

Мате мати ка

БРОЙ 2
2011 г.
ГОДИНА
L

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
С ПРОТОКОЛ 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Доц. Руси Русев – главен редактор

Акад. Стефан Додунеков

Чл. кор. дмн Генчо Скордев

Ст.н.с. II ст. д-р Емил Колев

Доц. д-р Иван Тонов

Доц. д-р Марин Маринов

Александър Иванов

Снежана Чочева

Пенка Кирилова — коректор

Ст.н.с. II ст. дмн Петър Бойваленков — изпълнителен директор

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Н О В И Н И

✓ РЕЗУЛТАТИ, имената на победителите и задачите от Зимните математически състезания, които се проведеха на 03-05.03.2011 г., можете да намерите в статия в този брой.

✓ НАЦИОНАЛНИЯТ ОТБОР на България получи за осми пореден път покана за участие във финалния кръг (25-30.04.2011 г.) на Всерусийската олимпиада по математика. Отборът ще бъде определен на контролните за БОМ.

✓ ПОДГОТОВКАТА на националния отбор за БОМ и неговите разширения ще се проведе от 18 до 24 април в ИМИ-БАН.

✓ ОТ 23 ДО 28 ФЕВРУАРИ в Букурещ се проведе четвъртото издание на международното състезание Romanian Master in Mathematics. В него взеха участие отбори от Бразилия, България, Великобритания, Италия, Китай, Перу, Полша, Румъния, Русия, САЩ и Сърбия. България се представи от: Рафаел Рафаилов (сребърен медал), Живко Жечев (бронзов медал), Кубрат Данаилов (почетна грамота), Богдан Станков (почетна грамота), Радослав Кафов (почетна грамота) и Виктор Вълков. Условията на задачите и интересен доклад за събитието можете да намерите на сайта на Британския комитет за олимпиади <http://www.bmoc.maths.org/>.

✓ ПЪРВИТЕ ПО КЛАСОВЕ по рейтинг след ЗМС (март 2011 г.) са:

8. *клас*: Емилиян Рогачев (СМГ), Петър Скорчелиев (ПМГ Силистра), Васил Василев (НПМГ), Любен Личев (МГ Плевен) и Марин Шаламанов (НПМГ);

9. *клас*: Нгуен Чи Зунг (СМГ), Йордан Йорданов (МГ Варна), Виктор Радивчев (МГ Варна), Николай Стоянов (СМГ) и Павлена Ненова (СМГ);

10. *клас*: Радослав Комитов (ПМГ Ямбол), Ивайло Хартарски (СМГ), Тодор Марков (ПМГ Бургас), Кристиан Митов (ПМГ Видин) и Мартин Минчев (СМГ);

11. *клас*: Рафаел Рафаилов (СМГ), Богдан Станков (СМГ), Радослав Кафов (СМГ), Станислав Атанасов (ОМГ Пловдив) и Николай Каракехайов (ОМГ Пловдив);

12. *клас*: Виктор Вълков (СМГ), Живко Жечев (ПМГ Шумен), Кубрат Данаилов (АК), Мартин Попов (ПМГ Монтана) и Младен Вълков (ПМГ Шумен).

✓ GOOGLE ще спонсорира Международната олимпиада по математика с 1000000 евро за срок от 5 години. Тази новина се е появила в съвместно изявление на Google и Управителния съвет на МОМ от 20.01.2011 г.

за кандидат ?? студенти

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПРОФ. КЕРОПЕ ЧАКЪРЯН

Задача 1. Да се реши неравенството $\frac{x+3}{x-1} > 2$.

Задача 2. Да се пресметне лицето на трапец $ABCD$ с основи $AB = 16$ и $CD = 9$, бедро $BC = 10$ и диагонал $BD = 17$.

Задача 3. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ в интервала $[1, 2]$.

Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC със страни $AC = 5$, $BC = 7$ и радиус на описаната окръжност $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Да се намери дължината на страната AB .

Задача 5. Да се реши уравнението $2 \sin x \cdot \operatorname{tg} x = 3$.

Задача 6. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които функцията $f(x) = 3x^3 + ax^2 + (a-2)x + 1$ е растяща в интервала $(-\infty; \infty)$.

Задача 7. В триъгълника ABC точката O е център на вписаната окръжност и лицата на триъгълниците AOB , BOC и AOC са съответно равни на 20, 15 и 7. Да се намерят дължините на страните AB , AC и BC .

Задача 8. Да се реши неравенството $2^x \cdot 9^{\frac{x+1}{x}} \geq 108$.

Задача 9. В куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ръб 1 точките M и N са среди съответно на ръбовете BC и CD . Да се пресметне разстоянието от точката A до равнината MNC_1 .

Задача 10. Да се намерят стойностите на реалните параметри a и b , за които неравенството $|\sin 2x + a \sin x + b| \leq 1$ е изпълнено за всяко x .

ТЕМА 2: ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ДОЦ. Д-Р М. МАРИНОВ

Първа част

1. Ако $a = \frac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4} \cdot 7^{-1}}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-5} \cdot 7^{-2}}$, то числото a е равно на:
А) 780 Б) 700 В) 620 Г) 540 Д) 400
2. Ако $a = \sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}}$, то числото a е равно на:
А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) $3\sqrt{5}$
3. Сборът от квадратите на корените на уравнението $2x^2 - 4x + 1 = 0$ е:
А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 7 Д) $\frac{9}{4}$
4. Най-малкото число a , за което е вярно равенството
$$\frac{30}{a^2 - 1} - \frac{13}{a^2 + a + 1} = \frac{18a + 7}{a^3 - 1},$$
 е:
А) -5 Б) -4 В) -1 Г) 1 Д) 9
5. Произведението на модата и медианата на извадката 7, 2, 8, 2, 9, 2, 11, 2 е:
А) 8 Б) 11 В) 13 Г) 9 Д) 20
6. Ако за аритметична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_7 = -1$ и $a_{10} = 17$, то разликата на прогресията е равна на:
А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7
7. Ако за геометрична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_1 = 2$ и $a_6 = 64$, то общият член на тази прогресия е:
А) $a_n = 2 + 2(n^2 - 1)$ Б) $a_n = 2^n$
В) $a_n = 3^n - 1$ Г) $a_n = 3n - 1$ Д) $a_n = 4 - 2n$
8. Вероятност на случайно събитие е числото:
А) $\frac{\sqrt{111}}{100}$ Б) $\log_2 \sqrt{8}$
В) $\cos 120^\circ$ Г) $\frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}$ Д) $\sin 210^\circ$

9. Ако $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha$ е:

- А) $-\frac{3}{5}$ Б) $\frac{3}{5}$ В) $-\frac{3}{7}$ Г) $\frac{3}{7}$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Ако $a = \frac{\cos 48^\circ \cos 12^\circ + \sin 48^\circ \sin 12^\circ}{2 \cos 36^\circ}$, то a е равно на:

- А) 1 Б) 2 В) $\frac{1}{2}$ Г) $\sqrt{2}$ Д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Броят на различните начини, по които от 6 момчета и 4 момичета може да се образува група от 3 момчета и 3 момичета, е равен на:

- А) 24 Б) 30 В) 36 Г) 80 Д) 96

12. Ако $x + y > 0$ и $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - xy + y = 7, \end{cases}$ то сборът $x + y$ е равен на:

- А) 4 Б) 0 В) 1 Г) 2 Д) 3

13. Най-голямото число a , за което $(\lg a)^2 - 3 \lg a + 2 = 0$, е:

- А) 10 Б) 20 В) 30 Г) 80 Д) 100

14. Стойността на параметъра a , за която $f(x) = \frac{1}{-x^2 + ax - a^2 - 1}$ има локален минимум при $x = 1$, е равна на:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

15. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = 6$ cm и $BC = 3$ cm. Средното аритметично на височините на триъгълника към страните AB и BC е равно на височината към страната AC . Дължината на отсечката AC е:

- А) 3 cm Б) 4 cm В) 5 cm Г) 6 cm Д) 7 cm

16. Дадена е окръжност с център точката O и радиус 11 cm. През точка M , вътрешна за окръжността, е построена хорда с дължина 18 cm. Ако $OM = 7$ cm, то произведението на дължините на отсечките, на които се дели хордата от точката M , е равно на:

- А) 12 cm^2 Б) 18 cm^2 В) 24 cm^2 Г) 64 cm^2 Д) 72 cm^2

17. Даден е правоъгълният $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) с медиана $BM = 6$ и $\sphericalangle MBC = 15^\circ$. Лицето на триъгълника е равно на:

- А) 7 Б) 8 В) 9 Г) 10 Д) 12

18. Две от страните на триъгълник са 6 cm и 8 cm, а медианите към тях са взаимно перпендикулярни. По-голямата от тези медиани има дължина:

- А) $2\sqrt{3}$ cm Б) $\sqrt{14}$ cm В) 6 cm Г) $\sqrt{33}$ cm Д) 7 cm

19. В правилна четириъгълна пирамида с околен ръб 18 cm диагоналят на основата е $16\sqrt{2}$ cm. Височината към основата на пирамидата е:

- А) $2\sqrt{3}$ cm Б) 14 cm В) 6 cm Г) $\sqrt{33}$ cm Д) 17 cm

20. В триъгълната пирамида $ABCD$ околният ръб AD е перпендикулярен на равнината (ABC) и $AD = 8$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm. Тангенсът на ъгъла между околната стена BCD и основата ABC е:

- А) $\frac{5}{3}$ Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{4}{3}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Д) $\sqrt{3}$

Втора част

21. Да се намери сборът от корените на уравнението $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$.

22. Да се намери най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $(7-x)(x-2)(x+1) > 0$.

23. Да се намери най-малкото цяло число a , за което $36^a - 2 \cdot 18^a - 8 \cdot 9^a > 0$.

24. Да се намерят стойностите на реалния параметър q , за които корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 3x + q = 0$ удовлетворяват условието $x_1 - 2x_2 = 9$.

25. Да се намери най-голямата стойност на параметъра a , за която функцията $f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax + 10$ няма локални екстремуми.

26. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ в затворения интервал $[-2; 2]$.

27. Да се намери броят на различните четирицифрени числа, образувани от цифрите 0, 3, 5, 7, като във всяко число всяка цифра се среща само веднъж.

28. Периметърът на ромб е 32 cm, а височината му е 4 cm. Да се намери дължината на по-големия диагонал на ромба.

29. Основата на четириъгълна пирамида е правоъгълник с диагонал $2\sqrt{3}$ и ъгъл между диагоналите 60° . Всички околни ръбове сключват с равнината на основата равни ъгли с големина 45° . Да се намери обемът на пирамидата.

30. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 6ax + 20$ при $x \in [-1; \infty)$ е равна на 9.

**ТЕМА 3: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ — СОФИЯ**

доц. Вл. Тодоров, гл. ас. П. Стоев

Задача 1. Дадено е уравнението

$$(a^2 + a + 6)2^x + 2^{-x} = 2a,$$

където a е реален параметър.

- а) Да се реши уравнението за $a = 5$.
- б) За кои стойности на a уравнението има два различни корена с отрицателна сума?
- в) За кои стойности на a уравнението има един положителен и един отрицателен корен?

Задача 2. В окръжност с радиус R е вписан трапец $ABCD$ с основа $AB = R\sqrt{3}$ така, че центърът на окръжността е вътрешен за трапеца. Да означим $\sphericalangle BAD$ с x .

- а) Да се докаже, че лицето на трапеца е

$$S = 2R^2 \sin^2 x \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

- б) Да се докаже, че ако лицето на трапеца е най-голямо, то бедрото му е равно на негова основа.
- в) Да се докаже, че ако лицето на трапеца е най-голямо, то бедрото му е число от интервала $(R; R\sqrt{2})$.

Задача 3. Основата на пирамидата $ABCD$ е правоъгълният триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Всеки околен ръб сключва с основата ъгъл α . Ъгълът между стената ACD и основата е равен на 45° , а разстоянието от средата O на AB до ръба CD е равно на d .

- а) Да се докаже, че височината на пирамидата е равна на $\frac{d}{\cos \alpha}$.
- б) Да се докаже, че $BC = \frac{2d}{\cos \alpha}$.
- в) Да се намерят AC и радиусът на описаната около пирамидата сфера. Може ли центърът на описаната сфера да лежи в равнината ABC ?

ТЕМА 4: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„П. ХИЛЕНДАРСКИ“

ДОЦ. П. РАНГЕЛОВА

Част първа

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи – 0 точки.

1. Стойността на израза $\frac{2}{3-\sqrt{2}} + \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$ е:
- А) 1 Б) 2 В) $\frac{12}{7}$ Г) $\frac{9}{7}$
2. Ако y е цяло число, за което $16y+3 > 35$ и $7-2y > -1$, то y може да е:
- А) 1 Б) 0 В) 5 Г) 3
3. Ако $x+y=a-1$ и $x^2+y^2=5a^2-3a-3$, то $x \cdot y$ е равно на:
- А) $-2a^2 + \frac{a}{2} + 2$ Б) $-2a^2 + a + 2$ В) $-2a^2 + \frac{a}{2} + 4$ Г) $-2a^2 + \frac{a}{2} + 1$
4. Най-малкото цяло число, което е от дефиниционната област на функцията $y = \log_5(12+2x) + \frac{x^2+3x-10}{x+5}$, е:
- А) -5 Б) -3 В) -4 Г) 1
5. Границата $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{-x^2-4x+21}$ е равна на:
- А) 0,5 Б) -0,5 В) 2 Г) -0,2
6. Коренът на уравнението $3^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 2.5^{\lg x+1} - 24.3^{\lg x}$ е:
- А) 100 Б) 1 В) 0 Г) 10
7. Диагоналите на трапец са 10 и 12, а сборът от дължините на основите му е 18. Лицето на трапеца е:
- А) $20\sqrt{2}$ Б) $40\sqrt{2}$ В) $10\sqrt{2}$ Г) $18\sqrt{2}$
8. Равностранен триъгълник е вписан в окръжност. Ако хорда от тази окръжност с дължина 2 е на разстояние 3 от центъра, то периметърът на триъгълника е:
- А) $\sqrt{30}$ Б) $\sqrt{10}$ В) $3\sqrt{30}$ Г) $2\sqrt{15}$
9. Стойността на израза $\frac{\cos(\alpha+45^\circ) + \cos(\alpha+15^\circ)}{\sin(\alpha-15^\circ) + \sin(90^\circ-\alpha)}$ при $\alpha = 45^\circ$, е:
- А) $2 + \sqrt{2}$ Б) $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ В) 2 Г) $\sqrt{2}-1$

10. Страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия с разлика 2. Медианата към хипотенузата на този триъгълник е:

- А) 6 Б) 5 В) 4,8 Г) 2,4

11. В остроъгълния триъгълник ABC са построени височините AH и CD . Ако $AD = BC = 4$ и $DB = 2$, то дължината на AH е:

- А) $2\sqrt{3}$ Б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ В) $3\sqrt{3}$ Г) $3\sqrt{2}$

12. Диагоналното сечение на правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ е равностранен триъгълник със страна 6. Обемът на пирамидата е:

- А) $54\sqrt{3}$ Б) $18\sqrt{6}$ В) $9\sqrt{6}$ Г) $18\sqrt{3}$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен – 0 точки.

13. Корените на уравнението $(x + 2)\sqrt{16x + 17} = (x + 2)(8x - 23)$ са:

14. Решенията на неравенството $\frac{2x + 5}{|x + 1|} \geq 1$ са:

15. Даден е равнобедрен триъгълник с дължина на височината към основата 10 и дължина на височината към бедрото 12. Лицето на триъгълника е:

16. В триъгълника ABC е вписана окръжност, която се допира до страните AB , BC и CA съответно в точките M , P и Q . Да се намери дължината на отсечката MP , ако $QA = 2$, $QC = 3$ и $\angle BCA = 60^\circ$.

17. Точките A и B са диаметрално противоположни в дадена окръжност, а точката C е външна за окръжността. Ако отсечките CA и CB пресичат окръжността съответно в точките P и Q и $AC = 2$, $PQ = \sqrt{2}$ и $AQ = \sqrt{3}$, то радиусът на окръжността е:

Част трета

Разпишете подробно и обосновайте решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 6.

18. Да се реши системата
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3 \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

19. Диагоналите на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точката O . Ако $BC = CD = 12$, $AB = 14$ и $OC = 6$, да се намери лицето и периметърът на триъгълника ABC .

20. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}$.

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

ВАРНА-БУРГАС, 3–5 МАРТ, 2011 Г.

След отлагане поради грипна ваканция, на 3-5.03.2011 г. във Варна и Бургас се проведе юбилейното 30-о издание на Зимните математически състезания. Във Варна се състезаваха учениците от 9.-12. клас, а в Бургас от 4.-8. клас. Резултатите на всички участници са на сайтовете на локалните организатори www.mgbgeron.com и www.smbburgas.com. Ето и първенците по класове.

4. клас: Димитър Бедачев (СОУ „П. Евтимий“, Пловдив) – 19 т., Ивайло Белчев (МГ, Варна) и Надежда Китипова (ОУ „Св.Св. Кирил и Методий“, Варна) – по 18 т., Диляна Цветкова (ЦУТНТ, Русе), Златина Милева (МГ, Варна) и Калоян Спиrow (ЦУТНТ, Русе) – по 17 т.

5. клас: Кирил Русев (СМГ) – 26 т., Теодора Колева (125 СОУ „Проф. Боян Пенев“, София) – 25 т., Георги Димитров (СМГ) и Туан Анх Нгуен (СМГ) – по 24 т.

6. клас: Виолета Найденова (СМГ), Димитър Ружев (СМГ), Константин Шейретов (СМГ) и Христо Попов (СМГ) – по 26 т.

7. клас: Деница Маркова (СМГ) – 26 т., Данчо Атанасов (125 СОУ „Проф. Боян Пенев“, София), Кристина Желязкова (125 СОУ „Проф. Боян Пенев“, София) и Нго Нгок Къонг (СМГ) – по 24 т.

8. клас: Александър Тенев (СМГ), Васил Василев (НПМГ), Георги Гуляшки (СМГ), Грегориан Пириндев (СМГ), Магдалена Георгиева (ПМГ, Бургас), Марин Шаламанов (НПМГ) и Теофил Тодоров (СМГ) – по 26 т.

9. клас: Нгуен Чи Зунг (СМГ) – 20 т., Анастас Василев (ПМГ, Бургас), Виктор Радивчев (МГ, Варна), Атанас Лапчев (ПМГ, Бургас), Мария Николова (ПМГ, Бургас), Николай Лимонов (СМГ) и Станислав Чобанов (МГ, Варна) – по 19 т.

10. клас: Тодор Марков (ПМГ, Бургас) – 26 т., Радослав Комитов (МГ, Ямбол) – 24 т., Никола Константинов (СМГ) – 22 т., Кристиан Митов (ПМГ, Видин) и Мартин Минчев (СМГ) – по 19 т.

11. клас: Рафаел Рафаилов (СМГ) – 19 т., Кристиан Токмаков (СМГ) – 18 т., Богдан Станков (СМГ) – 17 т., Давид Койчев (ПМГ, Бургас), Иван Мечков (НПМГ) и Иван Бистеров (ПМГ Враца) – по 16 т.

12. клас: Живко Жечев (ПМГ, Шумен), Кубрат Данаилов (АК, София) и Младен Вълков (ПМГ, Шумен) – по 20 т., Мартин Попов (ПМГ, Монтана) – 19 т., Виктор Вълков (СМГ) и Милен Иванов – по 18 т.

Предлагаме ви условията на задачите, отговори и кратки решения.

УСЛОВИЯ

4. клас

Задача 4.1. Дадени са числовите изрази:

$$A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5; \quad B = (543.4 - 4362 : 2) : 3 + 6,$$

$$C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)] \cdot 3 - 591.10.$$

Да се пресметнат стойностите им.

Задача 4.2. Качвайки се на лифта, забелязах, че сядам на седалка с номер 5. Точно по средата на пътя срещнах седалката с номер 130.

а) Да се намери броят на седалките, ако те са подредени по номера.

б) Една седалка изминава 50 м за една минута, а разстоянието между всеки две седалки е 8 м. За колко минути група от 26 ученици ще се изкачи на върха, ако на всяка седалка пътува по един пътник?

Задача 4.3. Като се използват девет различни цифри, всяка по веднъж, са записани три трицифрени числа със сбор 2011. Например $381 + 704 + 926 = 2011$ или $413 + 620 + 978 = 2011$ и т.н. Нека A е най-малкото от трите записани числа. Кое е най-голямото число, което може да бъде равно на A ?

Задача 4.4. Дъска е разграфена на единични квадратчета, всяко от които е с дължина на страната 1 см. Гошко и Тошко разполагат с червени и сини правоъгълни плочки от домино с размери 2 см и 1 см. Гошко покрива дъската с червени плочки без застъпване. След това Тошко отстранява червените плочки и се стреми да покрие дъската със сини плочки без застъпване така, че никоя синя плочка да не заеме мястото на някоя червена. Винаги ли е възможно Тошко да покрие дъската по указания начин, ако дъската е:

а) правоъгълник с размери 5 см и 4 см; б) квадрат със страна 6 см?

5. клас

Задача 5.1. Да се намери стойността на израза $A = x - 0,01 \cdot b$, ако $b = 3,54.73 + 0,23.25 + 35,4.2,7 + 1,7.2,5$, а x е неизвестното число от равенството $5,1 : (x - 5,97) + 1,25 = 68,5.2,5$.

Задача 5.2. В книжарницата Ани си харесала четири книги, но забелязала, че не ѝ достигат 2 лв., за да си ги купи. Тя пресметнала, че ако си купи книгите без първата, ще ѝ останат 4,50 лв., ако си купи книгите без втората, ще ѝ останат 5,30 лв., ако си купи книгите без третата, ще ѝ останат 3,90 лв., а ако си купи книгите без четвъртата, ще ѝ останат 4,90 лв. Колко лева е имала Ани и колко струва всяка от четирите книги?

Задача 5.3. Даден е трапецът $ABCD$ с лице 30 кв. см. Основите AB и CD изпълняват условието $AB = 2.CD$. Извън трапеца е построен триъгълник DCE . Точката M лежи на основата AB и DM е успоредна на EC . Точката N лежи на отсечката CE и MN е успоредна на DE . Да се намери лицето на триъгълника DNE .

Задача 5.4. Учителката записва на дъската няколко различни естествени числа, а учениците трябва да запишат в тетрадките си всички възможни сборове на числата по двойки. При това, ако един сбор се повтори повече от един път, то той трябва да се запише в тетрадките само веднъж. Например, ако на дъската са записани числата 1, 2, 6 и 7, учениците трябва да запишат в тетрадките си по веднъж числата 3, 7, 8, 9 и 13.

а) Учителката записала на дъската 5 числа. Колко най-малко и колко най-много числа могат да запишат учениците в тетрадките си?

б) Колко най-малко числа трябва да запише учителката на дъската, за да могат учениците да запишат в тетрадките си точно 11 числа?

6. клас

Задача 6.1. Стая има дължина 5,5 м, широчина 4 м, височина 2 м и 80 см, врата с размери 2 м на 75 см, разположена на едната малка стена и един прозорец, който заема 35% от едната голяма стена. Работник започнал работа в 7:55 часа и успял до 9:32 часа да боядиса тавана и стената, на която е прозорецът. В колко часа трябва да продължи да боядисва работникът, за да успее да боядиса останалите стени до 12:00 на същия ден? (Считаме, че таванът и стените се боядисват еднакво бързо. Прозорецът и вратата не се боядисват.)

Задача 6.2. Даден е трапецът $ABCD$, чиито диагонали AC и BD се пресичат в точката O , $AO = 3OC$, бедрото AD е перпендикулярно на основите и лицето на $\triangle COB$ е 12 кв см.

а) Да се намери лицето на $ABCD$.

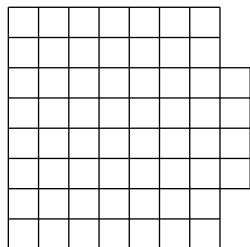
б) Да се докаже, че височината на трапеца през върха C го разделя на две равнолицеве части.

Задача 6.3. Естествените числа n и k ($k > 1$) са такива, че сборът от цифрите на числото n^k е 9, а произведението на цифрите му е 24. Да се намерят n и k .

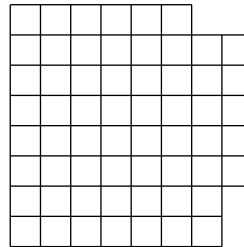
Задача 6.4. Квадратна дъска 8×8 е разделена на квадратчета 1×1 , след което от нея са изрязани два правоъгълника 1×2 . Възможно ли е останалата част от дъската да се покрие с плочки от домино с размери 1×2 , половината от които са хоризонтални, ако:

а) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на черт. 1;

б) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на черт. 2?



Черт. 1



Черт. 2

7. клас

Задача 7.1. Един влак изминава разстоянието между гарите A и B за 4 ч и 30 мин, а друг влак изминава същото разстояние за 6 ч и 45 мин. В колко часа ще се срещнат влаковете, ако тръгнат един срещу друг от гарите A и B в 8:30 часа?

Задача 7.2. Даден е успоредникът $ABCD$ и точките M , N , P и Q , вътрешни съответно за страните му AB , BC , CD и DA и такива, че $AM = BM$, $BN = CN$, $DP = 3CP$ и $AQ = 3DQ$. Да се намери лицето на $ABCD$, ако лицето на четириъгълника $MNPQ$ е равно на 68.

Задача 7.3. Естествените числа от 1 до 13 са записани в таблица 4×4 , като числата в първия ред са еднакви, а в останалите три реда са записани останалите 12 числа. Възможно ли е сборът на числата от всеки ред и стълб да е един и същ?

Задача 7.4. Едно естествено число се нарича интересно, ако след прибавяне на сбора от цифрите му към него се получава число, записано със същите цифри. Например числата 45, 279 и 9324 са интересни, защото $45 + 4 + 5 = 54$, $279 + 2 + 7 + 9 = 297$ и $9324 + 9 + 3 + 2 + 4 = 9342$.

а) Възможно ли е някое просто число да е интересно?

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много интересни числа със сума от цифрите 36.

в) Да се докаже, че съществуват безбройно много интересни числа, които са точни квадрати.

8. клас

Задача 8.1. Да се решат уравненията:

а) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 3x(x^2 + 3x + 2)$; б) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$.

Задача 8.2. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е петата на височината през върха D , точката E е средата на диагонала BD и $HE \parallel AC$. Ако лицето на триъгълника BDH е S , да се намери лицето на $ABCD$.

Задача 8.3. Нека a , b и c са дължините на страните на триъгълник. Да се намери броят на реалните корени на уравнението

$$x^2 - 2cx\sqrt{2c(a^2 + b^2)} + (a^2 - b^2)^2 + c^4 = 0.$$

Задача 8.4. Да се намерят всички прости числа p , за които числото

$$\left[\frac{p^2 + 1}{2} \right] + \left[\frac{p^2 + 2}{2} \right] + \left[\frac{p^2 + 7}{2} \right] + \left[\frac{p^2 + 18}{2} \right]$$

също е просто (с $[x]$ се означава най-голямото цяло число, което не надминава x).

9. клас

Задача 9.1. Да се реши системата

$$\begin{cases} xy + 2yz = 5 \\ yz + 2zx = 3 \\ zx + 2xy = 7. \end{cases}$$

Задача 9.2. Даден е успоредникът $ABCD$, в който $AB = 4AD$ и $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Точките E и F са средите съответно на страните AB и CD и точката P е симетрична на F относно правата AB . Да се докаже, че:

- а) $PA = PC$;
- б) $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CEB = 30^\circ$.

Задача 9.3. В израза $A = 1 * 2 * 3 * \dots * n$ всяка от звездичките е заменена със знак за събиране или умножение и в резултат е получено съставно число, чийто най-малък прост делител е означен с p . Нека p_n е най-голямото просто число p , което може да се получи по този начин.

- а) Да се намери p_7 .
- б) Да се докаже, че $p_8 = 61$.

Задача 9.4. Нека $n > 1$ е естествено число. Естествените числа от 1 до n^2 са разположени в клетките на таблица $n \times n$ по такъв начин, че всеки две последователни числа са разположени в две клетки, които имат обща страна. Да се докаже, че не е възможно сумите на числата във всеки ред и всеки стълб да са равни помежду си.

10. клас

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които корените x_1, x_2 на уравнението $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ са реални неотрицателни числа и $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 2\sqrt{5}$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълният $\triangle ABC$ ($AC < BC$). Нека M е средата на страната AB , а O и O_1 са центровете на описаните окръжности за $\triangle ABC$ и $\triangle AMC$. Да се пресметне $S_{AOO_1} : S_{ABC}$, ако $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Задача 10.3. Дадена е „шахматна“ дъска с размери $m \times k$. Път в дъската наричаме всяка редица от клетки $A_0, A_1, \dots, A_n$, такава че за всяко $i = 0, \dots, n-1$ клетката A_{i+1} е достижима от A_i с един ход на топа. Броят n на ходовете, с които достигаем A_n от A_0 наричаме дължина на пътя $A_0, A_1, \dots, A_n$. Разстояние между две клетки A и B наричаме дължината на най-късия път с начало A и край B . Едно множество M от клетки наричаме *добро*, ако всяка клетка от дъската лежи върху най-къс път, започващ в клетка от M и свършващ в клетка от M . Да се определи минималният брой клетки в добро множество.

Задача 10.4. За естествено число $n > 1$ разглеждаме всички двойки естествени числа a и b , за които $1 \leq a < b \leq n$ и $a + b > n$. Означаваме с $f(n)$ броя на двойките, такива че a дели b и с $g(n)$ – броя на двойките, такива че a и b са взаимно прости. Да се намерят всички $n > 2$, за които $g(n) - g(n-1) = f(n)$.

11. клас

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $\log_x a + 2 \log_{ax} a = 6 \log_{a^2x} a$ има поне две решения в интервала $[a, +\infty)$.

Задача 11.2. Даден е равнобедрен остроъгълен триъгълник ABC , $AC = BC$. Правата през центъра на описаната окръжност, която е успоредна на бедрото BC , разделя триъгълника на две части с равни лица. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Задача 11.3. В турнир по футбол участват 2011 отбора, като всеки два отбора играят помежду си точно по един път. В крайното класиране точките на съседни в класирането отбори се различават с 1. Колко най-много точки може да има последният в класирането? (В турнир по футбол за победа се дават 3 точки, за равен – 1 точка и за загуба – 0 точки.)

Задача 11.4. Нека α е рационално положително число. За всяко естествено число n с x_n означаваме броя на делителите d на n , за които

$$\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < d < \frac{n^\alpha}{10^{2010}}.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е неограничена тогава и само тогава, когато $\alpha < 1$.

12. клас

Задача 12.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $|x - 4^a| + |x - 2^a| = 2^{a-1} + 1$ има безбройно много решения.

Задача 12.2. Да се намери максималната възможна стойност на отношението на дължините на медианите през върховете A и B на $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Задача 12.3. Нека O е центърът на описаната около неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност. Точки D и E върху страните AC и BC са такива, че $DE \parallel AB$ и CO е ъглополовяща на $\sphericalangle DOE$. Да се докаже, че разстоянието от C до DE е равно на разстоянието от O до AB .

Задача 12.4. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, по-големи от n , за които числото $2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_{10}^2$ е точен квадрат.

ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ И РЕШЕНИЯ

4.1. Отговор: $A = 4, B = 9, C = 6$.

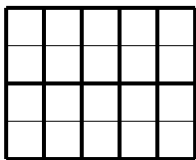
4.2. а) Седалките са $(130 - 5) \cdot 2 = 250$.

б) Дължината на въжето на лифта е $250 \cdot 8 = 2000$ м, следователно разстоянието до върха е 1000 м. Първият ученик се изкачва за $1000 : 50 = 20$ минути. Когато той стигне върха, последният ученик ще е на $25 \cdot 8 = 200$ м след него. Това разстояние се изминава за $200 : 50 = 4$ минути. Следователно групата ще се изкачи за $20 + 4 = 24$ минути.

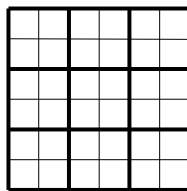
4.3. За да се получи сбор 2011, сборът от цифрите на единиците на трите събираеми е 11 или 21. Ако сборът на единиците е 11, сборът на десетиците е 10, а на стотиците 19, или сборът на десетиците е 20, а на стотиците 18. Ако сборът на единиците е 21, сборът на десетиците е 9, а на стотиците 20, или сборът на десетиците е 19, а на стотиците 19.

От друга страна, сборът на всички цифри на събираемите е най-много 45. Това условие е изпълнено само в първия от изброените случаи – при сбор на единиците 11, на десетиците 10 и на стотиците 19. Тъй като $10 + 11 + 19 = 40$, цифрата 5 не е използвана в ребуса. Тогава цифрата на стотиците на A е най-много 4 (защото $6 + 7 + 8 = 21 > 19$), а цифрата на десетиците на A е най-много 9. Тогава другите две цифри на стотиците са 7 и 8 и цифрата на единиците на A е най-много 6. Следователно A е най-много 496 (например $496 + 702 + 813 = 2011$).

4.4. а) Не винаги е възможно. Да разгледаме покриването с червени плочки от черт. 1, в което всички плочки са вертикални. Очевидно Тошко не може да покрие дъската само с хоризонтални плочки, тъй като хоризонталният ред се състои от нечетен брой квадратчета.



Черт. 1



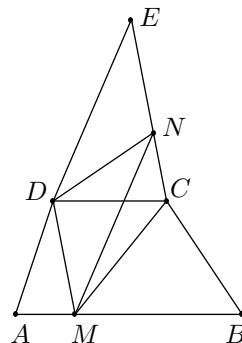
Черт. 2

б) Винаги е възможно. Да разделим дъската на квадрати със страна 2 см (черт. 2) и да разгледаме един такъв квадрат. Ако в него не се е намирала изцяло червена плочка, то Тошко може да постави в този квадрат две хоризонтални или две вертикални плочки. Ако в квадрата е имало хоризонтална (вертикална) червена плочка, то Тошко може да постави две верикални (хоризонтални) плочки. Като покрие по този начин всеки от квадратите със страна 2 см, Тошко ще получи желаното покритие.

5.1. Отговор: $b = 364$, $x = 6$, $A = 2, 36$.

5.2. Цената на първата книга е $2 + 4,50 = 6,50$ лв., на втората — $2 + 5,30 = 7,30$ лв., на третата — $2 + 3,90 = 5,90$ лв., на четвъртата — $2 + 4,90 = 6,90$ лв. Ани е имала общо 24,60 лв.

5.3. Четириъгълникът $DMNE$ е успоредник, следователно $S_{DNE} = S_{DMN}$. Тъй като NC е успоредна на DM , то $S_{DMN} = S_{DCM}$. От друга страна, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot DC \cdot h = 3 \cdot S_{DCM}$, където h е височината на трапеца. Оттук намираме, че $S_{DCM} = 10$ кв.см., т.е. $S_{DNE} = 10$ кв.см.



5.4. а) Нека записаните числа са $a < b < c < d < e$. Тогава сборовете $a + b, a + c, a + d, a + e, b + e, c + e, d + e$, които са 7 на брой, са различни, защото са подредени по големина. Следователно учениците са записали поне 7 числа. Точно 7 различни сбора се получават, например, ако учителката запише 1, 2, 3, 4 и 5.

От друга страна, учениците ще запишат най-голям брой числа, ако всички сборове са различни. Сборовете са $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ на брой, например, ако учителката запише 1, 2, 4, 8 и 16.

б) От а) следва, че на дъската трябва да са записани поне 6 числа. Това е търсеният най-малък брой, защото примерът с 1, 2, 3, 4, 5 и 8 дава точно 11 различни сбора.

6.1. Отговор: Работникът трябва да продължи работа най-късно в 10:10 ч.

6.2. а) Тъй като триъгълниците AOB и COB имат обща височина от върха B и $AO = 3OC$, получаваме $S_{AOB} = 3S_{COB} = 36$. Триъгълниците ACD и BCD имат обща страна и равни височини към нея и значи $S_{ACD} = S_{BCD}$. Тогава $S_{AOD} = S_{ACD} - S_{COD} = S_{BCD} - S_{COD} = S_{BOC} = 12$. Оттук и от факта, че триъгълниците AOD и COD имат обща височина от върха D следва, че $S_{COD} = 4$. Сега намираме $S_{ABCD} = 12 + 12 + 36 + 4 = 64$.

б) Нека CH е височината на трапеца от върха C . Тогава $AHCD$ е правоъгълник с лице $2S_{ACD} = 2(12 + 4) = 32 = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

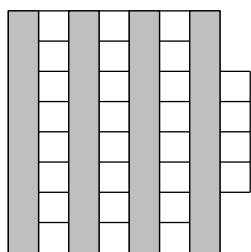
6.3 От условието следва, че цифрите на n^k са делители на 24 и следователно са измежду числата 1, 2, 3, 4, 6 и 8. Ако 8 участва в записа на n^k , то сбор на цифрите 9 имаме само ако има единствена друга цифра 1 и това не дава произведение 24. Ако 6 участва в n^k , произведението на другите цифри е 4, а сборът им е 3, което не е възможно.

Нека в n^k участва цифрата 4. Тогава произведението на другите цифри е 6, а сборът им е 5, което е възможно единствено, ако те са 2 и 3. Получаваме шест трицифрени числа (всичките съставени от 2, 3 и 4) и директна проверка показва, че точно две от тях — $243 = 3^5$ и $324 = 18^2$, са решения на задачата.

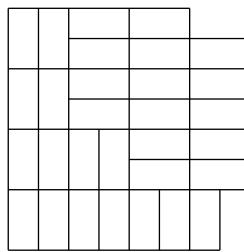
Нека 4 не участва в n^k . Тогава цифрите на n^k са измежду 1, 2 и 3, имат сбор 9 и произведение 24. Това е възможно само при цифри 2, 2, 2 и 3 (те задължително присъстват заради произведението 24, а други вече не може да има заради сбора 9). Четирите възможности 2223, 2232, 2322 и 3222 не дават решения, т.е. задачата няма решение в този случай.

6.4. а) Такова покриване не е възможно. Да разгледаме оцветяването от черт. 1. Оцветените полета са 32, а белите са 28. Всяко хоризонтално домино покрива едно оцветено и едно бяло поле, следователно, ако половината домина са хоризонтални, те ще покриват 15 бели и 15 оцветени полета. Остават 13 оцветени полета, но те не могат да се покрият с верикални домина, тъй като всяко вертикално домино покрива 2 бели или 2 оцветени полета.

б) Възможно е. Пример е показан на черт. 2.



Черт. 1

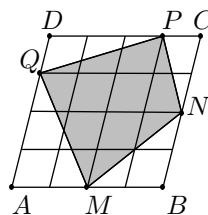


Черт. 2

7.1. Отговор: В 11 ч 12 мин.

7.2. Имаме $S_{MQA} = \frac{1}{2} \cdot S_{BQA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{ABD} = \frac{3}{16} S_{ABCD}$.

Аналогично получаваме, че $S_{MNB} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$, $S_{NPC} = \frac{1}{16} S_{ABCD}$ и $S_{PDQ} = \frac{3}{32} S_{ABCD}$, което означава, че $S_{MNPQ} = \frac{17}{32} S_{ABCD}$. Остава да намерим $S_{ABCD} = 128$.



7.3. Ако числото в първия ред е x и сборът във всеки ред и стълб е S , то $S = 4x$ и $8S = 2(1+2+\dots+14)+6x$ (последното следва от събирането на всички редове и всички стълбове). От тези две уравнения лесно получаваме $x = 7$ и $S = 28$. В таблицата е показано едно възможно разположение на числата.

7	7	7	7
1	13	10	4
11	2	3	12
9	6	8	5

Забележка. Всъщност за пълно решение на задачата при тази формулировка на условието е достатъчно само да се посочи таблица.

7.4. а) Тъй като сборът от цифрите на естествено число и самото число дават еднакъв остатък x при деление на 9, получаваме, че $x + x$ и x дават еднакъв

остатък при деление на 9. Последното е възможно само при $x = 0$, т.е. всяко интересно число се дели на 9 и не е просто.

б) Тъй като $37 + 36 = 73$, достатъчно е да намерим безбройно много числа със сбор на цифрите 36, които завършват на 37. Такива са например числата от вида $99800 \dots 037$.

в) Моделът от б) ни подсказва да търсим интересни числа с малък сбор от цифрите им, като най-малката възможност е 9. Така стигаме до числата $25 \underbrace{00 \dots 0}_{n-2} 1 \underbrace{00 \dots 0}_n 1 = (5 \cdot 10^n + 1)^2$, които са интересни за всяко $n \geq 2$.

8.1. Отговор: а) -1 и -2 ; б) -1 и -2 .

8.2. Нека $EF \parallel AB$, $F \in AC$. Тогава $AHEF$ е успоредник и $AF = HE$. Но HE е медиана в правоъгълния $\triangle BHD$ и следователно $\frac{1}{2}AC = AF = HE = \frac{1}{2}BD$. Получихме $AC = BD$, което означава, че трапецът $ABCD$ е равнобедрен. Сега имаме

$$BH = AB - AH = AB - \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$

и следователно $S_{ABCD} = \frac{DH(AB + CD)}{2} = DH \cdot BH = 2S_{BDH} = 2S$.

8.3. Знакът на дискриминантата на даденото уравнение съвпада със знака на израза $2c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$. Последното очевидно е положително, когато a , b и c са страни на триъгълник.

8.4. Лесно се проверява, че $p = 2$ и $p = 3$ са решения на задачата. Нека $p \geq 5$ е просто число. Тогава лесно се вижда (и е добре известно), че $p^2 - 1$ се дели на 24. Записваме $p^2 = 24k + 1$, където k е естествено число и получаваме

$$\left\lfloor \frac{p^2 + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^2 + 2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^2 + 7}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^2 + 18}{2} \right\rfloor = 12k + 1 + 8k + 1 + 3k + 1 + k = 24k + 3,$$

което очевидно не е просто.

9.1. Отговор: $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

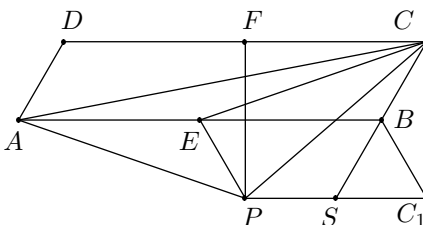
9.2. а) Да означим с C_1 точката, симетрична на C относно правата AB , и с S – средата на PC_1 . Тогава лесно се вижда, че $\triangle BC_1S$ е равнобедрен, точките C , B и S лежат на една права и $SC = 2BC$. Сега за $\triangle PSC$ и $\triangle PEA$ имаме

$$PE = C_1B = BC = PS, \\ EA = 2AD = 2BC = SC$$

и $\angle PEA = 120^\circ = \angle PSC$. Оттук $\triangle PSC \cong \triangle PEA$ и $PA = PC$.

б) От а) следва, че $\angle APC = 120^\circ$, защото ъгълът между PA и PC е равен на ъгъла между PE и PS . Накрая

$$\angle CAB + \angle CEB = \angle CAB + \angle C_1EB = \angle CAB + \angle PAB = \angle CAP = 30^\circ.$$



9.3. Да отбележим, че тъй като $a + b < ab$ при различни $a, b > 1$, най-голямото число, което може да се получи по описания начин, не надминава $1 + n!$. Оттук следва, че $p_n \leq \sqrt{1 + n!}$.

а) Тъй като $1 + 7! = 5041 = 71^2$, т.е. $p_7 \leq 71$, и 71 е просто число, получаваме $p_7 = 71$.

б) Имаме $1 + 8! = 40321 = 61.661$, откъдето следва, че $p_8 \geq 61$. Ще докажем, че няма как да получим по-големи стойности за p_8 . За целта ще подобрим горната оценка за минималния прост делител на по-малките от числата A , а за най-големите ще извършим директна проверка.

Подредени по големина в низходящ ред числата, които се получават по описания начин (прости или съставни), са: $a_1 = 1 + 8!$, $a_2 = 8!$, $a_3 = 1 + 2 + 3.4 \cdots .8 = 3 + \frac{8!}{2}$, $a_4 = 1.2 + 3.4 \cdots .8 = 2 + \frac{8!}{2}$, $a_5 = 1 + 2.3 + 4 \cdots .8 = 7 + \frac{8!}{6}$, $a_6 = 1.2.3 + 4 \cdots .8 = a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdots .8 = 6 + \frac{8!}{6}$, $a_8 = 1.2 + 3 + 4 \cdots .8 = 5 + \frac{8!}{6}$, $a_9 = 1 + 2.3 \cdots .7 + 8 = 9 + \frac{8!}{8}$, $a_{10} = 7! + 8 = 8 + \frac{8!}{8}$, $a_{11} = 1 + 2 + 3.4 \cdots .7 + 8 = 11 + \frac{7!}{2} = 11 + \frac{8!}{16}$ и т.н. Тъй като $\sqrt{a_{11}} = \sqrt{2531} < 51$ (всъщност 2531 е просто число), числото p_8 не може да се получи от a_{11} или от по-малко от него число. Остава да видим, че a_2 , a_4 , $a_6 = a_7$ и a_{10} са четни (т.е. най-малкият им прост делител е 2), a_3 и a_9 се делят на 3, a_5 се дели на 7 и a_8 се дели на 5 (т.е. най-малките им прости делители са съответно 3, 7 и 5).

9.4. Да разгледаме „рамката“, съставена от тези $4n - 4$ клетки, които имат обща страна с границата на таблицата. Да подредим числата в тези клетки по големина: $a_1 < a_2 < \cdots < a_{4n-4}$. Ще докажем с индукция по k , че за всяко $k \leq 4n - 4$ клетките, съдържащи числата $a_1, a_2, \dots, a_k$, образуват един непрекъснат сегмент от съседни клетки по дължината на рамката.

При $k = 1$ твърдението е очевидно вярно. Да допуснем, че то е вярно за $k = m$ и да разгледаме положението на клетката, съдържаща числото a_{m+1} . Тя няма да образува един непрекъснат сегмент с клетките $a_1, a_2, \dots, a_m$ тогава и само тогава, когато съществуват две квадратчета A и B от рамката, които се намират „между“ a_{m+1} и двата края на сегмента, образуван от $a_1, a_2, \dots, a_m$. Да нарисуваме начупената линия, свързваща центровете на клетките с последователни числа, водеща от a_m до a_{m+1} . Ясно е, че тази линия разделя шахматната дъска на две части, едната от които съдържа клетката A , а другата – клетката B . Но при това няма никакъв начин, щом продължим номерацията от a_{m+1} нататък в едната от тези две части, да стигнем след това до което и да е поле от другата – за целта би трябвало да номерираме два пъти някое от полетата по дължината на разделителната линия! Достигнахме до противоречие и с това твърдението е доказано.

Да разгледаме сегмента, образуван от клетките с числата $a_1, \dots, a_{2n-2}$ (първата половина). Лесно се вижда, че този сегмент трябва да „покрива“ една от крайните линии (ред или стълб) изцяло, и да не съдържа нито една клетка от противоположната крайна линия. Но тогава всяко число в непокритата линия ще бъде строго по-голямо от всяко число в покритата такава и сумите в тези две линии няма как да бъдат равни!

Забележка. Не е трудно да се види, че при нечетно n сумите в съседни редове (стълбове) са с различна четност.

10.1. Отговор: $a \in [2, 7]$.

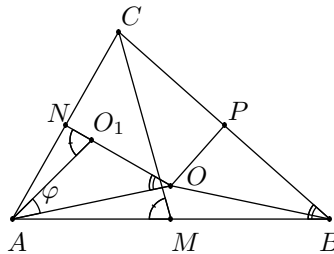
10.2. Нека R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, $\sphericalangle ABC = \beta$ и N е средата на страната AC . Тогава $ON \perp AC$, $O_1 \in ON$ и $\sphericalangle AON = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \beta$ (от $AC < BC$ следва $\sphericalangle AMC < 90^\circ$). Нека $\sphericalangle O_1AO = \varphi$. Имаме

$$\sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1C = \sphericalangle AO_1N = \beta + \varphi.$$

Но $\sphericalangle AMC = \beta + \sphericalangle BCM$ и оттук $\sphericalangle BCM = \varphi$.
Следователно $\triangle AOO_1 \sim \triangle CBM$ и тогава

$$S_{AOO_1} : S_{CBM} = (AO : BC)^2 = (R : BC)^2.$$

Ако P е средата на BC , то $\sphericalangle BPO = 90^\circ$, $\sphericalangle BOP = \sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $\sin 60^\circ = \frac{BC}{2R}$, откъдето $\frac{R}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Така $S_{AOO_1} : S_{CBM} = \frac{1}{3}$ и (понеже $S_{CBM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$) намираме $S_{AOO_1} : S_{ABC} = 1 : 6$.



10.3. Да означим разстоянието между клетките A и B с $d(A, B)$. Очевидно

$$d(A, B) = \begin{cases} 1, & \text{ако клетките } A \text{ и } B \text{ са в една линия,} \\ 2, & \text{ако клетките } A \text{ и } B \text{ са в различни линии.} \end{cases}$$

Нека M е добро множество. Ще докажем, че то съдържа клетки от всяка линия (ред или стълб) на дъската. Да допуснем противното – нека например m -тият ред не съдържа клетки от M . Прозволна клетка C от този ред лежи върху най-къс път от A до B , $A, B \in M$. Съществуват две възможности:

1) $d(A, C) = d(B, C) = 1$. Тогава A, B, C са в една линия и $d(A, B) = 1$. От друга страна $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) = 2$, противоречие.

2) $d(A, C) = 2$ или $d(B, C) = 2$ (или и двете). Тогава $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \geq 3$, отново противоречие с факта, че най-късите пътища са с дължина 1 или 2.

От доказаното следва, че броят на клетките в M е поне $\max\{m, k\}$. Ще построим добро множество с такъв брой клетки. Нека без ограничение на общостта $m \leq k$. Да означим с (i, j) клетката, намираща се в i -тия ред и j -тия стълб на дъската. Лесно се проверява, че множеството

$$M = \{(i, i) \mid i = 1, \dots, m\} \cup \{(m, j) \mid j = m + 1, \dots, k\}$$

е добро.

10.4. Нека a дели b и $b = aq$, $q \in \mathbb{N}$. Условията $1 \leq a < b \leq n$ и $a + b > n$ приемат вида $q > 1$, $\frac{n}{a} - 1 < q \leq \frac{n}{a}$. Ако $a > \frac{n}{2}$, то $q \leq \frac{n}{a} < 2$ и няма такава q . За всяко $a \leq \frac{n}{2}$ има единствено цяло $q \in \left(\frac{n}{a} - 1, \frac{n}{a}\right]$ (а именно $q = \left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil$) и за него

Нека M_n , $n \geq 3$, е множеството на двойките (a, b) , такива че a и b са взаимно прости. Лесно се вижда, че $(a, b) \in M_n$, но $(a, b) \notin M_{n-1}$ точно когато $b = n$, $1 \leq a < n$ и a е взаимно просто с n . Броят на тези двойки е равен на $\varphi(n)$. Не е трудно да се съобрази, че $(a, b) \in M_{n-1}$, но $(a, b) \notin M_n$ точно когато $a + b = n$, т.е. $b = n - a$ и освен това $a < n - a$ и a е взаимно просто с $n - a$ или, еквивалентно, $1 \leq a < \frac{n}{2}$ и a е взаимно просто с n . Броят на тези двойки е равен на $\frac{\varphi(n)}{2}$. Следователно

Сега равенството $g(n) - g(n-1) = f(n)$ приема вида $\frac{\varphi(n)}{2} = \left[\frac{n}{2} \right]$. Ако 2 дели n , то дава $\varphi(n) = n$, което е невъзможно за $n > 1$, а ако 2 не дели n , е равносилно с $\varphi(n) = n - 1$ и е изпълнено точно когато n е просто число.

11.1. Ответ: $a \in (0, 1]$.

t.e. $EB = R\sqrt{2}$.

11.3. Тъй като срещите са $\frac{n(n-1)}{2}$, то максималният брой точки на всички отбори е $\frac{3n(n-1)}{2}$. Ако последният отбор има k точки, то всички отбори имат общо

откъдето $k \leq n - 1$. Ако $k = n - 1$, в турнира е имало само победи и тогава точките на всеки отбор ще се делят на 3 и условието не може да е изпълнено. Следователно $k \geq n - 2$.

Ще докажем, че при всяко $n \geq 4$, съществува турнир от n отбора, изпълняващ условието на задачата и последния отбор има точно $n - 2$ точки. Броят точки в такъв турнир е равен на $\frac{3n-5}{2} \cdot n$, което означава, че броят на ремитата е равен на $\frac{3n(n-1)}{2} - \frac{3n-5}{2} \cdot n = n$.

С индукция по $n \geq 4$ ще построим такъв турнир. При $n = 4$ нека A е победил B и е завършил реми с C и D ; B е победил D и е завършил реми с C и накрая, C и D са завършили наравно. Тогава A, B, C и D имат съответно 5, 4, 3, 2 точки.

Да допуснем, че имаме такъв турнир за някое $n \geq 4$. Да разгледаме турнир с $n + 1$ отбора. Да отделим един отбор A и нека в турнира между останалите n отбора да се е получило класиране, удовлетворяващо условието на задачата и последния в класирането има $n - 2$ точки. Нека първите три отбора са X, Y и Z .

Нека отборите с точки $n - 2, n + 1, n + 4$ и т.н. докато стигнем до един от първите три отбора, да победят A .

Ако стигнем до Z , нека Z и A завършат реми, Y победи A и A победи всички останали. Ако стигнем до Y , нека Y победи A , X и A завършват реми и A победи всички останали. Ако стигнем до X , нека X и A завършват реми и A победи всички останали.

Във всеки от горните случаи последният отбор има $(n + 1) - 2$ точки и в турнира има n ремита. Директно се вижда, че такъв турнир удовлетворява условието на задачата. Следователно търсеният отговор е 2009.

11.4. Да допуснем, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена и $\alpha \geq 1$. Ако d е делител на n , то $d_1 = \frac{n}{d}$ също е делител на n и тогава от $\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < d$ следва

$$d_1 < \frac{10^{2011}}{n^{\alpha-1}} \leq 10^{2011}.$$

Това означава, че за d_1 (следователно и за d) имаме краен брой възможности, т.е. x_n е ограничено. Полученото противоречие показва, че $\alpha < 1$.

Нека $\alpha = \frac{p}{q} < 1$. Тъй като множеството на рационалните числа е гъсто, то за всяко естествено число t можем да изберем рационални числа $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_t}{q_t}$, всяко от които е в интервала $\left(\frac{1}{10^{2011}}, \frac{1}{10^{2010}}\right)$.

Нека $N = p_1 p_2 \dots p_t q_1 q_2 \dots q_t$ и да изберем $n = N^q$. Да забележим, че за всяко $i = 1, 2, \dots, t$ числото $\frac{p_i}{q_i} N^p$ е цяло и е делител на $n = N^q$. Освен това $n^\alpha = N^p$ и тъй като

$$\frac{n^\alpha}{10^{2011}} < \frac{p_i}{q_i} N^p < \frac{n^\alpha}{10^{2010}},$$

то $x_n \geq t$, което означава, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена.

12.1. Отговор: $a = 1$.

12.2. Понеже

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2b^2 + 2(a^2 + b^2 - ab) - a^2 = 4b^2 + a^2 - 2ab,$$

$$4m_b^2 = 4a^2 + b^2 - 2ab, \text{ то } \frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 2x + 1} =: f(x), \text{ където } x = \frac{a}{b} > 0 \text{ (за всяко } x >$$

0 съществува съответен триъгълник). Имаме, че $f'(x) = \frac{6(x^2 - 5x + 1)}{(4x^2 - 2x + 1)^2}$ и стандартно следва, че максималната стойност M на $f(x)$ се достига при $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} > 0$ и $M = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$. Отговорът на задачата е $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$.

Забележка. Задачата може да се реши и като се използва, че $M > 0,25$ трябва да е такова, че уравнението $f(x) = M$ да има двоен положителен корен.

12.3. Ако $\sphericalangle DOC = \psi$, от синусовата теорема следва, че

$$\frac{CD}{\sin \psi} = \frac{CO}{\sin(90^\circ + \beta - \psi)}, \quad \frac{CE}{\sin \psi} = \frac{CO}{\sin(90^\circ + \alpha - \psi)}$$

и тогава

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{CD}{CE} = \frac{\cos(\psi - \alpha)}{\cos(\psi - \beta)}.$$

Оттук

$$\begin{aligned} \sin \beta \cdot \cos(\psi - \beta) &= \sin \alpha \cdot \sin(\psi - \alpha) \Leftrightarrow \sin \psi - \sin(2\beta - \psi) = \sin \psi - \sin(2\alpha - \psi) \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\gamma + \psi) = 0. \end{aligned}$$

Понеже $\alpha \neq \beta$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\psi \leq \pi$, то $\gamma + \psi = \frac{\pi}{2}$. Разглеждайки $\triangle CDO$, следва, че $\sphericalangle CDE = \alpha = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ODE}{2}$. Значи C е центърът на външновписаната за $\triangle ODE$ окръжност към страната DE . Тогава

$$\text{dist}(C, DE) = \text{dist}(C, DO) = CO \cos \gamma = \text{dist}(O, AB).$$

Забележка. Твърдението на задачата означава, че ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$, то DE е симетралата на CH . Обратно, може да се докаже, че ако DE е симетралата на CH , то C е центърът на външновписаната за $\triangle ODE$ окръжност към страната DE .

12.4. Нека $x_1 = x_2 = \dots = x_8 = x$, $x_9 = y$ и $x_{10} = z$. Търсим естествени числа a и b , за които

$$8 \cdot 2^{x^2} + 2^{y^2} + 2^{z^2} = (2^a + 2^b)^2.$$

Достатъчно е да са изпълнени равенствата $y^2 = 2a$, $z^2 = 2b$ и $x^2 + 3 = a + b + 1$. Оттук $a = 2k^2$, $b = 2m^2$ и $x^2 = 2(k^2 + m^2) - 2$ (*). Ще покажем, че последното уравнение има безбройно много решения в естествени числа.

Полагаме $x = 2q$, $k = q + p$, $m = q - (p + 1)$. Тогава (*) е еквивалентно на $q = p^2 + p$. Следователно за всяко естествено число $p > n$ числата $x_1 = \dots = x_8 = 2(p^2 + p)$, $x_9 = 2(p^2 + 2p)$ и $x_{10} = 2(p^2 - 1)$ изпълняват даденото условие.

Задачите са предложени от: Тони Чехларова – 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 6.1, 7.1; Светлозар Дойчев и Сава Гроздев – 4.4, 5.4, 6.3, 6.4, 7.3, 8.1, 8.4; Ирина Шаркова – 5.3, 8.2; Емил Карлов – 6.2, 7.2; Ивайло Кортесов – 7.4, 8.3; Петър Бойваленков – 9.1, 9.3; Николай Белухов – 9.2, 9.4; Керопе Чакърян – 10.1, 10.2, 10.4; Иван Ланджев – 10.3; Емил Колев – 11.1, 11.2, 11.3; Александър Иванов – 11.4; Олег Мушкарков – 12.1, 12.4; Николай Николов – 12.2, 12.3.

ОЩЕ ЗА ИЗОТОМИЧНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В ТРИЪГЪЛНИКА И ИЗОТОМИЧНОТО ИЗОБРАЖЕНИЕ

АНГЕЛ ГУШЕВ, ВЕСЕЛИН ГУШЕВ¹

В памет на баща ни

Тази статия се явява естествено продължение на предишна наша публикация по темата [1] и в нея ще разгледаме още някои свойства на изотомичните елементи в триъгълника и ще дадем по-пълна характеристика на изотомичното изображение като дадем отговор на въпроса: *Какво представлява геометричното място на точките, които нямат крайна точка за изотомично спрегнат образ относно триъгълника?*

1. Свойства на изотомичните елементи в триъгълника

В началото ще припомним някои определения, свързани с понятието *изотомичност* [1], след което ще се възползваме от теорията за масовия център на система от материални точки (вж. напр. [2]), за да изследваме по-детайлно това понятие.

Две точки, които лежат върху правата, съдържаща дадена отсечка, и са равноотдалечени от нейната среда наричаме *изотомични точки за тази отсечка*. Правите, съединяващи връх на триъгълника с две изотомични точки за срещуположната му страна, наричаме *изотомични прави на триъгълника*.

Следващите няколко твърдения разкриват някои от свойствата на една интересна геометрична конструкция.

Твърдение 1. *Нека точките A^* , B^* и C^* са симетричните на медицентъра G на $\triangle ABC$ относно средите A_0 , B_0 и C_0 съответно на страните BC , CA и AB . Тогава двойките прави AC^* , AB^* ; BA^* , BC^* и CA^* , CB^* са изотомични прави на триъгълника ABC .*

Доказателство. Нека правите AB^* и AC^* пресичат правата BC съответно в точките A' и A'' , BA^* и BC^* пресичат AC в точките B' и B'' , а CA^* и CB^* пресичат AB в C' и C'' (вж. фиг. 1).

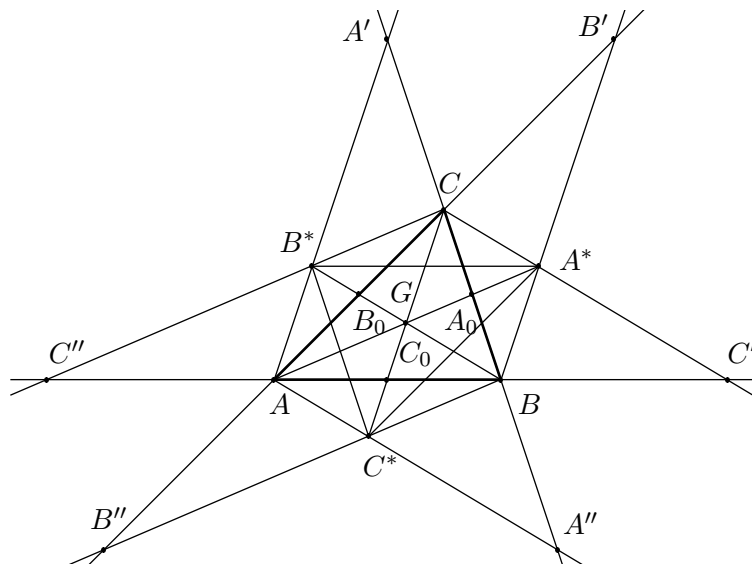
От свойството на медицентъра имаме $AG = 2 GA_0 = \frac{2}{3} m_a$, но по условие $GA_0 = A_0A^*$, т.е. получаваме $AG = GA^*$ или точката A^* е симетрична на A относно G . Аналогично точките B^* и C^* са симетрични съответно на

¹Работата на автора е частично подпомогната от фонд НИ на СУ.

B и C относно медицентъра G . От друга страна точката C_0 е среда на GC^* и AB , а A_0 – на GA^* и BC .

Така фигурите AC^*A^*C , GAC^*B и GBA^*C са успоредници, т.е. имаме $AC \parallel A^*C^* = b$, $AG \parallel BC^* = \frac{2}{3} m_a$, $CG \parallel BA^* = \frac{2}{3} m_c$. Следователно

фигурите $AB''C^*A^*$ и $B'CC^*A^*$ са успоредници и $B'C \parallel A^*C^* \parallel AB'' \parallel A^*C^*$, т.е. $CB' = AB'' = b$ или правите $BB' \equiv BA^*$ и $BB'' \equiv BC^*$ са изотомични прави на триъгълника ABC . Аналогично получаваме $AC'' = BC' = c$ и $BA'' = CA' = a$, т.е. двойките прави $BA^* \equiv BB'$, $BC^* \equiv BB''$ и $CA^* \equiv CC'$, $CB^* \equiv CC''$ са изотомични прави на триъгълника ABC .



Фиг. 1.

Твърдение 2. Нека точките A^* , B^* и C^* са симетричните на медицентъра G на $\triangle ABC$ относно средите A_0 , B_0 и C_0 съответно на страните BC , CA и AB . Тогава $AA^* \parallel BC^* \parallel CB^*$, $BB^* \parallel CA^* \parallel AC^*$ и $CC^* \parallel AB^* \parallel BA^*$.

Доказателство. Понеже точката B_0 е среда на GB^* и AC , а A_0 – на GA^* и BC , то фигурите GCB^*A и GBA^*C са успоредници, тогава $GC \parallel AB^* \parallel BA^* = \frac{2}{3} m_c$. Аналогично получаваме още $GA \parallel CB^* \parallel BC^* = \frac{2}{3} m_a$ и $GB \parallel AC^* \parallel CA^* = \frac{2}{3} m_b$, което трябваше да докажем.

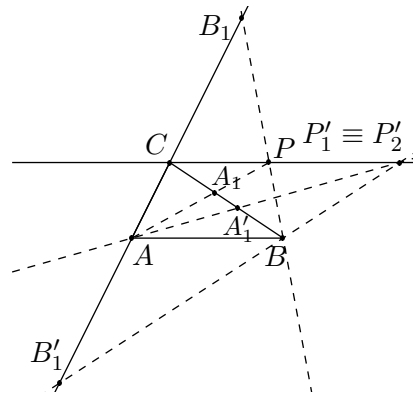
Следствие 1. Нека е даден триъгълникът ABC съответно с медиани $AA_0 = m_a$, $BB_0 = m_b$ и $CC_0 = m_c$. Тогава числата m_a , m_b и m_c могат да бъдат дължини на страните на триъгълник.

Доказателство. Например триъгълникът GA^*B има дължини на страните съответно $GA^* = \frac{2}{3} m_a$, $GB = \frac{2}{3} m_b$ и $BA^* = \frac{2}{3} m_c$, т.е. е подобен на триъгълник с търсеното свойство.

Следва още едно интересно свойство на изотомичните елементи в триъгълника.

Твърдение 3. Дадени са триъгълникът ABC , права r , минаваща през върха C и успоредна на страната AB и точка $P \neq C$, лежаща върху r . Нека $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap AC$, а A'_1 и B'_1 са изотомичните точки на A_1 и B_1 съответно за отсечките BC и CA . Тогава правите AA'_1 , BB'_1 и r се пресичат в една точка P' и $\overline{CP} \overline{CP'} = AB^2$ (вж. фиг. 2).

Доказателство. Ние ще разгледаме само случая на разположение на точката P както е на фиг. 2, т.е. точките B и P се намират в една и съща полуравнина, относно правата CA . В противен случай точките A и P се намират в една и съща полуравнина, относно правата BC и разглежданията са аналогични. Понеже точките B_1 и B'_1 са изотомични за отсечката CA , а A_1 и A'_1 – за отсечката BC , то са в сила следните пропорции $k = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{B'_1A}{B'_1C}$ и $l = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{A'_1B}{A'_1C}$.



Фиг. 2

От $r \parallel AB$ по теоремата на Талес ($\triangle CPB_1 \sim \triangle ABB_1$ и $\triangle PCA_1 \sim \triangle ABA_1$) имаме $l = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CP}{AB} = \frac{B_1C}{B_1A} = k$, т.е. $\frac{B'_1A}{B'_1C} = \frac{A'_1B}{A'_1C} = k$.

Нека $P'_1 = r \cap BB'_1$, $P'_2 = r \cap AA'_1$ (понеже точка A'_1 лежи върху отсечката BC , а B'_1 не лежи върху отсечката CA , то точките P'_1 и P'_2 лежат върху лъча $CP^{\rightarrow}$), тогава от двойките подобни триъгълници $\triangle ABB'_1 \sim \triangle CP'_1B'_1$ и $\triangle ABA'_1 \sim \triangle CP'_2A'_1$ ($r \parallel AB$) имаме съответно $\frac{AB}{CP'_1} = \frac{B'_1A}{B'_1C}$ и $\frac{AB}{CP'_2} = \frac{A'_1B}{A'_1C}$, но $\frac{B'_1A}{B'_1C} = \frac{A'_1B}{A'_1C} = \frac{CP}{AB} = k$ следователно $CP'_1 = CP'_2 = \frac{AB}{k} = \frac{AB}{\frac{CP}{AB}} = \frac{AB^2}{CP}$, т.е. $P'_1 \equiv P'_2$ или правите AA'_1 , BB'_1 и r се пресичат в една точка P' и $\overline{CP} \overline{CP'} = AB^2$.

2. Изотомично изображение

Важна роля в нашите следващи разглеждания играят следното следствие от теоремите на Чева (права и обратна) и свързаното с него определение (Теорема 2 и Определение 4 от [1]):

Твърдение 4. Ако три прави AA_1 , BB_1 и CC_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$), минаващи през върховете на $\triangle ABC$ се пресичат в една точка X , то и изотомичните им прави AA_2 , BB_2 и CC_2 също се пресичат в една точка (изотомично спрегнат образ на X) или са успоредни.

Ако три прави, минаващи през върховете на триъгълник се пресичат в точката X , а правите изотомични с тях, — в точката Y , то точките X и Y наричаме *изотомично спрегнати относно този триъгълник*.

Както се вижда от **Твърдение 4** изотомичните прави на три пресекателни прави или се пресичат в една точка, или са успоредни, т.е. пак могат да се разглеждат като пресекателни, но този път в една безкрайна точка, съответна на направлението на тези прави. От **Твърдение 2** директно следва, че точките A^* , B^* и C^* нямат за изотомично спрегнати образи крайни точки. Така сега достигахме до следния въпрос. *Кои други точки от равнината на триъгълника нямат за изотомични образи крайни точки?*

Един тривиален отговор на последния въпрос ни дава следното

Твърдение 5. Върховете A , B и C на триъгълника ABC нямат за изотомично спрегнат образ, относно $\triangle ABC$, крайна точка.

Доказателство. Достатъчно е да докажем твърдението само за един от върховете. Нека за конкретност $X \equiv A$. Тогава правите $BX \equiv BA$, $CX \equiv CA$ и права s през точката A , успоредна на BC се пресичат в точка X . Очевидно двойките прави BX и BC и CX и CB са две двойки изотомични прави за триъгълника. Следователно за изотомично спрегната на X точка (крайната или безкрайната) можем да считаме, че лежи върху BC и s' , където s и s' са също изотомични прави за триъгълника. Но $s \parallel BC$ така, че за изотомична права s' на s можем да считаме самата нея, т.е. $s \equiv s'$. Така $s' \parallel BC$ и за „изотомично спрегната“ на A можем да считаме безкрайната точка на правата BC . Всеки друг избор на направлението на s би ни довел до нееднозначност на изотомичния образ на A .

За да изследваме докрай въпроса за изотомично спрегнатите образи на точките от равнината на триъгълника, да се върнем на свойствата на масовия център на система от материални точки и да видим какво представлява *изотомичното спрягане* в термините на натоварена механична система.

2.1. Изотомични точки за дадена отсечка

Сега ще дадем връзка между радиус-векторите на изотомичните за дадена отсечка точки.

Теорема 1. Нека точка C е от правата AB . Ако $[C, m_1 + m_2] = [A, m_1] + [B, m_2]$, където m_1 и m_2 са реални ненулеви маси, то за точката C' , изотомична на C за отсечката AB е в сила $\left[C', m \frac{1}{m_1} + m \frac{1}{m_2} \right] =$

$$\left[A, m \frac{1}{m_1}\right] + \left[B, m \frac{1}{m_2}\right], \text{ където } m \text{ е произволна ненулева константа, т.е.}$$

за радиус-векторите на точките C и C' имаме $\overrightarrow{OC} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}$

и $\overrightarrow{OC'} = \frac{\frac{1}{m_1} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{m_2} \overrightarrow{OB}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}.$

$[A, m_1] \quad [C, m_1 + m_2] \quad [B, m_2]$ а) $m_1 = k \overline{CB} = 1$ $m_2 = k \overline{AC} = 2$	$[A, m'_1] \quad [C, m'_1 + m'_2] \quad [B, m'_2]$ а) $m'_1 = k \overline{C'B} = 1$ $m'_2 = k \overline{AC'} = \frac{1}{2}$
---	---

Фиг. 3. Изотомично изображение и масов център на две точки

Доказателство. Нека точките C ($C \neq A$ и $C \neq B$) и C' са изотомични точки за отсечката AB и на точка C гледаме като на масов център на материалните точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$, където $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$ са реални числа (напр. $m_1 = k \overline{CB}$ и $m_2 = k \overline{AC}$, където $k \neq 0$).

Понеже C и C' са изотомични точки за AB , то $\overline{AC} = \overline{C'B}$ и $\overline{BC} = \overline{C'A}$. Сега последователно получаваме $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'B}}{-\overline{C'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} = \frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_2}}$, т.е. $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1}}$ или $[C', m'_1 + m'_2] = [A, m'_1] + [B, m'_2]$, където $m'_1 = \frac{1}{m_1}$, $m'_2 = \frac{1}{m_2}$.

Така за радиус-векторите на точките C и C' имаме $\overrightarrow{OC} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}$

и $\overrightarrow{OC'} = \frac{\frac{1}{m_1} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{m_2} \overrightarrow{OB}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}.$

Когато $C \equiv A$ ($C \equiv B$), получаваме $C' \equiv B$ ($C' \equiv A$), т.е. $[C, m] = [A, m] + [B, 0]$ ($[C, m] = [A, 0] + [B, m]$), а $[C', m] = [A, 0] + [B, m]$ ($[C', m] = [A, m] + [B, 0]$) или за радиус-векторите имаме $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$) и $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA}$).

2.2. Изотомично спрегнати точки относно триъгълник

Сега ще разглеждаме точка P от равнината на триъгълника ABC (вж. фиг. 4). Нека $AP \cap BC = A_1$, $BP \cap AC = B_1$, $CP \cap AB = C_1$, а двойките точки A_1 и A'_1 , B_1 и B'_1 , C'_1 и C_1 са изотомични точки съответно за отсечките BC , AC и AB . Тогава съгласно **Твърдение 4** правите AA'_1 , BB'_1 и CC'_1 или се пресичат в изотомично спрегната на P точка P' или са успоредни (пресичат се в някоя безкрайна точка).

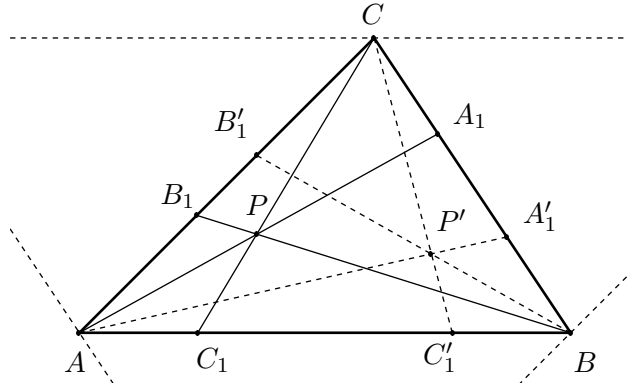
Следващата теорема ни дава характеристика на понятието *изотомично спрягане*, относно триъгълник в термините на натоварена механична система (барицентрични координати).

Теорема 2. За всяка точка P от равнината на триъгълника и не съвпадаща с негов връх съществува изотомично спрегната точка P' (крайна или безкрайна), като при това, ако $\vec{OP} = \frac{m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} + m_3 \vec{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}$, то $\vec{OP'} = \frac{m \frac{1}{m_1} \vec{OA} + m \frac{1}{m_2} \vec{OB} + m \frac{1}{m_3} \vec{OC}}{m \frac{1}{m_1} + m \frac{1}{m_2} + m \frac{1}{m_3}}$, където m е произволно ненулево число.

Доказателство. Случай 1. Нека точката P лежи върху някоя от правите, съдържащи страните на триъгълника, но не съвпада с никой негов връх. Ако $P \in AB$, тогава $C_1 \equiv P$, $A_1 \equiv B$, $B_1 \equiv A$ и $A'_1 \equiv C \equiv B'_1$, т.е. $P' \equiv C$.

Или в термините на материални точки, $[P, m_1 + m_2] = [A, m_1] + [B, m_2] + [C, 0]$ и $[P', m] = [A, 0] + [B, 0] + [C, m]$, където $m_1 = k \overline{PB} \neq 0$, $m_2 = k \overline{AP} \neq 0$, за някое $k \neq 0$, а $m \neq 0$, т.е. $\vec{OP} = \frac{m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB}}{m_1 + m_2}$ и $\vec{OP'} = \vec{OC}$.

Аналогично при $P \in BC$ имаме $P' \equiv A$, а при $P \in CA$ е в сила $P' \equiv B$.



Фиг. 4. Изотомично изображение и масов център на три точки

Случай 2. Ако точката $P \neq C$ лежи върху права r такава, че $C \in r$, $r \parallel AB$, то тогава точка C_1 не съществува или можем да смятаме, че съвпада с безкрайната точка на правата AB , тогава с тази безкрайна точка съвпада и точката C'_1 . Така съгласно **Твърдение 3** имаме, че правите AA'_1 , BB'_1 и r се пресичат в една точка P' , която можем да считаме за „изотомично спрегната“ на P .

От друга страна $\vec{OP} = \vec{OC} + \alpha \vec{AB} = -\alpha \vec{OA} + \alpha \vec{OB} + \vec{OC}$, т.е. барицентричните координати на точка P са $\lambda = -\alpha$, $\mu = \alpha$ и $\nu = 1$, където $\alpha = \frac{\overline{CP}}{\overline{AB}}$.

Аналогично за барицентричните координати на P' имаме $\lambda' = -\alpha'$, $\mu' = \alpha'$ и $\nu = 1$, където $\alpha' = \frac{\overline{CP'}}{\overline{AB}}$, но $\alpha = \frac{CP}{AB}$ и от **Твърдение 3** имаме още $\overline{CP'} = \frac{AB^2}{\overline{CP}}$, т.е. $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$.

Или в термините на материални точки, $[P, m_3] = [A, m_1] + [B, m_2] + [C, m_3]$ и $[P', m\frac{1}{m_3}] = [A, m\frac{1}{m_1}] + [B, m\frac{1}{m_2}] + [C, m\frac{1}{m_3}]$, където $m_1 = -k\frac{\overline{A_1C}}{\overline{BA_1}}$, $m_2 = k\frac{\overline{A_1C}}{\overline{BA_1}}$, $m_3 = k$, за някое $k \neq 0$, а $m \neq 0$, т.е. $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}$ и $\overrightarrow{OP'} = \frac{\frac{1}{m_1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{m_2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{m_3}\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}$.

Аналогично, ако точката P не съвпада с връх на триъгълника и лежи върху някоя от правите p или q ($A \in p, p \parallel BC$, а $B \in q, q \parallel CA$), то нейната „изотомично спрегната“ P' лежи на същата права, и ако $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}$, то $\overrightarrow{OP'} = \frac{\frac{1}{m_1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{m_2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{m_3}\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}$, където $m_1 \neq 0$ и $m_2 + m_3 = 0$ или $m_2 \neq 0$ и $m_1 + m_3 = 0$.

Случай 3. Нека сега точката P не лежи върху никоя от правите AB , BC , CA , p , q или r (вж. фигура 4). Тогава съществуват ненулеви маси m_1 , m_2 и m_3 такива, че $[P, m_1 + m_2 + m_3] = [A, m_1] + [B, m_2] + [C, m_3]$.

Понеже $[A'_1, m'_2 + m'_3] = [B, m'_2] + [C, m'_3]$, $[B'_1, m'_1 + m'_3] = [A, m'_1] + [C, m'_3]$ и $[C'_1, m'_1 + m'_2] = [A, m'_1] + [B, m'_2]$, където $m'_1 = \frac{1}{m_1}$, $m'_2 = \frac{1}{m_2}$, $m'_3 = \frac{1}{m_3}$, то за изотомично спрегната на P имаме $[P', m\frac{1}{m_1} + m\frac{1}{m_2} + m\frac{1}{m_3}] = [A, m\frac{1}{m_1}] + [B, m\frac{1}{m_2}] + [C, m\frac{1}{m_3}]$, където $m \neq 0$, т.е. $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}$ и $\overrightarrow{OP'} = \frac{\frac{1}{m_1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{m_2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{m_3}\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}$.

2.3. Изотомично изображение. Двойни точки и двойни прави

Резултатите от **Теорема 2** и **Твърдение 5** ни дават основание да дадем следното

Определение 1. Изображението на равнината в себе си, при което на всеки връх на триъгълника ABC се съпоставя безкрайната точка, съответна на направлението на срещуположната му страна, а за всяка друга точка $P(\lambda, \mu, \nu)$ с радиус-вектор $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$ се съпоставя точката P' , такава че $\overrightarrow{OP'} = \frac{m\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA} + m\frac{1}{\mu}\overrightarrow{OB} + m\frac{1}{\nu}\overrightarrow{OC}}{m\frac{1}{\lambda} + m\frac{1}{\mu} + m\frac{1}{\nu}}$, където

$\lambda + \mu + \nu = 1$, а t е произволно ненулево число се нарича изотомично изображение, а точката P' – изотомично спрегната на точката P относно $\triangle ABC$.

От **Случай 2** на **Теорема 2** имаме, че правите p , q и r при изотомичното изображение се изобазяват в себе си. Така точките $\overline{A}(-1, 1, 1)$, $\overline{B}(1, -1, 1)$ и $\overline{C}(1, 1, -1)$ ($\overline{A} = q \cap r$, $\overline{B} = r \cap p$ и $\overline{C} = p \cap q$) се явяват двойни точки за изотомичното изображение. Очевидно точката $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ също е двойна.

За да изследваме по-детайлно въпроса с двойните точки на изотомичното изображение да видим кога точка P с радиус-вектор $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$), ще съвпадне с изотомичния си образ P' с $\overrightarrow{OP'} = \frac{\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{\nu} \overrightarrow{OC}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$, т.е. $\lambda = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$, $\mu = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$ и $\nu = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$. Така двойните точки на изотомичното изображение имат за ба-

рицентрични координати решенията на следната система
$$\begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} \\ \mu^2 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} \\ \nu^2 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} \end{cases},$$

които са тройките $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ и $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, т.е. единствените двойни точки на изотомичното изображение са $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\overline{A}(-1, 1, 1)$, $\overline{B}(1, -1, 1)$ и $\overline{C}(1, 1, -1)$.

2.4. Изследване на точките от равнината с безкрайни изотомични образи

От **Определение 1** имаме, че за всяка точка от равнината на триъгълника, различна от негов връх, за която $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$ е в сила $\overrightarrow{OP'} = \frac{m \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OA} + m \frac{1}{\mu} \overrightarrow{OB} + m \frac{1}{\nu} \overrightarrow{OC}}{m \frac{1}{\lambda} + m \frac{1}{\mu} + m \frac{1}{\nu}}$, където $\lambda + \mu + \nu = 1$, P' е изотомично спрегната на P относно $\triangle ABC$ точка, а m е произволно ненулево число.

Очевидно поне едно от числата λ , μ или ν е различно от нула (нека за конкретност $\lambda \neq 0$). Тогава за числото $\tilde{m} = \lambda \mu \nu$ имаме две възможности:

I. $\tilde{m} \neq 0$, т.е. всяко от числата λ , μ и ν е различно от нула. Следователно в равенството $\overrightarrow{OP'} = \frac{m \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OA} + m \frac{1}{\mu} \overrightarrow{OB} + m \frac{1}{\nu} \overrightarrow{OC}}{m \frac{1}{\lambda} + m \frac{1}{\mu} + m \frac{1}{\nu}}$ нямаме деление на нула и можем да изберем $m = \tilde{m}$, за да получим еквивалентното представяне $\overrightarrow{OP'} = \frac{\mu \nu \overrightarrow{OA} + \lambda \nu \overrightarrow{OB} + \lambda \mu \overrightarrow{OC}}{\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu}$.

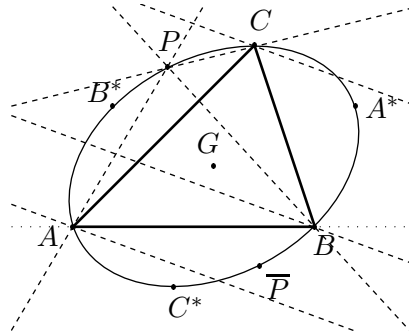
Тази точка ще бъде безкрайна точно когато знаменателят ѝ е равен на нула, т.е. за променливите λ, μ и ν имаме $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$.

II. $\tilde{m} = 0$. Сега имаме следните възможности:

II.1 $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \nu = 0$ ($P \in AB$), т.е. попадаме в случай 1 от доказателството на **Теорема 2**, в който P' е крайна точка;

II.2 $\lambda \neq 0, \mu = \nu = 0$ ($P \equiv A$) и отново $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$.

Така окончателно получихме, че *всички точки, за които изотомично спрегнатите им образи са безкрайни, удовлетворяват следното уравнение в барицентрични координати $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$ (*), където $\lambda + \mu + \nu = 1$.*



Фиг. 5. Геометрично място на точките P , които нямат за изотомично спрегнат образ относно триъгълника крайна точка.

От **Твърдение 2** директно следва, че освен точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$ и точките $A^*(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $B^*(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $C^*(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, симетрични на медицентъра $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, относно средите $A_0(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B_0(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ и $C_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ на страните BC , CA и AB също лежат на тази крива (това може да бъде проверено и директно чрез заместване на координатите на съответната точка в уравнението (*)). От друга страна от свойството на медицентъра имаме още $\frac{2}{3} AA_0 = AG = 2 GA_0 = GA^*$, $\frac{2}{3} BB_0 = BG = 2 GB_0 = GB^*$ и $\frac{2}{3} CC_0 = CG = 2 GC_0 = GC^*$, т.е. точките A^* , B^* , C^* са централно симетрични на A , B , C , относно G . Сега ще докажем, че това свойство е в сила за всяка точка от множеството с уравнение (*).

Твърдение 6. *Множеството от точки в равнината с уравнение в барицентрични координати $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$, където $\lambda + \mu + \nu = 1$ е централно симетрично относно медицентъра на триъгълника G .*

Доказателство. Нека точката $P(\lambda, \mu, \nu)$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$) е произволна точка, за която е изпълнено $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$. Тогава симетричната $\bar{P}$ на $P(\lambda, \mu, \nu)$, относно $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ще има барицентрични координати $\bar{P}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$, където $\bar{\lambda} = \frac{2}{3} - \lambda$, $\bar{\mu} = \frac{2}{3} - \mu$ и $\bar{\nu} = \frac{2}{3} - \nu$. Сега да пресметнем израза $\Omega =$

$\overline{\mu\nu} + \overline{\nu\lambda} + \overline{\lambda\mu} = \left(\frac{2}{3} - \mu\right) \left(\frac{2}{3} - \nu\right) + \left(\frac{2}{3} - \nu\right) \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \left(\frac{2}{3} - \mu\right) =$
 $3 \frac{4}{9} - \frac{2}{3}[(\mu + \nu) + (\nu + \lambda) + (\lambda + \mu)] + (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = \frac{4}{3} - 2\frac{2}{3}(\lambda + \mu + \nu) +$
 $(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = 0$, понеже $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$, т.е. за точката $\overline{P}$ също е изпълнено (*), което и трябваше да докажем.

Твърдение 7. Множеството от точки в $\mathbb{R}^3$ с уравнения $yz + zx + xy = 0$ и $x + y + z = 1$ е равнинна крива, централно симетрична относно точката $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Доказателство. Това множество се намира в равнината с уравнение $x + y + z = 1$ и един възможен начин за параметризация е следният

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(1 - t \pm \sqrt{1 + 2t - 3t^2}\right) \\ y = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - t \pm \sqrt{1 + 2t - 3t^2}\right) - t \\ z = t \end{cases}, \text{ където } t \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right], \text{ а симетрич-}$$

ността следва аналогично на **Твърдение 6**.

Така видяхме, че множеството от точки в равнината с уравнение в барицентрични координати $\lambda + \mu + \nu = 1$, $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$ зависи от един параметър, следователно е крива.

От друга старна се оказва, че в барицентрични координати кривите с уравнения $\lambda + \mu + \nu = 1$, $\tilde{a}\mu\nu + \tilde{b}\nu\lambda + \tilde{c}\lambda\mu = 0$ задават в равнината криви от втора степен (конични сечения), минаващи през точките A, B и C (вж. напр. [3, 4]), в частност кривата $\lambda + \mu + \nu = 1$, $a^2\mu\nu + b^2\nu\lambda + c^2\lambda\mu = 0$ (**) е окръжност, описана около триъгълника ABC със страни a, b и c (вж. равенство (12) на стр. 100 от [3]).

Така, ако кривата с уравнения (*) съдържа безкрайна точка, то и кривата с уравнение (**) също ще съдържа безкрайна точка, което не е вярно. Следователно кривата с уравнение (*) не съдържа безкрайна точка, т.е. (*) е крива от втора степен, която не съдържа безкрайна точка, следователно е елипса – централносиметрична относно точка G (вж. фиг. 5). Други свойства на тази елипса са изследвани в [4] (**Теорема 2'**).

За по-пълно разбиране и осмисляне на понятията и свойствата на елементите в триъгълника авторите препоръчват на читателя да разгледа и реши самостоятелно следната задача, даваща още едно свойство на изотомичните елементи, както и връзка между изотомичното и хармоничното спрягане в триъгълника.

Преди да формулираме задачата ще припомним някои определения. *Просто отношение* (ABC) на три точки A, B и C , лежащи върху една права в този ред се нарича отношението на алгебричните мерки $\overline{AC} : \overline{BC}$, т.е. $(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. *Двойно (сложно) отношение* $(ABKL)$ на четири точки

A, B, K и L , лежащи върху една права в този ред се нарича отношението на простите отношения $(ABK) : (ABL)$, т.е. $(ABKL) = (ABK) : (ABL) = \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} : \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}$. Хармонична четворка точки (хармонична група) образуват четири точки, лежащи на една права, за които двойното отношение е равно на -1 .

Задача 1. Нека точка P е от равнината на триъгълника, $\Delta P_a P_b P_c$ е хармонично спрегнатия триъгълник на точка P (P_a е пресечна точка на правите AP, BB_2 и CC_2 , където $BP \cap AC = B_1$, точките A, C, B_1 и B_2 образуват хармонична група, аналогично и за P_b и P_c вж. напр. [4] или §20 от [3]), а P_a^*, P_b^* и P_c^* са изотомично спрегнатите образи съответно на P_a, P_b и P_c относно ΔABC . Тогава двойките прави AP, AP_a^* ; BP, BP_b^* и CP, CP_c^* са изотомични прави на триъгълника ABC .

Упътване. В термините на натоварена механична система да се докаже, че ако $(ABKL) = -1$ и $[K, m_1 + m_2] = [A, m_1] + [B, m_2]$, то $[L, m_1 - m_2] = [A, m_1] + [B, -m_2]$; ако $[P, m_1 + m_2 + m_3] = [A, m_1] + [B, m_2] + [C, m_3]$, то барицентричните координати на A'_1, P_a и P_a^* са $A'_1 \left(0, \frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}, \frac{\frac{1}{m_3}}{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}} \right)$,

$$P_a \left(\frac{-m_1}{-m_1 + m_2 + m_3}, \frac{m_2}{-m_1 + m_2 + m_3}, \frac{m_3}{-m_1 + m_2 + m_3} \right) \text{ и } P_a^* \left(\frac{-\frac{1}{m_1}}{-\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}, \frac{\frac{1}{m_2}}{-\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}, \frac{\frac{1}{m_3}}{-\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}} \right).$$

Да се намерят радиус-векторите $\overrightarrow{OA'_1}$ и $\overrightarrow{OP_a^*}$ и да се избере $O \equiv A$, след което да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA'_1}$ и $\overrightarrow{AP_a^*}$ са колинеарни.

От **Задача 1** и **Твърдение 4** следва, че AP_a^*, BP_b^* и CP_c^* се пресичат в една точка P' – изотомично спрегната на P относно триъгълника или са успоредни (при точка P , лежаща на описаната централносиметрична относително медицентъра G елипса), т.е. получаваме като следствие **Теорема 2'** от [4].

Литература

- [1] Гушев, А., А. Гушев, В. Гушев, *Свойства на изотомичните елементи в триъгълника*, сп. „Математика“, бр. 6/2008, стр. 6–18.
- [2] Гушев, А., В. Гушев, *Приложение на понятието масов център в геометрията*, сп. „Математика“, бр. 1/2011., стр. 14–25.
- [3] Паскалев, Г., И. Чобанов, *Забележителни точки в триъгълника*, Издателство „Народна просвета“, София, 1985 г. .
- [4] Ненков, В. *Няколко свойства на спрегнатия триъгълник*, сп. „Математика и информатика“, бр.6/2007, стр. 16–21.

ЗАДАЧИ ЗА ИЗЧИСЛЕНИЯ ОТ ОКРЪЖНОСТ

РУМЯНА НЕСТОРОВА

В училище задачите по физика, за разлика от повечето математически задачи, се решават параметрично и накрая в получения буквен израз за търсената величина се замества с дадените по условие конкретни числови данни. За тази цел учениците трябва да имат много добри умения за преобразуване на изрази. Ще разгледаме десет изчислителни задачи за окръжности, в които стойностите на дадените величини не са числови, а параметрични. Разработката е подходяща за ученици от гимназиален етап с повишен интерес към математиката. Решаването на задачите ще разшири и подобри уменията им за преобразуване на рационални и ирационални изрази, получени в задължителната подготовка.

Задача 1. Две окръжности $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допират външно в точката C , а AB е тяхна обща външна допирателна ($A \in k_1$, $B \in k_2$). Да се намерят радиусите r_1 и r_2 , ако $AC = a$ и $BC = b$.

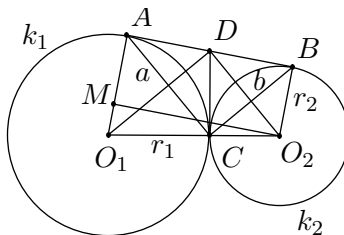
Решение. Нека $r_1 > r_2$. По Питагоров теорема от правоъгълния $\triangle ACB$ намираме $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ако $O_2M \perp O_1A$ ($M \in O_1A$), то в правоъгълния $\triangle O_1O_2M$ от теоремата на Питагор следва, че $O_2M^2 = O_1O_2^2 - O_1M^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$, откъдето $O_2M = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Тъй като MO_2BA е правоъгълник, то

$$(1) \quad AB = O_2M \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{r_1r_2} \iff \frac{a^2 + b^2}{4} = r_1r_2.$$

Нека $t = CD$, ($D \in AB$) е общата допирателна към k_1 и k_2 в точката C . От $CD = AD = DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$ и $\triangle O_1DO_2 \sim \triangle ACB$ следва, че $\frac{O_1O_2}{AB} = \frac{CD}{h_{AB}}$. Тъй като височината към хипотенузата в правоъгълния $\triangle ACB$ с катети a и b е $h_{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, от последното отношение получаваме

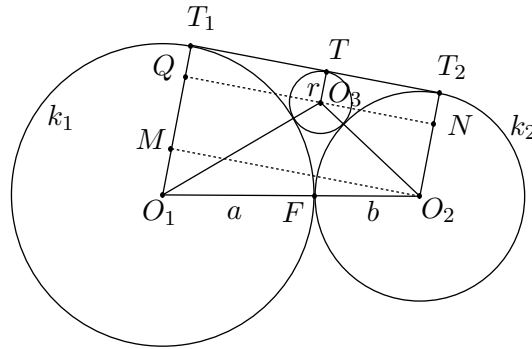
$$(2) \quad \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \implies r_1 + r_2 = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab}.$$



От (1) и (2) следва, че r_1 и r_2 са корени на квадратното уравнение $r^2 - \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab}r + \frac{a^2 + b^2}{4} = 0$, откъдето намираме $r_1 = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2 + b^2}$ и $r_2 = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Задача 2. Две окръжности $k_1(O_1, a)$ и $k_2(O_2, b)$ се допират външно. Да се намери радиусът на окръжността, вписана в криволинейния триъгълник, заключен между окръжностите и общата им външна допирателна.

Решение. Нека общата външна допирателна t на окръжностите k_1 и k_2 ги допира съответно в точките T_1 и T_2 , а k_1 и k_2 се допират в точката F . Нека окръжността $k_3(O_3, r)$ е вписана в криволинейния триъгълник T_1FT_2 .



Ако $O_2M \perp O_1T_1$, ($M \in O_1T_1$), то в $\triangle O_1O_2M$ от теоремата на Питагор следва, че $O_2M^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2 \Rightarrow O_2M = 2\sqrt{ab}$. От правоъгълника $MO_2T_2T_1$ намираме $T_1T_2 = O_2M = 2\sqrt{ab}$, т.е. $T_1T + TT_2 = 2\sqrt{ab}$ (1), където $T = k_3 \cap t$. Нека $O_3Q \perp O_1T_1$, ($Q \in O_1T_1$) и $O_3N \perp O_2T_2$, ($N \in O_2T_2$); тогава $QN = T_1T_2$ и $NT_2 = QT_1 = r$. В правоъгълния $\triangle O_2NO_3$ намираме $O_2N = b - r$ и $O_2O_3 = b + r$, откъдето по Питагоровата теорема

$$O_3N = \sqrt{(b + r)^2 - (b - r)^2} = 2\sqrt{br}.$$

Тъй като TO_3NT_2 е правоъгълник, то $TT_2 = O_3N = 2\sqrt{br}$. Аналогично от правоъгълния $\triangle QO_1O_3$ намираме $QO_3 = T_1T = 2\sqrt{ar}$. Сега от (1) получаваме, че

$$2\sqrt{br} + 2\sqrt{ar} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow r = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}.$$

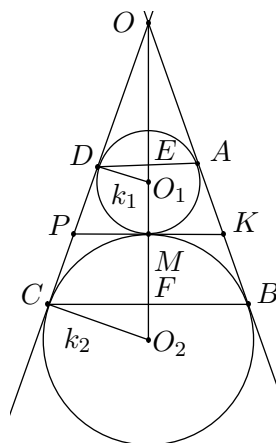
Задача 3. Две окръжности $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, R)$ се допират външно в точката M , а правите AB и CD са техните общи външни допирателни ($A, D \in k_1$, $B, C \in k_2$). Да се докаже, че в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност и да се намери нейния радиус.

Решение. Нека $AB \cap CD = O$. Построяваме централата O_1O_2 и радиусите O_1D , O_2C в допирните точки D и C ; $O_1D \perp CD$, $O_2C \perp CD$.

Тъй като O_1O_2 е ос на симетрия за k_1 и k_2 , то $O \in O_1O_2$ и точките A и D , както и точките B и C , са симетрични относно O_1O_2 , следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец.

Ако $AD + BC = AB + DC$, $AB = \frac{1}{2}(AD + BC)$, то в $ABCD$ може да се впише окръжност. Следователно трябва да докажем, че отсечката AB е равна на средната отсечка на трапеца.

Ако правата t е общата вътрешна допирателна на k_1 и k_2 в точката M и $t \cap AB = K$, $t \cap CD = P$, то $KA = KM = KB$, $PD = PM = PC$, следователно KP е средна отсечка в $ABCD$ и $KP = AB$, т.е. в $ABCD$ може да се впише окръжност.



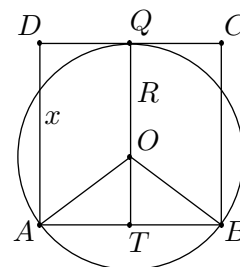
Нека EF е диаметърът на тази окръжност. Ако $EO_1 = x$, $FO_2 = y$, то MF и ME са радиуси на вписаната окръжност и следователно $R - y = r + x$. От подобие на $\triangle O_1ED$ и $\triangle O_2FC$ получаваме $\frac{O_1E}{O_2F} = \frac{O_1D}{O_2C} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r}{R}$.

Решаваме системата $\begin{cases} R - y = r + x \\ \frac{x}{y} = \frac{r}{R} \end{cases}$ и получаваме $y = \frac{R^2 - rR}{R + r}$, откъдето

радиусът на вписаната окръжност $MF = R - y = \frac{2Rr}{R + r}$.

Задача 4. Два от върховете на квадрат лежат на окръжност с радиус R , а другите два върха лежат на допирателна към тази окръжност. Да се намери страната на квадрата.

Решение. Нека върховете A и B на квадрата $ABCD$ лежат на окръжността $k(O, R)$, а върховете C и D лежат на правата t , която допира k в точката Q ; $OQ \cap AB = T$ и $AB = x$. Очевидно $t \parallel AB$ и $R < x < 2R$. От $OQ \perp CD$ следва, че $QT \parallel BC \parallel AD$ и $OT \perp AB$. От правоъгълния



$\triangle ATO$ намираме $OT = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$.

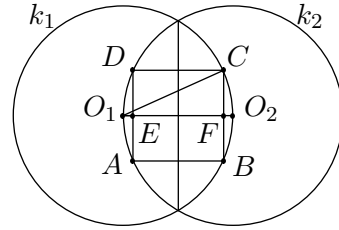
От $TQ = AD = AB = x = TO + OQ$ получаваме

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + R \Leftrightarrow 2x - 2R = \sqrt{4R^2 - x^2} \Leftrightarrow x(5x - 8R) = 0,$$

но $R < x < 2R$, следователно $x = 1,6R$, т.е. страната на квадрата е $1,6R$.

Задача 5. Две окръжности с радиус r са разположени така, че разстоянието между центровете им е равно на радиуса r . В сечението на окръжностите е вписан квадрат. Да се намери страната на квадрата.

Решение. Нека дадените окръжности са $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$, като $O_1O_2 = r$, а вписаният в сечението им квадрат е $ABCD$ ($A, D \in k_2$, $B, C \in k_1$) със страна x , $r > x > 0$. Имаме $CF = FB = \frac{1}{2}x$, оттук $O_1E = O_2F = \frac{1}{2}(r - x)$ и $O_1F = O_1E + EF = \frac{1}{2}(r - x) + x = \frac{1}{2}(r + x)$.



В $\triangle O_1FC$ от теоремата на Питагор следва, че

$$O_1F^2 + FC^2 = O_1C^2 \iff \frac{1}{4}(r + x)^2 + \frac{1}{4}x^2 = r^2 \iff 2x^2 + 2rx - 3r^2 = 0,$$

но $x > 0$, следователно $x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 1)r$ е страната на квадрата.

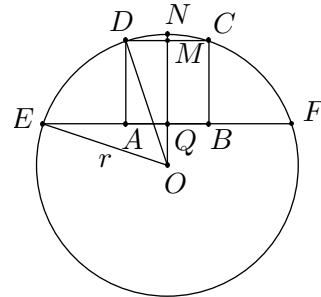
Задача 6. Хорда с дължина b разделя дадена окръжност на два сегмента. В по-малкия от тях е вписан квадрат със страна a . Да се докаже, че $b \geq \sqrt{5}a$ и да се намери радиуса на окръжността, ако $b = 3a$.

Решение. Нека в по-малкия сегмент на окръжността $k(O, r)$, определен от хордата $EF = b$ ($2r \geq b > 0$), е вписан квадрат $ABCD$ ($A, B \in EF$, $C, D \in k$). Нека радиусът, перпендикулярен на EF , пресича окръжността в точката N , а страните AB и CD съответно в точките Q и M . Ясно е, че Q е общата среда на EF и AB , а M е средата на DC ; изразяваме $AQ = QB = \frac{1}{2}a$ и $EQ = QF = \frac{1}{2}b$.

В правоъгълния $\triangle EOQ$ от теоремата на Питагор следва, че

$$EO^2 = EQ^2 + OQ^2 \iff OQ = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}.$$

В правоъгълния $\triangle DOM$ от теоремата на Питагор $OD^2 = DM^2 + OM^2 = DM^2 + (OQ + QM)^2$, т.е.

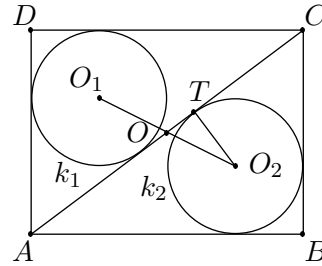


$$(1) \quad r^2 = \frac{1}{4}a^2 + \left(\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} + a \right)^2 \iff \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{b^2 - 5a^2}{8a}.$$

Лявата страна на полученото равенство е неотрицателна, откъдето следва, че $b^2 - 5a^2 \geq 0$, т.е. $b \geq \sqrt{5}a$. От (1) при $b = 3a$ намираме $r = \frac{\sqrt{10}}{2}a$.

Задача 7. Правоъгълник със страни a и b е разделен от диагонала си на два триъгълника и във всеки от тях е вписана окръжност. Да се намери разстоянието между центровете на тези окръжности.

Решение. Нека в правоъгълника $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) е построен диагонала AC , а $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$ са вписаните окръжности съответно в $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$. Отсечките AC и O_1O_2 се разполовяват, нека общата им среда е O . В правоъгълния $\triangle ABC$ по Питагоровата теорема намираме $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. Оттук радиусът на окръжността k_2 е $r = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$. Ако T е допирната точка на k_2 и AC , имаме $CT = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = \frac{1}{2}(b + \sqrt{a^2 + b^2} - a)$. В правоъгълния $\triangle OTO_2$ с катети $O_2T = r$ и $OT = |CO - CT| = \frac{1}{2}|a - b|$ по Питагоровата теорема имаме



$$OO_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{1}{4}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2) - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следователно $O_1O_2 = \sqrt{3(a^2+b^2) - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$ (подкоренната величина е положителна за всяко a, b).

Задача 8. Окръжност се допира до две съседни страни на квадрат и разделя всяка от другите две негови страни на части с дължини a и b ($a < b$). Да се намери радиусът на окръжността.

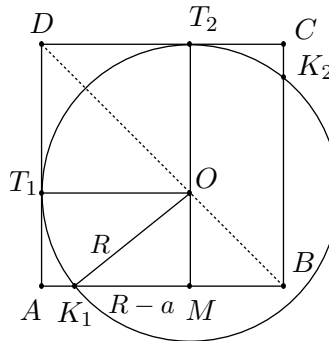
Решение. Нека окръжност $k(O, R)$ се допира до страните AD и DC на квадрата $ABCD$ съответно в точките T_1 и T_2 , а пресича страните AB и BC съответно в K_1 и K_2 , като $BK_1 = BK_2 = b$, $AK_1 = CK_2 = a$. От условието на задачата следва, че $AB = a + b$ и точката O е вътрешна за $ABCD$, следователно $\frac{1}{2}(a+b) < R < a+b$.

Ако $OT_2 \cap AB = M$, в правоъгълния $\triangle OMK_1$ катетите са $OM = MT_2 - OT_2 = a + b - R$ и $MK_1 = AM - AK_1 = OT_1 - AK_1 = R - a$, а хипотенузата $OK_1 = R$. Тогава

$$R^2 = (R - a)^2 + (a + b - R)^2 \iff R^2 - 2(2a + b)R + 2a^2 + b^2 + 2ab = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са

$$R_{1,2} = 2a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}, \text{ но } R_1 = 2a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab} > a + b, \text{ а } \frac{1}{2}(a + b) < R_2 = 2a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab} < a + b, \text{ следователно } R = 2a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}.$$

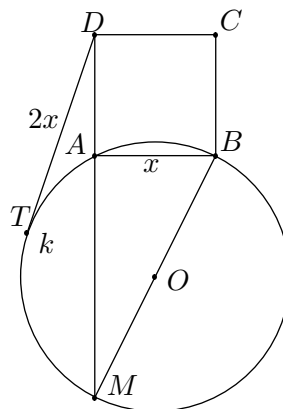


Задача 9. Върховете A и B на квадрат $ABCD$ лежат на окръжност $k(O; r)$. Допирателната към k от върха D е двойно по-голяма от страната на квадрата. Да се намери страната на квадрата.

Решение. Нека правата t е допирателна от D към k и $t \cap k = T$, $AB = x$ ($x > 0$), $DA \cap k = M$. Тъй като $DT = 2x$ и $DM \cdot DA = DT^2$, получаваме $DM \cdot x = 4x^2$, т.е. $DM = 4x$ и оттук $AM = 3x$. От $\angle BAM = 90^\circ$ следва, че BM е диаметър в k . От правоъгълния $\triangle AMB$ намираме

$$AB^2 + AM^2 = MB^2 \iff x^2 + 9x^2 = 4r^2,$$

откъдето $AB = x = \frac{\sqrt{10}}{5}r$.



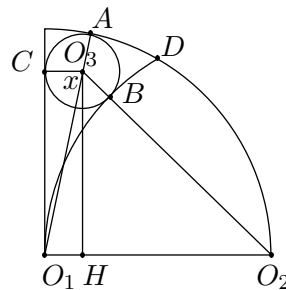
Задача 10. Даден е правоъгълен кръгов сектор от окръжност $k_1(O_1; r)$. Окръжността k_2 със същия радиус r и център O_2 в края на дъгата на сектора, го разделя на два криволинейни триъгълника. Да се намери радиусът на окръжността, вписана в по-малкия криволинеен триъгълник.

Решение. Нека $k_3(O_3; x)$ е окръжността, вписана в по-малкия криволинеен триъгълник. Построяваме централите $O_3O_2 = r + x$, $O_3O_1 = r - x$ и допирните точки A, B, C на k_3 със страните на малкия криволинеен триъгълник, като $O_3C \perp O_1C$. Нека O_3H е височина $\triangle O_1O_2O_3$; $O_1H = x$ и $O_2H = r - x$. От правоъгълните триъгълници O_1HO_3 и O_2HO_3 по Питагоровата теорема имаме

$$O_1O_3^2 - HO_1^2 = O_3H^2 = O_2O_3^2 - HO_2^2 \iff$$

$$(r - x)^2 - x^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2,$$

откъдето намираме търсения радиус $x = \frac{r}{6}$.



Според нивото на възможностите на учениците, някои от задачите могат да бъдат решени в ЗИП/ПП или СИП, а останалите да бъдат дадени за самостоятелна работа. Решаването на подбраните задачи подпомага затвърдяването и осмислянето на основни геометрични знания. Наличието на параметрични данни допринася с усъвършенстването на уменията на учениците за решаване на геометрични задачи паралелно да се развиват и аналитичните им способности.

Литература

1. В. Гусев, В. Литвиненко, А. Мордкович. *Практикум по решению математических задач*, изд. Просвещение, 1985 г.



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2010 г. и бр. 1, 2 от 2011 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2011 г. Американска Фондация за България е определила награден фонд от 1000 лв. за победителите от очния кръг. За тези награди могат да се състезават само абонати на списанието. Условиата за задочния кръг са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)

Институт по математика и информатика – БАН

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. Преподавателите А, Б, В и Г съставят комисия, която трябва да изпита ученика Е. За тази цел те са седнали в редица от четири стола. Като съпредседатели на комисията, А и Б трябва да са седнали един до друг, а В като класен ръководител на Е трябва да е седнал до двойката съпредседатели. По колко начина могат да се разположат членовете на комисията?

Задача 2. Да се намери най-малкото естествено число n , за което $n(n+1)(n+2)(n+3)$ се дели на 120000.

Задача 3. Да се докаже, че измежду всеки девет различни делители на 30^{100} могат да се изберат два, произведението на които е точен квадрат.

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2011 г.

**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 6/2010 Г.**

Задача 1. Нека m и n са две различни четирицифрени числа, всяко от които е записано с цифрите 1, 2, 3 и 4, като всяка от тях е използвана по веднъж. Възможно ли е едното от числата m и n да се дели на другото?

Решение. Сборът от цифрите на всяко от числата m и n е 10 и следователно всяко от тях дава остатък 1 при деление на 9.

Да допуснем, че $m = k.n$. Като извадим n от двете страни на равенството ще получим, че $m - n = k.n - n = (k - 1).n$. Разликата $m - n$ се дели на 9, тъй като m и n дават равни остатъци при деление на 9. Следователно $(k - 1).n$ се дели на 9 и тъй като n дава остатък 1 при деление на 9, то $k - 1$ се дели на 9. Това обаче е невъзможно, защото $k < 4$ (частното на най-голямото и най-малкото от разглежданите числа е $4321 : 1234 = 3$ (остатък 619)).

Задача 2. Нека n е естествено число, за което всяко от числата $2n + 1$ и $3n + 1$ е точен квадрат.

а) Да се докаже, че n се дели на 40.

б) Да се намери най-малкото естествено число n , за което числата $2n + 1$ и $3n + 1$ са точни квадрати.

Решение. а) Последната цифра на число, което е точен квадрат, може да е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Да разгледаме възможностите за последна цифра на n и във всеки от случаите да намерим последната цифра на $2n + 1$ и $3n + 1$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n + 1$	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
$3n + 1$	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8

Виждаме, че числата $2n + 1$ и $3n + 1$ едновременно имат последна цифра 0, 1, 4, 5, 6 или 9 само когато n завършва на 0 или 5. Следователно n се дели на 5.

Точните квадрати при деление на 8 дават остатък 1, 4 или 0. Да разгледаме възможните остатъци на n при деление на 8 и във всеки от случаите да намерим остатъка при деление на 8 на $2n + 1$ и $3n + 1$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2n + 1$	1	3	5	7	1	3	5	7
$3n + 1$	1	4	7	2	5	0	3	6

Виждаме, че числата $2n + 1$ и $3n + 1$ едновременно дават остатък 1, 4 или 0 при деление на 8 само когато n дава остатък 0, т.е. се дели на 8.

Така получихме, че n се дели на 5 и на 8, следователно и на 40.

б) Най-малкото кратно на 40 е самото 40 и за него $2 \cdot 40 + 1 = 81 = 9^2$ и $3 \cdot 40 + 1 = 121 = 11^2$. Следователно търсеното число е 40.

Забележка. В решението използвахме, че точните квадрати дават остатък 0, 1 или 4 при деление на 8. В това може да се убедим, като разгледаме възможните остатъци при деление на 8 на произволно число a и пресметнем остатъка на неговия квадрат a^2 при деление на 8:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
a^2	0	1	4	1	0	1	4	1

От таблицата виждаме, че квадратът a^2 дава остатък 0, 1 или 4 при деление на 8.

По същия начин може да се докаже и твърдението, че последната цифра на точен квадрат е 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

Задача 3. Да се намерят всички тройки прости числа p , q , r , такива, че $p \leq q \leq r$ и $pqr < pq + qr + rp$.

Решение. Като разделим даденото неравенство на pqr , получаваме

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Ако допуснем, че $p \geq 3$, то

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

противоречие. Следователно $p < 3$, т.е. $p = 2$.

При $p = 2$ неравенството е $\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Ако допуснем, че $q \geq 4$, то

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

противоречие. Следователно $q < 4$, т.е. $q = 2$ или $q = 3$.

При $q = 2$ даденото неравенство е изпълнено за произволно просто число r . При $q = 3$ получаваме неравенството $\frac{1}{6} < \frac{1}{r}$, откъдето $r < 6$, т.е. $r = 3$ или 5 .

Следователно решенията са $(2, 2, r)$, $(2, 3, 3)$ и $(2, 3, 5)$.



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

От учебната 2010/2011 г. сп. „Математика“ обявява **награди за победителите** в конкурса: за I. място 800 лв., за II. място 500 лв. и за III. място 200 лв. Наградите са предоставени от фирма „Мехатроника“ – Габрово. За тези награди могат да се състезават само абонати на списанието.

Дейността на **фирма „Мехатроника“ – Габрово** (www.kombis.net) е научно-изследователска, развойна, производствена и инженерингова в областта на технологии и технологично оборудване в електрониката, машиностроенето и системите за автоматизация. „Мехатроника“ изнася машините си в страни от Южна и Северна Америка, Африка, Азия и Европа. Основна ценност за фирмата са хората в нея: знаещи и можещи, с иновативни идеи.

Конкурсът се провежда при следните условия:

Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)

Институт по математика и информатика – БАН

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. В остроъгълен триъгълник са построени височините AA_1 , BB_1 и CC_1 . Ако $A_1B_1 = x$, $A_1C_1 = y$ и $B_1C_1 = z$ да се намерят страните AB , AC и BC .

Задача 2. Всяка точка в равнината с цели координати е оцветена в бяло, зелено или червено. Да се намери най-малкото естествено число n , за което измежду всеки n точки в равнината с целочислени координати съществуват две едноцветни точки, разстоянието между които е поне 7.

Задача 3. Съществуват ли 2012 полинома $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{2011}(x)$ всеки от степен 2010 и 2012 реални числа $a_0 < a_1 < \dots < a_{2011}$ такива, че за всяко $i = 0, 1, \dots, 2011$ да е в сила

$$P_i(a_i) > P_{i+1}(a_i) > \dots > P_{i+2011}(a_i),$$

където индексите се разглеждат по модул 2012?

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2011 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОТ БР. 6/2010 Г.

Задача 1. (Николай Белухов) В разностранния триъгълник ABC отсечките AN_a , BH_b и CH_c са височини, а отсечките AM_a , BM_b и CM_c са медиани. Да се докаже, че отсечките H_aM_a , H_bM_b и H_cM_c са страни на триъгълник.

Решение. Да забележим, че тези три отсечки са хорди в Ойлеровата окръжност. Нека ъглите на триъгълника бъдат $\alpha < \beta < \gamma$. Да пресметнем $\widehat{H_bM_b}$. Имаме $\triangle M_aM_bM_c \cong \triangle M_cH_bM_a \sim \triangle ABC$ и поради това $\widehat{H_bM_b} = \angle H_bM_aM_b = \angle H_bM_aM_c - \angle M_bM_aM_c = \gamma - \alpha$. Аналогично получаваме и $\widehat{H_aM_a} = \gamma - \beta$ и $\widehat{H_cM_c} = \beta - \alpha$. Но тогава $\widehat{H_bM_b} = \widehat{H_aM_a} + \widehat{H_cM_c}$. Това означава, че можем да построим точката Q в дъгата $\widehat{H_bM_b}$ по такъв начин, че $\widehat{H_bQ} = \widehat{H_aM_a}$ и $\widehat{QM_b} = \widehat{H_cM_c}$. Тогава $\triangle QH_bM_b$ е търсеният триъгълник.

Задача 2. (Николай Белухов) Възможно ли е множеството на целите числа да се разбие на наредени тройки така, че за всяка тройка (a, b, c) числото $|a^3b + b^3c + c^3a|$ да е точен квадрат?

Решение. Възможно е. Нека първо $a + b + c = 0$. Тогава $|a^3b + b^3c + c^3a| = |a^3b + b^3(-a-b) + (-a-b)^3a| = (a^2 + ab + b^2)^2$. Разбиване на множеството на целите числа на наредени тройки с нулева сума може да се получи по индуктивен път. Започваме с тройката $(-1, 0, 1)$ и на всяка стъпка избираме най-малките цели положителни числа p и q , които не са разпределени до момента и образуваме тройките $(p, q, -p-q)$ и $(-p, -q, p+q)$.

Задача 3. (Николай Белухов) В триъгълника ABC са построени три чевиани AA_1 , BB_1 и CC_1 , които се пресичат в една точка O . Известно е, че сборът от лицата на триъгълниците OAB_1 , OBC_1 и OCA_1 е равен на сбора от лицата на триъгълниците OAC_1 , OCB_1 и OBA_1 . Да се докаже, че поне една от отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 е медиана в $\triangle ABC$.

Решение. По теоремата на Чева $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, следователно съществуват такива три положителни числа a, b и c , че $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}$, $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{b}$. От теоремата на Менелай за $\triangle BCC_1$ и правата AOA_1 получаваме

$$S_{AOC_1} = \frac{OC_1}{C_1C} \cdot S_{ACC_1} = \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{AC_1}{AB} \cdot S_{ABC} = \frac{bc}{(a+b)(a+b+c)} \cdot S_{ABC}.$$

Като изразим аналогично лицата на останалите триъгълници, записваме условието във вида

$$\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ba}{b+c} + \frac{cb}{c+a}.$$

Привеждаме под общ знаменател, като използваме означението $T = ab + bc + ca$, както и факта, че $(a+b)(b+c) = b^2 + T$ и т.н. Имаме

$$\begin{aligned} bc(c^2 + T) + ca(a^2 + T) + ab(b^2 + T) &= ac(c^2 + T) + ba(a^2 + T) + cb(b^2 + T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow bc^3 + ca^3 + ab^3 - cb^3 - ba^3 - ac^3 &= 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = 0 \end{aligned}$$

Понеже последният множител е строго положителен, то поне един от първите три множителя трябва да бъде равен на нула, откъдето следва твърдението.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Кое от следните числа е с най-голям модул:

- А) -3 Б) $\frac{9}{4}$ В) $-\sqrt{8}$ Г) $2,5$?

2. Равенството $x_1 + x_2 = 3$ е изпълнено за корените на уравнението:

- А) $x^2 + 3x - 1 = 0$ Б) $x^2 - 3x - 1 = 0$
В) $x^2 + 6x - 2 = 0$ Г) $x^2 - 6x + 3 = 0$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x + 3 = 0$, то стойността на израза $x_1^2 + x_2^2$ е:

- А) 5 Б) 13 В) 19 Г) 25

4. Кое от следните уравнения има корени с еднакви знаци:

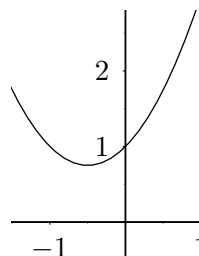
- А) $x^2 - 5x + 3 = 0$ Б) $2x^2 + x - 1 = 0$
В) $x^2 + 5x + 8 = 0$ Г) $-x^2 + 3x + 1 = 0$?

5. Решенията на неравенството $x^2 + 7x + 6 \geq 0$ са:

- А) $(-6, -1]$ Б) $(-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$
В) $[-6, -1]$ Г) $(-\infty, -6] \cup [-1, +\infty)$

6. Параболата от чертежа е графика на функцията:

- А) $y = -2x^2 + x - 1$ Б) $y = x^2 + x + 1$
В) $y = 2x^2 + 2x + 5$ Г) $y = x^2 - x + 1$



7. Разликата на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$, за която $a_2 = 8$ и $a_{15} = 21$ е:

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

8. Стойността на израза $\frac{4}{\log_3 9} - \log_2 \frac{1}{8} + \log_5 1$ е равна на:

- А) -1 Б) 2 В) 3 Г) 5

9. Дефиниционната област на функцията $f(x) = \log_x 5\sqrt{8-x}$ е:

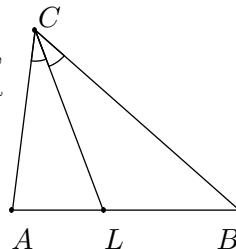
- А) $x \geq 0, x \neq 1$ Б) $x \in (0, 8], x \neq 1$
В) $x \leq 8, x \neq 1$ Г) $x \in (0, 8]$

10. От точка A извън окръжност k са построени допирателна $AB = 6$ cm и секуща, която пресича k в точки C и D . Ако $AC = 2$ cm, то отсечката CD има дължина:

- А) 18 cm Б) 17 cm В) 16 cm Г) 10 cm

11. В триъгълник ABC е известно, че $AL = 3$ cm, $BC = 8$ cm и $CA = 6$ cm. Ако CL е ъглополовящата на $\angle ACB$, то дължината на отсечката BL е:

- А) 2 cm Б) 2,5 cm
В) 3 cm Г) 4 cm



12. Страната BC на триъгълник ABC е равна на радиуса на описаната окръжност. Ако $\angle ABC = 80^\circ$, то $\angle ACB$ е равен на:

- А) 60° Б) 70° В) 80° Г) 90°

13. В триъгълник ABC е известно, че $AC = 2$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm и $AB = 1$ cm. Ъгъл ACB е равен на:

- А) 45° Б) 60° В) 30° Г) 90°

14. Вероятността при хвърляне на зар да са падне число, което се дели на 2, но не се дели на 4, е равна на:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{2}$

15. В геометрична прогресия седмият член е 32 пъти по-малък от втория член. Ако сборът на първите два члена е 6, да се намери първият член на прогресията.

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 9

16. Ако $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \alpha$ е равен на:

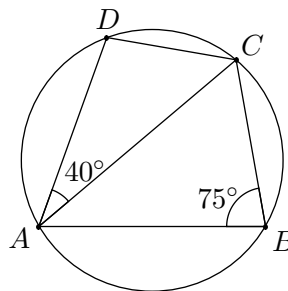
- А) 5 Б) 60 В) $\frac{12}{13}$ Г) $\frac{5}{12}$

17. Кое от числата може да бъде вероятност на случайно събитие?

- А) $\frac{13}{12}$ Б) $\log_5 6$ В) $\cos 105^\circ$ Г) $\sin 105^\circ$

18. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, като $\angle ABC = 75^\circ$ и $\angle DAC = 40^\circ$. Ъгъл ACD е равен на:

- А) 30° Б) 35°
В) 40° Г) 45°



19. Модата на статистическия ред 2, 2, 2, 3, 3, 6, 6, 7 е:

- А) 2 Б) 3 В) 6 Г) 7

20. По колко начина 5 различни задачи могат да се разпределят на трима ученика?

А) 250

Б) 15

В) 243

Г) 125

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Да се реши уравнението $x^2 - 3 + \frac{1}{x^2 - 3} = 2$.

22. По колко различни начина от група от 8 човека могат да се изберат две комисии, съответно от по 3 и 4 човека?

23. Да се реши системата $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6. \end{cases}$

24. Ако $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha \in [0, \pi]$, да се намери α .

25. Сборът на първите два члена на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$ е равен на осмия член на прогресията. Ако $a_1^2 = 4a_4$ да се намери разликата на прогресията.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Да се намери диагоналят на равнобедрен трапец $ABCD$ с основи AB и CD cm, за който $AB = 21$ cm, $CD = 11$ cm и $BC = 13$ cm.

27. Да се намерят страните AC и BC на триъгълник ABC , за който $AC > BC$, $AC + BC = 15$ cm, $\angle ACB = 60^\circ$ и $AB = \sqrt{57}$ cm.

28. Колко са четирицифрените числа с поне една нула в десетичния си запис?

Отговори

1. А); **2.** Б); **3.** В); **4.** А); **5.** Д); **6.** Б); **7.** А); **8.** Г); **9.** Б); **10.** В); **11.** Г); **12.** Б); **13.** В); **14.** В); **15.** Б); **16.** Г); **17.** Г); **18.** Б); **19.** А); **20.** В); **21.** $x = \pm 2$; **22.** 280; **23.** $(-2, 3)$, $(2, -3)$, $(3, -2)$ и $(-3, 2)$; **24.** $\frac{3\pi}{4}$; **25.** $d = 1$; **26.** 20 cm; **27.** $AC = 8$ и $BC = 7$; **28.** 2439 .

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 21 ДО 28

21. След полагане $t = x^2 - 3$ уравнението става $t + \frac{1}{t} = 2$ с единствено решение $t = 1$. Тогава $x^2 = 4$, откъдето $x = \pm 2$.

22. Комисията от три члена може да се избере по $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ начина. От останалите 5 човека комисията от 4 човека може да бъде избрана по $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$ начина. Следователно двете комисии могат да се изберат по $56 \cdot 5 = 280$ начина.

23. От косинусовата теорема намираме

$$57 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 60^\circ = (AC + BC)^2 - 3AC \cdot BC = 225 - 3AC \cdot BC,$$

откъдето следва $AC \cdot BC = 56$. Сега от системата $\begin{cases} AC \cdot BC = 56 \\ AC + BC = 15 \end{cases}$ получаваме $AC = 8$ и $BC = 7$.

24. Тъй като $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, след повдигане на квадрат на даденото равенство намираме $1 - \sin 2\alpha = 2$, т.е. $\sin 2\alpha = -1$. От това равенство и от $2\alpha \in [0, 2\pi]$ следва, че $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Следователно $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ и директна проверка показва, че тази стойност е решение.

25. От условието имаме $a_1 + a_2 = a_8$ и след заместване $a_2 = a_1 + d$ и $a_8 = a_1 + 7d$, намираме $a_1 = 6d$. Сега от $a_1^2 = 4a_4$ намираме $a_1^2 = 4a_1 + 12d$ и след заместване $a_1 = 6d$ получаваме $36d^2 = 24d + 12d$. Понеже $d \neq 0$ намираме $d = 1$.

26. Ако DD_1 е височина в трапеца, то $AD_1 = \frac{21 - 11}{2} = 5$ cm и от правоъгълният триъгълник ADD_1 намираме $DD_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm. Сега от правоъгълния D_1BD получаваме $BD = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ cm.

27. От $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 13$ следва, че $x + y = \pm 1$. Оттук и от равенството $xy = -6$ получаваме всички решения $(\pm 2, \mp 3)$ и $(\pm 3, \mp 2)$.

28. Четирицифрените числа с точно една цифра нула са точно $3 \cdot 9^3$ (защото мястото на нулата може да бъде избрано по 3 начина, след което за всяка от останалите три цифри има по 9 възможности.)

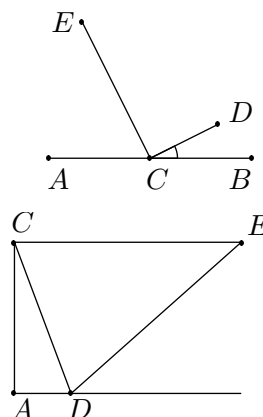
Аналогично, четирицифрените числа с точно две нули са $3 \cdot 9^2$ (защото мястото на двете нули може да бъде избрано по 3 начина, след което за всяка от останалите две цифри има по 9 възможности.)

Накрая, броят на четирицифрените числа с точно три цифри нула е 9. Следователно търсеният брой е $3 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + 9 = 2439$.

Задачите от 1 до 10 се оценяват с по 2 точки. Задачите от 11 до 25 се оценяват с по 3 точки, задачите от 26 до 28 – с по 5 точки и задачите 29 и 30 с по 10 точки.

ПЪРВИ МОДУЛ

1. Стойността на израза $\frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) : \frac{1}{4}}{5}$ е:
А) $\frac{2}{15}$ Б) $\frac{10}{3}$ В) 4 Г) $\frac{5}{24}$
2. Нормалният вид на многочлена $(3x - 4)(x - 1) - (x - 2)^2$ е:
А) $2x^2 - 3x$ Б) $2x^2 - 5x$ В) $2x^2 - 5x - 8$ Г) $2x^2 - 11x$
3. Коренът на уравнението $(2x - 3)^2 = (4x - 1)(x + 4)$ е:
А) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{13}{27}$ В) $\frac{13}{21}$ Г) $-\frac{5}{27}$
4. Разлагането на многочлена $(3x - 1)^2 - 4x^2$ на множители е:
А) $(x - 1)(7x - 1)$ Б) $(x + 1)(5x - 1)$
В) $(x - 1)(5x - 1)$ Г) $(x - 1)(5x + 1)$
5. Решенията на неравенството $(x + 1)^3 > x^3 + 3(x - 1)^2$ са:
А) $x \in \left(\frac{2}{9}; \infty\right)$ Б) $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$
В) $x \in (2; \infty)$ Г) $x \in (-\infty; -1)$
6. На чертежа $\angle ACE$ е с 40° по-малък от своя съседен ъгъл, а правите CD и CE са перпендикулярни. Мярката на $\angle BCD$ е:
А) 30° Б) 25°
В) 20° Г) 15°
7. На чертежа $AD \parallel CE$, $AC \perp AD$ и CD е ъглополовяща на $\angle ADE$. Ако $\angle DEC = 40^\circ$, то $\angle ACD$ е:
А) 40° Б) 30°
В) 20° Г) 10°



8. Стойността на израза $\frac{33^2 - 16^2}{7.17}$ е:

- А) 7 Б) $\frac{17}{7}$ В) $\frac{7}{17}$ Г) 17

9. Кое от посочените уравнения има отрицателен корен?

- А) $5 - 2(x - 3) = 1$ Б) $\frac{x - 1}{2} = \frac{1 - x}{3}$
В) $(x - 2)^2 = (x - 3)^2$ Г) $(3 + x)(5 - x) = (1 - x)(1 + x)$

10. Многочленът $x + 2$ НЕ участва в разлагането на множители на:

- А) $x^2 - 4$ Б) $x^2 + 4x + 4$ В) $x^3 + 8$ Г) $x^2 - 3x + 2$

11. Колко на брой са естествените числа, които удовлетворяват неравенството $(x - 4)(x + 4) > (x + 5)^2$?

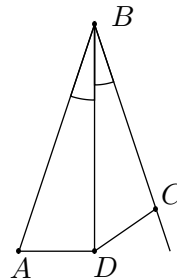
- А) 0 Б) 4 В) 5 Г) безброй много

12. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) симетралата на AC пресича височината CH в точката P . Ако $\triangle APH$ е равнобедрен, то $\angle ACB$ е:

- А) 45° Б) 50° В) 60° Г) 75°

13. На чертежа BD е ъглополовяща на $\angle ABC$, $\angle DAB = 80^\circ$ и $\angle DCB = 100^\circ$. Ако $AB = 5$ cm, дължината на DC е:

- А) 2 cm Б) 3 cm
В) 1,5 cm Г) 4 cm



14. Най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството $\frac{x - 4}{4} - \frac{x - 5}{5} + \frac{x - 6}{6} > 12$, е:

- А) 59 Б) 60 В) 61 Г) 62

15. Стойността на израза $\frac{(-a^2)^5}{(a^4)^2}$ при $a = \frac{3^5 + 3^4}{3^5 - 3^4}$ е:

- А) 16 Б) 2 В) -2 Г) -4

16. Произведението на корените на уравнението $|x - 5| + |10 - 2x| = 15$ е:

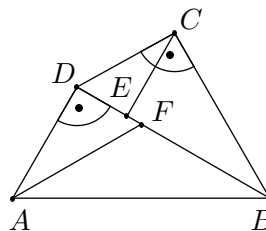
- А) -200 Б) 0 В) -25 Г) -400

17. Даден е трапецът $ABCD$. Точката M от основата AB е такава, че триъгълниците AMD и BMC са еднакви. Тогава със сигурност може да се твърди, че:

- А) $ABCD$ е равнобедрен трапец Б) $AMCD$ е успоредник
В) M е среда на AB Г) $\triangle DMC$ е равнобедрен

18. На чертежа $\angle ADB = \angle DCB = 90^\circ$ и $\angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$. Построени са височината CE в $\triangle DBC$ и ъглополовящата AF в $\triangle ABD$. Ако $EF = 2$ cm, то BD е:

- А) 12 cm Б) 16 cm
В) 18 cm Г) 24 cm



19. В правоъгълника $ABCD$ с диагонал $AC = 12$ cm, разстоянието от точката B до правата AC е равно на 3 cm. Тогава $\angle ACD$ е:

- А) 10° Б) 15° В) 20° Г) 30°

20. Даден е ромбът $ABCD$ със страна $AD = 5$ cm и диагонал $AC = 8$ cm. Разстоянието от пресечната точка на диагоналите на ромба до средата на страната AB е:

- А) 2 cm Б) 2,5 cm В) 3 cm Г) 4 cm

21. От 36 тона второкачествен материал, съдържащ 25% примеси, след преработване се получават 30 тона първокачествен материал. Колко процента примеси има в първокачествения материал?

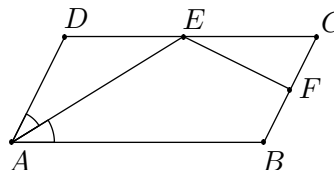
- А) 20% Б) 18% В) 15% Г) 10%

22. Радиусът на предното колело на трактор е 2 пъти по-малък от радиуса на задното колело. За определено разстояние предното колело направило 60 оборота повече от задното. Колко оборота е направило задното колело?

- А) 20 Б) 30 В) 60 Г) 120

23. В успоредника $ABCD$ ъглополовящата на $\angle BAD$ и симетралата на BC се пресичат в точка E от страната CD . Ако $\angle AEB = 60^\circ$, то $\angle ADC$ е:

- А) 100° Б) 120°
В) 140° Г) 150°



24. В успоредника $ABCD$ със страна $AB = 6$ cm, ъглополовящата на $\angle BAD$ и симетралата на BC се пресичат в точката E от страната CD . Тогава със сигурност може да се твърди, че:

- А) $BC = 3$ cm Б) $BC < 4$ cm В) $BC \geq 3$ cm Г) $BC < 3$ cm

25. От градовете А и В едновременно един срещу друг потеглили мотоциклетист и велосипедист. Те се срещнали 45 минути след тръгването си. За колко време мотоциклетистът изминава пътя АВ, ако велосипедистът го изминава за 2 часа?

- А) 50 мин Б) 1 ч В) 1 ч 12 мин Г) 1 ч 15 мин

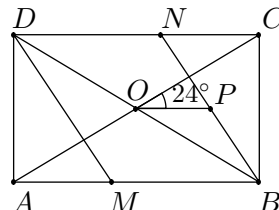
ВТОРИ МОДУЛ

Запишете само отговорите!

26. Дължината, широчината и височината на правоъгълен паралелепипед, измерени в сантиметри, са последователни естествени числа. Да се намери повърхнината на паралелепипеда, ако обемът му е 4896 cm^3 .

27. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението $1 - \frac{a-x}{2} = \frac{x}{4}$ има общ корен с уравнението $(x-3)^2 = 25$.

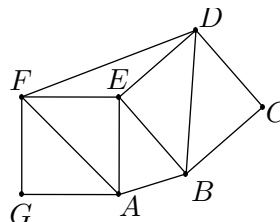
28. На страните AB и CD на правоъгълника $ABCD$ са избрани точките M и N така, че $MBND$ е ромб. Ако O е пресечната точка на диагоналите на правоъгълника, а P е средата на BN и $\angle POC = 24^\circ$, да се намери $\angle ABN$.



Задачи, на които се изисква решение с обосновка

29. От град А към град В се движат пешеходец, велосипедист и мотоциклетист. Когато в 9 ч мотоциклетистът и велосипедистът тръгнали от А, пешеходецът бил на 10 km пред тях. В 9 ч 40 мин мотоциклетистът настигнал пешеходеца, а велосипедистът бил на 4 km след тях. Когато велосипедистът настигне пешеходеца, на колко километра пред тях ще бъде мотоциклетистът и в колко часа ще се случи това, ако мотоциклетистът се движи с $a \text{ km/h}$?

30. Квадратите $BCDE$ и $AEFG$ са такива, че $ABDF$ е трапец с основи AB и DF . Да се докаже, че трапецът $ABDF$ е равнобедрен и да се намери $\angle FOE$, където O е пресечната точка на AD и BF .



Отговори

1. А); 2. А); 3. Б); 4. В); 5. А); 6. В); 7. В); 8. А); 9. Г); 10. Г);
11. А); 12. А); 13. Б); 14. В); 15. Г); 16. Б); 17. В); 18. Г); 19. Б); 20. Б);
21. Г); 22. В); 23. В); 24. Г); 25. В); 26. 1732 cm^2 ; 27. 1 и 6; 28. 48° ; 29.
10 h 6 min 40 sec, $\frac{20}{3} \text{ km}$; 30. 45° .

КРАТКИ РЕШЕНИЯ

26. Ако означим измеренията на паралелепипеда с n , $n+1$ и $n+2$, имаме $n(n+1)(n+2) = 4896$ и оттук никое от числата n , $n+1$ и $n+2$ не се дели на 5. Освен това $15^3 < 4896 < 20^3$. Остават две възможности 16.17.18 и 17.18.19.

Измеренията на паралелепипеда са 16, 17 и 18 и оттук повърхнината му е $S_1 = 2(16 \cdot 17 + 17 \cdot 18 + 18 \cdot 16) = 1732 \text{ cm}^2$.

27. Решаваме параметричното уравнение $1 - \frac{a-x}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow 4 - 2(a-x) = x \Leftrightarrow x = 2a - 4$. За второто уравнение имаме $(x-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3-5)(x-3+5) = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+2) = 0$, т.е. $x-8 = 0$ или $x+2 = 0$. Корените са $x = 8$ и $x = -2$. Двете уравнения имат общ корен, когато $2a - 4 = 8$ или $2a - 4 = -2$. Оттук намираме $a = 6$ и $a = 1$.

28. Точката O е среда на диагонала DB , следователно диагоналът MN на ромба $MBND$ минава през O и се разполюва от нея, като $\angle BON = 90^\circ$. От $OP = PB$ (OP е медиана към хипотенузата в $\triangle OBN$) следва, че $\angle POB = \angle PBO = \alpha$. В ромба диагоналът BD е ъглополовяща на $\angle MBN$, т.е. $\angle PBO = \angle OBA = \alpha$. Но $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = BO$, т.е. $\triangle ABO$ е равнобедрен и $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$. От равенството $\angle POB = \angle ABO = \alpha$ следва, че $OP \parallel AB$. Оттук $\angle BAO = \angle POC = 24^\circ$, т.е. $\alpha = 24^\circ$. Тогава $\angle ABN = 2\alpha = 48^\circ$.

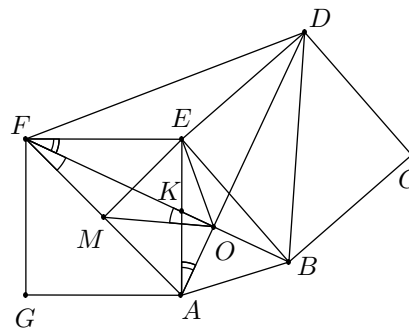
29. Нека пешеходецът се движи с $x \text{ km/h}$. За 40 мин мотоциклетистът изминава 10 km повече от пешеходеца, следователно $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}x + 10 \Leftrightarrow x = a - 15$.

Нека велосипедистът се движи с $y \text{ km/h}$. За 40 мин мотоциклетистът изминава 4 km повече от велосипедиста, следователно $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}y + 4 \Leftrightarrow y = a - 6$.

За един час велосипедистът изминава $y - x = a - 6 - (a - 15) = 9 \text{ km}$ повече от пешеходеца. Тъй като първоначалната дистанция между тях е 10 km, велосипедистът ще настигне пешеходеца за $\frac{10}{9} \text{ h}$, т.е. в 10 h 6 min 40 sec. В това време мотоциклетистът ще е на $\frac{10}{9}a - \frac{10}{9}(a - 6) = \frac{20}{3} \text{ km}$ пред тях.

30. От $\triangle ADE \cong \triangle BEF$ (по 1. признак) следва, че $AD = BF$, т.е. в трапеца $ABDF$ диагоналите са равни. Следователно трапецът $ABDF$ е равнобедрен. От еднаквостта имаме и $\angle EAD = \angle EFB$. Ако $K = AE \cap BF$, имаме $\angle AKO = \angle FKE$ и така два от ъглите в $\triangle AOK$ са съответно равни на два ъгъла в $\triangle FKE$, следователно $\angle AOK = \angle KEF = 90^\circ$.

Ако M е средата на хипотенузата AF в правоъгълните триъгълници AOF и AEF , то $MO = EM = \frac{1}{2}AF$. Оттук $\angle MFO = \angle MOF = \alpha$, $\angle AMO = 2\alpha$ (външен ъгъл за $\triangle FMO$), $\angle EMO = 90^\circ - 2\alpha$ ($EM \perp FA$). От равнобедрения $\triangle MOE$ намираме $\angle MOE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EMO) = 45^\circ + \alpha$. От друга страна, $\angle MOE = \angle MOF + \angle FOE = \alpha + \angle FOE$. Следователно $\angle FOE = 45^\circ$.





4. клас

16. Ирина намислила трицифрено число. Тя увеличила цифрата на стотиците с 3, цифрата на десетиците с 2, цифрата на единиците с 1 и получила число, което е 4 пъти по-голямо от намисленото. Кое число е намислила Ирина?

17. Карлсон имал пасти и кифли, като пастите били 2 пъти повече от кифлите. Като изял 16 пасти и 5 кифли, останали 2 пъти повече кифли, отколкото пасти. Колко пасти и кифли е имал Карлсон отначало?

18. Правоъгълник е разделен на четири правоъгълника. Обиколките на три от тях са 6 см, 8 см и 10 см. Да се намери обиколката на четвъртия правоъгълник.

10	?
6	8

19. В конструктор има болтчета, шайбички, винтчета и гайки, общо 107 броя. Болтчетата са 3 пъти повече от шайбичките, шайбичките са 2 пъти повече от винтчетата, а винтчетата са повече от гайките. Колко гайки има в конструктора?

5. клас

20. Правоъгълник е разделен на четири правоъгълника. Лицата на три от тях са 8, 10 и 14 кв.см. Да се намери лицето на четвъртия правоъгълник.

14	?
8	10

21. От градовете A и B едновременно една срещу друга потеглили две леки коли. След 3 ч. колите се намирили на 40 км една от друга. Оказало се, че 5 ч след тръгването си колите отново били на 40 км една от друга. Да се намери разстоянието между градовете A и B .

22. В два чувала има общо 170 кг брашно. Ако $\frac{3}{20}$ от брашното в единия чувал се пресипят в другия, в двата чувала ще има равно количество брашно. Колко килограма е брашното в по-тежкия чувал?

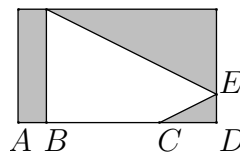
23. Пипи, Томи и Аника си поделили бонбоните по следния начин: Аника взела 20% от бонбоните и още 12 бонбона, след това Томи взел 25% от останалите бонбони и още 15 бонбона и накрая Пипи взела 30%

от останалите бонбони и последните 21 бонбона. По колко бонбона е взел всеки от тях?

6. клас

24. Да се намери отрицателното число a , за което стойността на израза $\frac{(a \cdot b^2)^4 \cdot (a^3 \cdot b)^2}{(a^2 \cdot b^3)^3}$ при $b = \frac{17 - 7 : (-5)}{|6,8 - 9,1|}$ е равна на 5000.

25. Невена и Емил си делят правоъгълна торта. Невена си отрязала едно правоъгълно и две триъгълни парчета, както е показано на чертежа, като $AB = DE$ и $BC = AJ$. Кой е изял повече торта — Невена или Емил?



26. Басейн се пълни от няколко еднакви тръби. Ако тръбите бяха 2 пъти повече, басейнът щеше да се пълни за 5 часа по-малко време, а ако тръбите бяха с 2 повече, басейнът щеше да се пълни за 6 часа. Колко са тръбите?

27. Картонен кръг с радиус 12 см разрязали по един от диаметрите му. Всяка от половините сгънали така, че се получили два конуса, които слепили с тиксо, без припокриване на картона. По същия начин прилепили конусите към цилиндър, както е показано на чертежа. Ако обемът на цилиндъра е 180π куб.см, да се намери лицето на повърхнината на полученото тяло.



7. клас

28. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението $||ax - 20| - 2011| = 11$ има четири корена, всеки от които е цяло число.

29. Иво и Емо всяка сутрин бягат до реката, плуват и бягат обратно до дома си. Те излизат в 8:00 и бягат по една и съща пътека. Емо бяга 3 пъти по-бързо от Иво и плува 2 пъти по-дълго от Иво. Една сутрин Иво стигнал до реката и забелязал, че си е забравил хавлията. Той веднага хукнал обратно към къщи, взел хавлията и дотичал до реката в момента, в който Емо излизал от реката. Ако обикновено Иво се връща от реката в 10 ч, в колко се прибира Емо?

30. Даден е триъгълникът ABC и вътрешна за него точка M . Известно е, че $AM = AC$ и триъгълниците ABM , BCM и CAM са равностранни. Да се намери $\angle ABC$.

за по-малките решения



от бр. 1/2011

МАРИЯ ДЕНКОВА, ЦВЕТАНКА ВАСИЛЕВА

1. Сборът на две числа е 817. Цифрата на единиците в едното събираемо е три. Ако зачеркнем тази цифра, остава число, еднакво с другото събираемо. Да се намерят тези числа.

Решение. Да означим двете събираеми с $\overline{ab3}$ и $\overline{ab}$. От $b + 3 = 7$ намираме $b = 4$. Тогава последна цифра на сбора $a + 4$ е единица, което означава, че $a + 4 = 11$ ($a + 4 \leq 9 + 4 = 13 < 21$). Така намираме, че $a = 7$ и търсените числа са $743 + 74 = 817$.

2. Ако $P = 459 : 3 + 40.99 - 339 : 3$, а $Q = 171 - 374 : 34$, да се намери колко пъти числото P е по-голямо от числото Q .

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} P &= 459 : 3 + 40.99 - 339 : 3 = (459 - 339) : 3 + 40.99 = \\ &= 120 : 3 + 40.99 = 40 + 40.99 = 40.100 = 4000 \end{aligned}$$

$$Q = 171 - 374 : 34 = 171 - 11 = 160$$

$$P : Q = 4000 : 160 = 25,$$

което означава, че числото P е 25 пъти по-голямо от числото Q .

3. На състезание по безопасност на движението първите четири места в класирането заели четвъртокласниците Иван, Марина, Галя и София. Ако в класирането след Галя има поне един човек, мястото на София е четно число, а на Иван – нечетно число и София е по-напред в класирането от Иван, определете класирането в това състезание.

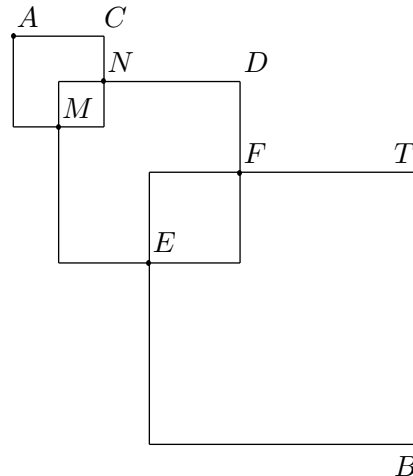
Решение. От това, че след Галя в класирането има поне един човек, намираме, че Галя е на първо, второ или трето място. София е на второ или четвърто място, а Иван — на първо или трето място. Тъй като София е по-напред в класирането от Иван, то и тя не може да е на четвърто място. Следователно София е на второ, а Иван — на трето място. За Галя отпадат като възможности второ и трето място, които вече са заети. Следователно Галя е на първо място, а Марина — на четвърто място в класирането.

4. На фигурата са изобразени три различни квадрата, страните на които са четни числа. Сборът от периметрите им е 56 см. Квадратите се пресичат

така, че точките M и N са среди на страните на най-малкия квадрат, а точките E и F са среди на страните на средния по големина квадрат. Мравката Мъри се намира в точка A и трябва да стигне до точка B , като може да пълзи само по страните на квадратите или по части от тях. Колко сантиметра е най-краткият път на мравката?

Решение. Да означим дължините на страните на квадратите с a , b и c ($a < b < c$). По условие $4a + 4b + 4c = 56$ или $a + b + c = 14$. Тъй като a , b и c са различни четни числа и $14 = 2 + 4 + 8$, определяме $a = 2$ см, $b = 4$ см, $c = 8$ см.

Един от двата най-кратки пътя от A до B е начупената линия $ACNDFTB$. Като използваме, че точките M , N , E и F са среди на страните, от които са взети, правим извода, че квадратите се пресичат също в квадрати. Намираме $AC = a = 2$ см, $CN = a : 2 = 1$ см, $ND = b - a : 2 = 4 - 1 = 3$ см, $DF = b : 2 = 2$ см, $FT = c - b : 2 = 8 - 4 = 2$ см, $TB = c = 8$ см. Дължината на пътя от A до B е $2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 8 = 22$ см.



5. Да се намери неизвестното число x от равенството
 $((2 - x) : 1,5 + 17,4 : 29) : (25,0,16) - 0,05 = 0,4$.

Решение. Тъй като $25,0,16 = 4$ и $17,4 : 29 = 0,6$, записваме равенството във вида

$$\begin{aligned} ((2 - x) : 1,5 + 0,6) : 4 &= 0,405 \iff (2 - x) : 1,5 + 0,6 = 4 \cdot 0,405 \iff \\ (2 - x) : 1,5 + 0,6 &= 1,62 \iff (2 - x) : 1,5 = 1,62 - 0,6 \iff \\ (2 - x) : 1,5 &= 1,02 \iff 2 - x = 1,5 \cdot 1,02 \iff 2 - x = 1,53, \end{aligned}$$

откъдето намираме $x = 0,47$.

6. Периметърът на квадрат е 12,8 метра. Правоъгълник, една от страните на който е 6,4 м, има същото лице. Да се намери периметърът на правоъгълника. Коя фигура има по-голям периметър?

Решение. Страната на квадрата е равна на $12,8 : 4 = 3,2$ м. Лицето му е $S = 3,2 \cdot 3,2 = 10,24$ кв.м. Правоъгълникът има същото лице и тъй като едната от страните му е 6,4 м, другата е $10,24 : 6,4 = 1,6$ м. Периметърът на правоъгълника е $P = 2 \cdot 1,6 + 2 \cdot 6,4 = 16$ м и е по-голям от периметъра на квадрата.

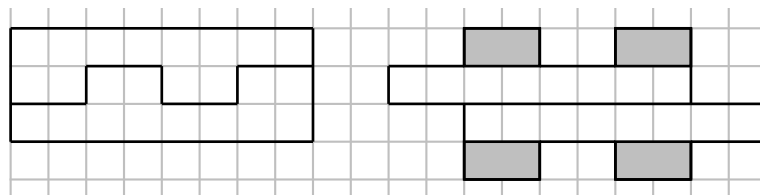
7. От градовете A и B , разстоянието между които е $329,4$ км, тръгна-ли един срещу друг автобус и лека кола. Автобусът тръгнал от град A и се движил със скорост 72 км/ч. Леката кола тръгнала $1,2$ ч по-късно от автобуса и се движила $1,25$ пъти по-бързо от него. Да се намери на какво разстояние от град B са се срещнали автобусът и леката кола.

Решение. Скоростта на леката кола е $72 \cdot 1,25 = 90$ км/ч. Автобусът е пътувал $1,2$ ч. повече от колата и за това време е изминал $1,2 \cdot 72 = 86,4$ км. Следователно в момента на тръгване на колата, разстоянието между нея и автобуса е $329,4 - 86,4 = 243$ км. Докато автобусът и колата се движат един срещу друг, разстоянието между тях се скъсява с $72 + 90 = 162$ км за 1 час. Следователно те се срещат $243 : 162 = 1,5$ часа след тръгването на колата. Пътят, изминат от леката кола, е $90 \cdot 1,5 = 135$ км, т.е. срещата е на 135 км от град B .

8. Може ли правоъгълник с размери 4 см и $1,5$ см да се разреже на две части така, че от тях да се получи развивка на куб? Да се обоснове отговорът.

Решение. Лицето на правоъгълника е $S = 4 \cdot 1,5 = 6$ кв.см. Тъй като кубът има 6 стени, ако може да се сглоби куб, то стената му ще има лице $6 : 6 = 1$ кв.см и ръбът му ще е 1 см.

Разрязваме по начупената линия и сглобяваме частите по посочения начин. Получихме разгъвка на куб (маркираните части са „капачетата“).



9. Да се намери неизвестното число x в равенството

$$6,86 : x - 3\frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 10,3.$$

Решение. Пресмятаме $-3\frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$ и

$$5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 10,3 = 10 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 10,3 = -\frac{1}{3} \cdot (10 + 10,3) = -\frac{20,3}{3}.$$

$$\text{Уравнението става } 6,86 : x + \frac{14}{3} = -\frac{20,3}{3} \iff$$

$$6,86 : x = -\frac{20,3}{3} - \frac{14}{3} \iff 6,86 : x = -\frac{34,3}{3}$$

$$\text{и намираме } x = 6,86 : \left(-\frac{34,3}{3}\right) = -2,3,43 \cdot \frac{3}{34,3} = -\frac{3}{5}.$$

10. а) Да се пресметне $a = \frac{|-3 \cdot 5^2| - |1 - 3^3|}{-2 \cdot (-4) - 3^2}$ и $b = \frac{(-6)^4 \cdot 2^3}{5^2} : \frac{(-3)^4 \cdot 2^6}{(-5)^3}$.

б) Да се изобразят върху числовата ос числата $\frac{1}{7} \cdot a$ и $2 \cdot b$ и да се намери разстоянието между тях.

Решение. а) Имаме

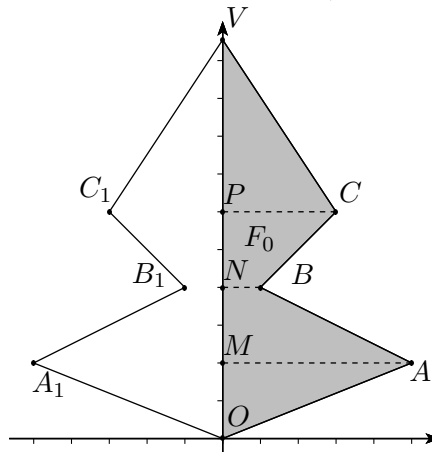
$$a = \frac{|-3 \cdot 25| - |1 - 27|}{8 - 9} = \frac{|-75| - |-26|}{-1} = \frac{75 - 26}{-1} = -49,$$

$$b = \frac{(-6)^4 \cdot 2^3}{5^2} : \frac{(-3)^4 \cdot 2^6}{(-5)^3} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^2} \cdot \frac{-5^3}{3^4 \cdot 2^6} = -2,5 = -10.$$

б) Пресмятаме $\frac{1}{7} \cdot a = \frac{1}{7} \cdot (-49) = -7$, $2 \cdot b = 2 \cdot (-10) = -20$. Разстоянието между двете точки от числовата ос е $|-7 - (-20)| = 13$.

11. Точките A_1 , B_1 и C_1 са симетрични спрямо ординатната ос съответно на точките $A(5;2)$, $B(1;4)$ и $C(3;6)$. Точката V лежи на ординатната ос и ординатата ѝ е сбор от средните аритметични числа на координатите на всяка от точките A , B и C . Да се намери лицето на фигурата $OABCV C_1 B_1 A_1$ (точката O е центърът на координатната система).

Решение. Ординатата на точката V е равна на $\frac{5+2}{2} + \frac{1+4}{2} + \frac{3+6}{2} = 3,5 + 2,5 + 4,5 = 10,5$, т.е. $V(0;10,5)$. Фигурата F , чието лице трябва да пресметнем, е симетрична спрямо ординатната ос, затова ще намерим лицето на фигурата F_0 с върхове O , A , B , C и V . То е сбор от лицата на два правоъгълни триъгълника и два правоъгълни трапеца. Ако $M(0;2)$, $N(0;4)$, $P(0;6)$, намираме



$S_{OAM} = \frac{1}{2} \cdot 2.5 = 5$, $S_{MABN} = \frac{1}{2} \cdot (5+1) \cdot 2 = 6$, $S_{NBSP} = \frac{1}{2} \cdot (1+3) \cdot 2 = 4$,
 $S_{PCV} = \frac{1}{2} \cdot 3.4, 5 = 6, 75$. Тогава лицето на F_0 е $5 + 6 + 4 + 6, 75 = 21, 75$ кв.см, а на F е $43, 5$ кв.см.

12. В картонена кутия с форма на правоъгълен паралелепипед има 1,2 л мляко. Ако кутията се постави да легне върху едната стена, височината на млякото в нея ще бъде 24 см. Ако се постави върху втората стена, височината на млякото ще се намали със 75%, а ако се постави върху третата стена, нивото на млякото в кутията ще се намали с още 12,5%.

а) Колко литра трябва да се налее, за да се допълни кутията?

б) Ще прелее ли млякото, ако в кутията поставим метален цилиндър с възможно най-голям обем?

Решение. а) Ако измеренията на правоъгълния паралелепипед са a , b и c , имаме

$$a.b.2, 4 = 1, 2 \iff a.b = 0, 5$$

$$b.c.(25\%.2, 4) = 1, 2 \iff b.c.0, 6 = 1, 2 \iff b.c = 2$$

$$a.c.(12, 5\%.2, 4) = 1, 2 \iff a.c.0, 3 = 1, 2 \iff a.c = 4.$$

Като умножим получените равенства, получаваме $a^2.b^2.c^2 = 0, 5.2.4 = 4 = 2^2$, а от това следва, че обемът на кутията е $V = a.b.c = 2$ куб.дм. Тогава кутията трябва да се допълни с още $2 - 1, 2 = 0, 8$ л.

б) Цилиндърът, който се поставя в кутията, ще има най-голям обем, когато радиусът на основата и височината му имат възможно най-големи стойности.

От намерените вече равенства $a.b = 0, 5$, $b.c = 2$, $a.c = 4$ и $a.b.c = 2$ следва, че $a = 2 : 2 = 1$ дм, $b = 2 : 4 = 0, 5$ дм, $c = 2 : 0, 5 = 4$ дм.

Нека основата на кутията е с размери 1 дм и 0,5 дм. Радиусът на най-големия кръг, който може да се разположи изцяло в правоъгълника, е равен на половината от по-малката му страна, в случая $r = 0, 5 : 2 = 0, 25$ дм. Височината на този цилиндър е еднаква с височината на кутията $h = c = 4$ дм. Обемът на цилиндъра е $V = \pi r^2 h \approx 3, 14.0, 25^2.4 = 0, 785$ л < 0, 8 л. Следователно след поставянето на цилиндъра в кутията, млякото няма да прелее.

Когато кутията е легнала върху някоя от другите си страни, цилиндрите, които могат да се поставят в нея, са с по-малък обем (проверете!), като млякото и в тези случаи няма да прелее.

13. Даден е изразът $B = \frac{a-9}{4}x + \frac{a+2}{3}x^2 - x^3$.

а) Ако стойността на B при $x = -2$ е 16, да се намери a .

б) Да се намери стойността на B при $x = \frac{12^6 \cdot 7^{2010} \cdot 28}{3^6 \cdot 2^{18} \cdot 7^{2011}}$.

Решение. а) При $x = -2$ за израза B имаме

$$16 = \frac{a-9}{4}(-2) + \frac{a+2}{3}(-2)^2 - (-2)^3 = -\frac{a-9}{2} + \frac{4(a+2)}{3} + 8,$$

$$-3(a-9) + 8(a+2) = 48 \iff 5a = 5 \iff a = 1.$$

б) Намираме $x = \frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^{2010} \cdot 2^2 \cdot 7}{2^{18} \cdot 3^6 \cdot 7^{2011}} = \frac{1}{2^4}$. При $a = 1$ получаваме

$$B = -2x + x^2 - x^3 \text{ и за } x = \frac{1}{2^4} \text{ изразът } B \text{ е равен на } -2 \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{12}} =$$

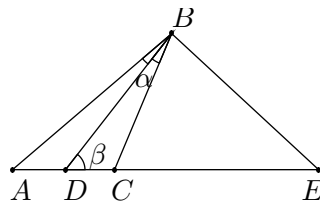
$$\frac{-2^9 + 2^4 - 1}{2^{12}} = -\frac{497}{4096}$$

14. За триъгълника ABC е дадено, че $\angle ACB = \angle CAB + 90^\circ$. Прекатени са вътрешната ъглополовяща BD и външната ъглополовяща BE на $\angle ABC$ ($D, E \in AC$). Да се докаже, че $BD = BE$.

Решение. Вътрешната и външната ъглополовяща са перпендикулярни, т.е. $\angle DBE = 90^\circ$. Да означим $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$ и $\angle BDC = \beta$. От $\triangle BDC$ изразяваме $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Тъй като $\angle BDC$ е външен за $\triangle ADB$, то $\angle CAB = \beta - \alpha$. Тогава от равенството $\angle ACB = \angle CAB + 90^\circ$ получаваме

$$180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + \beta - \alpha, \iff \beta = 45^\circ,$$

т.е. правоъгълният $\triangle BDE$ е равнобедрен и $BD = BE$.



15. а) Да се намерят x и y , за които е изпълнено равенството $49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

б) Да се намери най-малката стойност на израза $A = 49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 16$.

Решение. а) Представяме израза като сбор от два квадрата:

$$49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 13 = 49x^2 + 28x + 4 + y^2 - 6y + 9 = (7x+2)^2 + (y-3)^2.$$

Тъй като $(7x+2)^2 \geq 0$ и $(y-3)^2 \geq 0$, сборът на двата квадрата е равен на 0 точно когато и двата са равни на 0. Следователно $7x+2=0$ и $y-3=0$, откъдето намираме $x = -\frac{2}{7}$, $y = 3$.

б) Преобразуваме израза

$$A = 49x^2 + 28x + 4 + y^2 - 6y + 9 + 3 = (7x+2)^2 + (y-3)^2 + 3.$$

Тъй като $(7x+2)^2 \geq 0$ и $(y-3)^2 \geq 0$, то най-малката стойност на израза е 3.

8. клас

16. Да се реши уравнението

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6}.$$

17. Да се реши неравенството

$$\left| \frac{2x+4}{x+2} - \frac{4x+1}{2x} \right| \geq 1.$$

18. Периметърът на равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), описан около кръг, е равен на p . Да се намери дължината на средната основа на трапеца.

9. клас

19. Да се намерят целите стойности на b , за които уравненията

$$2x^2 + (3b-1)x - 3 = 0 \text{ и } 6x^2 - (2b-3)x - 1 = 0$$

имат общ корен.

20. Да се определят коефициентите на квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$ така, че корените му да са равни на p и q .

21. В триъгълника ABC е вписан успоредникът $PQRT$ ($P \in AB$, $Q \in AB$, $R \in BC$ и $T \in AC$). Ако $\frac{CR}{RB} = \frac{1}{2}$, да се намери $S_{PQRT} : S_{ABC}$.

10. клас

22. Да се намери естественото число n от равенството

$$3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \dots 3^{3n-1} = 27^5.$$

23. Да се докаже, че в успоредника $ABCD$ разстоянията от произволна точка от диагонала AC до правите CD и BC са обратно пропорционални на дължините на тези страни.

24. Даден е трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с основи $AB = a$ и $CD = b$. Ъглите при основата са $\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{6}$ и $\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{4}$. Да се намери лицето на трапеца.

11. клас

25. Да се намери стойността на $\sin \alpha$, ако $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$.

26. Да се реши уравнението

$$\log_3(45 - 5x^2 + x^2 \cdot 3^x) = x + 2.$$

27. Да се намери

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x \right).$$

12. клас

28. Да се реши системата

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} + 12\sqrt{\frac{2x-1}{4y+8}} - 5 = 0 \\ x^2 - xy + 3x + 3 = 0. \end{cases}$$

29. Да се намерят всички стойности на a , за които уравнението

$$|x| - 4 + a = 3$$

има точно един корен.

30. Пирамидата $MABC$ с основа правоъгълният триъгълник ABC ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$) е вписана в конус, образуващата на който е наклонена към равнината на основата на пирамидата под ъгъл 60° . Да се намери обемът на пирамидата, ако $AB = 8$ cm и $BC = 9$ cm.

на задачите от бр. 1/2011 г.

1. Да се намери числената стойност на израза $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} - 2\sqrt{3} + 3 = 0$.

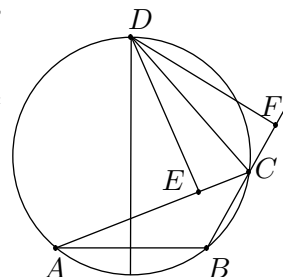
Решение. Преобразуваме лявата страна на израза и получаваме

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} - 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}-2}{1} - 2\sqrt{3} + 3 =$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + 3 = 0.$$

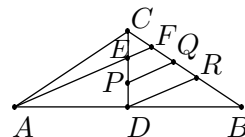
2. Около триъгълника ABC ($AC > BC$) е описана окръжност. Симетралата на AB пресича окръжността в точката $D \in \widehat{AC}$, несъдържаща точката B . Права през D , перпендикулярна на AC , я пресича в точката E . Да се докаже, че $AE = BC + CE$.

Решение. Върху лъча $BC \rightarrow$ нанасяме отсечката $CF = CE$. Триъгълниците DEC и DCF са еднакви, защото $CE = CF$ — по построение, $\angle ECD = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{BC}}{2} = \angle DCF$ и DC е обща за двата триъгълника. Триъгълниците AED и BFD са еднакви (правоъгълни, $AD = BD$ и $DE = DF$). Тогава $AE = BF$, т. е. $AE = BC + CE$.



3. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) с $\angle ACB = 120^\circ$ е прекарана височината CD ($D \in AB$). Върху CD е взета точката E така, че $CE : ED = 1 : 2$. Правата AE пресича BC в точката F . Ако $CF = 3$ cm, да се намери дължината на височината CD .

Решение. Означаваме с P средата на DE и построяваме отсечките PQ и DR успоредни на AF (Q и R принадлежат на BC). Отсечката EF е средна отсечка в $\triangle PQC$, следователно $CF = FQ = 3$ cm. Отсечката PQ е средна основа на трапеца $DRFE$ и $QR = FQ = 3$ cm.



Тъй като $\triangle ABC$ е равнобедрен, то $AD = DB$ и DR е средна отсечка в $\triangle ABF$ и $BR = RF = 6$ cm. Следователно $BC = 15$ cm. Тъй като $\angle ACB = 120^\circ$, то $\angle ABC = 30^\circ$. Тогава $CD = \frac{1}{2}BC = \frac{15}{2}$ cm.

4. Да се пресметне изразът $A = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$.

Решение. Преобразуваме дадения израз и получаваме

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} + \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6} + \frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{12} = \\ &= \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{12} = \\ &= \frac{12 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Да се реши уравнението $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$.

Решение. Записваме даденото уравнение във вида

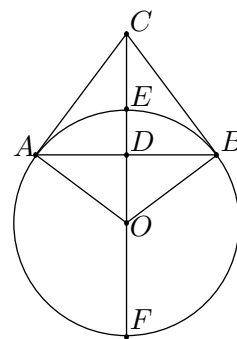
$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55.$$

Полагаме $x^2 + 2x = y$ и получаваме уравнението $y^2 - y - 56 = 0$ с корени $y_1 = -7$ и $y_2 = 8$. Тогава $x^2 + 2x = -7$ или $x^2 + 2x = 8$, т. е. $x^2 + 2x + 7 = 0$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$. Уравнението $x^2 + 2x + 7 = 0$ няма реални корени. Корените на уравнението $x^2 + 2x - 8 = 0$ са $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Следователно корените на даденото уравнение са $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

6. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC = BC$) с основа $AB = 8$ cm. Основата AB е хорда в окръжността, допираща се до бедрата на триъгълника в точките A и B . Да се намери радиусът на тази окръжност, ако височината CD ($D \in AB$) е равна на 3 cm.

Решение. От правоъгълния $\triangle ADC$ по Питагоровата теорема получаваме $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Означаваме центъра на окръжността с O , радиуса с R и пресечните точки на правата CD с окръжността с E и F . Тогава от правоъгълния $\triangle ADC$ имаме $AD^2 = CD \cdot DO \iff 16 = 3 \cdot DO$, откъдето $DO = \frac{16}{3}$ cm. Като вземем предвид, че $AC^2 = CE \cdot CF$, получаваме

$$25 = \left(R + 3 + \frac{16}{3}\right) \left(\frac{25}{3} - R\right), R = \frac{20}{3}.$$



7. Да се намери стойността на израза $x \cdot \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}}{2 - \sqrt{x+4}} + \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Допустимите стойности на x се определят от $x+4 > 0$ и $2 - \sqrt{x+4} \neq 0$, т. е. $x > -4$ и $x \neq 0$ ($x \in (-4, 0) \cup (0, \infty)$). Преобразуваме

дадения израз и получаваме

$$\begin{aligned}
 x \cdot \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}}{2 - \sqrt{x+4}} + \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}} &= x \cdot \frac{\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}}}{2 - \sqrt{x+4}} + \frac{(\sqrt{x+4})^2 + 4}{\sqrt{x+4}} = \\
 \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{\sqrt{x+4}(2 - \sqrt{x+4})} + \frac{x+8}{\sqrt{x+4}} &= \frac{x(\sqrt{x+4}+2)^2}{\sqrt{x+4}(2 - \sqrt{x+4})(2 + \sqrt{x+4})} + \frac{x+8}{\sqrt{x+4}} = \\
 \frac{x(x+4+4\sqrt{x+4}+4)}{\sqrt{x+4}(4-x-4)} + \frac{x+8}{\sqrt{x+4}} &= \frac{-x-4\sqrt{x+4}-8+x+8}{\sqrt{x+4}} = -4.
 \end{aligned}$$

8. Да се реши уравнението $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.

Решение. Допустимите стойности на x се определят от неравенствата $9 - 2^x > 0$ и $3 - x > 0$, откъдето $x \in (-\infty, 3)$.

Преобразуваме даденото уравнение и получаваме

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x \iff 9 - 2^x = 2^{3-x} \iff 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Решаваме това уравнение като квадратно относно 2^x и получаваме $2^x = 1$ или $2^x = 8$, откъдето $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Но $x_2 = 3$ не принадлежи на областта на допустимите стойности. Следователно решението на даденото уравнение е $x = 0$.

9. Да се намери отношението на основата към бедрото на равнобедрен триъгълник с ъгъл при основата 72° .

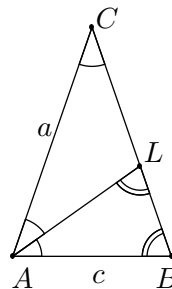
Решение. Нека даденият триъгълник е ABC ($AC = BC$ и $\sphericalangle BAC = 72^\circ$). Означаваме $AC = BC = a$ и $AB = c$. Построяваме ъглополовящата AL ($L \in BC$). Използваме свойството на ъглополовящата в триъгълник и получаваме

$$\frac{CL}{LB} = \frac{AC}{AB} \iff \frac{CL}{a - CL} = \frac{a}{c} \iff CL = \frac{a^2}{a + c}.$$

Тъй като $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ALB$, то $AL = AB$, т.е.

$$c = \frac{a^2}{a + c} \iff c^2 + ac - a^2 = 0 \iff \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0.$$

Оттук намираме $\frac{c}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.



10. Да се докаже тъждеството $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$.

Решение. Преобразуваме лявата страна на равенството и получаваме

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 1} =$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}.$$

11. Да се реши уравнението $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84$.

Решение. Записваме уравнението във вида

$$\left(\sqrt[10]{3}\right)^{2x} + \frac{\left(\sqrt[10]{3}\right)^x}{3} - 84 = 0 \iff 3 \left(\sqrt[10]{3}\right)^{2x} + \left(\sqrt[10]{3}\right)^x - 252 = 0.$$

Решаваме полученото уравнение като квадратно относно $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x$ и получаваме $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = -\frac{23}{3}$, което няма решение, или $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = 9 \iff 3^{\frac{x}{10}} = 3^2$, откъдето $x = 20$. Следователно решението на даденото уравнение е $x = 20$.

12. Общата хорда на два кръга стяга дъги съответно от 60° и 120° . Да се намери отношението на лицата на тези кръгове.

Решение. Означаваме с AB общата хорда на двата кръга, а с R_1 и R_2 радиусите съответно на по-голямата и по-малката окръжност с центрове O_1 и O_2 . Тъй като триъгълникът O_1AB е равностранен, то $AB = R_1$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle AO_2B$ и получаваме

$$AB^2 = R_2^2 + R_2^2 - 2R_2R_2 \cos 120^\circ = 3R_2^2 \iff R_1^2 = 3R_2^2.$$

Отношението на лицата е $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = 3$.

13. Да се намерят стойностите на m , за които неравенството

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

е вярно за произволни реални стойности на x .

Решение. Тъй като $x^2 - 8x + 20 > 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$, то трябва $mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0$.

Това неравенство е вярно за всяко $x \in \mathbf{R}$, когато

$$\left| \begin{array}{l} (m+1)^2 - m(9m+4) < 0 \\ m < 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} 8m^2 + 2m - 1 > 0 \\ m < 0 \end{array} \right. ,$$

откъдето намираме $m < -\frac{1}{2}$, т.е. $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

14. Да се реши системата $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3. \end{cases}$

Решение. Полагаме $\sqrt[3]{x} = u$ и $\sqrt[3]{y} = v$, откъдето $x = u^3$ и $y = v^3$ и получаваме

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 - uv + v^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3 \\ (u + v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3^2 - 3uv = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2, \end{cases}$$

$$\text{откъдето } \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 2 \end{cases}; \begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = 1. \end{cases} \text{ Тогава } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \sqrt[3]{y} = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = 1. \end{cases}$$

Следователно решенията на дадената система са $x_1 = 1, y_1 = 8$; $x_2 = 8, y_2 = 1$.

15. В кръг с център O и радиус R е прекарана хорда AB , а на радиуса AO като на диаметър е построена окръжност с център O_1 . Да се докаже, че лицата на двата сегмента, които хордата AB отсича от двата кръга се отнасят както 4 : 1 (Частта от кръга, която отсича хорда, се нарича сегмент).

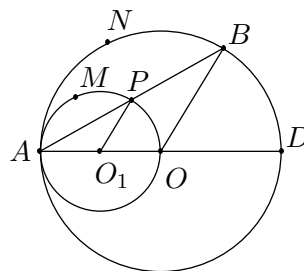
Решение. Означаваме с k_1 по-малката окръжност. Пресечната точка на k_1 с AB означаваме с P . Означаваме с S_1 сегмента AMP ($M \in \widehat{AP}$) и с S_2 сегмента ANB ($N \in \widehat{AB}$), където M и N са в една полуравнина спрямо правата AB . Като вземем предвид, че $\sphericalangle O_1AP = \sphericalangle O_1PA$ и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, заключаваме, че

$$\sphericalangle AO_1P = \sphericalangle AOB = n^\circ.$$

Понеже $S_{AO_1P} = \frac{1}{4}S_{AOB}$, то

$$S_1 = \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} - S_{AO_1P} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} - S_{AOB} \right)$$

и $S_2 = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} - S_{AOB}$. Следователно $S_2 : S_1 = 4 : 1$.



ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 1/2011 г.

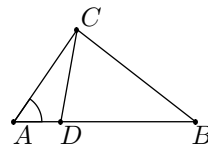
ТЕМА 1

1. Тъй като $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, уравнението приема вида $\sin x(\sin x - 2) = 0$. Понеже $\sin x \neq 2$ за всяко x , то е равносилно с $\sin x = 0$. Оттук решенията са $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

2. Неравенството се преобразува във вида $(x - 1)(x^2 - x + 1) < 0$. Тъй като $x^2 - x + 1 > 0$ за всяко x , то е равносилно с $x - 1 < 0$. Оттук решенията са $x \in (-\infty, 1)$.

3. Нека правоъгълникът е $ABCD$ и $AB = a, BC = b$. От $P = 2a + 2b = 14$ имаме $a + b = 7$. Освен това диагонален AC е диаметър на окръжността, т.е. $AC = 2R = 5$ и от питагоровата теорема получаваме $a^2 + b^2 = 25$. Оттук $(a + b)^2 - 2ab = 25$, т.е. $49 - 2ab = 25$ и $ab = 12$. Лицето на правоъгълника е $S = ab = 12$.

4. Тъй като триъгълниците ACD и BCD имат обща височина от върха D , лицата им се отнасят както основите AD и BD . Така $AD : BD = 1 : 3$ и $AD + BD = AB = 16$, откъдето намираме $AD = 4, BD = 12$.



От $\triangle ABC$ по косинусовата теорема пресмятаме $\cos \angle BAC = \frac{55}{64}$. Отново от косинусовата теорема за $\triangle ACD$ получаваме $CD^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{55}{64} = 25$ и $CD = 5$.

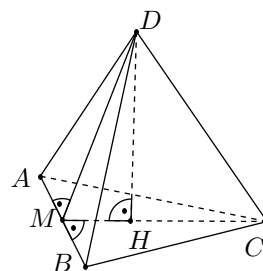
5. При $x \in (-\infty, -2]$ имаме $f(x) = x^2 - 2x - 4$. Тази квадратна функция е намаляваща в интервала $(-\infty, -2]$ и следователно най-малката ѝ стойност в този интервал е $f(-2) = 4$. При $x \in [-2, +\infty)$ получаваме квадратната функция $f(x) = x^2 + 2x + 4$, която намалява в $[-2, -1]$ и расте в $(-1, +\infty)$. Следователно най-малката ѝ стойност в интервала $[-2, +\infty)$ е $f(-1) = 3$. Тъй като $f(-1) < f(-2)$, най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $(-\infty, +\infty)$ е $f(-1) = 3$.

6. След полагането $y = 2^x$ неравенството става $\sqrt{y - 2} \leq 4 - y$. То има смисъл при $y \geq 2$, като при $y > 4$ няма решение. Нека $y \in [2, 4]$. Сега неравенството е равносилно с $y - 2 \leq (4 - y)^2$, т.е. $y^2 - 9y + 18 \geq 0$. Решенията на това неравенство са $y \in (-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ и предвид $y \in [2, 4]$ получаваме $y \in [2, 3]$. Накрая от $2 \leq 2^x \leq 3$ намираме решенията на даденото неравенство: $x \in [1, \log_2 3]$.

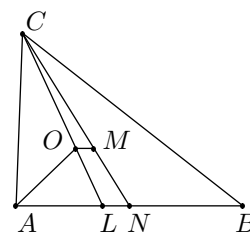
7. Функцията $f(x)$ е дефинирана при $x > 0$. Нека M с координати $M(x, \frac{4}{\sqrt{x}})$ е произволна точка от графиката ѝ. От питагоровата теорема получаваме $OM^2 = x^2 + (\frac{4}{\sqrt{x}})^2 = x^2 + \frac{16}{x}$. Да изследваме функцията $g(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ при $x \in (0, +\infty)$.

Имаме $g'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$ и $g'(x) < 0$ при $x \in (0, 2), g'(x) > 0$ при $x \in (2, +\infty)$. Това означава, че $g(x)$ намалява в $(0, 2)$ и расте в $(2, +\infty)$, следователно най-малката ѝ стойност в интервала $(0, +\infty)$ е $g(2) = 12$. Окончателно, възможно най-малката дължина на отсечката OM е равна на $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (и се достига за точката $M(2, 2\sqrt{2})$).

8. Нека M е средата на AB и H е ортогоналната проекция на D върху равнината ABC . От $AC = BC$ и $AD = BD$ следва, че $CM \perp AB$, $DM \perp AB$ и H лежи на правата CM . Пресмятаме $CM = DM = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ и оттук $S_{ABC} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. В $\triangle CDM$ пресмятаме, че височината му от върха M е равна на $\sqrt{15^2 - 9^2} = 12$, оттук $S_{CDM} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108$ и от $S_{CDM} = \frac{CM \cdot DH}{2}$ намираме $DH = \frac{72}{5}$. Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DH = 576$.



9. Нека $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и CL и CN ($L, N \in AB$) са съответно ъглополовяща и медиана ($O \in CL$, $M \in CN$). От $OM \parallel AB$ следва $\triangle COM \sim \triangle CLN$. Тогава $\frac{OM}{LN} = \frac{CO}{CL} = \frac{CM}{CN}$ или $\frac{1}{LN} = \frac{CO}{CL} = \frac{2}{3}$. От $AL + BL = c$ и $\frac{BL}{AL} = \frac{b}{a}$ получаваме $AL = \frac{bc}{a+b}$.



Тъй като AO е ъглополовяща в $\triangle ALC$, то $\frac{CO}{OL} = \frac{AC}{AL} = \frac{a+b}{c}$. Оттук намираме $\frac{CO}{CL} = \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{a+b}{45}$ и от $\frac{CO}{CL} = \frac{2}{3}$ получаваме $a+b = 30$ и $c = 15$. Освен това $LN = AN - AL = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} = \frac{15(a-b)}{2 \cdot 30} = \frac{a-b}{4}$ и от $\frac{1}{LN} = \frac{2}{3}$ получаваме $a-b = 6$. Накрая от $a+b = 30$ и $a-b = 6$ намираме $a = 18$, $b = 12$.

10. При $x = 0$ даденото равенство става $\sin b = b$. Но (както е известно) за всяко $b > 0$ е изпълнено $\sin b < b$, а за всяко $b < 0$ е изпълнено $\sin b > b$. Следователно $\sin b = b$ единствено при $b = 0$. Сега при $x = \pi$ получаваме $\sin(a\pi) = 0$, което е изпълнено само ако a е цяло число. При $x = \frac{\pi}{2}$ получаваме $\sin(\frac{a\pi}{2}) = a$, откъдето следва, че $a \in [-1, 1]$. Тези две условия означават, че $a = -1, 0$ или 1 . За тези стойности на a равенството $\sin(ax) = a \sin x$ наистина е изпълнено за всяко x (например $\sin(-x) = -\sin x$). Окончателно, търсените двойки числа a и b са $a = -1, 0, 1$ и $b = 0$.

Тема 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	Г	В	Г	Б	Д	Г	Б	Б	В	А	Д	Г	Б	Б	Б	Д	А	Б	В

21. $x = 9$; 22. $(0; 16]$; 23. $x = 2$; 24. $(-2; 0]$; 25. $[-0, 125; 3]$; 26. -4 ; 27. $1, 25$ cm;
28. 20%; 29. 0,75; 30. $\frac{Q}{2} \sqrt{\pi S}$.

Тема 3

1. а) Полагаме $2^x = y > 0$. Неравенството $f(x) > 0$ при $a = 0$ приема вида $y^2 + 2y - 3 > 0$, откъдето $y > 1$ и $x > 0$.

б) Търсим най-малката стойност на функцията $g(y) = y^2 + 2(2a+1)y + 4a^2 - 3$ за $y \in (0; \infty)$. Нека $y_0 = -(2a+1)$ е абсцисата на върха на тази парабола. Ако $y_0 \leq 0$, т.е. $a \geq -0,5$, $g(y)$ е растяща в интервала $(0; \infty)$ и следователно няма най-малка стойност. Ако $y_0 > 0$, т.е. $a < -0,5$, най-малката стойност на $g(y)$ в интервала $(0; \infty)$ се постига за y_0 , а на $f(x)$ — за $x_0 = \log_2 y_0$.

в) Трябва $g(y) > 0$ за всяко $y > 0$. Дискриминантата на $g(y)$ е $D = 4(a+1)$. При $D < 0$, т.е. $a < -1$, $g(y) > 0$ за всяко y . Ако $D \geq 0$, трябва корените на

уравнението $g(y) = 0$ да са неположителни, което води до системата
$$\begin{cases} a+1 \geq 0 \\ g(0) \geq 0 \\ y_0 < 0 \end{cases},$$

откъдето $a \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$. Окончателно $a \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$.

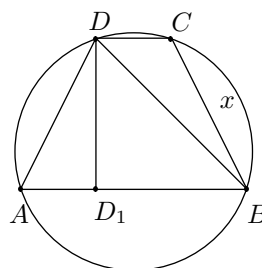
2. Нека трапецът е $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с височина $h = DD_1$. Тъй като трапецът е вписан, то $AD = BC = x$ и $x < 2.1 = 2$, т.е. $x \in (0; 2)$. По условие $AB + CD = 4 - 2x$. От $\triangle BD_1D$

имаме $BD^2 = h^2 + \left(\frac{AB + CD}{2}\right)^2$, откъдето следва а).

б) От $\triangle ABD$ по синусовата теорема $BD^2 = 4R^2 \sin^2 \angle BAD = \frac{4h^2}{x^2} (\sin \angle BAD = \frac{h}{x})$. Това, заедно с а), дава $h = \frac{x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}}$, откъдето $S = BD_1 \cdot h = \frac{x(2-x)^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

в) Намираме $S'(x) = \frac{2(x^3 - 6x + 4)}{(x+2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(x-2)(x^2 + 2x - 2)}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (0; 2)$.

Имаме $S'(x) > 0$ при $x \in (0; \sqrt{3}-1)$ и $S'(x) < 0$ при $x \in (\sqrt{3}-1; 2)$, т.е. $x = \sqrt{3}-1$.

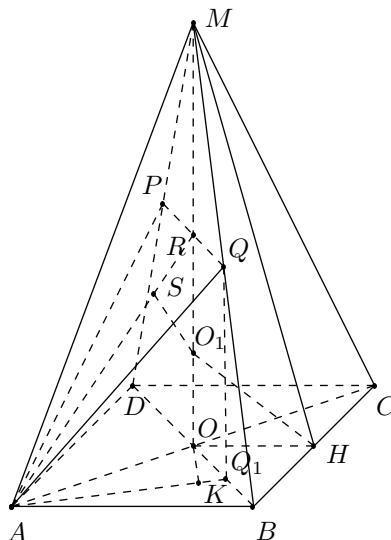


3. а) Нека O_1 е центърът на вписаната сфера, а H е средата на BC ; $O_1 \in MO$ и HO_1 е ъглополовяща на $\angle OHM$. Тогава $\frac{MO_1}{O_1O} =$

$$\frac{MH}{OH} = \frac{\sqrt{MO^2 + OH^2}}{OH} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1} = 3.$$

б) От $\rho \parallel BD$ следва, че ρ пресича (BDM) по права, успоредна на BD . Нека $\rho \cap MD = P$, $\rho \cap MB = Q$ и $\rho \cap MO = R$. От $O_1P = O_1Q$ следва, че ортогоналната проекция S на O_1 върху ρ лежи на отсечката AR . Пресечницата на ρ и $(ABCD)$ е права, успоредна на BD . От $BD \perp AR$ (защо?) и $BD \perp AO$ следва, че търсеният ъгъл е $\angle RAO = 2 \angle O_1AO = 2\varphi$. От $\triangle AOO_1$ имаме $\operatorname{tg} \varphi = \frac{OO_1}{AO} = \frac{OO_1}{\sqrt{2}OH}$, но от а)

$$MO = 4OO_1, \text{ откъдето } \frac{OO_1}{OH} = \frac{MO}{4OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, т.е. $\cos \angle RAO = \cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{3}{5}$.

в) Ако Q_1 е проекцията на Q върху $(ABCD)$, то $Q_1 \in OB$ и $RQ = OQ_1$.
От б) знаем, че $\operatorname{tg} \angle RAO = \frac{4}{3}$. От $\triangle RAO$ имаме $RO = AO \operatorname{tg} \angle RAO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $MO = \sqrt{2}$ и значи $\frac{MR}{MO} = \frac{1}{3}$. Тогава $\frac{OQ_1}{OB} = \frac{RQ}{OB} = \frac{MR}{MO} = \frac{1}{3}$ и $OQ_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Нека
 K е проекцията на O върху AQ_1 . Тогава разстоянието между правите MO и AQ
е OK (защо?). От $\triangle AQ_1O$ намираме $OK = \frac{AO \cdot OQ_1}{\sqrt{AO^2 + OQ_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$.

Тема 4

ОТГОВОРИ, РЕШЕНИЯ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Г	Б	В	Г	А	Г	Г	В	А	В	Б

13. Непосредствено се проверява, че при $k = 1$ лявата страна на неравенството е 1 и е по-голяма от нула за всяко x . Ако $k \neq 1$, т. е. неравенството е квадратно и за да е изпълнено условието на задачата трябва

$$\left| \begin{array}{l} k^2 - 1 > 0 \\ D < 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} k^2 - 1 > 0 \\ (k-1)^2 - (k^2 - 1) < 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} k^2 - 1 > 0 \\ -2(k-1) < 0 \end{array} \right|,$$

откъдето $k \in (1, \infty)$. Следователно най-малката стойност на k е 1.

14. Допустимите стойности на неизвестното определяме от условията $5^x - 1 \neq 0$, $1 - 5^{x-1} \neq 0$, т. е. $x \neq 0$, $x \neq 1$. Полагаме $5^x = u$ и неравенството приема вида

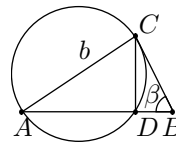
$$\frac{1}{u-1} > \frac{5}{5-u} \iff \frac{1}{u-1} - \frac{5}{5-u} > 0 \iff \frac{5-u-5u+5}{(u-1)(5-u)} > 0 \iff \frac{10-6u}{(u-1)(5-u)} > 0 \iff \frac{3u-5}{(u-1)(u-5)} > 0.$$

Оттук намираме $1 < u < \frac{5}{3} \cup u > 5$. Тогава $5^0 < 5^x < \frac{5}{3} \cup 5^x > 5$, т. е. $0 < x < \log_5 \frac{5}{3} = 1 - \log_5 3 \cup x > 1$. Следователно $x \in (0, 1 - \log_5 3) \cup (1, \infty)$.

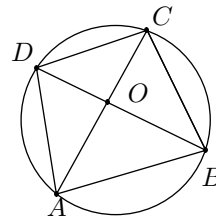
15. Като вземем предвид, че $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ даденото уравнение приема вида $2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x - 3 = 0$. Полагаме $\cos 2x = t \in [-1, 1]$ и получаваме $2t^2 + 5t - 3 = 0$, откъдето $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -3$, което не е решение. Следователно $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откъдето намираме $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

16. Тъй като точката D лежи на окръжност с диаметър AC , то $\angle ADC = 90^\circ$.
От правоъгълния $\triangle ADC$ намираме $\frac{CD}{AC} = \cos \beta$, т. е. $CD = b \cos \beta$.

От $\triangle DBC$ имаме $DB = CD \cdot \cotg \beta$, т.е. $DB = b \cos \beta \cdot \cotg \beta$.
Следователно $S_{DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot CD = \frac{1}{2} b \cos \beta \cdot b \cos \beta \cotg \beta = \frac{1}{2} b^2 \cos^2 \beta \cdot \cotg \beta$.



17. От $\angle DAC = \angle BAC$ следва $\widehat{DC} = \widehat{CB}$, т.е. $\angle DC = \angle CB = 4$. Триъгълниците ABC и BOC са подобни защото $\angle CAB = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \angle OBC$ и $\angle ACB$ – общ. Ако $OC = x$, от подобие на триъгълниците имаме



$$\frac{x}{4} = \frac{4}{6+x} \iff 6x + x^2 = 16 \iff x^2 + 6x - 16 = 0,$$

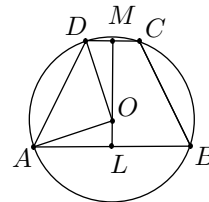
откъдето намираме, че $x = 2$ ($x = -8$ – не е възможно).
Следователно $OC = x = 2$ и $AC = 6 + 2 = 8$.

18. Уравнението има смисъл при $|x-1| - 1 > 0 \iff |x-1| > 1 \iff (x-1)^2 - 1^2 > 0 \iff x(x-2) > 0$. Следователно $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. За тези стойности на x уравнението е еквивалентно на $\frac{1}{|x-1| - 1} = 2 \iff 3 = 2|x-1| \iff |x-1| = \frac{3}{2}$.
Следователно $x-1 = \frac{3}{2}$ и $x-1 = -\frac{3}{2}$, откъдето $x_1 = \frac{5}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$. Така получените x_1 и x_2 са решения, защото принадлежат на дефиниционното множество.

19. Намираме $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. От $f'(x) = 0$ получаваме $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Тъй като $f'(x) > 0$ в интервалите $(-\infty, 1)$ и $(3, \infty)$ и $f'(x) < 0$ в интервала $(1, 3)$, то функцията $f(x)$ при $x = 3$ има локален минимум и той е $f(3) = -1$.

От $g'(x) = 2x - 6a = 0$ намираме $x = 3a$. Тъй като $g''(x) = 2$, то при $x = 3a$ функцията има минимум и той е $g_{min} = g(3a) = 9a^2 - 18a^2 + a = a - 9a^2$. От $a - 9a^2 < -1$ намираме, че $a \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{37}}{18}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{18}, \infty\right)$.

20. Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност, следователно е равнобедрен. Означаваме с M и L съответно средите на CD и AB , $DM = MC = y$ и $AL = LB = x$. Центърът O на окръжността лежи на ML и $LO : OM = 3 : 4$. Следователно $LO = 3z$, $OM = 4z$. От правоъгълните триъгълници ALO и DOM имаме $\begin{cases} x^2 + 9z^2 = 100 \\ y^2 + 16z^2 = 100 \end{cases}$. По условие $x + y = h = 7z$. Решаваме системата



$$\begin{cases} x^2 + 9z^2 = 100 \\ y^2 + 16z^2 = 100 \\ y = 7z - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 9z^2 = 100 \\ 49z^2 - 14xz + x^2 + 16z^2 = 100 \\ y = 7z - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 9z^2 = 100 \\ 56z^2 - 14xz = 0 \\ y = 7z - x \end{cases},$$

$$\text{откъдето } \begin{cases} x^2 + 9z^2 = 100 \\ 4z - x = 0 \\ y = 7z - x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z = 2 \\ x = 8 \\ y = 6 \end{cases}. \text{ Следователно } AB = 16 \text{ и } DC = 12.$$

Отговори. 1. а); 2. б); 3. в); 4. д); 5. д); 6. а); 7. а); 8. в); 9. г); 10. г); 11. а); 12. д); 13. г) 14. г); 15. д); 16. а); 17. б); 18. б); 19. г); 20. д); 21. $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$; 22. $x = 3$; 23. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 24. $BC = 8$ и $CD = 15$; 25. $V = 54\sqrt{3}$.

26. Неравенството има смисъл при $15 - x^2 \geq 0$, т. е. когато $x \in [-\sqrt{15}, \sqrt{15}]$. Тъй като $x^2 - 8x + 15 \geq 0$, когато $x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$ и $x^2 - 8x + 15 \leq 0$, когато $x \in [3, 5]$, то ще решим даденото неравенство за стойности на x принадлежащи на интервалите $[-\sqrt{15}, 3]$ и $[3, \sqrt{15}]$.

При $x \in [-\sqrt{15}, 3]$ имаме $x^2 - 8x + 15 \leq 15 - x^2 \iff 2x^2 - 8x \leq 0$, откъдето $x \in [0, 4]$. Но $x \in [-\sqrt{15}, 3]$, следователно решенията на неравенството в този случай са $x \in [0, 3]$.

При $x \in [3, \sqrt{15}]$ имаме $-(x^2 - 8x + 15) \leq 15 - x^2, 8x \leq 30$, т. е. $x \in \left(-\infty, \frac{15}{4}\right]$.

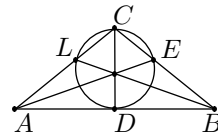
Но $x \in [3, \sqrt{15}]$ и решението на неравенството в този случай е $x \in \left[3, \frac{15}{4}\right]$.

Следователно даденото неравенство се удовлетворява за всяко $x \in \left[0, \frac{15}{4}\right]$.

27. Означаваме $AL = BE = x$, откъдето $x \in (0, 6)$. Тогава $CL = CE = 6 - x$. От $AL \cdot AC = AD^2$, $6 \cdot x = AD^2$ намираме, че $AD = \sqrt{6x}$, т. е. $AB = 2\sqrt{6x}$. От $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}$ получаваме

$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{2\sqrt{6x}} \text{ т. е. } 2\sqrt{6}(6-x) = 6\sqrt{x}. \text{ Полагаме } \sqrt{x} = y \text{ и}$$

получаваме $2\sqrt{6}y^2 + 6y - 12\sqrt{6} = 0$, т. е. $2y^2 + \sqrt{6}y - 12 = 0$, откъдето $y_{1,2} = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{6}\sqrt{17}}{4}$. Понеже $y > 0$, то $AB = 2\sqrt{6} \cdot y = 3(\sqrt{17} - 1)$.



28. Нека дадената пирамида е $ABCV$ с основа ABC . Построяваме $AN \perp VC$. Тогава $BN \perp VC$ (защо?). Следователно $\sphericalangle ANB = \varphi$ е търсеният ъгъл между две околни

стени на пирамидата. Понеже $S_{\text{ок. п.}} = 3S_{ACV} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$, то

$S_{ACV} = \frac{\sqrt{2}}{8}$. Построяваме $VD \perp AC$ ($D \in AC$). Тъй като

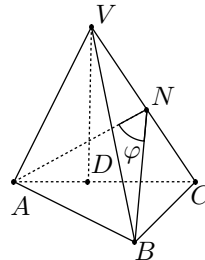
$$\frac{AC \cdot VD}{2} = S_{ACV}, \text{ то } \frac{VD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \text{ откъдето } VD = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

От правоъгълния $\triangle CVD$ намираме $VC = \sqrt{VD^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

От $VC \cdot AN = AC \cdot VD \iff \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot AN = \frac{\sqrt{2}}{4}$ намираме $AN = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle ABN$ и получаваме

$$AB^2 = 2AN^2 - 2AN^2 \cos \varphi \iff 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \varphi, \text{ откъдето } \cos \varphi = -\frac{1}{2}.$$

Следователно $\varphi = 120^\circ$.



С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

НОВИНИ	2
ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ	3
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ	10
ОЩЕ ЗА ИЗОТОМИЧНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В ТРИЪГЪЛНИКА И ИЗОТОМИЧНОТО ИЗОБРАЖЕНИЕ — <i>А. Гушев, В. Гушев</i>	25
ЗАДАЧИ ЗА ИЗЧИСЛЕНИЯ ОТ ОКРЪЖНОСТ — <i>Р. Несторова</i>	36
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	42
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ	45
ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ — <i>Е. Колев</i>	47
ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА СЕДМИ КЛАС, ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ — <i>Н. Колева</i>	51
ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ — <i>Н. Колева</i>	56
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	58
ЗАДАЧИ	64
РЕШЕНИЯ	66
ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИТЕ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ	71

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70x100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 21.03.2011 г.
Печат „Деметра“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.