 72$.

3B. Имаме $3^5 = 243$, което дава остатък 1, така че 3^{2015} също дава остатък 1. Значи 3^{2017} дава същият остатък като $3^2 = 9$, т.е. 9.

4. Отговор. 938. Ако правоъгълникът има m реда и n стълба ($m \leq n$), клечките са $2mn + m + n = 2017$. Умножаваме по 2 и добавяме 1, за да можем да разложим:

$$4mn + 2m + 2n + 1 = 4035$$

$$(2m + 1)(2n + 1) = 3.5.269.$$

Имаме следните варианти:

$\triangleright$ $2m + 1 = 3$, $2n + 1 = 1345$, $m = 1$, $n = 672$, $mn = 672$;

$\triangleright$ $2m + 1 = 5$, $2n + 1 = 807$, $m = 2$, $n = 403$, $mn = 806$;

$\triangleright$ $2m + 1 = 15$, $2n + 1 = 269$, $m = 7$, $n = 134$, $mn = 938$, което е най-голямо от трите.

5. Отговор. 129.

5A. Отговор. 44. През декември – на всичките 15 четни дати; през юни – на 7 дати, кратни на 4; през март и септември – на 8, 16 и 24; през април и август – на 6, 12, 18 и 24; през февруари и октомври – на 12 и 24; през януари, май, юли и ноември – само на 24. Общо датите са

$$15 + 7 + 2.3 + 2.4 + 2.2 + 4 = 44.$$

5B. Отговор. 85. Вероятността първото да не е бяло е $12/16 = 3/4$, второто $3/15 = 1/5$, а и двете да не са бели е $3/20 = 15\%$. Тогава вероятността да има бяло е 85%.

6. Отговор. 299. Имаме $1997 < 17n < 7082$; $117 < n < 417$, където има 299 цели числа.

7. Отговор. 43.

7A. Отговор. 30. Лицето на половин квадрат е 72, от което са отрязани $72/4 = 18$, $72/6 = 12$, $72/6 = 12$. Остава $72 - 12 - 30 = 30$ (cm^2).

7B. Отговор. 13. Три прави могат да разрежат равнината на най-много 7 части. Окръжността пресича всяка права в най-много две точки, така че се разпада на 6 дъги. Всяка дъга разделя по една част на две, така че частите са най-много $7 + 6 = 13$.

МАТЕМАТИЧЕСКИ КВАДРАТ ...
ЗА АРТИСТИ

Кармелия Михайлова

Кратка предистория

Преподавам в училище по изкуства СУ *Свети Климент Охридски*, Добрич. Учениците ни печелят многобройни награди от конкурси в областта на музиката, танците и изобразителното изкуство. Математиката не е в топ 3, макар да имаме някои успехи на местно и дори на национално ниво. Желанието ми бе да изградим система за по-сериозна подготовка по математика, затова се зарадвах, когато директорката ни, Маргарита Манева, ми предложи да водя клуб по математика за 3. и 4. клас в рамките на проекта *Твоят час.*

Клубът *Математиката – лесна и чудесна* е предназначен за деца с изявени математически интереси. Децата пожелаха да доведат приятели на гости в клуба, гостите останаха за постоянно и така клубът се разрасна. Освен новите знания, които получават, децата работят и в прекрасна обстановка в един от петте нови кабинети, които създадохме по проект за изграждане на Природо-математически корпус с високо-технологични придобивки, спонсориран от фондация *Америка за България.*

За състезанието и победителите

На 25 януари 2018 г. участниците в клуба се включиха в дългоочакваното състезание *Математически квадрат.* Участваха два отбора от 3. клас и три отбора от 4. клас. След оспорвана игра се получи следното класиране.

Първо място: отбор *Талес* – **Весела Лазарова, Стилиян Стоянов** (любител на математически фокуси и автор на математически задачи), **Елияна Илиева** и **Карина Диянова** (4. клас);

Второ място: Отбор *Евклид* – **Хаял Рахми, Даная Драганова, Мария Георгиева** и **Йордан Николов** (4. клас);

Трето място: Отбор *Архимед* – **Яна Вутова** (с втори резултат в Националното класиране на турнира *Иван Салабашев*), **Карина Димитрова, Виктория Тачева** и **Виктор Желязков** (3. клас);

Отбор *Ойлер* – **Нихан Кьосе, Соня Генова** (победител за област Добрич и най-млад участник в Националния конкурс SUPER STEM), **Жанет Генова** и **Гергана Георгиева** (4. клас);

Отбор *Питагор* – **Георги Гочев, Атанас Атанасов, Виктор Димитров** и **Александър Теодоров** (3. клас).

Състезателните задачи

Темата на състезанието включваше 3 аритметични, 3 геометрични и 3 логически задачи. Резултатите се отчитаха в квадрат 3×3, със съответния брой точки и бонуси за ред, диагонал, колона и цял квадрат.[2] Предлагаме ви задачите по теми.

АРИТМЕТИКА

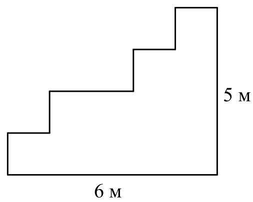
1. Пресметнете $A.B + C$, ако $A = 4 + 6 : (2 + 1 : 1)$, $B = 17 - 7.2$, $C = 9.29 + 9.21$.

2. В записа 2 2 2 2 2 2 2 = 100 да се поставят знаци за аритметични действия така, че да се получи вярно равенство.

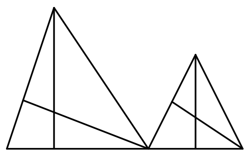
3. Сборът на три числа е 96. Ако от всяко от тях извадим едно и също число, ще получим 12, 24 и 36. Кои са първите три числа?

ГЕОМЕТРИЯ

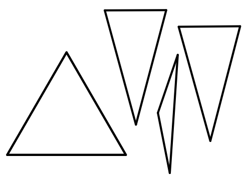
1. Колко метра пътека трябва да се закупи за покриване на стълбището?



2. Колко са триъгълниците на чертежа?

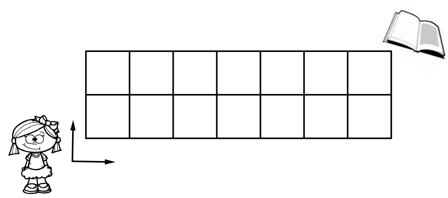


3. Разполагате с показаните на чертежа три равнобедрени и един равностранен триъгълник. Подредете от тях квадрат.



ЛОГИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

1. По колко различни пътища детето може да стигне до книгата, ако е разрешено движение само нагоре или надясно?



2. Ася, Бистра и Вяра имат червено, жълто и оранжево якета. Шапките им са в същите цветове. Само на Бистра цветът на якето и шапката е един

[2] По-подробно за регламента на състезанието може да прочетете в статията *Математически квадрат* от бр. 1/2018.

и същ, а якето и шапката на Ася не са червени. Вяра е с жълта шапка. С какво яке и с каква шапка е всяко момиче?

3. В едно стадо има 50 бели, кафяви и черни агънца. Нито едно агънце не е бяло с кафяво, но 8 са с бял и черен цвят, а две са с черен и кафяв цвят. Ако чисто белите агънца са 22, а кафявите и черно- кафявите са общо 10, намерете колко агънца са чисто черни.

Моменти от хода на състезанието

Емоционалната история на състезанието

Надпреварата мина неусетно с много емоции (от викове на радост до сълзи), с награждаване и почерпка.

Журито (Енислав Енчев, Драгомила Ясенова и Даниела Димитрова от 8. клас) беше невероятно – добронамерено, прецизно и компетентно. Председателят на журито, Енислав, сподели опита си от участие в подобно състезание на национален летен лагер и обясни на отборите някои тактики за победа.

Освен положителната еуфория, за мен най-важни бяха два момента: осмокласниците от журито съжалиха, че с тях не сме организирали такова състезание, а участниците пожелаха да включим в програмата на клуба още един математически квадрат.

Истинско щастие за мен е да работя с тези умни и мотивирани деца, които се стараят много и вече имат положителна нагласа към математика.

за по-малките  задачи

4. клас

16. Карлсон си купил 7 еднакви пакета с кифлички. Той изял кифличките в три от пакетите и му останали 72 кифлички. Колко кифлички е купил Карлсон?

17. В ребуса на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви - различни цифри. Ако К + О + С = 20,

$$К + О + К + О + С = 37, \quad С + О + К + О + Л = 36,$$

колко е С + К + О + К?

18. Децата в математическа школа получили по една лента с числа:

1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	1	2	2	3	3	3

Всяко дете оцветило три поредни квадратчета от своята лента и събрало числата в оцветените квадратчета. Всички получени сборове били различни. Най-много колко са децата в групата?

19. Пипи, Томи и Аника закусили с палачинки. Аника изяла една палачинка по-малко от Томи, а Пипи – толкова палачинки, колкото Томи и Аника заедно. Ако Пипи и Аника са изяли общо 22 палачинки, колко палачинки е изял Томи?

5. клас

20. Да се пресметнат и сравнят A и B.

$$A = 2,1.1\frac{5}{7} - 2,1.\frac{6}{7}, \qquad B = 7,3 \cdot \frac{6}{11} + 3,7.\frac{6}{11}.$$

21. Турист изминал 75% от маршрута си.

а) Колко километра е изминал туристът, ако му остават 2,4 км.?

б) Ако $\frac{1}{6}$ от изминатия път и $\frac{1}{2}$ от предстоящия са изкачване, колко процента от целия път са изкачване?

22. Успоредник има страни 12 cm и 18 cm. Ако една от височините на успоредника е равна на 15 cm, да се намери лицето на успоредника и другата му височина.

23. Кутия без капак е висока 45 cm. Основата на кутията е квадрат със страна 35 cm. Колко квадратни дециметра материал са нужни за изработване на кутията?

6. клас

24. Да се намери произведението на x и y, за които

$$1,7 - x = 7 - 1,7, \qquad y = \frac{-3-2}{-3+2}.$$

25. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-9;0)$, $B(6;0)$ и $C(-1;1)$. Да се намери лицето на триъгълника ABC.

26. Да се намерят неизвестните основи x и y в равенството

$$x^3 = y^2 = (-6)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 4^0.$$

27. Един сандвич е с 2 лв. по-скъп от един сок, а сокът е 3 пъти по-евтин от един шоколад. Два сока, три сандвича и шоколад струват общо 12 лв. Да се намери цената на един сандвич.

7. клас

28. Да се намери:

а) сборът на корените на уравнението

$$(4x-1)^2 = 9.$$

б) произведението на корените на уравнението

$$x^2 - |x-1| = (x-7)(x+7).$$

29. Том може да боядиса ограда за 3 часа, а Хък – за 4 часа. Том боядисвал оградата 5 мин, след което в боядисването се включил и Хък. За колко часа е била боядисана оградата?

30. На страните BC и CD на квадрат $ABCD$ са отбелязани съответно точки E и F така, че FA е ъглополовяща на $\sphericalangle DFE$.

а) Да се докаже, че EA е ъглополовяща на $\sphericalangle FEB$.

б) Да се намери $\sphericalangle EAF$.

за по-малките решения

на задачите от бр. 6/2017

76. През 2017 година на Мими ѝ се роди братче. Интересно е, че нейната година на раждане има същата сума от цифрите, като годината на раждане на братчето ѝ, но е предишната такава. Намерете след колко години Мими ще е точно два пъти по-голяма от братчето си.

Решение. Сборът от цифрите на 2017 е 10 и предишната година със същия сбор е 2008. Мими е с 9 години по-голяма от братчето си и след още 9 години ще е 2 пъти по-голяма от него.

77. Написани са две числа, първо и второ. Към първото прибавяме второто и получаваме трето, към второто прибавяме третото и получаваме четвърто и т.н. Сборът на първите шест числа е 2020. Намерете петото число.

Решение. Нека първото число е a, а второто е b. Първите шест числа са $a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b$, а сборът им е

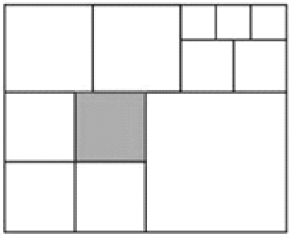
$$8a + 12b = 2020.$$

Като разделим двете страни на горното равенство на 4, получаваме $2a + 3b = 505$, което е точно петото число.

78. На стените на зар са написани числата 6, 7, 8, 9, 10 и 11. Зарът бил хвърлен два пъти. Първия път сумата от числата на четирите му околни стени била равна на 36, а втория път – на 33. Кое число е написано на стената, срещуположна на стената с числото 10?

Решение. Сборът на числата на стените на зарчето е 51. При първото хвърляне на зарчето сборът на числата на горната и долната стена е $51 - 36 = 15$, а при второто е $51 - 33 = 18$. Сборът на числата на третата двойка срещулежащи стени е $51 - (15 + 18) = 18$. Сбор 18 може да се получи по два начина: $10+8 = 11+7$, следователно срещу стената с 10 е записано числото 8.

79. Правоъгълникът на чертежа е разрязан на 12 квадрата. Ако знаете, че оцветеният квадрат има два пъти по-голяма страна от страната на най-малкия и обиколката на правоъгълника е 116 см, намерете страната на най-големия квадрат.



Решение. Нека страната на всяко от трите най-малки квадратчета е $2x$. Двете квадратчета под тях имат страна $(3.2x) : 2 = 3x$, а квадратчетата вляво имат страна $2x + 3x = 5x$. Голямата страна на правоъгълника е $2.5x + 3.2x = 16x$.

По условие страната на оцветения квадрат е $2.2x = 4x$, откъдето страната на най-големия квадрат е $2.4x = 8x$. Малката страна на правоъгълника е $2x + 3x + 8x = 13x$.

Обиколката на правоъгълника е $2.(16x + 13x) = 116$, откъдето $x = 2$. Страната на най-големия квадрат е $8.2 = 16$ см.

80. На права са отбелязани точките A, B, C, D и E, точно в този ред. Една от тях е оцветена в червено, а друга – в синьо, като червената е вляво от синята. Разстоянието между точките A и C е 7 см, между червената точка и B е 8 см, а между синята точка и D е 9 см. Намерете разстоянието между червената и синята точки.

Решение. Червената точка е D, а синята е E и разстоянието между тях е 9 см.

81. Група деца се подредили в редица. Отначало се преброили така: 1, 2, 1, 2, 1, 2, ..., а после така: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... Ако точно 10 деца са казали 2 и при двата начина на броене, намерете колко най-много деца има в тази група.

Решение. Измежду първите 6 поредни деца точно едно казва 2 при двата начина на броене и то е второто. Децата са най-много $10.6 + 1 = 61$.

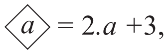
82. Хари и Пепи набрали общо 70 ябълки, круши и сливи, като $\frac{5}{9}$ от набраните плодове от Хари били ябълки, а $\frac{7}{17}$ от плодовете на Пепи били круши. Колко сливи е набрал всеки от тях, ако те двамата са набрали еднакви количества и ябълки, и сливи?

Решение. Броят на плодовете на Пепи се дели на 17; нека е $17x$. Броят на плодовете на Хари се дели на 9; нека е $9y$. Имаме

$$17x + 9y = 70.$$

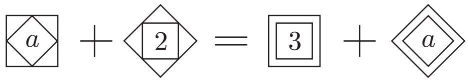
Единствените естествени решения на полученото диофантово уравнение са $x = 2$ и $y = 4$. Следователно Пепи е набрал $17.2 = 34$ плодове, от които 14 са круши, а Хари е набрал $9.4 = 36$ плодове, от които 20 са ябълки. Тогава и Пепи има 20 ябълки, а сливите му са $34 - (14 + 20) = 0$. Следователно Пепи и Хари не са брали сливи.

83. Нека



$$\boxed{a} = 3.a+2.$$

Намерете a, ако



Решение. От условието получаваме

$$3.(2.a + 3) + 2 + 2.(3.2 + 2) + 3 = 3.(3.3 + 2) + 2 + 2.(2.a + 3) + 3,$$

откъдето намираме $a = 7$.

84. Послучай Никулден, деца участвали в състезание по риболов. Уловили много риби. Оказало се, че всички уловени риби, без сафрида, били два пъти повече от всички риби, без чернокопа. Всички уловени чернокопи били два пъти повече от сафрида и цацата, взети заедно. Само Ники, който имал имен ден, успял да улови единствената скумрия. Кои риби били повече – попчетата или цацата?

Решение. Нека са уловени x сафрида и y цаци. Тогава уловените чернокопи са $2(x + y) = 2x + 2y$. Ако броят на всички уловени риби е S, по условие имаме

$$S - x = 2(S - 2x - 2y) \iff S = 3x + 4y.$$

Сафридите, цаците, чернокопите и едната скумрия са общо $3x+3y+1$, значи останалите риби са $S-(3x+3y+1) = 3x+4y-(3x+3y+1) = y-1$. Това означава, че попчетата са най-много $y - 1$ и са по-малко от цацата.

85. Деси, Роси и Михаела често си ходят на гости и винаги използват най-краткия път. В понеделник Деси посетила Роси, след което решила да посети и Михаела и изминала 1335 м. Във вторник Роси посетила Михаела, а след това и Деси и изминала 1513 м, а в сряда Михаела посетила Деси и след това Роси и изминала 1424 м. Ако те се движат цяло число минути с една и съща скорост, която измерена в метри в минута е естествено число и е възможно най-голямото такова, за колко минути Михаела може да обиколи приятелките си и да се върне у дома?

Решение. Най-големият общ делител на $1335 = 3.5.89$, $1513 = 17.89$ и $1424 = 2.2.2.2.89$ е 89 и според условието, момичетата изминават по 89 метра в минута. Обиколката на Михаела ще продължи $(15 + 17 + 16) : 2 = 24$ минути.

86. Тигъра живее между Мечо Пух и Йори, като къщата му е два пъти по-близо до къщата на Мечо Пух, отколкото до къщата на Йори. Мечо Пух тръгнал към Йори. В 12:00 той бил два пъти по-близо до Тигъра, отколкото до дома си, а в 12:40 отново се оказало, че бил два пъти по-близо до Тигъра, отколкото до дома си. Ако Мечо Пух не е спирал по пътя си и се е движил с една и съща скорост, намерете в колко часа е стигнал до Йори.

Решение. Нека разстоянието от дома ма Мечо Пух до дома на Тигъра е x m. Тогава разстоянието от дома ма Мечо Пух до дома на Йори е $3x$ m. До 12:00 часа Мечо Пух изминал $\dfrac{2}{3}x$ m, а до 12:40 изминал $2x$ m. Следователно за 40 минути той е изминал $\dfrac{4}{3}x$ m, което означава, че ще измине оставащите x m до дома на Йори за 30 минути. Мечо Пух е стигнал до Йори в 13:10 часа

87. Колкото и странно да е, ако от двуцифрено просто число извадим двуцифреното число, записано със същите цифри, но в обратен ред (което също е просто), ще получим квадрат на естествено число. Кое е първоначалното число?

Решение. Разликата на числата $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е $9(a - b)$. Тя е точен квадрат; освен това a и b са нечетни цифри и разликата им е четна; следователно $a - b = 4$. С проверка намираме, че търсените числа са 37 и 73.

88. Ако числото b е средното аритметично на числата a и c, а разликата $a - c$ е равна на 6, намерете стойността на израза $ab + bc - ac - b^2$.

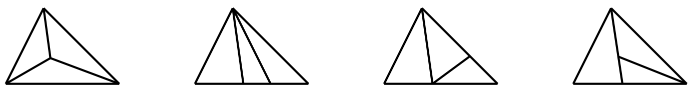
Решение. Заместваме $b = \dfrac{a+c}{2}$ и получаваме

$$ab + bc - ac - b^2 = b(a + c) - ac - b^2 = \frac{a+c}{2} \cdot (a + c) - ac - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(a+c)^2}{4} - ac = \frac{(a-c)^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9.$$

89. Мими разряза един хартиен триъгълник на три други триъгълника. След измерване установи, че първият има ъгли $150°$, $15°$, $15°$, вторият – $130°$, $25°$, $25°$, а третият – $80°$, $50°$, $50°$. Намерете ъглите на първоначалния триъгълник.

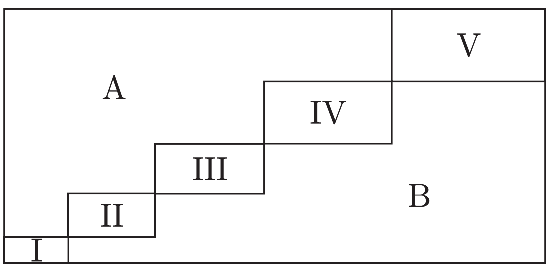
Решение. Триъгълник може да се разреже на три триъгълника по четири начина (с точност до завъртане или преобръщане):



При последните три разрязвания забелязваме, че има ъгъл от един триъгълник, съседен на ъгъл от друг. При дадените мерки може да има само една двойка съседни – ъглите $130°$ и $50°$. Точно една двойка съседни ъгли има само при третото разрязване, но тогава сборът на три ъгъла – по един от всеки триъгълник, трябва да е $180°$. При дадените мерки това не е възможно (проверете).

Следователно Мими е разрязвала по първия показан начин. Сборът от ъглите при вътрешния връх е $150° + 130° + 80° = 360°$, а ъглите на дадения триъгълник са $50° + 15° = 65°$, $50° + 25° = 75°$ и $15° + 25° = 40°$.

90. Във вътрешността на правоъгълник с обиколка 2000 см са начертани пет правоъгълника I, II, III, IV и V, чиито обиколки се отнасят както
$1 : 3 : 5 : 7 : 9$ точно в този ред. Намерете сбора от обиколките на фигурите A и B.



Решение. Сборът на обиколките на правоъгълниците I, II, III, IV и V е равен на обиколката на големия правоъгълник, а сборът от обиколките на фигурите A и B включва обиколката на големия правоъгълник и на правоъгълниците II, III и IV. От даденото отношение намираме, че сборът на обиколките на правоъгълниците II, III и IV е

$$\frac{3+5+7}{1+3+5+7+9}\cdot 2000 = 1200,$$

откъдето сборът от обиколките на A и B е $1200 + 2000 = 3200$ cm.

Решения на задачите от бр. 1/2018

1. Ели дала половината от бонбоните си и още 5 бонбона на сестра си. След това Бонбонената фея удвоила броя на останалите бонбони. Ели изяла 6 бонбона и половината от останалите. Последните два бонбона дала на сестра си. Колко бонбона имала Ели отначало?

Решение. Като започнем от края, намираме, че бонбоните в началото са били $((2.2+6):2+5).2 = 20$.

2. Десет ученици получили петици и шестици на тест. Общият сбор на получените оценки е 53. Колко от учениците са получили шестици?

Решение. Шестици са получили $53 - 10.5 = 3$ ученици.

3. От 101 далматинци 60 имат черно петно на лявото ухо, 50 имат черно петно на дясното ухо, а 20 имат бели уши. Колко от кучетата имат черни петна и на двете си уши?

Решение. Броят на далматинците с черни петна и на двете си уши е $60 + 50 + 20 - 101 = 29$.

4. В книгата на професор Дъмбълдор са номерирани всички нечетни страници: $1, 3, 5, \ldots$ За номерация са използвани 128 цифри. Коя е последната номерирана страница? Колко страници има книгата?

Решение. Нечетните едноцифрени страници са 5, а нечетните двуцифрени числа са 45 и се записват с 90 цифри. Остават $128-(5+90) = 33$ цифри, с които се записват 11 трицифрени числа. Единадесетото нечетно трицифрено число е $101 + 10.2 = 121$. Последната номерирана страница е 121, а книгата има 122 страници.

5. Квадрат и правоъгълник имат равни лица. Обиколката на квадрата е 2,4 дм. Дължината на правоъгълника е с 3 см по-голяма от страната на квадрата. Намерете широчината на правоъгълника и неговата обиколка.

Решение. Страната на квадрата е 6 см, а дължината на правоъгълника е 9 см. Широчината на правоъгълника е $(6.6) : 9 = 4$ см, а обиколката му е 26 см.

6. Турист изминал маршрут от 30 км за три дни. Първия ден изминал 32% от маршрута си, а през втория ден – 45% от останалия път. Колко километра е изминал туристът през третия ден?

Решение. Първия ден туристът изминал $32\%.30 = 9,6$ км, през втория ден $45\%(30 - 9,6) = 9,18$ км, а през третия ден
$$30 - (9,6 + 9,18) = 11,22 \text{ км.}$$

7. От 20 далматинци 9 имат черно петно на лявото ухо, 12 имат черно петно на дясното ухо, а 3 имат бели уши. Колко процента от далматинците имат черни петна и на двете си уши?

Решение. Далматинците имат черни петна и на двете си уши са $9 + 12 + 3 - 20 = 4$, т.е. $4 : 20 = 20\%$ от всички далматинци.

8. Двама братя спестили 56 лв. Колко лева има всеки от тях, ако $\frac{1}{3}$ от парите на по-големия са колкото $\frac{1}{4}$ от парите на по-малкия?

Решение. Нека $\frac{1}{3}$ от парите на по-големия са x лв., както и $\frac{1}{4}$ от парите на по-малкия са x лв. Тогава големият има $3x$ лв., а малкият има $4x$ лв. Общо двамата имат $7x$ лв., което е 56 лв. Оттук $x = 8$ и те имат съответно 24 лв. и 32 лв.

9. Конус от сладолед има радиус 2 cm и височина 8 cm. Колко е радиусът на сладоледено кълбо със същия обем?

Решение. Обемът на телата е $\frac{1}{3}.2^2.8 = \frac{4}{3}.R^3$, откъдето радиусът на кълбото е $R = 2$ cm.

10. Намерете апотемата на правилна четириъгълна пирамида с височина 3 cm, лице на околната повърхнина 80 cm^2 и обем 64 cm^3.

Решение. Обемът на пирамидата е $64 = \frac{1}{3}.a^2.3$, откъдето намираме основния ръб $a = 8$ cm. Тогава околната повърхнина е $80 = 4.\frac{1}{2}.8.k$ и апотемата е $k = 5$ cm.

11. Ако $3,2 + x = -\frac{3}{2}$, а $(2 - y) : |-10| = x$, пресметнете $x + y$.

Решение. Намираме $x = -4,7$, $y = -45$ и пресмятаме $x + y = -49,7$.

12. Сборът на целите числа, по-големи от -10 и по-малки от 5, е равен на сбора на целите числа, по-големи от -19 и по-малки от X. Намерете X.

Решение. Сборът на целите числа, по-големи от -10 и по-малки от 5, е равен на $-9-8-\cdots-1+0+1+\cdots+4=-9-8-7-6-5=-35$. Тъй като $-18-17=-35$, то $X=-16$.

13. За коя стойност на параметъра a коефициентите пред x и x^2 в нормалния вид на многочлена $(2x+a)(x-3)-(x-2)^3$ са равни?

Решение. Коефициентът пред xв нормалния вид на дадения многочлен е $a-18$, а коефициентът преди x^2 е 8. Те са равни при $a=26$.

14. Даден е триъгълникът ABC, в който $\sphericalangle C=60^\circ$. Ъглополовящите AD и BE се пресичат в точката I. Точката F от страната AB е такава, че $BD=BF$.

а) Намерете $\sphericalangle AIB$.

б) Докажете, че $\triangle BDI\cong\triangle BFI$ и намерете $\sphericalangle AIF$.

в) Докажете, че $\triangle AEI\cong\triangle AFI$ и $AE+BD=AB$.

Решение. а) $\sphericalangle AIB=90^\circ+\dfrac{1}{2}.60^\circ=120^\circ$.

б) От $BD=BF$, $\sphericalangle FBI=\sphericalangle DBI$ и BI – обща, следва, че по първи признак $\triangle BDI\cong\triangle BFI$. Тъй като $\sphericalangle BID=180^\circ-\sphericalangle AIB=60^\circ$, от еднаквостта следва, че $\sphericalangle FIB=60^\circ$ и намираме

$$\sphericalangle AIF=\sphericalangle AIB-\sphericalangle FIB=60^\circ.$$

в) От $\sphericalangle AIF=\sphericalangle AIE=60^\circ$, $\sphericalangle FAI=\sphericalangle EAI$ и BI – обща, следва, че $\triangle AIF\cong\triangle AIE$ по втори признак. Оттук $AE=AF$, а по условие имаме $BD=BF$. Следователно

$$AE+BD=AF+BF=AB.$$

15. Ученик планира да реши определен брой задачи, като 10 дни решава по x задачи на ден. Два дни той решавал планираните задачи, след което започнал да решава с по 2 задачи на ден повече от предвиденото. Затова решил всички задачи един ден по-рано от поставения срок. Намерете x и определете общо колко задачи е решил ученикът.

Решение. Планираният брой задачи е $10x$. През първите 2 дни ученикът е решил $2x$ задачи, а за следващите $10-2-1=7$ дни е решавал по $x+2$ задачи на ден и е решил $7(x+2)$ задачи. От уравнението

$$10x=2x+7(x+2)$$

намираме $x=14$. Ученикът е решил 140 задачи.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 1/2018 г.

1. В; **2.** В; **3.** Б; **4.** В; **5.** Б.

6. а) След повдигане в квадрат се получава уравнението

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

с корени 1 и 4, от които с проверка се вижда, че само вторият е истински.

б) Ако $f(x) = a^2x^2 - (4a+1)x + 4$, уравнението е равносилно на системата

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ ax - 2 \geq 0. \end{array} \right.$$

При $a \neq 0$ тя има единствено решение, ако числото $\dfrac{2}{a}$ е между корените на уравнението ѝ, т. е. $f\left(\dfrac{2}{a}\right) < 0$, откъдето $a > 0$.

Това е отговорът на б) макар, че без разглеждане на случаите

$$D = 8a + 1 = 0 \ \text{ и } \ x = \frac{1 - \sqrt{8a+1}}{2a} = 0$$

решението не е пълно.

Друг начин за достигане до отговора е чрез заместване на корените на уравнението $f(x) = 0$ в неравенството на системата.

7. Да означим за краткост $CN = m$. Тогава

$$m = \frac{2}{k+1}, \ \text{ а } \ BN = \frac{2k}{k+1}.$$

а) Разглеждането на произведението на исканите лица води до изследването на функцията $y(k) = \dfrac{k}{(k+1)^2}$ при $k \geq 0$. С помощта на производната ѝ се вижда, че най-голямата ѝ стойност се достига при $k = 1$, т. е. когато N е среда на BC.

б) Да означим за краткост $\sphericalangle MAN = \varphi$ и $\sphericalangle BAN = \alpha$. Тогава $\varphi = 45^\circ - \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{km}{4}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4 - km}{4 + km} = \dfrac{k+2}{3k+2}$.

в) Трябва всъщност да се докаже, че

$$\frac{k+2}{3k+2} > 2-\sqrt{3},$$

което непосредствено се свежда до очевидно неравенство.

Ъгълът φ е 30°, ако $\dfrac{3k+2}{k+2}=\sqrt{3}$, т. е. $k=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

8. а) Да означим за краткост споменатия ъгъл с φ. Ако $DT \perp AM$, $(T \in AM)$, то и $KT \perp AM$ (защо?) и тогава $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{DK}{DT}$. Стандартно се вижда, че $DT = \dfrac{4m}{\sqrt{5}}$ и сега $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

б) Нека правите AM и CD се пресичат в точката Q, а правите CE и KQ – в точката N. Тогава сечението е четириъгълника $AMNK$. Ако точката P е проекцията на N в равнината $ABCD$, то $P \in CD$ и сечението се проектира в четириъгълника $AMPD$ с лице $\dfrac{8}{3}m^2$. Тогава

$$S_{AMNK} = \frac{S_{AMPD}}{\cos\varphi} = 4m^2.$$

в) Търсеното разстояние очевидно е DT.

Редакцията на списанието се извинява за допуснатите грешки в задачите на стр. 73 от брой 1/2018 г. Коректните условия са следните:

Тема 1. Алгебра

Задача 1. Намерете сбора от корените на уравнението $(2x-1)^2-9=0$.

Задача 2. Намерете произведението от корените на уравнението

$$|x|+5x=5(x+2).$$

Задача 3. Намерете стойността на израза

$$B=(3x-2)^3-3x\,(3x+1)\,(3x-1)-(x+3)(x-2), \text{ ако } x=\frac{37^2-35^2}{20^2-16^2}.$$

Тема 2. Геометрия

Задача 1. В триъгълник ABC $\alpha:\beta:\gamma=5:6:7$ и AL е ъглополовяща. Ако $LQ||AB$ $(Q \in AC)$, намерете ъглите на триъгълник ALQ.

Задача 3. В $\triangle ABC$ ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$ се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 30^\circ$, намерете големината на $\sphericalangle ACB$.

И Н Ф О Р М А Т И К А   В   НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Софтуерно инженерство“

Подготвя специалисти по разработването и поддържането на надежден и ефективен софтуер за цялата област на компютърните приложения. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни инженери в организации и фирми, свързани с проектиране и разработка на софтуер, аналитици, проектанти, разработчици, специалисти по контрола на качеството, консултанти в бизнес организации или в публичната администрация, преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и други.

Бакалавърска програма „Статистика“

Подготвя аналитични специалисти с умения за прилагане на методите на математическата статистика, съчетани със задълбочена подготовка по математика и информационни технологии. Учебният план осигурява фундаментални познания по основните дисциплини, свързани със стохастиката. Реализация като статистици, актюери в банки и застрахователни компании, консултанти и експерти в научни институти, преподаватели във висши учебни заведения и други.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 01.03.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.