математика

БРОЙ 3
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

за кандидат ¿? студенти

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Ако $\log_2 x = a$, то изразът

$$\log_2 x - 1 - \frac{1}{\log_{0.5} x}$$

е равен на:

А) $\dfrac{1-a+a^2}{a}$ **Б)** $\dfrac{a}{a-1-a^2}$ **В)** $\dfrac{2+a-a^2}{a}$ **Г)** $\dfrac{a-1-a^2}{a}$

Задача 2. (1 т.) Решенията на уравнението $\sin x + \cos x = 2$ са:

А) $k\pi$ **Б)** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ **В)** $2k\pi$ **Г)** няма решение

Задача 3. (1 т.) Дефиниционното множество на функцията

$$f(x) = \sqrt{2^x(3-2^x) - 2}$$

е:

А) $[-1, 1]$ **Б)** $[0, 1]$ **В)** $(0, 1)$ **Г)** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

Задача 4. (1 т.) В $\triangle ABC$ $AB = c$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Ако O е пресечната точка на ъглополовящите му, радиусът на описаната около $\triangle ABO$ окръжност е равен на:

А) $c \sin \dfrac{\gamma}{2}$ **Б)** $\dfrac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$ **В)** $\dfrac{c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$ **Г)** $\dfrac{c}{2} \cos \gamma$

Задача 5. (1 т.) Основата на пирамида с обем 2 е правоъгълен триъгълник с катети 3 и 4. Околните стени сключват с основата един и същи ъгъл, който е равен на:

А) 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 75°

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията

$$f(x) = \operatorname{tg} x \, \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} x \, \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

а) (1 т.) Ако означим $y = \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}$, $y \neq 0$, да се изрази $f(x)$ като функция на y.

б) (2 т.) Да се реши уравнението $f(x) = \dfrac{10}{3}$.

в) (2 т.) Да се определи числото c така, че функцията

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{за} \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ c & \textit{за} \quad x = 0 \end{cases}$$

да е непрекъсната в точката $x = 0$.

Задача 7. (5 т.) Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Допирателната в точката C към описаната около ABC окръжност пресича за втори път окръжностите с диаметри AC и BC съответно в точките P и Q.

а) (1 т.) Да се докаже, че $CP = CQ$.

б) (2 т.) Да се докаже, че $\triangle ACP \sim \triangle ABC$ и да се изрази PQ чрез катетите $BC = a$ и $AC = b$.

в) (2 т.) Нека лицето на триъгълника ABC е S. Да се намери дължината на AB, при която периметърът на четириъгълника $ABQP$ е най-малък.

Задача 8. (5 т.) Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с околен ръб $AA_1 = 3$. Точката P е от AA_1 и го дели в отношение $1 : 2$. Ъгълът между правата PC_1 и равнината ABB_1A_1 е 30°.

а) (1 т.) Ако точката M е средата на A_1B_1, да се докаже, че $PM \perp C_1M$.

б) (2 т.) Да се пресметне основният ръб на призмата $ABCA_1B_1C_1$.

в) (2 т.) Нека CH е височина в триъгълника ABC ($H \in AB$). Да се намери косинусът на ъгъла между равнините (PMC_1) и (PCH).

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ, 8.–12. КЛАС

Станислав Харизанов, Ивайло Кортезов, ИМИ–БАН

На 29–31 март 2019 г. във Варна се проведоха Пролетните математически състезания за ученици от 8.–12. клас.

Най-добри резултати в своята възрастова група постигнаха:

8. клас		
Цветелина Илиева	ППМГ, Бургас	I място
Иван Тагарев	СМГ	II място
Божидар Димитров	ПМГ, Силистра	III място
Ивайла Радкова	125 СУ, София	III място
Илияс Башир Номан	СМГ	III място
Иванина Кошничарова	ППМГ, Бургас	I награда
Никола Цачев	ПЧМГ	I награда
Велина Йорданова	ППМГ, Бургас	II награда
Йово Йовчев	ПЧМГ	II награда
Атанас Димитров	СМГ	III награда
Жара Еленска	ПМГ, Велико Търново	III награда
Петър Ивановски	Американски колеж, София	III награда
9. клас		
Борислав Кирилов	ПЧМГ	I място
Мартин Копчев	ПМГ, Габрово	I място
Валери Ванков	Американски колеж, София	III място
Десислава Николова	СМГ	III място
Милко Бакалов	СМГ	I награда
Веселина Иванова	ППМГ, Бургас	II награда
Георги Петков	СМГ	III награда
10. клас		
Михаела Гледачева	ПЧМГ	I място
Светлин Лалов	СМГ	I място
Къонг Виет До	СМГ	III място
Стефан Хаджистойков	СМГ	III място
Мартин Стефанов	СМГ	I награда
Маргарита Стефанова	СМГ	II награда
Виктор Василев	СМГ	III награда
Диян Димитров	СМГ	III награда
Калоян Фачиков	СМГ	III награда
Ралица Симова	ППМГ, Бургас	III награда

11. клас		
Евгени Кайряков	СМГ	I място
Кристиан Минчев	ППМГ, Бургас	I място
Мартин Германов	СМГ	I място
Александър Милчев	НПМГ	I награда
Виктор Балтин	ППМГ, Бургас	I награда
Добрин Бараков	МГ, Плевен	I награда
Иво Петров	СМГ "Паисий Хилендарски"	I награда
Йоан Минев	СМГ	I награда
Алек Димитров	ПЧМГ	II награда
Димитър Опърлаков	МГ, Варна	II награда
Ралица Андреева	МГ, Варна	II награда
Димитър Христов	СМГ	III награда
12. клас		
Борислав Антов	СМГ	I място
Кристиян Василев	ПЧМГ	II място
Иво Зерков	СМГ	III място
Орлин Кучумбов	ППМГ, Бургас	III място
Борис Барбов	СМГ	I награда
Люба Конова	СМГ	I награда
Пламен Иванов	СМГ	I награда
Александра Савова	СМГ	II награда
Богдан Симеонов	ПЧМГ	II награда
Никола Янакиев	СМГ	II награда

Предлагаме ви условията на задачите с отговори и кратки решения.

УСЛОВИЯ

8. КЛАС

Задача 8.1. Дадено е уравнението $(p-6)x^2+2px-p=4$, където p е реален параметър.

а) За кои стойности на p уравнението има точно един реален корен?

б) За кои стойности на p уравнението има два различни реални корена x_1 и x_2, за които

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{27}{2}}$$

и всички участващи тук изрази са реални числа? Запишете всяка намерена стойност на p като несъкратима дроб.

Задача 8.2. Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките M и N. През точка $A \in k_1$, външна за k_2, са построени правите AM и AN, които пресичат k_2 за втори път в точки B и C, така че M е между A и B, а N е между A и C. През точка D от дъгата BM на k_2, несъдържаща N, са построени правите DM и DN, които пресичат k_1 за втори път в точките E и F, така че M е между D и E, а N е между D и F. Ако $AB = ED$ и $AC = FD$, докажете, че MN е симетрала на отсечката AD.

Задача 8.3. Една или повече монети, поставени една върху друга, ще наричаме кула. Във всяко поле на дъска 5×7 отначало има кула от по една монета. На всеки ход някоя монета прескача кула, намираща се в съседно (по страна или диагонал) поле и застава на същото разстояние от другата ѝ страна (евентуално върху друга кула). След няколко хода на дъската имало k кули.

а) Намерете най-малката възможна стойност на k, ако е разрешено да се правят произволен брой ходове.

б) Намерете най-малкия брой ходове, с които може да се постигне намерената минимална стойност на k.

Задача 8.4. Да се реши в прости числа уравнението

$$p^2 - q^4 - r^4 - s^4 = 374.$$

9. КЛАС

Задача 9.1. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 1 - a \\ xy = a^2 - a - 3 \end{array} \right. ,$$

където a, x, y са реални числа. Да се намери най-малката стойност на израза $x^2 + y^2$ и стойностите на a, за които тя се достига.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и нека точка D е средата на дъгата AC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, несъдържаща точка B. Нека точка P е проекцията на D върху правата AB, а точка M е средата на DP. Правата през P, перпендикулярна на BM, пресича правата BC в точка N. Да се докаже, че $\sphericalangle NDB = 90^\circ$.

Задача 9.3. Нека n е естествено число и $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ са всички естествени делители на $n! + 1$. Да се намерят всички n, за които

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{n! + 1}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n! + 1}} + \cdots + \frac{1}{d_m + \sqrt{n! + 1}} = \frac{3}{142}.$$

Задача 9.4. В държавата Кръгландия всичките 2019 града са разположени последователно през 1 км. върху единствения междуградски път в държавата, който има формата на окръжност и е с дължина 2019 км. Множество от 673 града ще наричаме *добро*, ако разстоянието между никои два от градовете не е нито 3 км. нито 673 км. (разстояние между два града е равно на дължината на по-късата дъга, която двата пътя отсичат от междуградския път). Да се намери броят на добрите множества от градове в Кръгландия.

10. КЛАС

Задача 10.1. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB. Означаваме с P проекцията на M върху страната BC ($P \in BC$), а с N средата на MP. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако е известно, че $AP \perp CN$ и $AP : CN = 2\sqrt{3}$.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$a - 4^x = \sqrt{a + 2^x}$$

има решение.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Едно множество A от естествени числа се нарича *свободно*, ако за всеки две числа $a \in A$ и $b \in A$ (не непременно различни) числото ab не е от A. Да се намери най-малкото естествено число n, за което множеството $M = \{3, 4, 5, \ldots, 3^{14} - 1\}$ може да се представи като обединение на n две по две непресичащи се *свободни* множества.

11. КЛАС

Задача 11.1. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} \lg^2\left(\dfrac{x^2+x}{y}\right) = \lg^2\left(\dfrac{y^2+y}{x}\right) + \lg^2(x+1)(y+1) \\ \lg(x+6) = \lg(x-y) + \lg(y+1). \end{array} \right.$$

Задача 11.2. Нека a е реален параметър. Какъв е минималният брой цели решения на неравенството:

$$\frac{2x^2 + (3a^2+1)x - 2a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2+a-3)x - a^2 + 2a - 3} < 1?$$

Задача 11.3. Диагоналите AC и BD на вписан четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка L. Правите AD и BC се пресичат в точка M, а правите AB и CD се пресичат в точка N. Ъглополовящата на ъгъл ALD пресича страните AD и BC съответно в точки P и Q, а ъглополовящата на ъгъл ALB пресича страните AB и CD съответно в точки K и T. Да се докаже, че описаните окръжности около $\triangle MPQ$, $\triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ имат обща точка.

Задача 11.4. Виж задача 10.4.

12. КЛАС

Задача 12.1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AC = BC$, $BD = 2AD$ и $AB = AE$, където $E = AB \cap CD$. Да се намери отношението $\dfrac{AB.CD}{AD.BC}$.

Задача 12.2. Да се намерят всички естествени числа n и всички реални числа a, за които следният израз не зависи от x :

$$\sin^n(x-a).\sin^n x + \sin^n x.\sin^n(x+a) + \sin^n(x+a).\sin^n(x-a).$$

Задача 12.3. За дадено нечетно число $n \geq 3$ да се намери най-малкото реално число m_n със следното свойство: всеки n положителни реални числа със сума 1 могат да се разположат по окръжност така, че произведението на всеки две съседни числа да не надминава m_n.

Задача 12.4. В една държава има $n \geq 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни шосета. Броят на всички шосета е $2019n$ и всяко от тях има дължина, която е естествено число.

Област с център град A ще наричаме двойка (V, R) от градове и шосета в държавата, за които:

1. използвайки шосетата само от R може да се стигне от всеки град от V до всеки друг от V ;

2. общата дължина на шосетата от R е възможно най-малка, така че 1. да е в сила.

3. броят на шосета извън R, които свързват A с V е положително число, кратно на 101.

Да се докаже, че има области (V_1, R_1) и (V_2, R_2) с общ център A, така че $R_1 \subsetneq R_2$ и разликата на сумарните дължини на шосетата в R_1 и R_2 се дели на 9.

РЕШЕНИЯ

8.1. а) При $p = 6$ уравнението е линейно и има единствен корен.

Нека $p \neq 6$. Сега е необходимо $D' = p^2 + (p-6)(p+4) = 0$, т.е. $2p^2 - 2p - 24 = 0$, чиито корени са $p = 4$ и $p = -3$.

б) Необходимо е дискриминантата да е положителна, което ще проверим по-късно за намерените стойности на p. Всичко написано по-нататък е валидно при предположението, че стойностите на p са подходящи да осигурят това. От формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{6-p} \text{ и } x_1x_2 = \frac{p+4}{6-p}.$$

Ако $p > 6$, то $6-p < 0$, $p+4 > 0$, така че x_1 и x_2 са с различни знаци и $\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}$ не е реално число. Последното е в сила и при $p < -4$, понеже $6 - p > 0$ и $p + 4 < 0$. От друга страна, ако $p \in (-4; 6)$, то $6 - p > 0$, $p + 4 > 0$ и (при направената в началото уговорка) участващите изрази са реални. Имаме

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1x_2}}.$$

Ако $p \in (0; 6)$, то $x_1 + x_2 > 0$, така че $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{2p}{6-p} : \sqrt{\frac{p+4}{6-p}} = \frac{2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

Ако $p \in (-4; 0)$, то $x_1 + x_2 < 0$, така че $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{-2p}{6-p} : \sqrt{\frac{p+4}{6-p}} = \frac{-2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

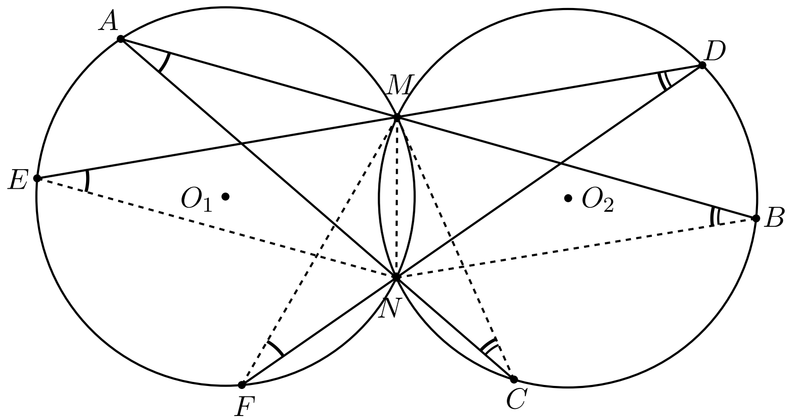
И в двата случая получаваме

$$\frac{4p^2}{(p+4)(6-p)} = \frac{27}{2}, \quad 8p^2 = 27(p+4)(6-p), \quad 35p^2 - 54p - 27.24 = 0.$$

Имаме $D = 54^2 + 4.35.27.24 = 18^2(3^2 + 35.8) = 18^2.17^2$, при което $p_{1,2} = \dfrac{54 \pm 306}{70}$ и $p_1 = \dfrac{36}{7}$ (тогава $x_1 > 0$, $x_2 > 0$); $p_2 = -\dfrac{18}{5}$ (тогава $x_1 < 0$, $x_2 < 0$).

Остава да се убедим наистина ли $D' > 0$ при намерените стойности на p. При $p = \dfrac{36}{7}$ имаме $D' = \dfrac{912}{49} > 0$. При $p = -\dfrac{18}{5}$ имаме $D' = \dfrac{228}{25} > 0$.

8.2. Имаме $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MEN = \sphericalangle MFN$ като вписани в k_1 и измерващи се с половинката от дъгата MN. Аналогично $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MDN = \sphericalangle MCN$ и от $AB = ED$ и $AC = FD$ получаваме $\triangle ABN \cong \triangle EDN$ и $\triangle ACM \cong \triangle FDM$.



Следователно $AN = EN$ и $AM = MF$.

От $AN = EN$ следва $\sphericalangle NAE = \sphericalangle NEA$. Имаме $\sphericalangle NAE = \sphericalangle EMN$ като вписани и измерващи се с половинката от дъгата EN и аналогично $\sphericalangle NEA = \sphericalangle NMB$, т.е. $\sphericalangle EMN = \sphericalangle NMB$.

От $AM = FM$ следва $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MFA$. Имаме равенствата на вписаните ъгли $\sphericalangle MFA = \sphericalangle MNA$ и $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MND$, т.е. $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MND$.

Сега по втори признак $\triangle ANM \cong \triangle DNM$, т.е. $AN = DN$ и $AM = DM$ и MN е симетрала на отсечката AD.

Забележка. Ако означим центровете на окръжностите с O_1 и O_2 съответно, то получаваме, че $\sphericalangle MO_1N = 2\ \sphericalangle MAN = 2\ \sphericalangle MDN = \sphericalangle MO_2N$, т.е. $\triangle MO_1N \cong \triangle MO_2N$ и следователно окръжностите k_1 и k_2 са с равни радиуси.

8.3. Да оцветим таблицата както следва:

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

При ходове монетите не променят цвета на полетата си, така че винаги ще има кула на поне по 1 поле от всеки цвят. Можем да постигнем $k = 4$ например като първо изпразним 20-те полета по външната рамка (като всяка монета прескача най-близката съседна от по-вътрешната рамка), после 9 от полетата на тази по-вътрешна рамка, оставяйки кули само в правоъгълник 2×3, и накрая изпразним и десните две полета в него, оставяйки кули само в квадрат 2×2.

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 1 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 6 полета от цвят 1 са нужни общо поне 5 хода, или общо поне $3.3 + 5 = 14$ хода.

За събиране на деветте монети от цвят 2 са нужни общо поне 8 хода.

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 3 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 4 полета от цвят 3 са нужни общо поне 3 хода, или общо поне $2.3 + 3 = 9$ хода.

За събиране на шестте монети от цвят 4 са нужни общо поне 5 хода.

И така, нужни са общо поне $14 + 8 + 9 + 5 = 36$ хода. Те може да са както описаните в началото. Наистина, там ходовете са 20 за полетата от външната рамка, плюс 9 за частта от втората рамка, плюс $1 + 6 = 7$ за последните две полета (в едно от тях при първата фаза се е струпала кула от 6 монети), или общо $20 + 9 + 1 + 6 = 36$ хода.

8.4. Нека първо считаме, че $q \geq r \geq s$. Явно $p > 2$, т.е. p е нечетно. Тогава сред q, r, s трябва да има едно или три нечетни. Ако има едно, то лявата страна се дели на 4, а дясната – не: абсурд. Следователно всички числа са по-големи от 2. Да допуснем, че $s > 3$. Тогава лявата страна дава остатък 1 при деление на 3, а дясната – остатък 2: абсурд. И така, $s = 3$. Уравнението добива вида

$$p^2 - q^4 - r^4 = 455.$$

Да допуснем, че $r > 5$. Тогава дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $r = 5$. Уравнението добива вида

$$p^2 - q^4 = 1080.$$

Да допуснем, че $q = 5$. Тогава $p > 5$ и дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $q > 5$. Понеже $p > q^2$, то $p \geq q^2 + 2$ и

$$1080 = p^2 - q^4 \geq (q^2 + 2)^2 - q^4 = 4q^2 + 4.$$

Оттук $q^2 \leq 1076 : 4 = 269$, т.е. $q < 17$. Остава да проверим $q = 7, 11, 13$.

При $q = 7$ имаме $p^2 = 1080 + 7^4 = 3481$, откъдето $p = 59$.

При $q = 11$ имаме $p^2 = 1080 + 11^4$, което дава остатък 6 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 15721 не е точен квадрат.

При $q = 13$ имаме $p^2 = 1080 + 13^4$, което дава остатък 3 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 29641 не е точен квадрат.

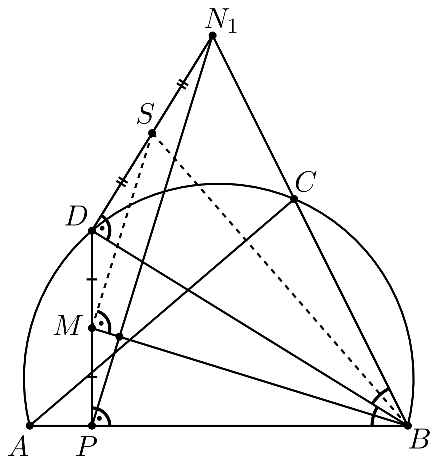
Окончателно задачата има 6 решения: $p = 59$, $\{q; r; s\} = \{3; 5; 7\}$ ($3! = 6$ възможни пермутации).

9.1. Тъй като $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, директно се получава, че $x^2 + y^2 = 3a^2 - 4a - 5$, което е квадратна функция спрямо параметъра a. Отделяйки точен квадрат, получаваме $f(a) := 3a^2 - 4a - 5 = 3\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{19}{3}$ и значи изразът е симетричен спрямо $a = \frac{2}{3}$, където се достига глобалният минимум на функцията.

От друга страна, трябва да определим допустимото множество от стойности за a, при които системата има реални решения (x, y) и да намерим локалния минимум на $f(a)$ в това множество. От първото уравнение изразяваме, че $x = 1 - a + y$ и, замествайки във второто и извършвайки необходимите преобразувания, получаваме, че квадратното уравнение $y^2 + (1-a)y - (a^2 - a - 3) = 0$ трябва да има реален корен, което е еквивалентно на $D = 5a^2 - 6a - 11 = (5a-11)(a+1) \geq 0$, т.е., $a \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{11}{5}, +\infty\right)$.

Допустимото множество за a е симетрично относно $\frac{3}{5}$ и тъй като $\frac{2}{3} \notin (-\infty, -1] \cup \left[\frac{11}{5}, +\infty\right)$, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, то минимумът на $f(a)$ в това множество се достига при $a = \frac{11}{5}$ и е равен на $f\left(\frac{11}{5}\right) = \frac{18}{25}$. В този случай $x = -\frac{3}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

9.2. Нека правата през D, перпендикулярна на BD пресича правата BC в точка N_1. Ще докажем, че $PN_1 \perp BM$, откъдето ще следва, че $N \equiv N_1$. Да означим с S средата на отсечката DN_1. От $\sphericalangle DBP = \sphericalangle N_1BD$ и $\sphericalangle DPB = \sphericalangle N_1DB = 90^\circ$ следва, че $\triangle BDP \sim \triangle BN_1D$. Тогава $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BSD$, т.е. $SDMB$ е вписан четириъгълник и $\sphericalangle BMS = \sphericalangle BDS = 90^\circ$. Остава да съобразим, че MS е средна отсечка в $\triangle PN_1D$, т.е. $MS \parallel PN_1$ и следователно $PN_1 \perp BM$.



9.3. Да означим за краткост $\sqrt{n!+1} = x$. Имаме последователно

$$\frac{1}{d_i + x} + \frac{1}{d_{m+1-i} + x} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{(d_i + x)(d_{m+1-i} + x)} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{x(d_i + d_{m+1-i} + 2x)} = \frac{1}{x}$$

(това е вярно и при $i = m + 1 - i$; използвахме, че $d_i d_{m+1-i} = n! + 1 = x^2$). Лесно се вижда, че разглежданата сума е равна на $m/2x$ и даденото уравнение е еквивалентно на $71m = 3x$. В частност, x е цяло число, т.е. $n! + 1$ е точен квадрат. Директна проверка за $n \leq 7$ дава решението $n = 7$.

Тогава $n! + 1 = 5041 = 71^2$ и $m = 3$. За $n < 7$, $n! + 1 < 5041$, така че x не е цяло или не се дели на 71.

Оттук нататък ще считаме, че $n \geq 8$, като отбелязваме, че от равенството $n! + 1 = x^2$ следва, че x няма прости делители, ненадминаващи n.

Нека $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на x. Тогава

$$(*) \qquad 71(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_s + 1) = 3p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $p_1 = 71$. Тъй като $3.71^{\alpha_1} > 71(2\alpha_1 + 1)$ при $\alpha_1 > 1$ и $p_i^{\alpha_i} > 2\alpha_i + 1$, $i \geq 2$, поради $p_i > 7$, дясната страна на $(*)$ е по-голяма от лявата освен ако $s = 1$ и $\alpha_1 = 1$, което води до $n = 7$.

9.4. Нека номерираме градовете $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$ по часовниковата стрелка с и да ги разположим циклично в таблица 3×673, както е показано по-долу:

A_1	A_4	A_7	$\cdots$	$\cdots$	A_{2017}
A_{674}	A_{677}	A_{680}	$\cdots$	$\cdots$	A_{671}
A_{1347}	A_{1350}	A_{1353}	$\cdots$	$\cdots$	A_{1344}

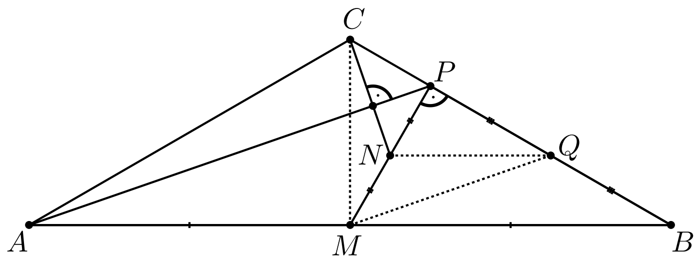
Тъй като $3|2019$, $673|2019$ и $(3, 673) = 1$, лесно се вижда, че всеки 2 града на разстояние 3 един от друг се намират в един и същи ред, а всеки 2 града на разстояние 673 един от друг се намират в един и същи стълб на табличката. Да я оцветим по редове в бяло, зелено, червено. Едно множество от градове е добро, тогава и само тогава, когато сме избрали по един град от всеки стълб на таблицата, като градовете от всеки 2 съседни стълба са разноцветни (последният 673-ти стълб е съседен и на първия).

Да означим броя на различните такива конструкции с a_{673}. Ще докажем по индукция, че $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$ за всяко $n \geq 3$. При $n = 3$ трябва да изберем един бял, един зелен и един червен град от различни стълбове, следователно $a_3 = 3! = 6 = 2^3 - 2$. Нека сега сме доказали формулата за n и да разгледаме $n + 1$. Ако не се грижим, че $n + 1$-вия стълб е съседен на първия, то можем да изберем $3 \cdot 2^n$ “добри” конструкции (фиксираме цвят в първата колона и после от всяка следваща избираме град в различен от предходната цвят). Когато цвета на градовете в първата и последната колона са еднакви, то ако “слеем” двете колони, получаваме “добра” конструкция за n колони, т.е., броят на тези конфигурации е a_n. Окончателно,

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - a_n = 3 \cdot 2^n - 2^n - 2 \cdot (-1)^n = 2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}.$$

С това индукцията е завършена и значи броят на добрите множества от градове в Кръгландия е $2^{673} - 2 = 2\left(2^{672} - 1\right)$.

10.1. Нека означим с Q средата на отсечката BP.



Тогава MQ е средна отсечка в $\triangle ABP$, т.е. $MQ \parallel AP$, $MQ = \dfrac{1}{2}AP$ и от условието следва, че $MQ \perp CN$ и $MQ : CN = \sqrt{3}$. Следователно N се явява ортоцентър в $\triangle MQC$ и $NQ \perp CM$, но NQ е средна отсечка в $\triangle MBP$, т.е. $AB \parallel NQ \perp CM$ и така достигаме до извода, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Остава да съобразим, че $\triangle MQP \sim \triangle CNP$, т.е.

$$MP : CP = MQ : CN = \sqrt{3},$$

т.е. $\sphericalangle MCP = 60^\circ$ и окончателно $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 30^\circ$.

10.2. Полагаме $2^x = t$, $t > 0$, и достигаме до ирационалното уравнение

$$a - t^2 = \sqrt{a+t}.$$

Преобразуваме го във вида

$$a + t - \sqrt{a+t} = t + t^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a+t} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2,$$

откъдето $\sqrt{a+t} = -t$ или $\sqrt{a+t} = t+1$. Но $t > 0$ и задачата се свежда до намиране стойностите на параметъра a, за които уравнението $\sqrt{a+t} = t+1$ има положително решение. Последното е еквивалентно на

$$f(t) := t^2 + t + 1 - a = 0$$

за поне една положителна стойност на t. Тъй като върхът на параболата $f(t)$ е при $t = -\dfrac{1}{2} < 0$, горното е изпълнено точно когато $D = 1 - 4(1-a) = 4a - 3 \geqq 0$ и $f(0) = 1 - a < 0$. Окончателно $a \in (1, +\infty)$.

10.4. Лесно се вижда, че множеството $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\}$ не може да се представи като обединение на две непресичащи се *свободни* множества и следователно $n \geq 3$. Ще докажем, че $n = 3$. Едно число $x \in M$ ще наричаме *просто*, ако то не може да се представи като произведение на две или повече числа от M. Лесно се вижда, че това са числата $4, 8, p$ и $2p$, където p е просто число в обичайния смисъл. За число $x \in M$ да означим с $f(x)$

най-голямото естествено число, за което x може да се представи като произведение на $f(x)$ *прости* числа от M. Вижда се, че $f(xy) \leq f(x)+f(y)+1$. Полагаме:

$$A = \{x \in M | f(x) = 1, 4, 10, 13\};$$

$$B = \{x \in M | f(x) = 2, 3, 11, 12\};$$

$$C = \{x \in M | f(x) = 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Понеже $f(x) \leq 13$ за $x \in M$, лесно се вижда, че множествата A, B и C дават исканото разбиване.

11.1. Тъй като

$$\lg^2\left(\frac{x^2+x}{y}\right) - \lg^2\left(\frac{y^2+y}{x}\right) = \lg(x+1)(y+1)\lg\left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right),$$

то първото уравнение е еквивалентно на:

$$(*) \qquad \lg(x+1)(y+1)\left(\lg\left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right) - \lg(x+1)(y+1)\right) = 0.$$

Ако $\lg(x+1)(y+1) = 0$, то $(x+1)(y+1) = 1$ и едното от x и y е положително, а другото е отрицателно. Поради $\dfrac{x^2+x}{y} > 0$ и $\dfrac{y^2+y}{x} > 0$ това е невъзможно.

При $\lg\left(\dfrac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right) = \lg(x+1)(y+1)$ получаваме $x^2 = y^2(y+1)^2$ и понеже $\dfrac{y(y+1)}{x} > 0$, то $x = y(y+1)$.

От второто уравнение намираме $(x-y)(y+1) = x+6$ и след заместване $x = y(y+1)$ получаваме $y^3-y-6 = 0$. Сега от $y^3-y-6 = (y-2)(y^2+2y+3)$ следва, че $y = 2$ и следователно $x = 6$.

11.2. Неравенството е еквивалентно на:

$$\frac{x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3} < 0$$

Нека

$f(x) = x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3$ и $g(x) = x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3$.

Понеже $f(0) = g(0) = -a^2+2a-3 < 0$, то уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имат реални корени $x_1 < 0 < x_2$ и $x_1' < 0 < x_2'$. Сега от

$$x_1x_2 = x_1'x_2' \text{ и } x_1'+x_2'-(x_1+x_2) = a^2-2a+7 > 0$$

лесно се вижда, че наредбата на корените е $x_1 < x_1' < 0 < x_2 < x_2'$ и тогава решенията на неравенството са

$$x \in (x_1, x_1') \cup (x_2, x_2').$$

Сборът от дължините на двата интервала е $a^2 - 2a + 7 = (a-1)^2 + 6 \geq 6$. При $a = 1$ целите решения са $-5, -4, -3, -2$ и 1, а при $a \neq 1$ сборът от дължините на двата интервала е по-голям от 6 и лесно се вижда, че те съдържат поне 5 цели числа.

11.3. Нека S е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$. От това, че $ABCD$ е вписан следва, че S лежи на MN. Сега $\triangle SAD \sim \triangle SBC$ и от $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$ (доказва се от свойството на ъглополовящите) следва:

$$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SAB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MPQ.$$

Това означава, че описаната около $\triangle MPQ$ окръжност минава през S. Аналогично се доказва, че и описаната окръжност около $\triangle NTK$ минава през S. Сега твърдението следва от $\triangle NBM$ и точките S, K и Q върху страните му.

12.1. Имаме

$$\frac{\sin \sphericalangle BED}{\sin \sphericalangle BDE} = \frac{BD}{BE} = \frac{2AD}{2AE} = \frac{\sin \sphericalangle AED}{\sin \sphericalangle ADE},$$

откъдето (1) $\sphericalangle ADE = \pi - \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC$.

Ако D е вътрешна точка за описаната около $\triangle ABC$ окръжност k, то

$$\sphericalangle ADE < \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC < \sphericalangle BDC,$$

а ако D е външна точка за описаната около $\triangle ABC$ окръжност k, то

$$\sphericalangle ADE > \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC > \sphericalangle BDC.$$

Значи (2) $D \in k$ и от теоремата на Птолемей следва, че

$$(3) \quad AB.CD = AC.BD - AD.BC = BC.2AD - AD.BC = AD.BC.$$

12.2. Да означим дадения израз с $f_n(x,a)$. Нека първо n е нечетно число. Понеже $f_n(x,a) = f_n(x,-a) = f_n(x, a+2\pi)$, можем да считаме, че $a \in [0,\pi]$. Имаме,че

$$-\sin^{2n} a = f_n(0,a) = f_n(a,a) = \sin^n a . \sin^n 2a = \sin^{2n} a.(2\cos a)^n,$$

откъдето $a = 0$, $a = \pi$ или $a = 2\pi/3$. Изразите $f_n(x,0) = 3\sin^{2n} x$ и $f_n(x,\pi) = -\sin^{2n} x$ не са константи. По-нататък,

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0, 2\pi/3) = f_n(\pi/2, 2\pi/3) = -\frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $a_n := (3/2)^n + (1/2)^n = 2$ и значи $n = 1$ ($a_n > 2$ при $n > 1$). Обратно,

$$(1)\quad f_1(x, 2\pi/3) = 2\sin^2 x\cos(2\pi/3) + \frac{\cos(2\pi/3) - \cos 2x}{2}$$

$$= -\sin^2 x - \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Нека сега n е четно число. Понеже $f_n(x,a) = f_n(x,-a) = f_n(x, a+\pi)$, можем да считаме, че $a \in [0, \pi/2]$. Както по-горе, от $f_n(0,a) = f_n(a,a)$ следва, че $a = 0$ или $a = \pi/3$. Изразът $f_n(x,0) = 3\sin^{2n} x$ не е константа. По-нататък,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0, \pi/3) = f_n(\pi/2, \pi/3) = \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $b_n := (3/2)^n - (1/2)^n = 2$ и значи $n = 2$ ($b_n > 2$ при $n > 2$). Обратно,

$$(2)\ 4f_2(x, \pi/3) = (1-\cos(2x-2\pi/3))(1-\cos 2x) + (1-\cos 2x)(1-\cos(2x+2\pi/3))$$

$$+(1 - \cos(2x + 2\pi/3))(1 - \cos(2x - 2\pi/3))$$

$$= 3 - 2(\cos(2x - 2\pi/3) + \cos 2x + \cos(2x - 2\pi/3))$$

$$+\cos(2x-2\pi/3).\cos 2x + \cos 2x.\cos(2x+2\pi/3) + \cos(2x+2\pi/3).\cos(2x+2\pi/3)$$

$$= 3 - 2(2\cos x.\cos 2\pi/3 + 2\cos x) + 2\cos^2 x\cos 2\pi/3 + \frac{\cos 4x + \cos 4\pi/3}{2}$$

$$= 3 - \cos^2 x + \frac{\cos 4x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

И така, отговорът на задачата е $n = 1$, $a = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ и $n = 2$, $a = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

12.3. Ще докажем, че ако $n = 2k+1$, то

$$m_n = M_n := \max\left\{\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{4(2k-1)}\right\},$$

т.е. $m_n = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ при $k \le 5$ и $m_n = \dfrac{1}{4(2k-1)}$ при $k \ge 6$.

Полагайки (1) $a_1 = \cdots = a_{k+1} = \dfrac{1}{k+1} - k\varepsilon$, $a_{k+2} = \cdots = a_{2k+1} = (k+1)\varepsilon$ и (2) $a_1 = \dfrac{1}{2} - \varepsilon$, $a_{2k+1} = \varepsilon$, $a_2 = \cdots = a_{2k} = \dfrac{1}{2(2k-1)}$, при $\varepsilon \to 0+$ следва, че $m_n \ge M_n$.

Нека сега $a_1 \geq \cdots \geq a_{2k+1} > 0$ са реални числа със сума 1. Разполагаме ги по окръжност в следния ред: (3) $a_1, a_{2k}, a_3, a_{2k-2}, \ldots, a_{2k-1}, a_2, a_{2k+1}$. При $1 \leq l \leq k-1$ имаме, че

$$1 \geq a_1 + \cdots + a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{2k+1-l} + a_{2k+1} > la_l + (2k+1-2l)a_{2k+1-l}$$
$$\geq 2\sqrt{l(2k+1-2l)a_l a_{2k+1-l}} \geq 2\sqrt{1(2k+1-2)a_l a_{2k+1-l}},$$

откъдето

$$(4) \quad a_l a_{2k+1-l} < \frac{1}{4(2k-1)}.$$

Освен това, $1 > ka_k + a_{k+1} \geq (k+1)a_{k+1}$ и значи

$$(5) \quad a_k a_{k+1} < \frac{1-a_{k+1}}{k} a_{k+1} \leq \frac{1-\frac{1}{k+1}}{k} . \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Следователно $m_n \leq M_n$, с което задачата е решена.

12.4. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ е граф с върхове градовете и ребра – шосетата в държавата. Тогава знаем, че $|E_1| = 2019|V_1|$. Следователно G_1 има свързана компонента $G = (V, E)$ с $|E| \geq 2019|V|$.

За множество от шосета R с $s(R)$ ще бележим общата дължина на шосетата от R. Нека $E_0 \subseteq E$ има свойството, че от всеки град във V има път до всеки друг, използващ само шосета от E_0, като $s(E_0)$ е възможно наймалко. Тогава в графа (V, E_0) няма цикли, защото иначе може да махнем шосе e от E_0 като градовете V останат свързани с шосетата от $E_0 \setminus \{e\}$, но $s(E_0 \setminus \{e\}) < s(E_0)$. Следователно (V, E_0) е дърво.

Нека (V', E_0') е произволно поддърво на (V, E_0), тоест $V' \subseteq V_0$, $E_0' \subseteq E_0$ свързва точно градове от V' и между всеки два града от V' има (единствен) път, който използва само шосета от E_0'. Да допуснем, че има множество от шосета E'' с обща дължина $s(E'') < s(E_0')$, чрез които от всеки град на V' може да стигнем до всеки друг от V'. Ще докажем, че това не е възможно.

Нека V'' са градовете, които са краища на шосе от E''. Може да предполагаме, че от всеки град от V'' може да се стигне до град от V' само по шосета от E''. Иначе може да махнем шосета от E'', като при това единствено ще намалим общата дължина на шосетата в E''. Нека (V'', E_0'') е поддървото на (V, E_0) с градове V''. Тогава е ясно, че ако заменим шосетата от E_0'' с тези от E'' отново от всеки град от V ще може да се стигне до всеки друг като сумата от дължините на всички пътища ще бъде $s(E_0 \setminus E_0'' \cup E'') = s(E_0) - s(E_0'') + s(E'')$. Сега тъй като $s(E'') < s(E_0')$ и $s(E_0') \leq s(E_0'')$, защото всяко шосе има неотрицателна дължина и $E_0' \subseteq E_0''$, то $s(E_0 \setminus E_0'' \cup E'') < s(E_0)$. Това противоречи с избора на множеството от шосета E_0. Това показва, че всяко поддърво (V', E_0') на (V, E_0) удовлетворява условие 1 от дефиницията за област.

Сега на върховете от V ще раздадем етикети по следния начин. Да фиксираме един град $v \in V$ и да номерираме шосетата от E_0 по произволен начин с числа $1, \ldots, |E_0|$. За всеки град $u \in V$ има единствена редица от неповтарящи се шосета, които водят от v до u. Нека $\lambda(u)$ е редицата от номерата на тези шосета. В частност $\lambda(v) = ()$ е празната редица.

Общият брой шосета в E е поне $2019|V|$, следователно $|E \setminus E_0| \geq 2019|V| - |V| + 1 = 2018|V| + 1$. Това означава, че поне един от градовете във V е край на поне $\frac{2018}{2} + 1 = 1010$ шосета, които не са от E_0. Нека A е такъв град. Нека $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ са съседните градове на A, до които може да стигнем с шосета от $E \setminus E_0$. Без ограничение на общността може да предполагаме, че $\lambda(v_1), \lambda(v_2), \ldots, \lambda(v_m)$ са подредени в лексикографски нарастващ ред.

За всяко k нека $u'_k \in V$ е градът с етикет $\lambda(u'_k)$, който е най-дългият общ префикс на $\lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_{101k})$. Полагаме V'_k да са всички градове C с етикет $\lambda(C)$, който има префикс $\lambda(u_k)$ и самият той е префикс на някой от етикетите $\lambda(v_j)$ за $j \leq 101k$. Нека $R'_k \subseteq E_0$ е множеството от шосета, всяко от които свързва точно два града от V'_k. Да забележим, че има най-много едно шосе $(A, v) \in E_0 \setminus R'_k$, за което $v \in V'_k$. Наистина, ако $(A, v) \in E_0$ то $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ или $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$ като $||\lambda(A)| - |\lambda(v)|| = 1$. Ако $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ и $\lambda(u)$ е префикс на A, то $A \in V'_k$ и следователно $(A, v) \in R'_k$. Следователно, $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(u)$ и тогава други шосета $(A, v') \in E_0$ с $v' \in V'_k$ няма. Ако $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$, то отново няма друг град $v' \in V'_k$ със свойството, че $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v')$, защото иначе, $\lambda(A) \in V'_k$.

Сега дефинираме $V_k = V'_k$, $R_k = R'_k$ и $u_k = u'_k$, ако няма шосета $(A, v) \in E_0 \setminus R'_k$ с $v \in V'_k$. Иначе, нека (A, v) е единственото такова шосе. Тогава е ясно, че $A \notin V'_k$ и полагаме $V_k = V'_k \cup \{A\}$, $R_k = R'_k \cup \{(A, v)\}$ и $u_k = A$, ако $v = u_k$ и $u_k = A$, иначе.

Във всички случаи $|R_k| = |V_k| - 1$, откъдето (V_k, R_k) е поддърво на (V, E_0) и от по-горе удовлетворява условията 1 и 2 за област. Накрая шосетата (A, v), за които $v \in V_k$ са точно шосетата (A, v_1), (A, v_2), $\ldots (A, v_{101k})$. Следователно (V_k, R_k) е област с център A. Тъй като $m \geq 1010$ има поне 10 области (V_k, R_k) при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Тогава, ако s_k е сумата от дължините на шосетата в R_k то има поне две $1 \leq i < j \leq 10$, за които $s_j \equiv s_i (\mod 9)$. Това показва, че $s_j - s_i$ се дели на 9, а по конструкция $R_i \subsetneq R_j$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 – Емил Стоянов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.4, 11.2, 11.3 – Александър Иванов; 9.3 (10.3) – Петър Бойваленков; 10.1, 10.2 – Стоян Боев; 10.4 (11.4) – Александър Иванов и Емил Колев; 11.1 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов; 12.4 – Стефан Герджиков.

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ, 4.–7. КЛАС

На 29–31 март 2019 г. в Шумен се проведоха Пролетните математически състезания за ученици от 5.–7. клас. За четвърти клас състезанието се проведе във всички български градове, тъй като е балообразуващо за прием в математически гимназии.

Предлагаме ви условията на задачите с отговори и кратки решения.

4. КЛАС

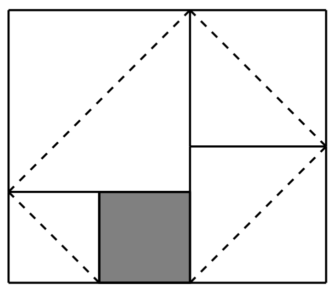
Задача 1. Дадени са изразите

$$a = (2019 : 3 + 2019.3) : 10, \quad b = 2019 : 3 - 2, \quad c = (2019.3 - 2.2019) : 3 + 1.$$

а) Пресметнете a, b и c и ги подредете по големина.

б) На девет картончета са написани цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Иван взел няколко и с тях написал числото M, а с останалите написал числото N. Ако M е по-голямото от двете числа, намерете най-малката разлика на M и N.

Задача 2. Правоъгълникът вдясно е разделен на пет квадрата. Затъмненият квадрат има лице 36 кв.см.



А) Намерете обиколката на правоъгълника.

Б) Ива нарязла по прекъснатата линия правоъгълника. Намерете лицето на най-голямата част.

Задача 3. Намерете кои цифри съответстват на А, Б, В, Г и Д така, че да е изпълнено равенството $\overline{8\text{А}} \cdot \overline{\text{БВ}} = \overline{\text{ГД}0}$ (записът е $\overline{xy} = x.10 + y$).

Задача 4. Да се намери броят на числата от 1 до 2019 включително, в записа на които има нечетен брой нечетни цифри.

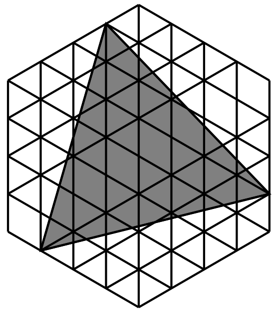
5. КЛАС

Задача 1. Дадени са изразите:

$$A = \frac{2,5 - 2\frac{1}{3}}{2,5 + 3\frac{1}{3}} \cdot \frac{1,4 + 1\frac{1}{3}}{1,4 - 1\frac{1}{3}} \text{ и } B = \frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 1,3.$$

А) Пресметнете A и B и ги сравнете.

Б) Задраскайте 2019-тата цифра след десетичната запетая на частното $C = A : B$ и сравнете новополучената десетична дроб със стойността на C.



Задача 2. Фигурата на чертежа е съставена от еднакви равнострани триъгълници с лице $1\ \mathrm{cm}^2$. Намерете лицата на оцветения триъгълник и на неоцветената част от фигурата.

Задача 3. В кутия има 100 бонбона. Ани изяла няколко бонбона. Дошла Бети и Ани изяла още един бонбон, за да може останалото количество бонбони да се раздели по равно на двете. След това дошла Вяра и Ани отново изяла 1 бонбон, за да могат да разделят останалите бонбони по равно на трите. Към тях се присъединили последователно Галя, Деси и Ева, и всеки път Ани изяждала по един бонбон, за да може останалото количество да се разпредели по равно на събралите се момичета. Накрая дошла и Жана. Колко най-малко бонбони трябва да изяде Ани този път така, че останалото количество бонбони да се разпредели по равно на седемте момичета?

Задача 4. Може ли да се поставят 1000 папки в 22 чекмеджета, така че във всяко чекмедже след първото да има или 5 папки повече, или 6 папки по-малко от предходното?

6. КЛАС

Задача 1. Два правоъгълни паралелепипеда са долепени един до друг, като образуват нов правоъгълен паралелепипед с размери 3 cm, 4 cm и 12 cm. Общата стена на паралелепипедите е с размери 3 cm и 4 cm. Да се намери отношението на обема на по-големия паралелепипед към обема на по-малкия паралелепипед, ако повърхнината на по-големия е два пъти по-голяма от повърхнината на по-малкия.

Задача 2. Намерете всички двойки трицифрени числа, сборът на които се дели на 296, а частното им е кратно на 3.

Задача 3. Ако числото 2^{2019} е n-цифрено, а числото 5^{2019} е m-цифрено, намерете стойността на $n + m$.

Задача 4. Числата от 1 до N са написани едно след друго в редица. На всеки ход изтриваме първото число, а второто го местим в края на редицата. Намерете последното число, което ще остане при:

А) $N = 23$; Б) $N = 2019$.

7. КЛАС

Задача 1. Даден е многочленът $P(x) = x^4 + 6x^3 + x^2 + ax + b$. При кои цели стойности на a и b многочленът $P(x)$ е точен квадрат на друг многочлен? Решете уравнението $P(x) = 0$ за намерените стойности на a и b.

Задача 2. В разностранния $\triangle ABC$ ($AC > BC$) са построени ъглополовящата l_A на $\sphericalangle BAC$, ъглополовящата l_C на $\sphericalangle BCA$ и ъглополовящата CL на външния ъгъл при върха C. През върха B е построена права g, успоредна на CL. Правата g пресича AC в точка M. Ъглополовящата l_C и перпендикулярната права от точка M към AB се пресичат в точка Q. Ъглополовящата l_A пресича правата g в точка F. Намерете мерките на ъглите на $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle AFM = 35°$ и $\sphericalangle MQC = 20°$.

Задача 3. Ливадата на фермера А е 4 дка. Сеното, събрано от тази ливада, стигнало на А да изхранва 3 крави в продължение точно на 8 месеца. Фермерът Б има ливада от 10 дка. Колко най-много кози може да изхранва Б в продължение на 6 месеца със сеното от ливадата си, ако Б е събрал с 20% повече сено от декар в сравнение с добива на А от декар и месечно изхранването на 9 кози е колкото изхранването на 4 крави? Продължителността на месеците не се взима под внимание.

Задача 4. Двадесет войници са строени в редица. Всеки войник освен първият съобщава на старшината разликата от броя на приятелите си вляво от него и броя на приятелите си вдясно от него (числата са цели числа от интервала $[-19; 19]$). Приятелството е взаимно: ако А е приятел на В, то В е приятел на А. Докажете, че старшината би могъл сам да определи броя на приятелите на първия войник.

Отговори и решения

4.1. а) $a = 673$, $b = 671$, $c = 674$. б) $10234 - 8765 = 1469$.

4.2. А) Правоъгълникът има страни 21 см и 18 см и обиколка 78 см.
Б) Лицето е $36 + 36 : 2 + (12.12) : 2 + 9.9 = 207$ кв.см.

4.3. В условието не е уточнено дали на различните букви съответстват различни цифри. Ако това се подразбира, разсъждаваме по следния начин.

Произведението е трицифрено, следователно Б = 1. Ако В = 0, получаваме А = Д, противоречие. Ако В = 2, получаваме единствено решение $80.12 = 960$. Тъй като $83.12 = 996$ и Г = Д, а 84.12 е четирицифрено число, други решения няма. При В $\geqq 3$ произведението е четирицифрено ($80.13 = 1040$).

4.4. Желаното свойство имат 5 едноцифрени числа; $5.5 + 4.5 = 45$ двуцифрени числа с една четна и една нечетна цифра; $5.5.5 = 125$ трицифрени с три нечетни цифри; $4.5.5 + 4.5.5 + 5.5.5 = 325$ трицифрени с една нечетна цифра. Сред четирицифрените с цифра на хилядите 1 точно една нечетна цифра имат $5.5.5 = 125$ числа; три нечетни цифри имат имат $3.5^3 = 357$ числа. Сред четирицифрените от 2000 до 2019 има 10 такива числа. Получаваме общо 1010 числа.

5.1. а) $A = \dfrac{41}{35} < B = \dfrac{41}{10}$;

б) $C = 0,(285714)$ и 2019-тата цифра след десетичната запетая на C е 5. Новополучената дроб е по-голяма от C.

5.2. Лицето на триъгълника е 39 cm^2, а на неоцветената част е 57 cm^2.

5.3. След Ева броят на бонбоните се дели на 6 и е с 1 по-малък от кратно на 5, както и с 2 по-малък от кратно на 4. Следователно е от вида $60k + 54$. Тъй като бонбоните са общо 100, след Ева са останали 54 бонбони. Ани трябва да изяде накрая най-малко 5 бонбона така, че броят на останалите бонбони (49) да се дели на 7.

5.4. Ако в първото чекмедже има x папки, общият брой папки е най-много

$$x + (x + 5) + (x + 10) + \cdots + (x + 105) = 22x + 5.\frac{21.22}{2} = 11(2x + 105).$$

Максималният брой папки се дели на 11.

Нека в едно чекмедже A броят папки е с 6 по-малък, отколкото в предишното чекмедже B. Тогава в горния сбор вместо $y + 5$ участва $y - 6$ (ако y е броят на папките в B) и сборът се намалява с число, кратно на 11 (с 11 се намаляват папките в A и всяко следващо чекмедже).

Продължавайки по този начин, може да получим всяко възможно разпределение на папките и общият брой папки ще се дели на 11; следователно не може да е 1000.

6.1. Отношението е 5 : 2.

6.2. При $p = 2$, $b = 148$, $a = 444$; при $p = 3$, $b = 222$, $a = 666$; при $p = 4$, $b = 296$, $a = 888$.

6.3. Имаме $10^{n-1} < 2^{2019} < 10^n$ и $10^{m-1} < 5^{2019} < 10^m$. Следователно

$$10^{n-1}.10^{m-1} < 2^{2019}.5^{2019} < 10^n.10^m \Longrightarrow 10^{n+m-2} < 10^{2019} < 10^{n+m},$$

откъдето следва, че $n + m - 2 < 2019 < n + m$, т.е. $2019 < n + m < 2021$ и намираме $n + m = 2020$.

6.4. Ако N е четно ($N = 2k$), след k хода ще остане редицата $2, 4, 6, \ldots, 2k$. Следователно, ако N е степен на 2, накрая остава N. Нека N не е степен на 2 и m е най-голямата степен на 2, по-малка от N. Тогава след $N-m$ хода ще останат m числа; последното, от които е $2(N-m)$.

А) Най-голямата степен на 2, по-малка от 23, е 16. Тогава след $23-16=7$ хода ще останат 16 числа, като последното ще е 14, т.е. 14 ще остане накрая.

Б) Най-голямата степен на 2, по-малка от 2019, е 1024. Тогава след $2019-1024=995$ хода ще останат 1024 числа, като последното ще е 1990, т.е. 1990 ще остане накрая.

7.1. $a=-24$, $b=16$; $x_1=-4$, $x_2=1$.

7.2. $\sphericalangle B=70^\circ$, $\sphericalangle C=80^\circ$, $\sphericalangle A=30^\circ$.

7.3. Нека една крава на А месечно се нуждае от a кг сено. Тогава кравите на А общо са консумирали $8.3a=24a$ кг, които били осигурени от сеното на А от 4 дка. Следователно от един декар на А се получават $6a$ кг. От един декар на Б се получават $1,2.6a=7,2a$ кг, а от цялата ливада Б ще си осигури $10.7,2a=72a$ кг, което означава, че Б ще разполага с по $72a:6=12a$ кг сено за всеки от шестте месеца.

Тъй като 9 кози месечно изяждат толкова, колкото 4 крави, месечно една коза се нуждае от $\frac{4}{9}a$ кг. Тогава сеното на Б ще стига точно за $12a:\left(\frac{4}{9}a\right)=27$ кози.

7.4. Да номерираме войниците отляво надясно $1,2,\dots,20$. С L_i означаваме броя на приятелите на i-тия войник, които са вляво от него, а с R_i броя на приятелите на i-тия войник, които са вдясно от него. Ясно е, че $L_1=R_{20}=0$. Броят на всички приятелства е равен както на $L_1+L_2+\cdots+L_{20}$ (тогава всяко приятелство е броено от страна на вляво седящия войник), така и на $R_1+R_2+\cdots+R_{20}$ (ако броим приятелството от страна на вдясно седящия войник). Получаваме

$$L_1+L_2+\cdots+L_{20}=R_1+R_2+\cdots+R_{20},$$

откъдето

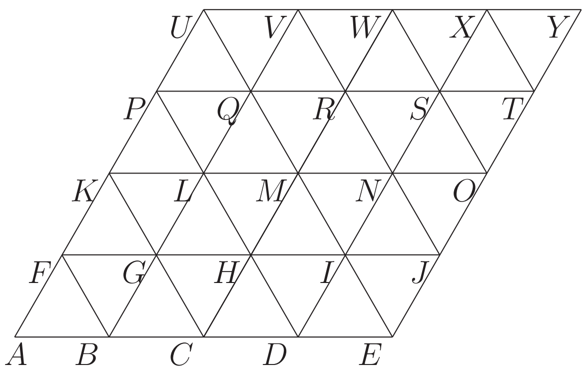
$$R_1=L_1+(L_2-R_2)+\cdots+(L_{20}-R_{20})=(L_2-R_2)+\cdots+(L_{20}-R_{20})$$

е броят на приятелите на първия войник и последното може да се пресметне от старшината.

ДА УЧИМ ГЕОМЕТРИЯ С МРЕЖА ОТ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Дамян Анев, Александър Павлов
ППМГ „Нанчо Попович“ – Шумен

Практиката показва, че много ученици изпитват затруднения при усвояване на учебното съдържание по геометрия. За преодоляването на тези затруднения са необходими повече упражнения, които от своя страна изискват такава организация на учебния процес, при която оптимално се използва ограниченото време. Тук ще споделим как това може да се постигне чрез създаване на учебна среда, в която множество задачи се свързват с една и съща ситуация. В конкретния случай това е мрежа от равностранни триъгълници (черт. 1), която „работи“ при изучаването на различни теми от учебното съдържание по геометрия за осми клас. Като илюстрация ще посочим примерна система от задачи към раздела „Окръжност“, чрез която се отработват знанията за взаимни положения на окръжност и права, две окръжности, свойства на диаметри и хорди, общи допирателни на две окръжности (във всички задачи мрежата е от триъгълници със страна 4).



Черт. 1

Задача 1. Да се определи взаимното положение на окръжността $k(M; r = 4)$ и:

А) правата KW;

Б) правата през медицентъра на $\triangle GLH$, успоредна на DP;

В) правата през D и точката X_1, която дели XY вътрешно в отношение $1 : 3$, считано от X.

Задача 2. Краищата на хорда в окръжността $k(M; r = 4)$ през средите на LH и HI са съответно L_1 и I_1, а на хорда през средите на LQ и NR са съответно Q_1 и R_1. Да се сравнят:

А) LL_1 и II_1;

Б) L_1I_1 и Q_1R_1.

Задача 3. Да се определи взаимното положение на окръжността $k(M; r = 4)$ и окръжностите:

А) $k_1(S; r = 4)$;

Б) $k_2(E; r = 4)$;

В) $k_3(G; r = 2)$;

Г) k_4 с център средата на PL и $r = \sqrt{3}$.

Задача 4. Да се посочи обща външна допирателна за окръжностите:

А) $k(L; r = 4)$ и k_1 с център средата на LM и $r = 2$;

Б) $k(Q; r = 4)$ и k_1 с център средата на IN и $r = 2$.

Задача 5. Да се посочи обща вътрешна допирателна за окръжностите:

А) $k(L; r = 4)$ и k_1 с център средата на DH и $r = 2$;

Б) $k(R; r = 2)$ и k_1 с център средата на IN и $r = 2$.

Задача 6. Да се посочат общите външни и вътрешни допирателни за окръжностите $k(S; r = 2\sqrt{3})$ и k_1 с център медицентърът на $\triangle MNR$ и $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 7. Да се посочат общите вътрешни допирателни за окръжностите $k(S; r = 2\sqrt{3})$ и k_1 с център средата на HL и $r = \sqrt{3}$.

Задача 8. Да се посочат две окръжности, за които правата AY е:

А) обща външна допирателна;

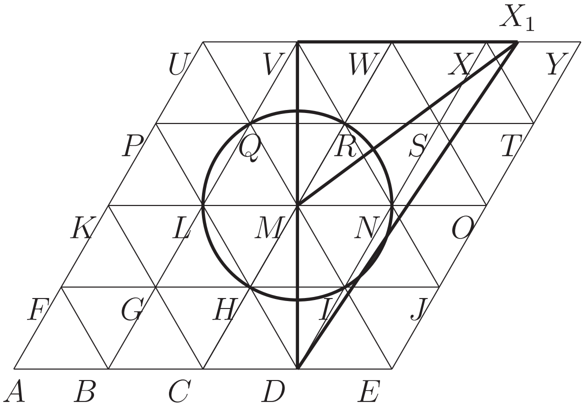
Б) обща вътрешна допирателна.

Задача 9. Да се посочат две окръжности, за които правите AW и AO са общи външни допирателни.

Задача 10. Да се посочат две окръжности, за които правите AY и PJ са общи вътрешни допирателни.

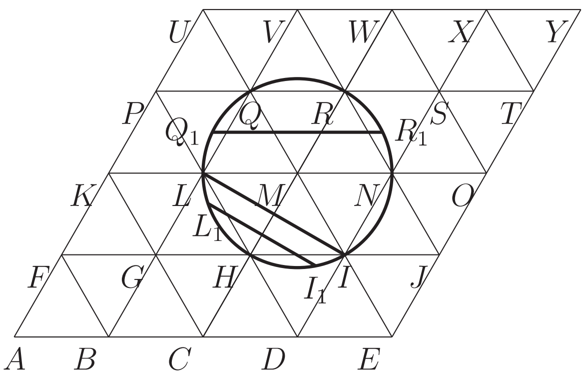
Ето и примерни решения на някои от задачите:

Задача 1. В) Отсечката MX_1 е медиана в $\triangle DVX_1$, следователно $S_{DMX_1} = \frac{1}{2}S_{DVX_1} = \frac{1}{2}.\frac{DV.VX_1}{2} = 18\sqrt{3}$ (черт. 2). От правоъгълния триъгълник DVX_1 намираме $DX_1 = \sqrt{273}$. Разстоянието от точка M до DX_1 е равно на височината към DX_1 в триъгълника. След пресмятането ѝ от формулата за лице, остава да сравним числата 4 и $\frac{36\sqrt{91}}{91}$. Тъй като разстоянието от центъра на окръжността до правата се оказва по-малко от нейния радиус, те имат две общи точки.



Черт. 2

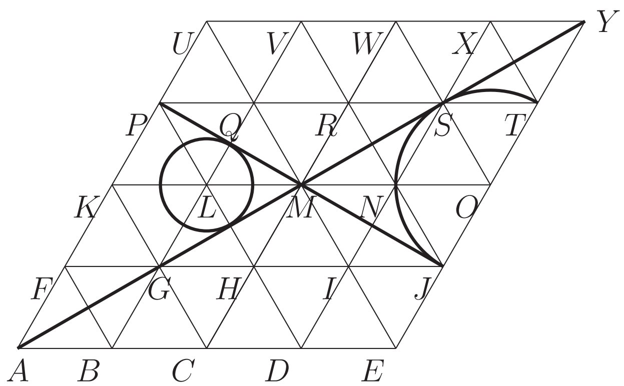
Задача 2. А) Хордата през средите на LH и HI съдържа средната отсечка на $\triangle LHI$ (черт. 3), следователно е успоредна на LI. Тогава хордите LL_1 и II_1, заключени между успоредните LI и L_1I_1, са равни.



Черт. 3

Б) Хордата през средите на LQ и NR съдържа средната отсечка на трапеца $LNRQ$, следователно е успоредна на RQ и разстоянието от центъра на окръжността M до нея е два пъти по-малко от височината на $\triangle MRQ$, т.е. е $\sqrt{3}$. Разстоянието от M до L_1I_1 е 3. Тъй като то е по-голямо от разстоянието от M до Q_1R_1, то $L_1I_1 < Q_1R_1$.

Задача 10. Центровете на всички окръжности, за които AY и PJ са общи допирателни, лежат на ъглополовящите на ъглите, образувани от тези прави (черт. 4). Лъчът MK е ъглополовяща на $\sphericalangle AMP$ и тъй като LQ и LH са перпендикулярни на раменете на този ъгъл, една от търсените окръжности е примерно с център L и радиус 2. Аналогично, втора такава окръжност би могла да бъде с център O и радиус 4.



Черт. 4

От разгледаните примери се вижда, че при решаване на задачите, освен новите знания, се прилагат и знания за триъгълник, успоредник, трапец, лица на фигури, медиани, медицентър, средни отсечки и др., които по този начин се поддържат и затвърждават. Подобни системи от задачи на базата на същата мрежа от триъгълници могат да се съставят (включително и от самите ученици) и използват и при изучаване на разделите „Вектори“, „Триъгълник и трапец“, „Вписани и описани многоъгълници“ и „Еднаквости“. Прилагаме две теми за контролни работи към разделите „Вектори“ и „Еднаквости“, които сме използвали в работата си (мрежата от триъгълници е полезна и с възможността много бързо да се конструират равностойни варианти на включваните задачи).

Тема 1. Вектори

Задача 1. Посочете:

А) противопосочен, но не противоположен вектор на $\overrightarrow{AM}$;

Б) два вектора, противоположни на $\overrightarrow{VJ}$;

В) еднопосочен, но не равен вектор на $\overrightarrow{KH}$;

Г) два вектора, равни на $\overrightarrow{AN}$.

Задача 2. Извършете действията:

А) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OW}$;

Б) $\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}$;

В) $2\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{DO}+\frac{1}{4}\overrightarrow{KO}$;

Г) $\frac{3}{4}\overrightarrow{VB}+4\overrightarrow{DH}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NK}$.

Задача 3. Представете по два начина:

А) $\overrightarrow{LS}$ като сбор на два вектора;

Б) $\overrightarrow{DV}$ като разлика на два вектора;

В) $\overrightarrow{MS}$ като произведение на вектор с число.

Тема 2. Еднаквости

Задача 1. Докажете, че:

А) $S_M(CI)=WQ$;

Б) $S_{AY}(\sphericalangle AKO)=\sphericalangle ACW$;

В) $T_{\overrightarrow{CF}}(\triangle IJN)=\triangle LMQ$;

Г) $R_G^{-60^\circ}(FC^{\rightarrow})=KB^{\rightarrow}$.

Задача 2. Намерете:

А) образа на $k(G;r=2)$ при централна симетрия с център средата на LM;

Б) образа на $\triangle GCE$ при осева симетрия с ос LI;

В) образа при транслация с вектор $\overrightarrow{AH}$ на отсечката с краища медицентровете на $\triangle BCG$ и $\triangle LMQ$;

Г) образа на четириъгълника $KCMU$ при ротация с център U и ъгъл $+60^\circ$.

Читателят ще забележи, че всички разгледани в статията задачи са от така наречените „тренировъчни“. Смятаме, че без достатъчно упражнения от този тип опитите да се постигнат успехи при решаване на по-сложни задачи срещат сериозни затруднения.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Ако a, b, c са страни на триъгълник с лице S, да се докаже, че
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4\sqrt{3}S.$$

Задача 2. Дадени са 1000 билета, номерирани с 000, 001, …, 999, и 100 кутии с номера 00, 01, …, 99. Един билет може да се постави в дадена кутия, ако може да се зачеркне някоя от цифрите в номера на билета така, че да се получи номерът на кутията. Докажете, че:

а) всички билети могат да се поставят в 50 кутии;

б) не е възможно всички билети да се поставят в по-малко от 50 кутии.

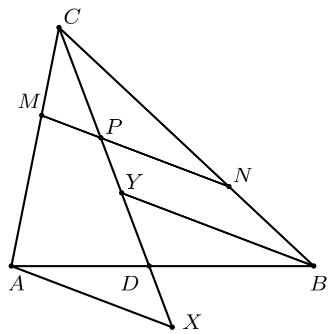
Задача 3. Редицата от естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ще наричаме *универсална*, ако всяка пермутация на числата 1, 2, 3, 4 може да се получи от тази редица, като се зачеркнат част от членовете ѝ. Докажете, че $k \geqq 12$.

Срокът за представяне на решенията е 30.05.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 1/2019 г.

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ и точка $D \in AB$. Права пресича отсечките AC, DC и BC съответно в точки M, P и N. Да се докаже, че

$$DB \cdot \frac{MA}{MC} + AD \cdot \frac{NB}{NC} = AB \cdot \frac{PD}{PC}.$$



Решение. Нека X и Y са точки от правата CD, за които $AX \parallel BY \parallel MN$. Тогава

$$\frac{MA}{MC} = \frac{PX}{PC} \text{ и } \frac{NB}{NC} = \frac{PY}{PC}$$

и след заместване получаваме, че равенството е еквивалентно на

(1) $\quad DB.PX + AD.PY = AB.PD.$

Първи начин. От $\triangle AXD \sim \triangle BYD$ намираме

$$DB = AD \cdot \frac{DY}{DX} \text{ и } AB = AD\frac{XY}{DX},$$

откъдето като заместим в (1), получаваме еквивалентното равенство

$$DY.PX + DX.PY = XY.PD.$$

Като заместим в него $PY = PX + XD + DY$, $XY = XD + DY$ и $PD = PX + XD$, получаваме тъждество.

Втори начин. Нека $\sphericalangle BDP = \varphi$. Тъй като $2S_{BXP} = BD.PX \sin\varphi$, $2S_{AYP} = AD.PY \sin\varphi$, $2S_{ABP} = AB.PD \sin\varphi$ и $\sin\varphi \neq 0$, то равенството $DB.PX + AD.PY = AB.PD$ е еквивалентно на

$$S_{BXP} + S_{AYP} = S_{ABP}.$$

Понеже $S_{ABP} = S_{ADP} + S_{BXP} + S_{BDX}$, то горното равенство е еквивалентно на $S_{ADY} = S_{BDX}$. Това равенство е вярно, понеже $AYBX$ е трапец.

Задачата е решена от **Мирослав Минчев** (ППМГ, Стара Загора) и **Радомир Пеев** (СМГ).

Задача 2. Дадени са естествени числа a, b и c, за които $b > 2a$ и $c > 2b$. Да се докаже, че съществува реално число α, за което дробните части на числата αa, αb и αc са в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Решение. Ако дробната част на αa е в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, то съществува естествено число m, за което $m + \frac{1}{3} < \alpha a \leq m + \frac{2}{3}$. Това означава, че

$$\alpha \in \left(\frac{3m+1}{3a}, \frac{3m+2}{3a}\right].$$

Следователно трябва да докажем, че съществуват естествени числа m, n и p, за които интервалите $I_m = \left(\frac{3m+1}{3a}, \frac{3m+2}{3a}\right]$, $J_n = \left(\frac{3n+1}{3b}, \frac{3n+2}{3b}\right]$ и $K_p = \left(\frac{3p+1}{3c}, \frac{3p+2}{3c}\right]$ имат обща точка.

Дължината на интервала J_n е $\frac{1}{3b}$, а разстоянието между два последователни интервала от K_p е $\frac{2}{3c}$. Тъй като $\frac{1}{3b} > \frac{2}{3c}$, то всеки интервал J_n пресича интервал K_p.

Ще докажем, че някой интервал J_n се съдържа изцяло в интервал I_m, с което задачата ще бъде решена. Ако $J_n \subset I_m$, то $\frac{3m+1}{3a} \leq \frac{3n+1}{3b}$ и $\frac{3n+2}{3b} \leq \frac{3m+2}{3a}$. Тези неравенства са еквивалентни на

$$\frac{3n+1}{3m+1} \leq ab \leq \frac{3n+2}{3m+2}.$$

Тъй като $m > n$ (иначе $a \geq b$), то след полагането $m = n + t$ и преобразувания, намираме

$$h(3m+1) \leq 3t \leq h(3m+2), \tag{1}$$

за $h = 1 - \frac{a}{b} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Трябва да покажем, че за всяко h съществуват естествени числа m и t, за които е изпълнено (1). Нека q е минималното естествено число, за което $qh \leq 3 \leq (q+1)h$. От $h \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ следва, че $q = 3, 4, 5$, т.е. възможни са случаите $3h \leq 3 \leq 4h$, $4h \leq 3 \leq 5h$ и $5h \leq 3 \leq 6h$. Да разгледаме съответните интервали за h:

1. $3h \leq 3 \leq 4h$ (съответства на $h \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$). В този случай между $3t$ и $3(t+1)$ има точно един интервал от I_m. Ако x е разстоянието от $3t$ до левия край на най-близкия интервал от I_m, а y е съответното разстояние от $3t+3$, то $y = x + 3h - 3 < x$, като $x - y = 3 - 3h \leq h$ (от $h \geq \frac{3}{4}$). Следователно разглежданото разстояние намалява с постоянна стойност $3 - 3h$, не надвишаваща h, което означава, че след краен брой прибавяния на 3, ще попаднем в интервал от I_m.

2. $4h \le 3 \le 5h$ (съответства на $h \in \left[\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right]$). В този случай $m = 1$ и $t = 1$ са търсените.

3. $5h \le 3 \le 6h$ (съответства на $h \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$). Аналогично на случай 1., само, че сега между $3t$ и $3(t+1)$ има точно два интервала от I_m. Съответното разстояние е $y = x + 6h - 3 > x$, като $y - x = 6h - 3 \le h$ и както в случай 1 следва, че ще попаднем в интервал от I_m.

Задача 3. На олимпиада по математика 49 ученика решавали 3 задачи. Всяка задача се оценява с 0 до 7 точки. Да се докаже, че има двама участници A и B, за които по всяка задача A има не по-малко точки от B.

Решение. Да разгледаме резултатите по първите две задачи. Измежду 49-те двойки няма еднакви, защото тогава независимо от резултата по третата задача ще има двама с исканото свойство. От всеки две двойки от множеството

$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(0,7),(1,7),(2,7),(3,7),(4,7),$$
$$(5,7),(6,7),(7,7),\}$$

едната мажорира другата. Ако има 9 двойки от това множество, то има двама с равни резултати по третата задача и условието е изпълнено. Следователно от тези 15 двойки поне $15 - 8 = 7$ не се срещат като резултати на първите две задачи. Аналогично от множеството

$$\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),$$
$$(6,6),(7,6)\}$$

поне $13 - 8 = 5$ двойки не се срещат като резултат. Аналогично от множеството

$$\{(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(7,5)\}$$

поне $11 - 8 = 3$ двойки не се срещат като резултат, а от множеството

$$\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(7,4)\}$$

поне $9 - 8 = 1$ двойка не се среща като резултат. Следователно поне $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ двойки не се срещат, т.е. учениците са най-много $64 - 16 = 48$, противоречие.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

СПЕЦИАЛНА НАГРАДА НА БРОЯ

С цел да насърчи желанието за творческа изява на децата с математически заложби, ЧОУ „Света София“ осигури награден фонд на конкурса на списание *Математика* за 5. - 7. клас през 2018/19 учебна година.

След всеки от четирите задочни кръга на конкурса, най-добре представилият се участник от пети, шести и седми клас ще получи награда от 50 лв.

Като оцени получените в срок решения на задачите от брой 1/2019 г., Редколегията на списанието награди:

Рая Красимирова Савова (5. клас, ППМГ, Бургас),

Александър Цветомир Мургин (6. клас, ППМГ, Видин),

Николай Йорданов Георгиев (7. клас, ПМГ, Силистра).

Очакваме Вашите решения!

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 1/2019 г.

Задача 1. Едно естествено число наричаме *забележително*, ако е сбор на трицифрено огледално число и четирицифрено огледално число. Например, 2300 и 2020 са забележителни числа, тъй като $2300 = 1331 + 969$ и $2020 = 1111 + 909$.

а) Забележително число ли е 2019?

б) Колко числа са едновременно и забележителни, и огледални?

Решение на Николай Георгиев от 7. клас, ПМГ, Силистра.

а) Да допуснем, че 2019 е забележително число. Нека

$$2019 = \overline{abba} + \overline{cdc}.$$

Очевидно $a = 1$. Тогава от сбора на единиците намираме $c = 8$. Получаваме

$$2019 = 1001 + 808 + 110b + 10d = 1809 + 110b + 10d \iff 11b + d = 21.$$

Лесно се вижда, че последното равенство не е изпълнено на никои цифри b и d.

б) Ще разгледаме два случая.

Първи случай. Търсеното число е четирицифрено. Нека то е

$$\overline{xyyx} = \overline{abba} + \overline{cdc}.$$

От сбора на единиците е ясно, че $a + c$ завършва на x. От сбора на хилядите следва, че $x = a$ или $x = a + 1$. Тъй като $c \neq 0$, първият случай е невъзможен, т.е. $x = a + 1$ и оттук $c = 1$. Тогава

$$900 = 10(11b - 11y + d) \iff 11(b - y) + d = 90.$$

Ако в последното равенство $b - y \leqq 7$, то $d \geqq 13$, което е невъзможно. Следователно $b - y = 8$ и $d = 2$. Решенията са две: $(b, y) = (9; 1)$, $(8; 0)$. Тогава числата от вида

$$\overline{(a+1)11(a+1)} \quad \text{и} \quad \overline{(a+1)00(a+1)} \quad \text{за} \quad 1 \leqq a \leqq 8$$

са едновременно огледални и забележителни четирицифрени числа, като са съответно равни на $\overline{a99a} + 121$ и $\overline{a88a} + 121$ (например, $2112 = 1991 + 121$ и $2002 = 1881 + 121$).

Втори случай. Търсеното число е петцифрено. Тъй като $9999 + 999 = 10998$, търсеното число е от вида

$$\overline{10x01} = \overline{9aa9} + \overline{2b2}$$

(до този извод се стига на база наблюдения за цифрите на хилядите и на единиците). Тогава $a + b + 1$ завършва на 0 и понеже a и b са цифри, следва, че $a + b = 9$. Също така от цифрите на стотиците и наличието на пренос следва, че $a + 3 \geqq 10$. Тогава $a \in \{7, 8, 9\}$. За всеки от трите случая пресмятаме $10001 = 9779 + 222$, $10101 = 9889 + 212$ и $10201 = 9999 + 202$.

Окончателно, търсените числа са $\overline{x11x}$, $\overline{x00x}$ за $2 \leqq x \leqq 9$, 10001, 10101 и 10201; те са общо 19 числа.

Задачата е решена от **Рая Савова** (5. клас, ППМГ, Бургас), **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас ППМГ, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Александър Мургин** (6. клас, ППМГ, Видин), **Дениз Потурлиев** (7. клас, СУ „Иван Вазов“, Плевен), а верни решения само на подточка а) са изпратили **Златимир Петров** (6. клас, ППМГ, Монтана), **Стефания Милева** (5. клас, МГ, Варна) и **Бенедетта Бенедетто** (5. клас, ППМГ, Монтана), **Александър Данчев** (6. клас, ППМГ, Стара Загора).

Задача 2. Едно естествено число наричаме *интересно*, ако се дели на 9 и в записа му няма еднакви цифри. Например, 1287 е интересно число, а 522 и 521 не са.

а) Колко са трицифрените интересни числа?

б) Колко са 8-цифрените интересни числа?

Решение на Николай Николаев от 6. клас, ППМГ, Видин.

а) Трицифрените кратни на 9 са $900 : 9 = 100$. От тях ще извадим броя на тези, които се записват с повтарящи се цифри. Това са 333, 666, 999, 990, 909, 900 и числата, които се записват с цифрите

$$(1,1,7);\ (2,2,5);\ (4,4,1);\ (5,5,8);\ (7,7,4);\ (8,8,2).$$

Всяка от шестте тройки поражда по 3 числа (например 117, 171, 711). Така получаваме $6+6.3=24$ трицифрени числа, кратни на 3, в чийто запис има повтарящи се цифри. Остават $100-24=76$ трицифрени интересни числа.

б) Тъй като $0+1+\cdots+9=45$, сборът на двете неизползвани цифри е 9.

Ако неизползваните цифри са 0 и 9, има 8! начина за подредба на останалите 8 цифри.

Ако неизползваните цифри са (1; 8), (2; 7), (3; 6) или (4; 5), останалите 8 цифри (сред които и 0) могат да се подредят по 7.7! начина. Получаваме

$$8!+4.7.7!=8.7!+28.7!=36.7!=181440$$

интересни 8-цифрени числа.

Задачата е решена от **Рая Савова** (5. клас, ППМГ, Бургас), **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Александър Мургин** (6. клас, ППМГ, Видин), **Златимир Петров** (6. клас, ППМГ, Монтана), **Дениз Потурлиев** (7. клас, СУ „Иван Вазов", Плевен) и частично от **Стефания Милева** (5. клас, МГ, Варна) и **Александър Данчев** (6. Клас, ППМГ, Стара Загора)

Задача 3. За естествените числа a и b с $\widetilde{a,b}$ ще означаваме десетичната дроб, която се получава като се запише числото a, след това десетична запетая и след нея числото b. Например, ако $a=20$ и $b=19$, то $\widetilde{20,19}=20,19$, а $\widetilde{19,20}=19,2$.

Да се намерят всички двойки $(a;b)$, за които:

а) $\widetilde{a,b}\cdot\widetilde{b,a}=13$.

б) $\widetilde{a,b}\cdot\widetilde{b,a}=160$.

Решение. Ако $(a;b)$ е решение, то и $(b;a)$ е решение. Затова може да търсим само двойките, за които $a \geqq b > 0$. Освен това е ясно, че

$$ab < \widetilde{a,b}\cdot\widetilde{b,a} < (a+1)(b+1). \tag{1}$$

а) От (1) следва, че

$$ab < 13 < (a+1)(b+1).$$

Ако a е двуцифрено число, от $ab < 13$ следва, че $b = 1$ и и единствените възможни стойности на a са 10, 11 и 12. Лесно се вижда, че в тези случаи даденото равенство не е изпълнено.

Ако a и b са цифри, като умножим двете страни на даденото равенство по 100, получаваме

$$\overline{ab}.\overline{ba} = 1300.$$

Произведението завършва на 0 и тъй като $a \geqq b$, имаме следните възможности: $(a;\ b) = (8;\ 5),\ \ (6;\ 5),\ \ (5;\ 4),\ \ (5; 2)$. Лесно се проверява, че само при $a = 5$ и $b = 2$ даденото равенство е изпълнено.

б) От (1) следва, че

$$ab < 160 < (a+1)(b+1). \tag{2}$$

Ако числото a е трицифрено, от $ab < 160$ следва, че $b = 1$. Но тогава $\widetilde{a,b}\cdot\widetilde{b,a}$ не е цяло. Следователно a е двуцифрено число.

Ако и числото b е двуцифрено, то може да е 10, 11 или 12 (тъй като $13^2 = 169 > 160$). От (2) при $b = 10$ следва, че $a = 14$ или 15; при $b = 11$ следва, че $a = 13$ или 14; при $b = 12$ следва, че $a = 12$; за всеки от тези случаи даденото равенство не е изпълнено.

За двуцифрено $a = \overline{xy}$ и едноцифрено b, като умножим двете страни на даденото равенство по 1000, получаваме

$$\overline{xyb} \cdot \overline{bxy} = 160000 = 2^8.5^4 = 256.625.$$

Единственото решение се получава при $a = 25$ и $b = 6$.

Задачата е решена от **Демира Недева** (6. клас, МГ, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас ППМГ, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ) и частично от **Рая Савова** (5. клас, ППМГ, Бургас) и **Стефания Милева** (5. клас, МГ, Варна).

ЛОГАРИТЪМ. ПОКАЗАТЕЛНИ И ЛОГАРИТМИЧНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Петя Тодорова

I. Логаритъм

Задача 1. Пресметнете стойността на израза:

а) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3}$; б) $49^{\log_7 \sqrt[4]{3}}$;

в) $81^{\frac{1}{2}\log_9 7} - \log_2(8.\sqrt{256})$; г) $\lg 9.\log_3 0,1$;

д) $\log_3 49.\log_{\sqrt{7}} 5.\log_{25} 27$; е) $\log_{16}\left(3-\sqrt{5}\right) + \dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Задача 2. Пресметнете:

а) $\dfrac{1}{8}.\sqrt{10^{\lg 400}} - 49^{\log_7 0,5} - \log_5\sqrt[4]{2}.\log_2 5 + \log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^{-1}$;

б) $\log_3 16.\log_2 3 - \log_{\frac{1}{3}}\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} + \sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

Задача 3. Даден е изразът

$$2.\log_4 25.\log_5\sqrt{x+2} - \log_4(x-3)^2 + \log_2(4x^2-16x+12) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 2.$$

а) Определете допустимите стойности на променливата, за която е дефиниран израза.
б) Опростете израза.
в) Намерете стойността на израза при $x = -\dfrac{1}{3}$ и сравнете тази стойност с числото $\log_3 2$.

Задача 4. Изразете чрез a и b числото M, ако:
а) $a = \log_5 4$, $b = \log_5 3$ и $M = \log_{25} 12$;
б) $a = \lg 3$, $b = \lg 2$ и $M = \log_5 6$.

Задача 5. Дадени са числата $a = \log_2 5, b = \log_{20} 80$ и $c = \log_{80} 640$.
а) Докажете, че $a > 2$.
б) Изразете чрез a числата b и c.
в) Сравнете числата b и c.

II. Показателни и логаритмични уравнения

Задача 6. Решете уравненията:

1. $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{x^2+2x} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-3}$

2. $25^{x-2} - 24.5^{x-3} - 1 = 0$

3. $5^{x-1} + 5.5^{2-x} = 26$

4. $64^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$

5. $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$

6. $5^{2x+1} + 2^{2x+1} = 7.10^x$

7. $(\sqrt{5}+2)^{\frac{6x-6}{x+1}} = (\sqrt{5}-2)^{-x}$

8. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992, x \in \mathrm{Z}$

9. $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}$

10. $\log_{\sqrt{2}} x + 2.\log_2(x+2) = 3.\log_{2\sqrt{2}}(x+6)$

11. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$

12. $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$

13. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$

14. $\log_x 3.\log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$

15. $\log_{16x} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$

16. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

III. Показателни и логаритмични неравенства

Задача 7. Сравнете:

$5^{\frac{3}{4}} \quad \cdots \quad 6^{\frac{3}{4}}$	$\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{2} \quad \cdots \quad \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{2}$
$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \quad \cdots \quad \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$	$\log_3 6 \quad \cdots \quad \log_5 6$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\log_{\frac{1}{3}} 4^{-1} \quad \cdots \quad \log_{\frac{1}{5}} 4^{-1}$
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$3^{\log_4 5} \quad \cdots \quad 3^{\log_5 4}$
$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \quad \cdots \quad \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}$	$a^{\frac{1}{3}} \quad \cdots \quad b^{\frac{1}{3}}\,(a > b > 1)$
$\pi^{-\sqrt{3}} \quad \cdots \quad \pi^{-1,7}$	$a^{\frac{1}{4}} \quad \cdots \quad b^{\frac{1}{4}}\,(0 < b < a < 1)$
$\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{4} \quad \cdots \quad \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{6}$	$a^5 \quad \cdots \quad b^5\,(a > b > 1)$
$\log_2\dfrac{1}{5} \quad \cdots \quad \log_3\dfrac{1}{5}$	$a^k \quad \cdots \quad b^k\,(b > a > 0, k < 0)$

Задача 8. Решете неравенствата:

1. $2^{-\frac{x}{3}} < 8$

2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-2}} . \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

3. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} . \left(\frac{147}{20}\right)^{x} < \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$

4. $(\log_3 2)^{x+2} < (\log_3 2)^{1-x}$

5. $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} - 7.2^{-x^2} + 3 > 0$

6. $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

7. $6.9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.4^{\frac{1}{x}} \leq 0$

8. $(x^2 + x + 1)^x < 1$

9. $\log_3 (9 - 3^x) \leq 0$

10. $\log_{0,25} \left(x^2 + 3x\right) \geq -1$

11. $\log_{\frac{2}{\pi}} (x+1) + \log_{\frac{2}{\pi}} (x-1) > \log_{\frac{2}{\pi}} 3$

12. $2 - \lg (27 - x) > \lg (x - 2)$

13. $\log_{\frac{1}{9}} (x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}} (2-x) \geq \log_{\frac{1}{3}} 27$

14. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leq 2$

15. $\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x}{x^2-1} < 0$

16. $\log_{2x} \left(x^2 - 5x + 6\right) > 1$

ОТГОВОРИ

Задача 1. **а)** $-\frac{1}{8}$; **б)** $\sqrt{3}$; **в)** 0; **г)** -2; **д)** 6; **е)** $\frac{1}{2}$.

Задача 2. **а)** 5; **б)** 12.

Задача 3. **а)** $x \in (-2; 1) \cup (3; \infty)$; **б)** при $x \in (-2; 1)$ имаме $\log_2 (1 - x)$, при $x \in (3; \infty)$ имаме $\log_2 (x - 1)$; **в)** $\log_2 \frac{4}{3} < \log_3 2$.

Задача 4. **а)** $\frac{a+b}{2}$; **б)** $\frac{a+b}{1-b}$.

Задача 5. **а)** $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$; **б)** $b = \frac{a+4}{a+2}; c = \frac{7+a}{a+4}$; **в)** $c > b$.

Задача 6. **1.** $-3; \frac{1}{2}$; **2.** 3; **3.** 1; 3; **4.** 3; $\log_6 8$; **5.** 2; $-1 - \log_3 2$; **6.** $-1; 0$; **7.** 2; 3; **8.** 3; **9.** 5; **10.** 2; **11.** 2; **12.** 0,0001; 10; **13.** $\frac{1}{25}$; **14.** $\frac{1}{9}; 9$; **15.** $4; 4\sqrt[3]{4}$; **16.** $\frac{1}{9}; 9$.

Задача 7.

$5^{\frac{3}{4}} < 6^{\frac{3}{4}}$	$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$	$\log_3 6 > \log_5 6$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\log_{\frac{1}{3}} 4^{-1} > \log_{\frac{1}{5}} 4^{-1}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$3^{\log_4 5} > 3^{\log_5 4}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$	$a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}\ (a > b > 1)$
$\pi^{-\sqrt{3}} < \pi^{-1,7}$	$a^{\frac{1}{4}} > b^{\frac{1}{4}}\ (0 < b < a < 1)$
$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6}$	$a^5 > b^5\ (a > b > 1)$
$\log_2 \frac{1}{5} < \log_3 \frac{1}{5}$	$a^k > b^k\ (b > a > 0, k < 0)$

Задача 8.

1. $x \in (-9; \infty)$;

2. $x \in \left[-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right] \cup (2; \infty)$;

3. $x < 0$;

4. $x > -0,5$;

5. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$;

6. $x \in (-\infty; \log_2(\sqrt{2}-1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$;

7. $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$;

8. $x \in (-\infty; -1)$;

9. $x \in [3\log_3 2; 2)$;

10. $x\, [-4; -3) \cup (0; 1]$;

11. $x \in (1; 2)$;

12. $x \in (2; 7) \cup (22; 27)$;

13. $x \in [-1; 2)$;

14. $x \in \left[0; \log_2 \frac{31}{16}\right)$;

15. $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$;

16. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3, 6)$.

МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“

17 февруари 2019 г., Бургас

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $\dfrac{13-3.(-1)^{2018}}{4.(-3)^2-2.13}$ е равна на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 5

2. Колко кубични сантиметра са $12\frac{1}{2}\%$ от 8 dm^3?

А) 10 **Б)** 100 **В)** 1000 **Г)** 0,001

3. Мащабът на една карта е 1 : 200 000. Колко километра е разстоянието по права линия между градовете A и B, ако на картата отсечката AB е с дължина 6,4 dm?

А) 1,28 **Б)** 12,8 **В)** 128 **Г)** 1280

4. Степента на многочлена $5x^4y^5z-7\left(x^2y^2z^2\right)^3+3(xyz)^2$ е:

А) 34 **Б)** 18 **В)** 10 **Г)** 6

5. Изразът $(x-1)^3-x(x+3)^2$ е тъждествен на:

А) $-9x^2-6x-1$ **Б)** $-6x^2-2x-1$

В) $-9x^2-3x-1$ **Г)** $-x^2-2x-1$

6. Кой от дадените изрази **НЕ** е тъждествено равен на израза

$$(x-4)^2-\left(16-x^2\right)?$$

А) $(x-4)(2x-8)$ **Б)** $2x(x-4)$

В) $(4-x)^2-\left(16-x^2\right)$ **Г)** $(x-4)^2+(x-4)(x+4)$

7. На колко е равна стойността на израза $a^3+b^3+3ab(a+b)$, ако $a+b=3$?

А) 0 **Б)** 36 **В)** 27 **Г)** 81

8. На кое от дадените уравнения е еквивалентно уравнението $|x+3|=3$?

А) $x+3=3$ **Б)** $|x|+|3|=3$ **В)** $x+3=-3$ **Г)** $x(x+6)=0$

9. Кой от посочените квадратни тричлени е разложим?

А) $x^2 - x + 1$ **Б)** $x^2 - 5x + 4$

В) $x^2 + x + 15$ **Г)** $2x^2 - 4x + 3$

10. Сборът от цифрите на двуцифрено число е 9. Ако прибавим към него 45, ще получим число, написано със същите цифри, но в обратен ред. Кое е това число?

А) 45 **Б)** 18 **В)** 36 **Г)** 27

11. Автомобил се движил 20 минути със скорост 60 км/час и още 40 минути със скорост 90 км/час. Средната му скорост била:

А) 75 км/ч **Б)** 70 км/ч **В)** 72 км/ч **Г)** 80 км/ч

12. В правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 cm са построени точките $A\,(-3;-2)$, $B\,(2;3)$ и $(-3;4)$. Колко квадратни сантиметра е лицето на ABC?

А) 7,5 **Б)** 8,5 **В)** 12 **Г)** 15

13. За триъгълника ABC е дадено, че $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm. Права l минава през точка A, успоредна е на правата BC и е на разстояние 12 cm от нея. Намерете лицето на повърхнината на тялото, получено при завъртането на ABC около правата l.

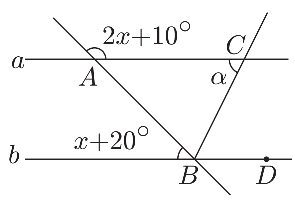
А) 360π cm^2 **Б)** 672π cm^2 **В)** 516π cm^2 **Г)** 1344π cm^2

14. Лъчите $OM^{\rightarrow}$ и $ON^{\rightarrow}$ са вътрешни за изправения $\sphericalangle AOB$, като лъчът $ON^{\rightarrow}$ е вътрешен за $\sphericalangle AOM$. Намерете $\sphericalangle AON$, ако

$$\sphericalangle AOM : \sphericalangle MON : \sphericalangle NOB = 5 : 3 : 10.$$

А) 20° **Б)** 30° **В)** 50° **Г)** 80°

15. Правите a и b са успоредни и BC е ъглополовяща на $\sphericalangle DBA$. По данните от чертежа определете стойностите на x и α.

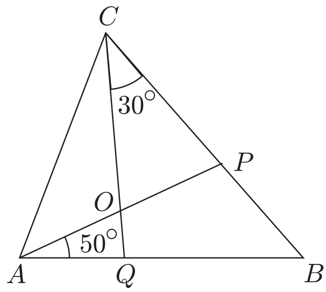


А) 10° и 85° **Б)** 50° и 55°

В) 30° и 75° **Г)** 50° и 110°

16. В триъгълника ABC е дадено, че $\sphericalangle ABC : \sphericalangle BAC = 2 : 3$, а $\sphericalangle ACB$ е два пъти по-малък от $\sphericalangle ABC$. Колко градуса е най-големият външен ъгъл на триъгълника?

А) 120° **Б)** 135° **В)** 140° **Г)** 150°



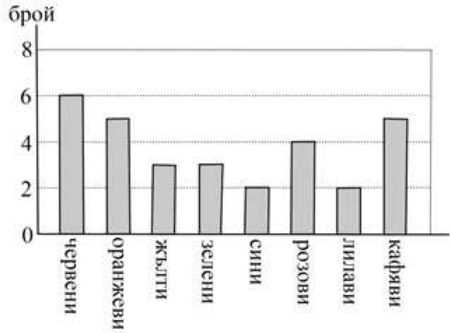
17. На чертежа $\sphericalangle APB + \sphericalangle BQC = 150^\circ$. Колко градуса е $\sphericalangle AOQ$?

А) 35° **Б)** 30°

В) 65° **Г)** 90°

ЗАДАЧИ С КРАТЪК СВОБОДЕН ОТГОВОР

18. В непрозрачна кутия са поставени еднакви по големина, но различни по цвят топчета. Броят им от всеки цвят е показан на диаграмата. Каква е вероятността, без да гледа в кутията, Росен да извади едно червено топче?



19. Ако n е естествено число, отговорете с „Да“, ако твърдението е вярно и с „Не“, ако твърдението не е вярно.

Твърдение	**Да/ Не**
$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ се дели на 7	
$5.3^n + 3^{n+2}$ се дели на 5	
$7^{n+2} - 7^{n+1}$ се дели на 6	
$\dfrac{11^{2n+3} + 14.11^{2n+2}}{25}$ е цяло число	
$\dfrac{2019^{2020+n}}{2019^{2021+n}}$ е цяло число	

20. При смесването на 16% спиртен разтвор с 64% спиртен разтвор са получени 30 литра 32% спиртен разтвор. Колко литра 64% разтвор са използвани?

21. Намерете за коя стойност на параметъра a коефициентите на членовете от втора и първа степен в нормалния вид на многочлена

$$12a^2(x-1)(1-x)-4(-x-a)^3$$

са равни.

22. Лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ са вътрешни за $\sphericalangle COD = 146^\circ$, като $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$ и $OA^{\rightarrow}$ е вътрешен за $\sphericalangle BOC$. Колко градуса е ъгълът между ъглополовящите на $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOD$, ако $\sphericalangle AOB$ е с 50° по-голям от $\sphericalangle AOC$?

ЗАДАЧИ С РАЗШИРЕН СВОБОДЕН ОТГОВОР

23. Решете уравнението

$$\frac{4x+5}{4}-\frac{1}{2}\left(4-\frac{3-x}{3}\right)=x+1\frac{1}{6}.$$

Вярно ли е, че решението му изпълнява неравенствата $-8,9 < x \leqq -8,15$?

24. Влак изминава разстоянието между гарите A и B по разписание за определено време. Ако влакът тръгне от A към B и се движи със скорост 75 км/ч, ще пристигне в гара B 36 минути по-рано от предвиденото, а ако се движи с 60 км/ч, за определеното време ще стигне на 30 км преди гара B. Да се намери:

А) Разстоянието между гарите A и B.

Б) Скоростта с която се движи влакът по разписание.

25. За остроъгълния $\triangle ABC$ височините през върховете A и B се пресичат в точка H, а ъглополовящите през върховете B и C се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle AHB = \sphericalangle BOC$, то пресметнете отношението $\sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB$.

Отговори и решения

1. А; **2.** В; **3.** В; **4.** Б; **5.** А; **6.** А; **7.** В; **8.** Г; **9.** Б; **10.** Г; **11.** Г; **12.** Г; **13.** Б; **14.** Б; **15.** Б; **16.** Г; **17.** А; **18.** 0,2; **19.** Да; Не; Да; Да; Не; **20.** 10; **21.** 0 или 4; **22.** 57°.

23. Като разкрием скобите, получаваме $\dfrac{4x+5}{4}-2+\dfrac{3-x}{6}=x+\dfrac{7}{6}$. Като приведем към общ знаменател, имаме $3(4x+5)-24+2(3-x)=12x+14$, откъдето $-2x=17$, т.е. $x=-8,5$. Вярно е, че $-8,9<-8,5<-8,15$.

24. Нека определеното време е x ч. Като се движи $x - \dfrac{36}{60} = x - 0,6$ ч със скорост 75 км/ч, влакът изминава $AB = 75(x - 0,6)$ км. Като се движи x ч със скорост 60 км/ч, влакът изминава $60x$ км. От равенството

$$60x + 30 = 75(x - 0,6)$$

намираме $x = 5$.

А) $AB = 60.5 + 30 = 330$ км.

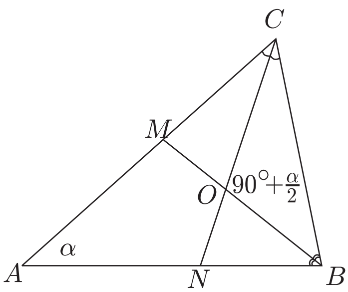
Б) Скоростта по разписание е $330 : 5 = 66$ км/ч.

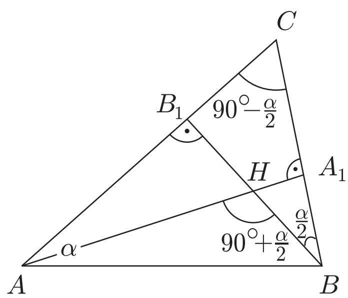
25. Означаваме $\sphericalangle BAC = \alpha$. От $\triangle BOC$ изразяваме:

$$BOC = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\sphericalangle ABC + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - BAC\right),$$

т.е. $\sphericalangle BOC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

Но $\sphericalangle AHB = \sphericalangle BOC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ и е външен за $\triangle BHA_1$, в който $\sphericalangle BA_1H = 90^\circ$, следователно $\sphericalangle HBA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$.





Тогава в $\triangle B_1CB$, където $\sphericalangle BB_1C = 90^\circ$, е изпълнено, че $\sphericalangle B_1CB = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Така за $\triangle ABC$ имаме: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ и

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \left(\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

т.е. отношението е $\sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 1 : 1$.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

Мария Томова

Модул 1

1. На колко е равна стойността на израза $313 - 13.13$?

А) 144 **Б)** 287 **В)** 482 **Г)** 3900

2. Колко на брой са естествените числа, които могат да стоят на мястото на ⊠, така че да бъде изпълнено, че

$$72 : 3 + 3 < \boxtimes < 72.3 + 3?$$

А) 191 **Б)** 193 **В)** 419 **Г)** 421

3. Колко от посочените равенства са верни?

(1) 2 м + 2 см = 22 дм (2) 2 кг + 19 гр = 2019 гр

(3) 6 ч + 6 мин = 66 мин (4) 30 лв + 1 ст = 301 ст

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

4. Страните на правоъгълник в сантиметри се измерват с две последователни естествени числа. Ако обиколката на правоъгълника е 26 см, то колко квадратни сантиметра е лицето му?

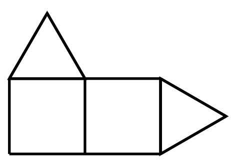
А) 13 **Б)** 36 **В)** 42 **Г)** 168

5. Куку има колекция от самолетчета – някои от тях са сини, а останалите – бели на цвят. Куку подреди всички самолетчета от колекцията си в редица, в която всеки две съседни самолетчета бяха с различен цвят. Първото самолетче в редицата беше бяло на цвят. Колекцията на Куку може да съдържа:

А) 8 сини и 7 бели самолетчета **Б)** 8 сини и 6 бели самолетчета

В) 7 сини и 8 бели самолетчета **Г)** 6 сини и 8 бели самолетчета

6. Фигурата на чертежа се състои от два квадрата и два равностранни триъгълника. Ако обиколката на всеки от триъгълниците е равна на 24 см, то на колко сантиметра е равна обиколката на цялата фигура?



А) 48 **Б)** 64 **В)** 66 **Г)** 88

7. Ако a е естествено число, то $\{a\} = 2.a + 9$, а $\langle a \rangle = a - 2$. На колко е равна стойността на израза $\{2019\} + \langle 2019 \rangle$?

А) 2030 **Б)** 4045 **В)** 4047 **Г)** 6064

8. . Ачо има няколко бонбона. Ако изяде 12 от тях, ще му останат 4 пъти по-малко бонбони, отколкото е имал първоначално. Колко бонбона ще му останат, ако изяде половината от тези, които има?

А) 4 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 16

9. Цвети имала 28 лалета, Лили – 44, а Роза – 24 лалета. Лили дала по няколко от лалетата си на другите две момичета, така че всяка от трите да има един и същ брой лалета. Колко лалета е дала Лили на Роза?

А) 4 **Б)** 8 **В)** 12 **Г)** 32

10. Квадри нарисува квадрат. Ако Квадри увеличи едната му страна 3 пъти, а другата – 5 пъти, ще получи правоъгълник, чиято обиколка е A пъти по-голяма от обиколката на квадрата, а лицето му е B пъти по-голямо от лицето на квадрата. На колко е равен сборът $A + B$?

А) 15 **Б)** 17 **В)** 19 **Г)** 23

11. На колко е равна стойността на израза

$$2019 - 2015 + 2011 - 2007 + 2003 - 1999 + \cdots + 19 - 15 + 11 - 7?$$

А) 504 **Б)** 1008 **В)** 2016 **Г)** 2018

12. На чертежа отсечката AB има дължина 40 см, а отсечката CB е с 12 см по-къса от отсечката AC. Колко сантиметра е разстоянието между средата на AB и средата на CB?

А) 13 **Б)** 14 **В)** 20 **Г)** 26

13. Юли написа на отделни листчета всички естествени числа с различни цифри, които може да състави, използвайки само цифрите 2, 0, 1 и 9 – всяко възможно число на точно едно листче. След това Юли разбърка листчетата и започна да вади от тях, без да гледа. Колко най-малко листчета трябва да извади Юли, за да е сигурен, че сред извадените ще има поне едно, на което е записано трицифрено число?

А) 30 **Б)** 31 **В)** 40 **Г)** 41

14. Хикс си намислил едно число. Той го разделил на 2, след което към частното прибавил 4 и получил 38. Колко щеше да получи Хикс, ако към намисленото от него число първо беше прибавил 4, а после беше разделил сбора на 2?

А) 36 **Б)** 38 **В)** 44 **Г)** 68

15. Ари, Бо, Ву и Гео са се наредили в този ред един след друг. Всеки от тях е или лъжец (и винаги лъже), или рицар (и винаги казва истината). Те изказали следните твърдения:

Ари: „Зад мен има поне двама лъжци.“

Бо: „Лъжците пред мен са колкото лъжците зад мен.“

Ву: „И четиримата сме лъжци.“

Гео: „И четиримата сме рицари.“

Колко от четиримата са рицари?

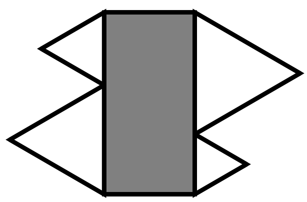
А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

16. Три еднакви бадемчета тежат колкото 4 еднакви тиквени семки. Една от тиквените семки тежи два пъти по-малко от един лешник. Лешникът е с 8 грама по-тежък от едно от бадемчетата. Колко грама тежи една от тиквените семки?

17. Розалия засади в понеделник в редица 8 червени рози. Във вторник между всеки две съседни цветя тя засади по две бели рози. В сряда между всеки две съседни цветя Розалия засади по една жълта роза. Колко общо са станали засадените рози?

18. Няколко деца събрали общо 45 лв за подарък на свой приятел. Част от децата дали за подаръка по 6 лв, а всички останали – по 7 лв. Колко лева щяха да са събрали децата, ако всяко от тях беше дало по 1 лв повече?

19. На чертежа вдясно е изобразен сив правоъгълник, върху две от страните на който са построени равностранни триъгълници, както е показано. Обиколката на сивия правоъгълник е 44 см, а на получената след построяването на триъгълниците фигура – 74 см. Колко квадратни сантиметра е лицето на правоъгълника?



20. Тео празнува рождения си ден на 15.03.2019 година. Сборът от цифрите, с които се записва тази дата е равен на $1+5+0+3+2+0+1+9=21$. Колко на брой са датите през 2019 година (включително посочената), които се записват с цифри със същия сбор?

Модул 2

Запишете подробно решение на всяка от двете задачи.

21. Всеки от тримата съученици Ачо, Бачо и Вачо редовно решава задачи, за да поддържа математическата си форма. През месец март всяко от момчетата има собствен план за решаване на задачи.

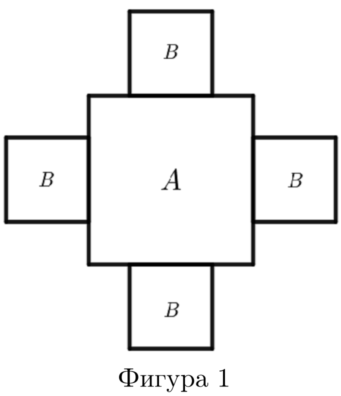
А) През тази седмица всеки ден от понеделник до неделя включително Ачо решава задачи по следния план: в понеделник е решил 5 задачи, а във вторник – 7 задачи. В сряда е решил толкова задачи, колкото общо е решил в понеделник и вторник. В четвъртък – толкова, колкото общо във вторник и сряда. Всеки следващ ден Ачо решава толкова задачи, колкото общо е решил предните два дни. Колко общо задачи ще реши Ачо по този начин за седемте дни от понеделник до неделя?

Б) Бачо е планирал да решава задачи през всеки ден на месец март, като на 1. март реши една задача, на 2. март – 2 задачи и на всеки следващ ден до 16. март включително - по една задача повече, отколкото на предходния. На 17. март според плана си Бачо ще реши една задача по-малко, отколкото на 16. март и всеки следващ ден до края на месеца ще решава по една задача по-малко, отколкото през предходния. Колко общо задачи ще реши с този план Бачо през месец март?

В) Вачо е планирал да реши един сборник с 84 задачи. През някои от дните той ще решава по 7 задачи, а в останалите – по 8 задачи от сборника. Ако Вачо е решил първите си задачи от сборника на 1. март, то на коя дата най-рано ще реши последните задачи от него?

22. Квадри обича да рисува фигури, съставени само от квадрати.

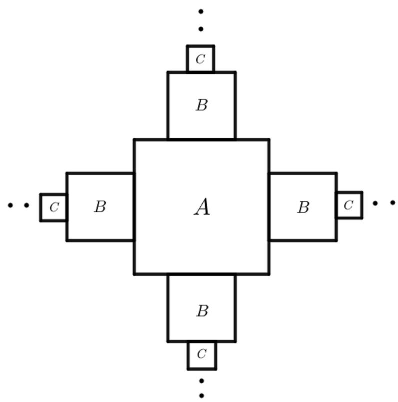
А) Преди два дни Квадри нарисува фигурата, показана на фигура 1, съставена от 5 квадрата. Квадратите, означени с B са еднакви помежду си. Ако лицето на всеки един от квадратите B е 36 кв см и страната на квадрата A е с 8 см по-голяма от страната на B, намерете обиколката на цялата фигура в сантиметри.



Фигура 1

Б) Вчера Квадри нарисува фигурата, изобразена на фигура 1, в която четирите квадрата B са еднакви и страната на всеки от тях е три пъти по-малка от тази на квадрата A. Ако обиколката на цялата фигура е 240 см, то колко квадратни сантиметра е лицето ѝ?

В) Днес Квадри нарисува фигура с няколко хода. На първия си ход той нарисува квадрата A. На втория ход върху всяка от страните му, той постави по един от четирите еднакви квадрата B, на третия върху всеки от квадратите B постави по един от четирите еднакви квадрата C. Квадри продължи по същия начин, поставяйки на всеки следващ ход по 4 еднакви квадрата, докато постави общо 65 квадрата. Началото на фигурата му е показано на фигура 2.



Фигура 2

Квадратите, поставяни на всеки следващ ход имат страна, която е с 1 см по-малка от страната на квадратите от предходния ход. Всеки от четирите квадрата, поставени на последния ход, има страна 1 см. Намерете колко сантиметра е обиколката на фигурата, нарисувана от Квадри днес.

Отговори

1. А;	**2.** А;	**3.** Б;	**4.** В;	**5.** В;
6. Б;	**7.** Г;	**8.** В;	**9.** Б	**10.** В;
11. Б;	**12.** А;	**13.** Б	**14.** А;	**15.** А;
16. 12;	**17.** 43;	**18.** 52;	**19.** 105;	**20.** 34;

21. А) 205; Б) 256; В) 11 март;

22. А) 104 см; Б) 1872 кв. см; В) 1156 см.

ТРЕНИРОВЪЧНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

24 март 2019 г., Бургас

Модул 1

1. Числото, което е сбор на 37 хиляди, 37 стотици и 37 единици, е:

А) 4107 **Б)** 37407 **В)** 40737 **Г)** 373737

2. Стойността на израза $19 + 19.(24 - 24 : 3)$ е равна на:

А) 608 **Б)** 323 **В)** 19 **Г)** 0

3. Неизвестното число x от равенството $16 - 4.(2 + 6 : x) = 4$ е равно на:

А) 6 **Б)** 3 **В)** 2 **Г)** 1

4. Разликата между най-голямото и най-малкото четирицифрени числа, които ще се получат, ако задраскате по три цифри от редицата 2741608, е:

А) 5360 **Б)** 5500 **В)** 5860 **Г)** 6000

5. Четвъртинката на петинката на едно число е 3 пъти по-малка от 30. Кое е това число?

А) 200 **Б)** 540 **В)** 660 **Г)** 1800

6. Равнобедрен триъгълник има бедро 7 см и основа, която е с 4 см по-малка от него. Обиколката на триъгълника е с 1 см по-голяма от обиколката на квадрат. Страната на квадрата е:

А) 3 см **Б)** 4 см **В)** 6 см **Г)** 7 см

7. Три химикалки, две тетрадки и един молив струват 2 лева и 42 стотинки. Пет химикалки, 3 тетрадки и 4 молива струват 4 лева и 24 стотинки. Колко струват 2 химикалки, 1 тетрадка и 3 молива?

А) 1 лв. 82 ст. **Б)** 2 лв. 18 ст. **В)** 2 лв. 82 ст. **Г)** 6 лв. 66 ст.

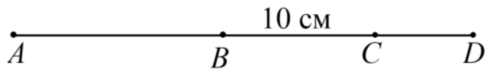
8. Първи август 2019 година ще бъде в четвъртък. Какъв ден от седмицата е бил през 2015 година?

А) вторник **Б)** петък **В)** събота **Г)** неделя

9. Осем момчета се подредили в редица на равни разстояния един от друг, като между първия и последния имало 5 м 60 см. Ако последните три момчета напуснат редицата, а останалите не мърдат от местата си, колко ще бъде разстоянието между първото и последното момче в новата редица?

А) 3 м 20 см **Б)** 3 м 50 см **В)** 4 м **Г)** 4 м 20 см

10. Точките A, B, C и D са подредени една след друга, както е показано на картинката. Ако знаете, че $BC = 10$ см, AC е три пъти по-голяма от CD и $AD = 164$ мм, то отсечката AB е равна на:



А) 23 см **Б)** 23 мм **В)** 113 мм **Г)** 113 см

11. В 4В клас учат 26 ученици. Известно е, че за първия учебен срок 14 от тях имат отлична оценка по математика, а 13 по български език. Дванадесет от учениците нямат отлична оценка по нито един от двата предмета. Колко са учениците в класа, които имат шестици и по двата предмета?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 13 **Г)** 14

12. Числото $abcde\ldots$ е съставено по следното правило: „a и b са произволни едноцифрени числа, различни от 0, след тях се записва произведението на последните две цифри, след тях отново произведението на последните две цифри, и т.н.“. По това правило, започвайки с числата 3 и 7, са написани 2019 цифри и се получила редицата от цифри 3721224... Колко пъти е написана нечетна цифра?

А) 252 **Б)** 406 **В)** 504 **Г)** 506

13. Сутринта мама ми даде парички. С третинката от тях си купих тетрадка по математика. Два лева дадох за закуска, а с четвъртинката от останалите купих на братчето си сок. Останаха ми 1 лев и 50 стотинки. Колко парички ми даде мама?

А) 303 стотинки **Б)** 6 лева

В) 186 стотинки **Г)** 24 лева

14. Разстоянието между градовете A и B е 60 км. В 8 часа сутринта от град A за град B тръгнал велосипедист със скорост 15 км/ч. Точно по средата на пътя той се разминал с друг велосипедист, който идвал от град B и се движел със скорост 20 км/ч. В колко часа е тръгнал велосипедистът от град B?

А) в 6 часа и 30 минути **Б)** в 7 часа

В) в 8 часа и 30 минути **Г)** в 9 часа

15. На 54 различни картончета Краси нарисувала по една фигура. Няколко от фигурите били триъгълници, а останалите – шестоъгълници. Ако знаете, че общо нарисуваните от нея отсечки са 270, то намерете броя на нарисуваните шестоъгълници.

А) 54 **Б)** 36 **В)** 27 **Г)** 18

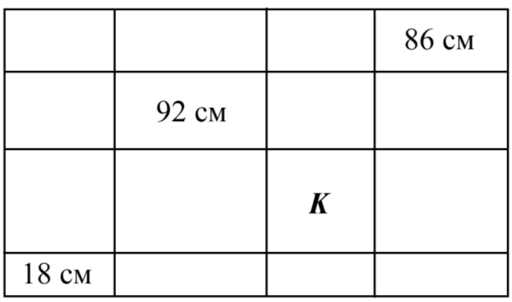
16. Стела купила 15 бели и още толкова червени рози. След като подарила няколко бели рози се оказало, че са ѝ останали 3 пъти по-малко бели рози, отколкото червени. След това купила още две бели и няколко червени рози. Сега пък червените рози станали 6 пъти повече от белите. Колко червени рози е купила Стела втория път?

17. Едно след друго са написани естествените числа 758, 757, 756, 755, ... и така се получила редица от 2019 цифри.

$$758757756755754753\ldots$$

Кое е последното написано число?

18. Правоъгълникът на чертежа има обиколка 236 см и е разделен на 15 правоъгълника и един квадрат, означен с буква ***К***. В три от малките правоъгълници са написани техните обиколки. Намерете лицето на квадрата ***К***.



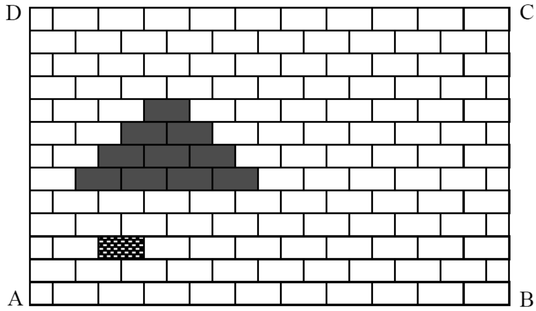
19. В един зоопарк живеят 5 възрастни маймуни, 3 малки маймунки и 2 новородени. Всеки ден те изяждат по 114 банана, като всяка малка маймунка изяжда 3 пъти по-малко от една възрастна и 2 два пъти повече от една новородена. Колко банана изяждат малките маймунки за една седмица?

20. В склад има големи и малки кутии. В малка кутия се събира само една топка, а в голяма – две топки. 13 топки могат да се разположат в кутиите така, че да останат 9 празни кутии. 10 топки могат да се разположат така, че да останат 6 празни кутии. Колко са кутиите в склада?

Модул 2

Запишете подробно решение на всяка от двете задачи.

21. „Стената“, която виждате на чертежа (по-долу) има 13 реда, всеки от които е съставен от по десет цели тухли и една половинка. (Всички цели тухли са еднакви!)



а) Намерете обиколката на стената (периметъра на правоъгълника ABCD), ако дължината на една цяла тухла е два пъти по-голяма от височината ѝ, и лицето на „видимата“ стена на една цяла тухла е 50 кв. см (т.е., лицето на едно защриховано правоъгълниче).

б) Намерете лицето на стената (лицето на правоъгълника ABCD), ако периметърът на затъмнената на чертежа част е 96 см, и дължината на една тухла е два пъти по-голяма от височината ѝ.

22. За изписването на днешната дата 24.03.2019 г. са използвани 8 карти, на всяка от които е изписана по една цифра, съответно $\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{9}$.

А) Коя е най-ранната дата от XXI век, която може да се изпише, размествайки тези карти?

Б) Коя е последната дата от XXI век, която може да се изпише, размествайки тези карти?

В) Колко от датите на XXI век могат да се изпишат, размествайки тези карти?

Пояснения:

XXI век започна на 1 януари 2001 г. и свършва на 31 декември 2100 г. Датите се изписват във формат: $\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{\text{дата}}.\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{\text{месец}}.\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{година}}$, например 5 юни 2008 г. ще се изпише $\underbrace{\boxed{0}\boxed{5}}_{\text{дата}}.\underbrace{\boxed{0}\boxed{6}}_{\text{месец}}.\underbrace{\boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{8}}_{\text{година}}$.

Отговори

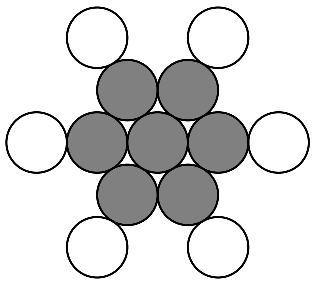
1. В; **2.** Б; **3.** А; **4.** Г; **5.** А; **6.** Б; **7.** А; **8.** В; **9.** А; **10.** Б; **11.** В; **12.** Г; **13.** Б; **14.** В; **15.** Б; **16.** 27; **17.** 79; **18.** 100; **19.** 126; **20.** 16.

21. А) Обиколката на стената е 340 см.
Б) Лицето на стената е 4368 кв.см.

22. А) Най-ранната дата е 29.04.2013.
Б) Последната дата е 30.12.2094.
В) Всички дати са 62 на брой.

ТРИ СЪСТЕЗАТЕЛНИ ЗАДАЧИ ОТ ПОСЛЕДНАТА МИНУТА

Задача 1. В кръгчетата на схемата записали числата $1, 2, 3, \ldots, 13$ така, че сборът на петте числа по всяка права и сборът на седемте числа в оцветените кръгчета е един и същ. На колко може да е равен този сбор? (Намерете всички възможности и посочете съответни примери за попълване на схемата.)



Задача 2. Да се намерят всички двойки неотрицателни цели числа $(a; b)$, за които

$$2^{a+1}.\ 5^a = (3b+1)(3b+2).$$

Задача 3. Една година ще наричаме *интересна*, ако тя се записва с четири различни цифри. Например, всичките седем години от 2013 до 2019 са интересни.

а) Кои са следващите седем поредни интересни години?

б) Има ли осем поредни интересни години в интервала от 1000 до 9999 година?

КАК НИ ПОМАГА „МАТЕМАТИЧЕСКАТА“ РИБА

Любомир Любенов

Съвсем наскоро един приятел – журналистът Кънчо Пенев, ми каза закачливо:

— Дай ми една интересна математическа задача.

Без да се съобразя с това, че той е заклет рибар, му дадох веднага следната задача.

Задача 1. Главата и тялото на една риба тежат 3 килограма, тялото и опашката – 5 килограма, а опашката и главата тежат 4 килограма. Колко килограма тежи тази риба?

— Не знам решението на тази задача, но ми се струва, че ти измисли една задача за една *математическа* риба. Как така тялото и опашката тежат повече, отколкото главата и тялото?

Нямаше как, съгласих се, защото имаше право.

— Знаеш ли, хареса ми това, че нарече тази риба *математическа.* Защото тази задача наистина има чисто математически характер, а не се отнася за никаква реална риба, каквато ти не си ловил скоро.

— Въпреки, че разбирам твоя хумор, трябва да ти кажа, че съвсем наскоро улових един 6-килограмов шаран, точно толкова килограма, колкото тежи твоята *математическа* риба.

— Ти все пак реши задачата. Как стори това? – полюбопитствах аз.

— Много просто – събрах числата 3, 4 и 5 и получих удвоеното тегло на рибата, 12 килограма. А това означава, че тя тежи точно 6 килограма, колкото тежеше шаранът, който хванах на язовир Жребчево.

— Интересно, ти просто разказа истинското решение на задачата.

— А нима има неистински решения на задачите?

— Не се изразих правилно, исках да кажа, че ти преразказа едно от решенията от книгата с фолклорни математически задачи – допълних аз. Знам няколко задачи, които се решават точно с този подход, с който ти реши задачата за моята математическа риба. Ето ги.

Задача 2. Разполагаме с монети от 10, 20 и 50 стотинки. Броят на монетите от 10 стотинки и от 20 стотинки е 5, броят на монетите от 20 стотинки и от 50 стотинки е 7, а броят на монетите от 10 стотинки и от 50 стотинки е 4. По колко монети има от всеки вид?

Задача 3. Четирима приятели – Иван, Петър, Краси и Ники, имат бонбони. Иван и Петър имат общо 5 бонбона, Петър и Краси имат общо 6 бонбона, Краси и Ники имат общо 5 бонбона, а Ники и Иван имат общо 4 бонбона. Колко бонбона имат общо четиримата приятели?

Задача 4. За колекцията си Румен купил 4 марки – немска, полска, китайска и румънска. Цената на три марки, сред които не е немската, е 7 долара. Цената на три марки, сред които не е румънската, е 6 долара. Цената на три марки, сред които не е китайската, е 7 долара. Цената на три марки, сред които не е полската, е 4 долара. Колко струва всяка от марките?

След десетина минути Кънчо се обърна към мен и ми каза:

— В задачата за бонбоните не се решава като първата. Има излишни условия – не е необходимо например да знаем колко бонбона имат Петър и Краси, Ники и Иван.

— Да, това което казваш е правилно.

— А задачата за марките е интересна, но трябва да се внимава, ако съберем данните от условието на задачата ще получим *учетворената* обща цена, намалена с общата цена – т.е. *утроената* цена.

С това разговорът ни приключи, а аз удовлетворен от определението *математическа риба,* се залових с написването на решенията на задачи 2., 3. и 4.

Решение на задача 2. Записваме условието така:

Брой монети от  + Брой монети от  = Общо 5 монети

Брой монети от  + Брой монети от  = Общо 7 монети

Брой монети от  + Брой монети от  = Общо 4 монети

Събираме всички равенства и тогава $5 + 7 + 4 = 16$ е удвоеният брой монети от 10, 20 и 50 стотинки. Тогава броят на монетите от 10, 20 и 50 стотинки е 8.

Броят на монетите от 50 стотинки ще получим, като от общия брой монети извадим броя на монетите от 10 и 20 стотинки; получаваме $8-5 = 3$ монети от 50 стотинки.

Броят на монетите от 20 стотинки ще получим, като от общия брой монети извадим броя на монетите от 10 и 50 стотинки; получаваме $8-4 = 4$ монети от 20 стотинки.

За монетите от 10 стотинки остават $8 - (3 + 4) = 1$.

Решение на задача 3. Записваме условието така:

$$\begin{cases} \text{И} + \text{П} = 5 \\ \text{П} + \text{К} = 6 \\ \text{К} + \text{Н} = 5 \\ \text{Н} + \text{И} = 4 \end{cases}$$

Ако съберем първото и третото равенство, ще получим, че

$$\text{И} + \text{П} + \text{К} + \text{Н} = 10.$$

Нека посочим едно примерно разпределение на бонбоните.

Иван – 1 бонбон, Петър – 4 бонбона, Николай – 3 бонбона, Красимир – 2 бонбона.

Има още две възможни разпределения:

Иван – 2 бонбона, Петър – 3 бонбона, Николай – 2 бонбона, Красимир – 3 бонбона;

Иван – 3 бонбона, Петър – 2 бонбона, Николай – 1 бонбон, Красимир – 4 бонбона.

Решение на задача 4. Записваме условието така:

$$\begin{cases} \text{полска} + \text{китайска} + \text{румънска} = 7 \\ \text{немска} + \text{полска} + \text{китайска} = 6 \\ \text{немска} + \text{полска} + \text{румънска} = 7 \\ \text{немска} + \text{китайска} + \text{румънска} = 4 \end{cases}$$

Сборът $7 + 6 + 7 + 4$ е утроеният сбор на цените на четирите марки; тогава четирите марки струват общо 8 долара.

Сега от първото условие следва, че немската марка струва $8 - 7 = 1$ долар; румънската струва $8 - 6 = 2$ долара; китайската струва $8 - 7 = 1$ долар; а полската е най-скъпа: $8 - 4 = 4$ долара.

Като *„Великата китайска стена“* е следващата задача.

Задача 5. (Второ световно отборно състезание в Пекин, 2014 г.)

$$\begin{cases} \mathbf{A}+B+C=1 \\ B+C+D=2 \\ C+D+E=3 \\ D+\mathbf{E}+F=4 \\ E+F+G=5 \\ F+G+H=6 \\ G+H+\mathbf{I}=7 \end{cases}$$

Да се пресметне $A \ + \ E \ + \ I$.

Решение. Сравняваме второто и третото равенство и получаваме, че

$$E = B + 1.$$

От третото и четвъртото получаваме, че $F = C + 1$, а от последните две равенства следва, че

$$I = F + 1, \text{ откъдето } I = (C+1) + 1 = C + 2.$$

Тогава

$$A \ + \ E \ + \ I = A + (B+1) + \ (C+2) = \ A + B + C + 3 = 1 + 3 = 4.$$

И една задача от „Математика без граници“ през 2016–2017 г.

Задача 6. Колко фунта тежат всичките пет чувала, ако първият и вторият тежат общо 7 фунта, вторият и третият - 9, третият и четвъртият – 11 фунта, четвъртият и петият – 8 фунта, първият, третият и петият – 10 фунта?

Решение. Нека теглото на чувалите означим съответно с A, B, C, D и E. Тогава условието на задачата е:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ B+C=9 \\ C+D=11 \\ D+E=8 \\ A+C+E=10 \end{cases}$$

Като съберем първото и четвъртото равенство, получаваме

$$A + B + D + E = 15$$

и тъй като $A + C + E = 10$, то $B + D = C + 5$.

Като съберем второто и третото равенство, получаваме

$$B + D + 2C = 20, \text{ откъдето } C + 5 + 2C = 20.$$

Намираме, че $C = 5$ и оттук $A = 3$, $B = 4$, $D = 6$, $E = 2$. Следователно $A + B + C + D + E = 20$.

Решете самостоятелно следващите задачи:

Задача 7. (AIMO, 2014) В една ферма има 64 пилета или патици, 55 патици или гъски, 47 пилета или гъски. Колко пилета, патици и гъски има във фермата?

Отговор. Пилета – 28; патици – 36; гъски - 19.

Задача 8. В едно семейство имало четирима братя на различна възраст. Всеки казал сбора от годините на тримата си братя. Оказало се че четирите сбора са 20, 22, 24 и 27. На колко години е най-големият брат?

Отговор. 11.

Задача 9. (Общински кръг на олимпиадата по математика 2014 г.) За домашна работа по математика ученици от четвърти клас трябва да съберат четири числа. Оказва се, че Асен изпуснал първото число и получил 723, Борис изпуснал второто число и получил 830, Васил изпуснал третото число и получил 939, Георги изпуснал четвъртото число и получил 922, а Димитър е събрал четирите числа. Кои числа е трябвало да съберат учениците и колко е получил Димитър?

Отговор. 1138.

Задача 10. (От електронната страница на ПМГ – Стара Загора)
Дадената таблица представлява отчет за седмичната продажба на книги в една книжарница.

Дни от седмицата	Общо продадени книги
Понеделник, вторник и сряда	115
Сряда и четвъртък	85
Вторник и четвъртък	90
Понеделник и петък	70
Четвъртък и петък	80

Намерете колко книги са продадени в книжарницата във вторник.

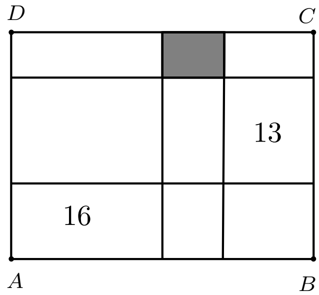
Отговор. 40.

за по-малките задачи

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „АКАД. Н. ОБРЕШКОВ“, 17.02.2019, БУРГАС

4. клас

31. Правоъгълникът на чертежа $ABCD$ е с обиколка 40 см и е разделен чрез прави, успоредни на страните му, на девет по-малки правоъгълника. Ако числата в двата правоъгълника са равни на обиколките им в сантиметри, намерете обиколката на оцветения правоъгълник в сантиметри.



32. В намерената наскоро „Книга на тайните“ историци установили, че някои страници липсват – след страница 98 следва страница 107, а след страница 288 – 303 страница. Колко листа от тази древна книга са загубени завинаги, уви?

33. Хари реши да се подготви за престоящото *Особено важно състезание* и изреши всички задачи от един неголям сборник. През първия ден той реши третината от всички задачи, през втория ден – само 18 задачи, през третия ден – половината от останалите задачи, през четвъртия ден – два пъти по-малко задачи, отколкото през петия ден, а през петия ден – последните 20 задачи. Колко задачи реши Хари през първия ден?

34. Таралежът Ежко събрал ябълки за зимата и ги подредил на слоеве по следния начин – в първия слой поставил 35 ябълки, подредени във формата на правоъгълник с 5 реда и 7 стълба, след това във всяка дупчица, образувана от четири съседни ябълки, поставил по една ябълка и така се получил вторият слой. Продължил, докато това било възможно. Колко ябълки общо е подредил Ежко?

5. клас

35. Да се бнамери броят на четирицифрените числа $\overline{abcd}$, които се делят на 36 и за които $c = d + 1$.

36. Всички пирати разделили плячката по равно. Първият взел 100 жълтици и една десета от останалото, след което вторият взел 200 жълтици и една десета от останалото и т.н. Колко са пиратите на кораба?

37. Да се намери неизвестното число x в равенството

$$\frac{(3 - 22.0{,}05)\cdot\frac{1}{10}}{9 : 180 + x} = 0{,}05.$$

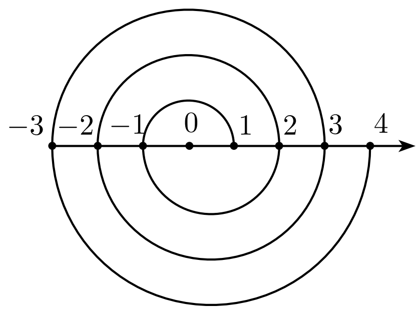
38. Вървях към парка със скорост 1,5 м/сек. Когато до парка оставаха 200 метра, оттам се появи куче и се отправи право срещу мен. След 12 секунди, когато кучето се намираше на 80 метра от мен, се шмугна в храст. С каква скорост е бягало кучето?

6. клас

39. Колко са целите числа x, изпълняващи условията

$$x > -3{,}4 \quad \text{и} \quad 1\frac{1}{3} < |x| \leqq 5 \quad ?$$

40. Спиралата на чертежа се състои от полуокръжности. Да се намери дължината на спиралата.



41. Цилиндрична чаша има радиус 4 см, който е 25% от височината ѝ. До каква височина може да се налее натурален сок така, че когато в него се постави топка сладолед с радиус, равен на $\frac{3}{4}$ от радиуса на основата на чашата, сокът в нея да не прелее?

42. След две последователни намаления стока, която струва 800 лв., е продадена за 480 лв. Ако първото намаление е 25%, колко процента е второто намаление?

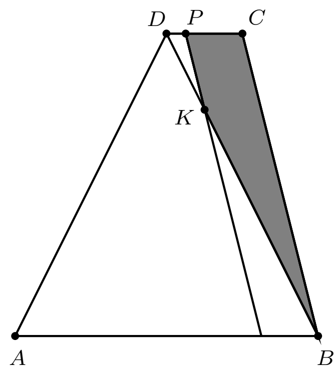
43. Сборът на три естествени числа е 100. Като разделим първото число на второто, се получава частно 1 и остатък, равен на третото число. Второто число е с 10 по-голямо от третото. Да се намери произведението на трите числа.

44. От София за Бургас тръгват едновременно две коли – Пежо и Опел, като първата се движи по–бавно от втората. Един час по–късно от София в същата посока тръгва Мерцедес. Два часа след тръгването си той се намира между другите две коли, като разстоянието между Мерцедеса и Пежото е два пъти по–малко от първоначалното, между Мерцедеса и Опела е три пъти по–малко от първоначалното. Да се намери отношението на скоростите на Опела и Пежото.

45. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точка K е от диагонала BD и

$$DK : KB = 1 : 3.$$

През точка K е построена права, успоредна на BC, която пресича DC в точка P. Ако $AB = 4$ и $CD = 1$, да се намери отношението на лицата на четириъгълниците $BCPK$ и $ABCD$.



за по-малките решения

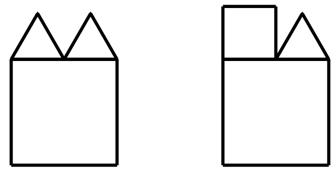
на задачите от бр. 2/2019

16. Да се намерят неизвестните числа x, y и z от равенствата

$$56.7 + x = 717, \quad 642 : 6 - y = 42 \quad \text{и} \quad z - (x - y) = 123.$$

Решение. Имаме $x = 717 - 392 = 325$, $y = 107 - 42 = 65$, $z = (325 - 65) + 123 = 383$.

17. Фигурите на чертежа са сглобени от два еднакви квадрата, три еднакви равностранни триъгълника и един по-малък квадрат. Ако фигурата вляво има обиколка 120 см, да се намери обиколката на фигурата вдясно.



Решение. Страната на равностранния триъгълник е равна на половината от страната на големия квадрат и се съдържа 10 пъти в обиколката на фигурата вляво. Страната на триъгълника е равна на $120 : 10 = 12$ см. Фигурата вдясно има обиколка $11.12 = 132$ см.

18. В кутия са поставени 40 фигури, триъгълници или квадрати, които имат общо 133 върха. Колко са квадратите? Най-малко колко фигури трябва да извадя от кутията (без да гледам), за да е сигурно, че сред извадените фигури има квадрат?

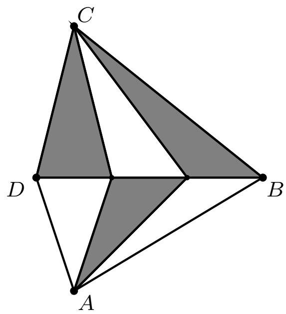
Решение. В кутията има $133 - 3.40 = 13$ квадрата, а триъгълниците са $40 - 13 = 27$. Трябва да извадя от кутията поне 28 фигури, за да е сигурно, че сред тях има квадрат.

19. Разстоянието между две хижи A и B е 60 км. По пътя между тях има езеро, което се намира 2 пъти по-близо до A, отколкото до B. Освен това по пътя има заслон, разстоянието от който до A е с 38 км по-дълго, отколкото до B. Да се намери разстоянието между езерото и заслона.

Решение. Езерото се намира на $60 : 3 = 20$ км от A и на $2.20 = 40$ км от B. Заслонът се намира на $(60 - 38) : 2 = 11$ км от B и на $11 + 38 = 49$ км от A. Разстоянието между езерото и заслона е $49 - 20 = 29$ км.

20. Отсечката BD на чертежа е разделена на три равни части. Ако общото лице на сивите триъгълници е 20 cm^2, а общото лице на белите триъгълници е 19 cm^2, да се намери лицето на триъгълника ABD.

Решение. Триъгълникът DBA е разделен на три триъгълника, всеки от които има едно и също лице; да го означим с a. Триъгълникът DBC е разделен на три триъгълника, всеки от които има лице b. Общото лице на сивите триъгълници е $a + 2b = 20$ cm^2, а общото лице на белите триъгълници е $2a + b = 19$ cm^2. Следователно $3a + 3b = 39$, откъдето $a + b = 13$. Имаме $a = 19 - 13 = 6$ и оттук $S_{ABD} = 3a = 18$ cm^2.



21. Да се намерят числата a и b, за които

$$\text{НОД}(a + b;\ 30) = 5 \text{ и } \text{НОК}(a;\ b) = 360.$$

Решение. От НОД $(a+b;\ 30) = 5$ следва, че a и b нямат общ делител 2, нямат общ делител 3 и $a + b$ се дели на 5. Тъй като НОК $(a;\ b) = 360 = 2^3.3^2.5$, то a и b са $2^3.5 = 40$ и $3^2.5 = 45$ (в някакъв ред).

22. Ели направила три теста. Тя отговорила вярно на 60% от 25-те въпроса на първия тест, на 70% от 30-те въпроса на втория и на 80% от 45-те въпроса на третия. На колко процента от всички въпроси в трите теста Ели е отговорила вярно?

Решение. Ели дала $0,6.25 + 0,7.30 + 0,8.45 = 15 + 21 + 36 = 72$ верни отговора на $25 + 30 + 45 = 100$ въпроса. Тя е отговорила вярно на 72% от въпросите.

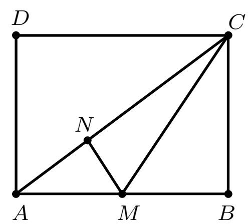
23. Колко са четирицифрените числа, които се записват с цифрите 3, 4, 6 и 7 (всяка цифра по веднъж) и се делят на 44?

Решение. Търсените четирицифрени числа се делят на 4 и на 11. От признака за делимост на 4 следва, че те завършват на 36, 64 или 76. Тъй като $3 + 7 = 6 + 4$, от признака за делимост на 11 следва, че 3 и 7 са на нечетни позиции. Получаваме две числа: 7436 и 3476.

24. Ако $(x - 1).(-2 - 3) - 4 = -5$ и $5 : (-4y + 3) + 2 = 1$, да се пресметне стойността на израза $\dfrac{-x - y}{y - x}$.

Решение. Имаме $x = (-5 + 4) : (-5) + 1 = 1,2$. От второто равенство получаваме $-4y + 3 = 5 : (1 - 2) = -5$, $y = (-5 - 3) : (-4) = 2$. Стойността на търсения израз е $(-1,2 - 2) : (1,2 - 2) = -3,2 : (-0,8) = 4$.

25. Правоъгълникът $ABCD$ има обиколка 84 cm и страната AB е с 6 cm по-голяма от BC. Да се намери дължината на диагонала. Ако точката N от диагонала AC е такава, че $CN = 2AN$ и M е средата на AB, да се намери лицето на триъгълника NMC.



Решение. Ако $BC = x$, то $AB = x + 6$ и $2x + 2(x + 6) = 84$, откъдето намираме $x = 18$. Правоъгълният триъгълник ABC има катети 18 и 24 и по питагоровата теорема намираме $AC^2 = 18^2 + 24^2 = 400$, т.е. $AC = 20$. Накрая,

$$S_{NMC} = \frac{2}{3}S_{AMC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{18.24}{2} = 72.$$

26. Да се намери стойността на израза $\dfrac{\left(a^5.\ b^6\right)^7}{\left(a^4.\ b^5\right)^8}$ при $a = -2$ и $b = 2^{-1}$.

Решение. Имаме $\dfrac{\left(a^5.\ b^6\right)^7}{\left(a^4.\ b^5\right)^8} = \dfrac{a^{35}.\ b^{42}}{a^{32}.\ b^{40}} = a^3.\ b^2$. При дадените стойности получаваме $(-2)^3.(2^{-1})^2 = -2^3.2^{-2} = -2$.

27. Голямо зъбно колело с 9 зъбци е свързано с малко зъбно колело с 6 зъбци. За известно време голямото колело направило 12 пълни завъртания по-малко, отколкото малкото колело. Колко пълни завъртания е направило малкото колело за това време?

Решение. Ако голямото зъбно колело е направило x завъртания, малкото е направило $x+12$ завъртания и $x : (x+12) = 6 : 9$. Оттук $3x = 2(x+12)$ и намираме $x = 24$. Малкото зъбно колело е направило 36 завъртания.

28. При кои стойности на x и y стойността на многочлена $M = 4x^2 - 4xy + 5y^2 - 12y + 1$ е най-малка?

Решение. Записваме израза във вида

$$M = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4y^2 - 12y + 9 - 8 = (2x - y)^2 + (2y - 3)^2 - 8.$$

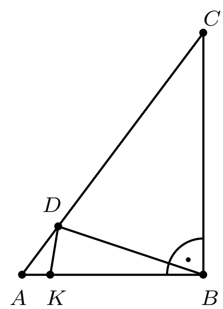
Най-малката му стойност е -8 и се достига, когато $2x - y = 0$ и $2y - 3 = 0$, т.е. $y = 1,5$ и $x = 0,75$.

29. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 90^\circ$. Точката $D \in AC$ е такава, че $DC = CB$, а точката $K \in AB$ е такава, че $BK = BD$.

а) Ако $\sphericalangle ACB = 36^\circ$, да се намери $\sphericalangle ADK$.

б) Ако $\sphericalangle ADK = 36^\circ$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

в) Ако $\sphericalangle A = 2\sphericalangle ADK$, да се намери $\sphericalangle ACB$.



Решение. Нека $\sphericalangle C = \gamma$. В равнобедрения триъгълник BDC намираме $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Тогава $\sphericalangle ABD = 90^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{\gamma}{2}$ и в равнобедрения триъгълник DKB намираме $\sphericalangle DKB = \sphericalangle KDB = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{4}$. Оттук $\sphericalangle ADK = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} + 90^\circ - \dfrac{\gamma}{4}) = \dfrac{3\gamma}{4}$.

а) При $\gamma = 36^\circ$ намираме $\sphericalangle ADK = \dfrac{3.36^\circ}{4} = 27^\circ$.

б) При $\dfrac{3\gamma}{4} = 36^\circ$ намираме $\gamma = 48^\circ$.

в) Имаме $\sphericalangle A = 90^\circ - \gamma$. От равенството $90^\circ - \gamma = 2 \cdot \dfrac{3\gamma}{4}$ намираме $\gamma = 36^\circ$.

30. Всеки ден Марио отива на училище с велосипед. Той избира между два маршрута. Маршрут B е с 1,5 km по-дълъг от маршрут A, но по него има по-малко светофари, затова средната скорост на Марио по маршрут B е с 2 km/h по-голяма от средната му скорост по маршрут A. Затова времето за пътуване по двата маршрута е едно и също. На колко минути от училище живее Марио?

Решение. Нека маршрут A е x km и по него Марио се движи с y km/h. Маршрут B е $x + 1,5$ km и Марио го изминава със скорост $y + 2$ km/h. Времето за движение по всеки от маршрутите е едно и също, т.е.

$$\frac{x}{y} = \frac{x + 1,5}{y + 2} \Longrightarrow x(y + 2) = y(x + 1,5) \Longrightarrow 2x = 1,5y.$$

Получихме, че $x = \dfrac{3}{4}y$. Времето за движение е $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$ часа, т.е. 45 минути.

математическа ракла

ЗАДАЧИ С КАРТИНКИ?

Невена Събева, ИМИ–БАН

Списание Математика ли? – възкликна наскоро един приятел. – *Там имаше невероятни илюстрации! Навремето ги изрязвахме и правехме с тях обложки за аудио касети ...*

Този необичаен поглед към любимото списание ме накара да се замисля за ролята на илюстрациите в математическия текст. Обикновено те са чертежи, графики или схеми, които представят математически модели и са изчистени от всяко нематематическо съдържание. Но като се зарових в старите броеве, илюстрирани по изключително остроумен и забавен начин от художничката **Тоня Горанова**, разбрах защо моят приятел бе запомнил не задачите, а рисунките в списанието. Някои са закачливи, други провокират въображението, внасят свежест и настроение и превръщат задачите в празник.

Ще споделя с Вас някои от съкровищата, които изрових от старите броеве на списание *Математика.*

Реставрация на замъка (сп. Математика 9/1987)

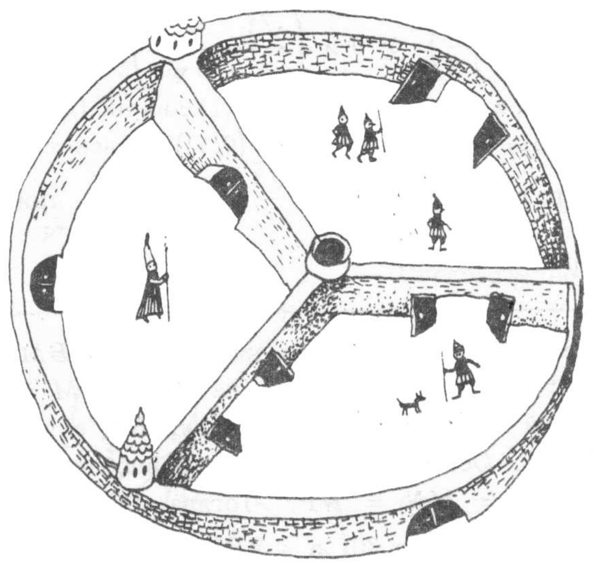
Старинен замък някога бил ограден от висока триъгълна стена. Всяка нейна стена била разделена на три равни части и в точките на деление, а

също и във върховете, били издигнати бойни кули. След много години замъкът бил изоставен и от оградата му останали само основите на три от кулите. От старинни ръкописи можело да се узнае, че ако първоначално кулите са били разположени последователно така: $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2$, където A, B и C са във върховете, запазени останки имало само от A_1, B_1 и C_1.

Може ли само по тях да се възстанови първоначалното разположение на крепостната стена и ако може, как да стане това?

Вълшебният замък (сп. Математика 1/1990)

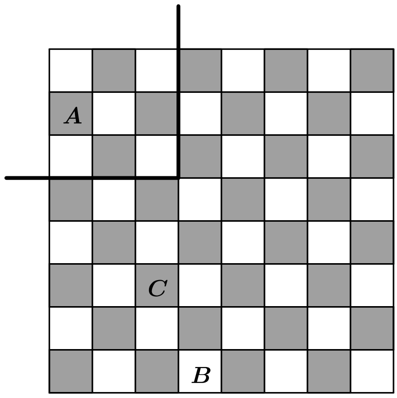
На рисунката е изобразен планът на един вълшебен замък. Известно е, че във всеки момент три от вратите му са затворени, а другите три са отворени. Ако някой мине през една врата, веднага вратите, които са били отворени, се затварят, а тези, които са били затворени, се отварят. Един вълшебник иска да влезе в замъка, да мине през всичките му стаи и да излезе от него. Ако той откъсне косъм от своята брада, всички затворени врати се отварят, а всички отворени се затварят.

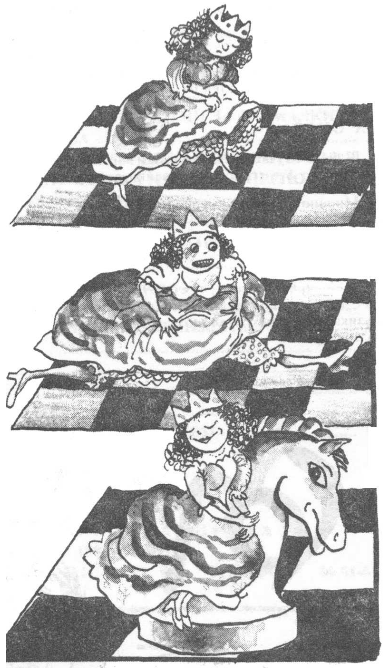


Докажете, че този вълшебник винаги може да постигне своята цел, независимо кои врати са били първоначално отворени, като при това отскубне най-много два косъма от своята брада.

Три задачи с ход на царицата (сп. Математика 3/1989)

В забавната математика има много задачи, в които действието се развива върху шахматната дъска. Не е необходимо да играете шах, за да решите тези задачи – достатъчно е да знаете как се движат фигурите по дъската. Следващите три задачи са посветени на пътешествията на царицата, която се движи по шахматната дъска неограничено в хоризонтална, вертикална или диагонална посока.





Задача 1. Поставете царицата в полето ***A*** и с четири последователни хода минете през всички оградени полета в горния ляв ъгъл на дъската.

Задача 2. Поставете царицата в полето ***B*** и намерете най-дългия възможен път за 5 хода, ако царицата не може да повтаря полета и траекторията ѝ не се самопресича. (Приема се, че тя минава през центровете на полетата.)

Задача 3. Поставете царицата в полето ***C***. С 15 хода обиколете всяко поле по веднъж и завършете обиколката в ***C***.

Преразпределение (сп. Математика 8/1987)

В държавата на справедливия шейх се оформили пет класи, номерирани с числата от 1 до 5, като класата 1 е най-бедна, класата 2 е малко по-богата и т.н. до класата 5, която е най-богата. Справедливият шейх решил да намали разликата между богатствата в класите, като богатството последователно се осредни по принципа на двойките: най-напред се групират класите 1 и 2; след това класите 2 и 3; после 3 и 4 и накрая класите 4 и 5. Осредняването означава, че цялото богатство на двете класи от съответната двойка се разпределя поравно между отделните членове на тези класи; с осреднените суми едната класа (в случая тази с по-голям номер) участва в новото преразпределение в следващата двойка.

Великият везир по принцип е съгласен с плана на шейха, но предлага процесът да започне с двете най-богати класи и след това да продължи последователно надолу.

Кой от двата плана е по-изгоден за най-бедната класа и кой – за най-богатата?

Предлагам на читателите, изкушени както в математиката, така и в рисуването, да ни изпратят свои илюстрирани задачи. Най-хубавите от тях ще публикуваме в следващите броеве на списанието.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

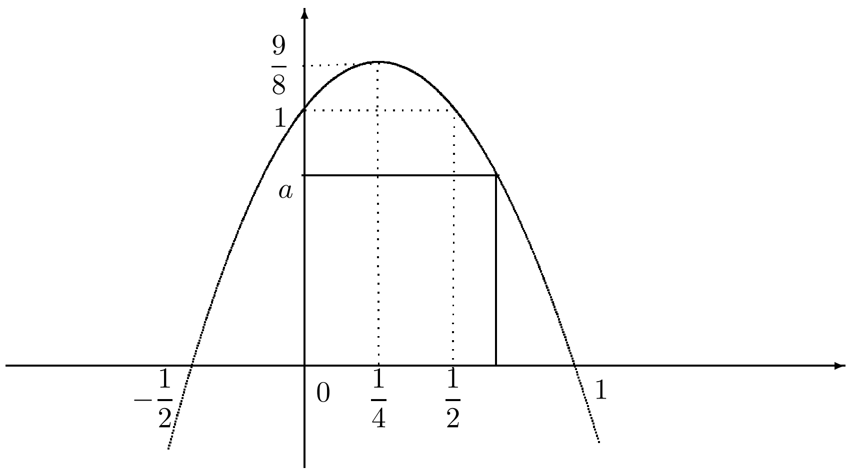
от бр. 2/2019 г.

1. В; **2.** Г; **3.** Б; **4.** Б; **5.** Б.

6. а) $a = 1$.

б) $\sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$, откъдето $\sin x = 1$, $x = k\pi$ или $\sin x \doteq -\dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

в) Удачно е да се използва графиката на функцията $f(t) = -2t^2 + t + 1$.



Уравнението $f(t) = a$ трябва да има единствен корен от $(0, 1)$. От графиката се вижда, че $a \in (0, 1)$ или $a = \dfrac{9}{8}$.

7. Да означим голямата основа AB с $2a$, а височината DK – с h.

а) От правоъгълния триъгълник ADK (с $\sphericalangle A = \alpha$) получаваме

$$h = c\sin\alpha \quad \text{и} \quad a - c = c\cos\alpha,$$

т.е. $a = c(1 + \cos\alpha)$. Сега

$$S = (a + c)h = c^2(2 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

б) Нека $f(\alpha) = (2 + \cos\alpha)\sin\alpha$. Производната на тази функция е

$$f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1$$

и се анулира за остър ъгъл α само за $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Стандартно се обосновава, че за ъгъла с този косинус лицето S е най-голямо. След заместване в израза за лицето, получаваме, че

$$S = \frac{c^2}{4}(3+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

в) Ще покажем, че $\sphericalangle ADB$ е прав, т. е., че $h^2 = (a-c)(a+c)$. От изчисленията в а) това равенство е еквивалентно на равенството

$$2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0,$$

което от б) дава максималното лице.

8. Нека ρ минава през ръба AB и средата K на отсечката GG_1, съединяваща ценровете на основите.

а) Ако M е средата на AB лесно се вижда, че търсеният ъгъл е $\sphericalangle KMG$ с тангенс

$$\frac{KG}{MG} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{b}{a}\sqrt{3}.$$

б) Правата MK пробожда горната основа в точката T_1 от медианата ѝ C_1M_1, като $C_1T_1 = \dfrac{1}{3}C_1M_1$. През T_1 прекарваме отсечката $P_1Q_1 \parallel AB$. Сечението е трапецът ABP_1Q_1. Проекцията му в равнината ABC има лице $\dfrac{8}{9}S_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^2$. Тогава

$$S_{сеч} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2}{\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a^2+3b^2}.$$

в) Построяваме призма $A_2B_2C_2ABC$, еднаква с дадената. Нека φ е, например, ъгълът между AB_1 и BC_1. Тъй като $\sphericalangle A_2BC_1 = \varphi$, косинуса му намираме от триъгълника A_2BC_1, в който $A_2B = C_1B = \sqrt{a^2+b^2}$ и $A_2C_1 = \sqrt{a^2+4b^2}$:

$$\cos\varphi = \frac{a^2-2b^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Понеже $\cos\varphi < \dfrac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)} = \dfrac{1}{2}$ и функцията косинус е намаляваща в $(0,\pi)$ следва, че $\varphi > \dfrac{\pi}{3}$.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: `spisaniematematika2019@gmail.com`

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 15.04.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.