

Мате мати ка

БРОЙ
2014 г.
ГОДИНА
LIII

1

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Доц. Руси Русев – главен редактор

АКАД. ДМН СТЕФАН ДОДУНЕКОВ

Чл. кор. дмн Генчо Скордев

Доц. Емил Колев

Проф. Иван Тонов

Доц. Марин Маринов

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

Проф. дмн Николай Николов

Пенка Кирилова — коректор

Проф. дмн Петър Бойваленков — изпълнителен директор

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Н О В И Н И

✓ ОТ 12 ДО 18 ЯНУАРИ в гр. Алмати (Казахстан) се проведе 10. Жаутиковска олимпиада по математика, информатика и физика. България се представи с отбор от СМГ. В състезанието по математика златни медали спечелиха Петър Пенков и Нгуен Чи Зунг, сребърни медал получи Емилиян Рогачев, а Велина Иванова остана с бронзов медал.

✓ РЕЗУЛТАТИ, имената на победителите и задачите от Есенния турнир по математика, който се проведе на 09.11.2013 г., можете да намерите в статия в този брой.

✓ ЗИМНИТЕ математически състезания се проведеха от 31 януари до 2 февруари 2014 г. в Бургас. Очаквайте повече информация в следващия брой.

✓ ПЪРВИТЕ по рейтинг след ЗМС са:

Осми клас: Георги Димитров (СМГ), Костадин Гаров (ПМГ, Бургас), Васил Йорданов (СМГ), Ирина Софронова (СМГ) и Кристина Атанасова (ПМГ, Бургас);

Девети клас: Виолета Найденова (СМГ), Димитър Ружев (СМГ), Костадин Гаров (ПМГ, Бургас), Мария Делякова (СМГ) и Александър Иванов (СМГ);

Десети клас: Деница Маркова, Александър Чергански и Даниел Атанасов (СМГ), Божидаг Ганев (СЧГ) и Мирослав Маринов (ОМГ, Пловдив);

Единадесети клас: Любен Личев (МГ, Плевен), Емилиян Рогачев, Цветомир Михайлов и Александър Тенев (СМГ), Петър Гайдаров (ОМГ, Пловдив);

Дванадесети клас: Виктор Радивчев (МГ, Варна), Павлена Ненова (СМГ), Йордан Йорданов (МГ, Варна), Петър Пенков (СМГ), Станислав Чобанов (МГ, Варна) и Нгуен Чи Зунг (СМГ).

Всички рейтинги и повече информация ще намерите на сайта www.math.bas.bg/nt.

✓ ЗИМНАТА СЕСИЯ на Ученическия Институт по Математика и Информатика се проведе на 17-19 януари 2014 г. в Стара Загора.

✓ 31. БАЛКАНСКА Олимпиада по математика ще се проведе в Плевен на 2-7 май 2014.

✓ БЪЛГАРСКИ отбор ще участва на Юбилейната 40-та Всерусийска олимпиада по математика, която ще се проведе на 24-20 април 2014 в гр. Ярославл.

за кандидат ? студенти

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Задача 1. Да се реши уравнението $\frac{2}{3+x} + \frac{3}{2+x} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$.

Задача 2. В окръжност k е вписан трапец $ABCD$ с основи $AB = 8$ и $CD = 2$. Да се намерят дължините на бедрата (AD и BC) и лицето S на трапеца при условие, че в него може да се впише окръжност.

Задача 3. Да се намери реалното число x при условие, че числата $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ и $\lg(2^x + 3)$ в този ред образуват аритметична прогресия.

Задача 4. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 1$ и $BC = \sqrt{2}$. Окръжност k с център O_1 , лежащ върху правата AB минава през върховете A и C . Да се намерят дължината на радиуса R на окръжността и $\sin \angle AO_1C$.

Задача 5. Реалните числа x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - ax - 5a = 0$, където $a \in \mathbb{R}$. Да се намери a при условие, че числата $y_1 = x_1^2 + x_1x_2$ и $y_2 = x_2^2 + x_1x_2$ са корени на уравнението $y^2 - 9y - 135 = 0$.

Задача 6. С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 са съставени всички възможни петцифрени числа (без повторение на цифри). Тези числа са подредени по големина и са записани последователно едно до друго от най-малкото към най-голямото 1234512354...54321. Да се намери броят на всички записани цифри и да се определи коя цифра стои на 237 място.

Задача 7. За остроъгълния $\triangle ABC$ имаме $AC_1 : C_1B = 4 : 1$, $CH = 5$ и $HC_1 = 4$, където CC_1 е височината към страната AB , а H е ортоцентърът на триъгълника. Да се намерят дължините на страните (AB , BC и CA) и лицето на триъгълника ABC .

Задача 8. За правоъгълен триъгълник ABC с ъгли $\alpha, \beta, \gamma = \frac{\pi}{2}$ е в сила равенството $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}$. Да се намерят големините на ъглите α и β . Отговорът да се обоснове!

ТЕМА 2: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„П. ХИЛЕНДАРСКИ“

ДОЦ. Д-Р П. РАНГЕЛОВА

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи – 0 точки.

1. Сборът на две числа е $1\frac{1}{6}$, а сборът на реципрочните им числа е $3\frac{1}{2}$.

Числата са:

- А) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ В) $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$

2. Стойността на израза $\frac{152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}}{0,2} \cdot 0,3$ е:

- А) 6,5625 Б) 6,6525 В) 5,5625 Г) 6,56

3. Дефиниционната област на функцията $y = \sqrt{6 + 7x - 3x^2}$ е интервала:

- А) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ Б) $[3; \infty)$ В) $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$ Г) $\left(-\frac{2}{3}; 3\right]$

4. Решенията на системата $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$ са:

- А) $(-1; -2), (2; 1)$ Б) $(2; -1)$ В) $(-1; 2)$ Г) $(1; 2), (-2; 1)$

5. Седмият член на аритметичната прогресия $1, 18, 35, \dots$ е:

- А) 102 Б) 120 В) 100 Г) 103

6. Корените на уравнението $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 2$ са:

- А) ± 3 Б) само 3 В) само -3 Г) 9

7. Функцията $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$ е растяща в интервала:

- А) $[0; 2]$ Б) $[0; 1] \cup [2; \infty)$ В) $[1; 2]$ Г) $(-\infty; \infty)$

8. В равнобедрен трапец с основи a и b е вписана окръжност. Диаметърът на тази окръжност е:

- А) $\frac{a+b}{2}$ Б) $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ В) $\sqrt{ab}$ Г) $\frac{a-b}{2}$

9. В равнобедрен триъгълник височините към основата и към бедрото са съответно равни на 10 и 12. Основата на триъгълника е равна на:

- А) 5 Б) 45 В) 75 Г) 15

10. Основата на равнобедрен триъгълник е равна на $4\sqrt{2}$, а медианата към бедрото е равна на 5. Бедрото е равно на:

- А) 3 Б) 9 В) 5 Г) 6

11. Броят на всички трицифрени числа, които могат да се запишат с помощта на цифрите 1, 2, 5, 6 и 8, е:

- А) 60 Б) 15 В) 125 Г) 225

12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб a и ъгъл между основен и околен ръб α . Лицето на пълната ѝ повърхнина е:

- А) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + 3\operatorname{tg} \alpha)$ Б) $\frac{3a^2}{4}\operatorname{tg} \alpha$
В) $a^2(\sqrt{3} + 3\operatorname{tg} \alpha)$ Г) $\frac{a^2}{4}(3 + \sqrt{3}\operatorname{tg} \alpha)$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Сравнете числата $A = \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 9$ и $B = \frac{1}{2} \lg 225 - 1$.

14. Броят на всички различни петцифрени числа, по-малки от 20000, които се записват с цифрите 0, 1 и 2, е:

15. Най-голямата стойност на функцията $y = 9 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2}$ е:

16. Стойността на израза $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$ е:

17. Окръжностите $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ се допират външно. През точката O_2 е построена допирателна към k_1 , която се допира до k_1 в точката A . Ако $O_2A = 3r_2$, то $r_1 : r_2$ е:

Част трета

Разпишете подробно и обосновайте решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 6.

18. Ако $\log_{12} 18 = a$ и $\log_{24} 54 = b$, то намерете $5(a - b) + ab$.

19. Допирната точка на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност k разделя хипотенузата на отсечки с дължини 5 см и 12 см. Намерете дължината на окръжността k .

20. Даден е триъгълник със страни $a = 13$, $b = 15$ и $c = 14$. В него е вписан полукръг с център, лежащ на страната c . Намерете радиуса на този полукръг.

ТЕМА 3: ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Първа част

Всяка от следващите 20 задачи има само един верен отговор. Преценете кой от предложените пет отговора на съответната задача е верен. За всеки верен отговор получавате по 1 точка. За грешен или непълнен отговор, както и за посочени повече от един отговор на една задача, точки не се дават и не се отнемат.

1. Изразът $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ е равен на:

- А) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ Б) $3\sqrt{2}$ В) 5 Г) 8 Д) 10

2. Ако $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, то изразът $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ е равен на:

- А) 1 Б) 1,5 В) $\frac{7}{3}$ Г) 3 Д) $\frac{37}{12}$

3. Най-малката цяла положителна стойност на параметъра a , за която квадратното уравнение $x^2 - (a + 1)x + 1 = 0$ има два различни реални корена, е равна на:

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

4. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2 - 20x + 13 = 0$, то стойността на израза $x_1(2 + x_2) + 2x_2$ е равна на:

- А) 40 Б) 50 В) 53 Г) 58 Д) 63

5. Кое от посочените числа е корен на уравнението

$$\sqrt{4 - (x - 2)^2} + \sqrt{1 - (x - 2)^2} = 3 + \sqrt{2x - x^2}?$$

- А) $1 + \sqrt{2}$ Б) 2 В) $2 - \sqrt{2}$ Г) $4 - \sqrt{2}$ Д) $3 - \sqrt{5}$

6. Изразът $\lg 392 - 3 \lg 2 - 2 \lg 7$ е равен на:

- А) 0 Б) $\lg 2$ В) $\lg 3$ Г) 1 Д) 7

7. Ако $xy = -6$ и $x + y = 1$, то изразът $(x - y)^2$ е равен на:

- А) -8 Б) 12 В) 20 Г) 24 Д) 25

8. Решенията на неравенството $\frac{x^2 - x + 2}{x + 1} < 0$ са:

- А) $x \in (-\infty; -1)$ Б) $x \in [-1; 1)$ В) $x \in (1; 2)$
Г) $x \in (2; 4)$ Д) $x \in (4; 5) \cup (5; \infty)$

9. Стойностите на x , за които съществува $\log_x(x - x^2)$, са:

- А) $x \in (-1; 0)$ Б) $x \in (0; 1)$ В) $x = 1$
Г) $x \in (1; 2)$ Д) $x \in (2; \infty)$

10. Броят на всички различни трицифрени числа, които могат да се образуват от цифрите 2, 3 и 5, като във всяко трицифрено число цифрите са различни помежду си, е равен на:

- А) 2 Б) 3 В) 5 Г) 6 Д) 30

11. Модата на данните 11, 2, 8, 3, 10, 2, 7, 5, 2, 3 е равна на:

- А) 1 Б) 1,5 В) 2 Г) 3 Д) 11

12. В една кутия има 50 еднакви номерирани топки. От тях 10% са червени, 20% са зелени, а останалите топки са бели. По случаен начин от кутията се изважда една топка. Вероятността извадената топка да е бяла е:

- А) $\frac{3}{10}$ Б) $\frac{3}{5}$ В) $\frac{7}{10}$ Г) $\frac{4}{5}$ Д) $\frac{9}{10}$

13. Частното на геометрична прогресия с общ член $a_n = (-1)^n 3^{n+1}$ е равно на:

- А) -3 Б) $\frac{1}{3}$ В) 3 Г) 9 Д) -9

14. Стойността на производната на функцията $f(x) = x\sqrt{x} - x^3$ при $x=4$ е:

- А) -45 Б) -10 В) 5 Г) 10 Д) $13\sqrt{2}$

15. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = 3 - \sqrt{x-5}$ е равна на:

- А) -1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

16. Ако $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, то изразът $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha$ е равен на:

- А) $\frac{1}{12}$ Б) $\frac{4}{25}$ В) $\frac{18}{25}$ Г) $\frac{25}{12}$ Д) 3

17. Около една окръжност са описани квадрат и правилен шестоъгълник. Периметърът на шестоъгълника е равен на 48 cm. Страната на квадрата е:

- А) $2\sqrt{3}$ cm Б) 7 cm В) 8 cm Г) $8\sqrt{3}$ cm Д) $9\sqrt{5}$ cm

18. Правоъгълният трапец $ABCD$ ($AB \perp AD$) е описан около окръжност и $BC = 7$ cm. Ако средната отсечка на трапеца е 6 cm, то височината на трапеца има дължина:

- А) 5 cm Б) 6 cm В) 7 cm Г) $5\sqrt{2}$ cm Д) 10 cm

19. Ъглополовящата CL на $\sphericalangle BCA$ на $\triangle ABC$ разделя страната AB на отсечки $AL = 3$ и $BL = 5$. Тогава за периметъра P на $\triangle ABC$ е вярно, че:

- А) $P < 4$ Б) $4 < P < 10$ В) $10 < P < 16$
 Г) $16 < P < 40$ Д) $40 < P < 64$

20. Височината на прав кръгов конус е 18 cm, а лицето на триъгълник със страни диаметър на основата и две образуващи на конуса е 108 cm^2 . Обемът на конуса (в cm^3) е равен на:

- А) 600 Б) 648 В) 108π Г) 110 Д) 216π

Втора част

Следващите 10 задачи са без избираем отговор. За всеки получен и обоснован верен отговор получавате по 2 точки. За грешен отговор или за непълнен отговор точки не се дават и не се отнемат.

21. Да се намери множеството от стойности на функцията $f(x) = 2 + \frac{x}{x^2 + 2} \sqrt{1 + \frac{x^4 + 4}{4x^2}}$ при $x \in (-\infty; 0)$.

22. Да се реши неравенството $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} \leq 0$.

23. Да се намерят всички числа $\alpha \in [5\pi; 9\pi]$, за които $\cos 2\alpha + 5 = 6 \cos \alpha$.

24. За аритметичната прогресия с общ член a_n е известно, че $a_1 + a_5 = 10$ и $a_3 a_8 = 100$. Да се намери a_{10} .

25. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ в затворения интервал $[-1; 1]$.

26. В една ваза има 8 червени и 2 бели рози. Да се намери броят на различните начини, по които от тях може да се състави букет от три рози, в който поне една роза да е бяла.

27. Даден е квадратът $ABCD$. Точката M е среда на страната CD , а точката N лежи на страната BC и $BN : NC = 1 : 2$. Да се намери големината в градуси на $\sphericalangle MAN$.

28. Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност се допира до хипотенузата му в точка, която я разделя на отсечки с дължини 5 cm и 12 cm. Да се намери периметърът на този правоъгълен триъгълник.

29. Сфера е вписана в прав кръгов цилиндър така, че сферата се допира до двете основи на цилиндъра и всяка образуваща на цилиндъра е допирателна към сферата. Да се намери отношението на лицето на сферата към лицето на пълната повърхнина на цилиндъра.

30. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за всяка от които уравнението $\frac{ax}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$ има единствено решение.

ТЕМА 4: ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ — СОФИЯ

ДОЦ. РУСИ РУСЕВ

Първа част

Всяка от следващите 20 задачи има точно един верен отговор. За всеки верен отговор получавате 2 точки. За грешен или непълнен отговор, както и за посочени повече от един отговор на една задача, точки не се дават и не се отнемат.

1. Изразът $(\sqrt{19} - 2\sqrt{5})^{-1}$ е равен на:

- А) $\sqrt{19} + 3\sqrt{2}$ Б) $\frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{1}{3\sqrt{5}}$ В) $-\sqrt{19} - 2\sqrt{5}$
Г) $3\sqrt{2} - \sqrt{17}$ Д) 1

2. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 5x + 3 = 0$, изразът $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$ е равен на:

- А) $\frac{5}{26}$ Б) $-\frac{4}{25}$ В) $\frac{3}{25}$ Г) $\frac{25}{4}$ Д) $-\frac{25}{4}$

3. Броят на реалните корени на уравнението $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ е:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

4. Решенията на уравнението $\sqrt[6]{-x} = 2$ са:

- А) $x = 64$ Б) $x = 81$ В) $x = -64$
Г) $x = -27$ Д) $x_{1,2} = \pm 36$

5. Корените на уравнението $\sqrt{5-x} = x-5$ са:

- А) 5 Б) 5 и 2 В) 6 и 5 Г) 7 Д) 1

6. Ако $a_{n-1} = \frac{3n+1}{4n-7}$, то a_7 е:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) 1 В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{3}{2}$ Д) 2

7. Решенията на неравенството $2x^2 + x - 1 < 0$ са:

- А) $x \in (-\infty; 1)$ Б) $x \in (-0,5; \infty)$ В) $x \in (-\infty; 0,5)$
Г) $x \in (-1, 0,5)$ Д) $(1, \infty)$

8. Ако x_1 е корен на уравнението $3^{x+2} = \sqrt[4]{27}$, то числото $4x_1 + 5$ е равно на:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 5

9. Редицата $\{a_n\}$ е аритметична прогресия с разлика $d = 12$. Стойността на израза $a_3 - a_4 - a_5 + a_7$ е:

- А) 13 Б) 12 В) 11 Г) 10 Д) 9

10. Стойността на израза $\frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha}$ е:

- А) 4 Б) 8 В) 2 Г) $\frac{1}{4}$ Д) 1

11. Решенията на неравенството $(x^2 - 2x + 3) \log_{\frac{1}{2}} x > 0$ са:

- А) $x \in (0, \infty)$ Б) $x \in (1, \infty)$ В) $x \in (-\infty, 1)$
Г) $x \in (0, 1)$ Д) $x \in (-1, \infty)$

12. Решенията на неравенството $5^{x^2-3x+2} < 1$ са:

- А) $x \in (1, 2)$ Б) $x \in (-1, 0)$ В) $x \in (1, 3)$
Г) $x \in (-2, -1)$ Д) $x \in (-1, 2)$

13. Диагоналът AC на равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$. Ако $DC = 6$ и височината е $3\sqrt{3}$, то дължината на голямата основа AB на трапеца е:

- А) 8 Б) 10 В) 12 Г) 14 Д) 16

14. Границата $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$ е:

- А) 6 Б) 10 В) 12 Г) 11 Д) 16

15. В триъгълника ABC имаме $\sphericalangle BAC = 20^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 40^\circ$. Ако радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $\sqrt{48}$ cm, то дължината на страната AB е:

- А) 12 cm Б) 11 cm В) 13 cm Г) 15 cm Д) 13 cm

16. Даден е триъгълник със страни 11 cm, 24 cm и 31 cm. Най-големият ъгъл в този триъгълник има големина:

- А) 45° Б) 60° В) 90° Г) 120° Д) 135°

17. Дължината на страната на ромб е 4 cm, а сборът от дължините на диагоналите му е 12 cm. Лицето на ромба е:

- А) 16 cm^2 Б) 17 cm^2 В) 18 cm^2 Г) 19 cm^2 Д) 20 cm^2

18. Корените на уравнението $x^2 - 10x + 5 = 0$ са дължини на страните на правоъгълник. Лицето на правоъгълника е:

- А) $\sqrt{13}$ Б) $\sqrt{11}$ В) 3 Г) 4 Д) 5

19. Образуващата на прав кръгов конус образува с равнината на основата ъгъл 60° , а височината му е 6 cm. Обемът на конуса е:

- А) $20\pi \text{ cm}^3$ Б) $22\pi \text{ cm}^3$ В) $24\pi \text{ cm}^3$ Г) $26\pi \text{ cm}^3$ Д) $28\pi \text{ cm}^3$

20. В правоъгълния трапец $ABCD$ голямата основа AB е с дължина 12 cm и $\angle DAB = 90^\circ$. Разстоянието от пресечната точка на диагоналите до бедрото AD е 4 cm. Дължината на малката основа CD е:

- А) 5 cm Б) 7 cm В) 7,5 cm Г) 8 cm Д) 6 cm

Втора част

Следващите 5 задачи са без избираем отговор. В таблицата за отговори в празното поле на съответната задача запишете само получения от вас отговор. За всеки верен отговор получавате по 3 точки. За грешен или непълнен отговор, както и за посочени повече от един отговор, точки не се дават и не се отнемат.

21. Да се намери дефиниционната област на функцията

$$f(x) = \log_x(x^2 - 4x + 3).$$

22. Да се намери стойността на параметъра k , за която НЯМА решение

$$\left| \begin{array}{l} kx + 3y = 3 \\ 2x + y = 4. \end{array} \right.$$

23. Периметърът на правоъгълния триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) е $3 + \sqrt{3}$ cm, а единият от острите му ъгли е 60° . Да се намери радиусът на вписаната в триъгълника окръжност.

24. Правоъгълният триъгълник ABC е с катети $AC = 4$ cm и $BC = 3$ cm. Ъглополовящата на правия ъгъл пресича хипотенузата AB в точката L . Да се намери дължината на отсечката CL .

25. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с височина 2 cm. Котангенсът на ъгъла между околен ръб и основата на пирамидата е равен на $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Да се намери обемът на пирамидата.

Трета част

Представете решенията на следващите три задачи с необходимите обосновки в писмен вид. Пълното решение на всяка задача се оценява с 15 точки.

26. Да се намерят стойностите на параметъра $a \neq 2$, за които уравнението $3 \cos 3x = \frac{a+5}{a-2}$ НЯМА решение.

27. Да се реши системата $\begin{cases} |1+x+y|=1 \\ 7x+y^2=0. \end{cases}$

28. Даден е триъгълникът ABC със страни $AC = b$ и $BC = a$, в който $\sphericalangle ACB$ е два пъти по-голям от $\sphericalangle ABC$. Да се намери дължината на страната AB .

ТЕМА 5: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ, ФИЛИАЛ — СМОЛЯН

ПЕНКА ГУНЧЕВА

Част I.

Отбележете със знака $\times$ единствения верен отговор на задачи 1.-10.

1. По-голямо от числото 1 е числото:

- А) $\frac{2}{\sqrt{8}}$ Б) 99^0 В) $(0,5)^{0,5}$ Г) $\frac{1}{(0,81)^{0,5}}$

2. Дадено е уравнението $2x^2 - x + 3a = 0$ с корени x_1 и x_2 , където a е параметър. Ако $\frac{1}{x_1 + x_2} + x_1x_2 = 5$, то a е равно на:

- А) $\frac{14}{3}$ Б) 2 В) $\frac{1}{3}$ Г) -2

3. Общият корен на уравненията $(x+3)^2 - 1 = 0$ и $|-x^2 + 2|x| - 1| = 1$ е числото:

- А) 2 Б) 0 В) -2 Г) друг отговор

4. Допустимите стойности на x в израза $\log_{x+1}(x^2 - 5x + 4)$ са:

- А) $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ Б) $x \in (-1, 0) \cup (0; 1] \cup [4, \infty)$
В) $x \in (-1, 1) \cup (4, \infty)$ Г) $x \in (-1, 0) \cup (0; 1) \cup (4, \infty)$

5. Числата $a+3$, a и 4 са последователни членове на намаляваща геометрична прогресия. Стойността на a е:

- А) -2 Б) 7 В) 6 Г) друг отговор

6. Ако $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на α е:

- А) $\frac{\pi}{8}$ Б) $-\frac{\pi}{4}$ В) $\frac{\pi}{4}$ Г) $\frac{\pi}{12}$

7. Катетите на правоъгълен триъгълник са 4 и $6\sqrt{5}$. Проекцията на по-малкия катет върху хипотенузата е равна на:

- А) $\frac{7}{8}$ Б) $\frac{8}{7}$ В) 2 Г) $\frac{90}{7}$

8. Малката основа на вписан в окръжност трапец е равна на радиуса ѝ R . Ако бедро на трапеца се вижда от центъра на описаната окръжност под прав ъгъл, то голямата му основа и вътрешният ъгъл при нея са равни съответно на:

- А) $R\sqrt{2}$; 45° Б) $R\sqrt{3}$; 75° В) $R\sqrt{3}$; 80° Г) $2R$; 60°

9. В правоъгълника $ABCD$ със страни $AB = 10$ и $BC = 4$ са прекарани ъглополовящите на $\angle BAD$ и $\angle BCD$. Разстоянието между тези ъглополовящи е:

- А) $5\sqrt{2}$ Б) 6 В) $3\sqrt{2}$ Г) $4\sqrt{2}$

10. В правилна четириъгълна призма с височина 30 cm и пълна повърхнина 512 cm^2 е вписан прав кръгов цилиндър. Радиусът на основата на цилиндъра е:

- А) $2\sqrt{2} \text{ cm}$ Б) 15 cm В) 2 cm Г) 4 cm

Част II.

Разпишете подробно и обосновано решенията на задачи 11 – 15.

11. а) Да се реши уравнението $\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 x^2 - 8}$.

б) Да се намери най-малкото цяло положително число, което е решение на неравенството $\sqrt{\frac{1}{2^x - 4} - \frac{1}{2^x - 1}} > -2$.

12. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $2^{2x+1} - (a+8)2^x + a^2 + 4 = 0$ има два корена, единият от които е положителен, а другият – отрицателен.

13. В успоредника $ABCD$ с остър ъгъл при върха A е построена височината DH към страната AB , като $AH = 4$ и $BH = 6$. Ако периметърът на $\triangle AHD$ е два пъти по-малък от периметъра на четириъгълника $HBCD$, да се намери дължината на AD .

14. Върху диагонала BD на ромба $ABCD$ със страна $AB = 1$ и остър ъгъл при върха A са взети две точки M и N такива, че $AM = AN$ и $\angle MAN = \frac{1}{2} \angle BAD$. Да се намери дължината на BD , ако периметърът на четириъгълника $AMCN$ е равен на $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

15. В правилна четириъгълна пирамида е вписано кълбо. Диагоналът на основата на пирамидата е $2\sqrt{6}$, а ъгълът между два съседни околни ръба е 60° . Намерете радиуса на кълбото.

СЕДМИ ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

ЕМИЛ КОЛЕВ, ПЕТЪР БОЙВАЛЕНКОВ

На 8-10.11.2013 г. в София и Варна се проведе седмото издание на Есенния Математически Турнир (ЕМТ). Турнирът беше организиран със съдействието на Американска Фондация за България (АФБ), Фондация Георги Чиликов и секция БАН-СУ на СМБ. Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Балканиадата по математика, а резултатите от третите и четвъртите задачи са важни и за разширения отбор за Международната олимпиада.

ЕМТ се проведе в 125 СОУ „Проф. Боян Пенев“, София, и в него взеха участие 491 ученика от 17 града от страната и Румъния. АФБ и Фондация Георги Чиликов финансираха работата на организационния комитет и на журито, както и част от таксите за правоучастие. Резултатите на всички участници са на сайта на турнира <https://sites.google.com/site/esenenmt/>, както и на няколко други сайта.

Състезанието беше закрито на 11.11.2012 г. в Института по математика и информатика на БАН (ИМИ). Директорът на ИМИ чл.-кор. Юлиан Ревалски и програмният директор на АФБ Алексей Христов връчиха грамоти, купи, медали и математическа литература на победителите. Ето и имената на наградените:

Осми клас: Георги Димитров (СМГ) – първа награда, Васил Йорданов (СМГ), Иван Иванов (АК), Ирина Софронова (СМГ), Кирил Бангачев (СМГ), Петър Христов (СМГ) и Симона Кукова (МГ Варна) – втора награда и Калоян Алексиев (СМГ) – трета награда; отборно СМГ, МГ Варна, ПМГ Бургас и други.

Девети клас: Виолета Найденова (СМГ) и Димитър Ружев (СМГ) – първа награда, Константин Шейретов (СМГ) и Христо Папазов (АК) – втора награда и Теодор Алексиев (СМГ) – трета награда; отборно СМГ, МГ Варна, ПМГ Бургас и други.

Десети клас: Деница Маркова (СМГ) – първа награда, Божидар Ганев (СМГ) – втора награда и Александър Чергански (СМГ), Димитър Даскалов (СМГ), Мирослав Маринов (ОМГ Пловдив), Нго Нгок Къонг (СМГ), Станислав Димитров (СМГ) и Цветан Йотов (МГ Варна) – трета награда; отборно СМГ, НПМГ, МГ Варна и други.

Единадесети клас: Венислав Венков (СМГ), Грегориан Пириндев (СМГ), Любен Личев (МГ Плевен), Магдалена Георгиева (ПМГ Бургас) и Цветомир Михайлов (СМГ) – първа награда, Петър Гайдаров (ОМГ Пловдив) – втора награда и Емилиян Рогачев (СМГ) – трета награда; отборно – СМГ, ПМГ Бургас, НПМГ и други.

Дванадесети клас: Виктор Радивчев (МГ Варна), Йордан Йорданов (МГ Варна), Марк Андонов (МГ Варна) и Нгуен Чи Зунг (СМГ) – първа награда, Павлена Ненова (СМГ) – втора награда и Станислав Чобанов (МГ Варна) – трета награда; отборно – МГ Варна, СМГ, ПМГ Благоевград и други.

Подреждането в комплексното отборно класиране е: СМГ, МГ Варна, ПМГ Бургас и други.

Условия на задачите

8.1. Да се докаже, че ако a, b, c, d са положителни числа, такива че

$$\frac{abc}{a+b+c} = \frac{abd}{a+b+d} = \frac{acd}{a+c+d} = \frac{bcd}{b+c+d},$$

то $a = b = c = d$.

8.2. Отсечката BH е височина за равнобедрения $\triangle ABC$, $AC = BC$. Симетралата на страната BC пресича правата AC в точка D и $DH = HA + AB$. Намерете възможните стойности на $\sphericalangle BAC$.

8.3. Да се намерят всички естествени числа n , такива че

$$11^n + 2^n + 1 \text{ е делител на } 11^{n+1} + 2^{n+1} + 1.$$

8.4. В редица са записани числата от 1 до 9, така че сборът на всяко число на нечетна позиция със съседите (съседа) му е S . Определете всички възможни стойности на S .

9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравненията $x^2 + ax - 1 = 0$ и $y^2 + (a+1)y - 1 = 0$ имат съответно корени x_1, x_2 и y_1, y_2 , за които е изпълнено равенството

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 + y_2}.$$

9.2. Да се намери най-малкото естествено число k , за което съществува естествено число $n \geq 100$ такова, че числото $n(n+k)$ е точен квадрат.

9.3. Петър покрил една шахматна дъска с размери 600×600 с правоъгълници с размери 2×3 по такъв начин, че всяко квадратче от дъската да бъде покрито от точно един правоъгълник. След това той разрязал всеки от тези правоъгълници на три по-малки правоъгълника с размери 1×1 , 1×2 и 1×3 по произволен начин и показал полученото покритие на Николай.

Винаги ли ще може Николай по показаното му покритие с по-малки правоъгълници да определи еднозначно какво е било първоначалното покритие с правоъгълници 2×3 ?

9.4. Точката P лежи върху описаната около квадрата $ABCD$ окръжност. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 са симетричните точки на P относно правите AB, BC, CD и DA съответно. Да се докаже, че симетричните точки на P относно правите P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права, която минава през центъра на $ABCD$.

10.1. Да се реши уравнението $x^2 + 3\sqrt{x+3} = 7$.

10.2. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C . Нека M е средата на BC , а D и E са петите на перпендикулярите от върха C към AB и AM съответно. Ако $BE = 2DE$, то да се намери $\sphericalangle ABC$.

10.3. Да се намерят всички естествени числа n , за които

$$\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n,$$

където $\varphi(n)$ е броят на естествените числа, ненадминаващи n и взаимно прости с n .

10.4. Всеки от участващите ученици в едно математическо състезание има не повече от $d \geq 1$ познати. Нека d_1 и d_2 са неотрицателни цели числа, за които $d - 1 = d_1 + d_2$. Да се докаже, че учениците могат да бъдат разделени в две стаи по такъв начин, че всеки ученик в първата стая има не повече от d_1 познати в неговата стая и всеки ученик във втората стая има не повече от d_2 познати в неговата стая.

11.1. Да се намерят всички естествени числа d , за които съществува безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots$ от естествени числа с разлика d със следното свойство: съществува естествено число k , за което за всяко n числата $a_{S_{n+1}}, (n+k)a_k, -a_{S_n}$ образуват (в този ред) аритметична прогресия. (S_n е сборът от първите n члена на прогресията, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.)

11.2. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с перпендикулярни диагонали и пресечна точка на диагоналите точка O . Върху основата AB е избрана точка M . Описаните окръжности около $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ пресичат отсечките AD и BC съответно в точки P и Q . Да се докаже, че центърът на описаната окръжност около $\triangle MPQ$ лежи на средната отсечка на трапеца.

11.3. Да се докаже, че за всяко съставно естествено число $n \geq 6$ съществува множество A от n различни естествени числа, притежаващо следното свойство:

За всеки делител d на n , елементите на A могат да се разделят по два различни начина на $\frac{n}{d}$ непресичащи се подмножества всяко с по d елемента така, че сборът на елементите на кое да е множество от едното разделяне да е равен на сбора на елементите на някое множество от другото разделяне.

11.4. Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват полиноми с цели коефициенти $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ (не непременно различни) такива, че $x^{2013} + n$ дели $g(x)$ и $\prod_{i=1}^n (f_i(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1$.

12.1. Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от положителни числа, за които $a_2 = 3a_1 - 1$, $a_3 = 2a_2 - 1$, $a_4 = 3a_3 - 1$, $a_5 = 2a_4 - 1$ и т.н. Да се намери най-малката възможна стойност на a_1 .

12.2. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, за която

$$|f(x)| - |f(x) + x - 1| = |x + 1| - 2|x|$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че множеството $A = \{(x, y) : 0 < y < f(x), x \in \mathbb{R}\}$ съдържа вътрешността на триъгълник с лице 1.

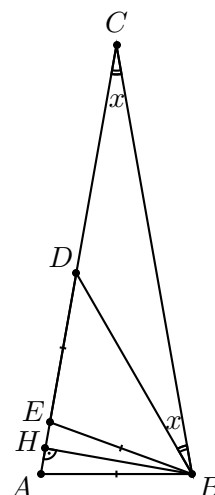
12.3. Нека M е средата на ъглополовящата AL в $\triangle ABC$ ($L \in BC$). Описаната окръжност около $\triangle CLM$ пресича отсечката BM в точка K . Да се докаже, че ако $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle AKC$, то $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

12.4. Дадени са взаимно прости естествени числа $a < b$. Да се намери броят на начините, по които можем да оцветим числата $1, 2, 3, \dots, 2013ab$ в два цвята така, че за всяко $t = 1, 2, \dots, 2013a$ числата t и bt са разноцветни и числата at и bt също са разноцветни.

Отговори и кратки решения на задачите

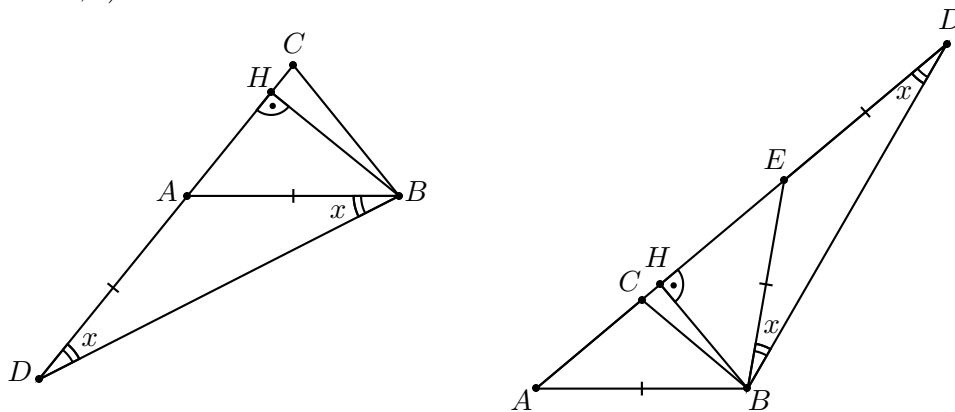
8.1. Упътване – разширете дадените дроби така, че числителите им да станат еднакви.

8.2. Случай 1. Ако D лежи на отсечката AC , то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC . От условието следва, че H е между A и D . Да построим точка E на отсечката DH , за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$. От симетралата имаме $BD = CD$; нека $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DBC = x$. Тогава $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BDE = 2x$ като външен за $\triangle BCD$ и $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BEH = 4x$ като външен за $\triangle BDE$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$, $\sphericalangle BAC = 4x = 80^\circ$.



Случай 2. Ако D лежи на лъча $CA \rightarrow$ след A , то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC . От условието следва, че $AD = AB$; нека $\angle ADB = \angle ABD = x$. Тогава $\angle ABC = \angle BAC = 2x$ като външен за $\triangle ABD$ и $\angle DCB = \angle DBC = 3x$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $2x + 2x + 3x = 180^\circ$, $x = (180/7)^\circ$, $\angle BAC = 2x = (360/7)^\circ$.

Случай 3. Ако D лежи на лъча $AC \rightarrow$ след C , то $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и H лежи на същия лъч. От условието следва, че H е между A и D . Да построим точка E на отсечката DH , за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$; нека $\angle BDE = \angle DBE = x$. Тогава $\angle ABC = \angle BAC = \angle BEA = 2x$ като външен за $\triangle BDE$ и $\angle CBD = \angle BCD = 4x$ като външен за $\triangle ABC$ (имаме $BD = CD$ от симетралата). За сбора на ъглите в $\triangle BCD$ получаваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$, $\angle BAC = 2x = 40^\circ$.



8.3. Нека n е от желания вид. Числото $a = 11^n + 2^n + 1$ е делител на числото $11a - (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1) = 9 \cdot 2^n + 10$. При $n = 1$ получаваме $a = 14$, което е делител на $11^2 + 2^2 + 1 = 126$. При $n > 1$ е в сила неравенството $9 \cdot 2^n + 10 < 11^n + 2^n + 1$. Действително, последното е еквивалентно на $8 \cdot 2^n + 9 < 11^n$ и имаме

$$11^n = (8 + 3)11^{n-1} = 8 \cdot 11^{n-1} + 3 \cdot 11^{n-1} > 8 \cdot 8^{n-1} + 3 \cdot 11 > 8 \cdot 2^n + 9.$$

Следователно единствената стойност на n е $n = 1$.

8.4. Ако числата са записани в реда $a, b, c, \dots, h, i$, то $5S = 45 + b + d + f + h$. Понеже $10 \leq b + d + f + h \leq 30$, получаваме, че S е сред числата 11, 12, 13, 14, 15. От друга страна, $3S = a + b + d + e + f + h + i = 45 - (c + g)$, което изключва $S = 15$.

Лесно се вижда, че имаме реализации за $S = 11, 13$ и 14 : $S = 11$ е възможно при наредбата 925461738, $S = 13$ при 941832567 и $S = 14$ при 592347168.

Ако допуснем, че $S = 12$, то $c + g = 9$. Тъй като редицата от числа $a, b, c, \dots, h, i$ записана в обратен ред също притежава свойството от условието, то без ограничение на общността $c < g$.

Ако $c = 1$, $g = 8$, то $f + h = 4$: абсурд. Ако $c = 2$, $g = 7$, то $f + h = 5$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 4\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$: абсурд. Ако $f = 1$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 10$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки.

Ако $c = 3$, $g = 6$, то $f + h = 6$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 5\}$ или $\{2; 4\}$. Ако $h \leq 2$, то $i \geq 10$: абсурд. Ако $f = 1$, $h = 5$, то $i = 7$, $b + d = 9$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки. Ако $f = 2$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 9$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки.

Ако $c = 4$, $g = 5$, то $f + h = 7$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 6\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$: абсурд. Ако $h = 6$, то $i = 6$: абсурд.

Окончателно, търсените стойности са $S = 11$, $S = 13$ или $S = 14$.

9.1. Отговор: $a_1 = 1$ и $a_2 = -2$.

9.2. Първи начин. От $100(100 + 21) = 110^2$ следва, че $k \leq 21$. Да допуснем, че $k \leq 20$ и да положим $d = (n, k)$, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, където $(n_1, k_1) = 1$. Да отбележим, че $n_1(n_1 + k_1)d^2 = n(n + k)$, което означава, че $n_1(n_1 + k_1)$ е точен квадрат. Тъй като $(n_1, n_1 + k_1) = 1$, заключаваме, че числата n_1 и $n_1 + k_1$ са точни квадрати.

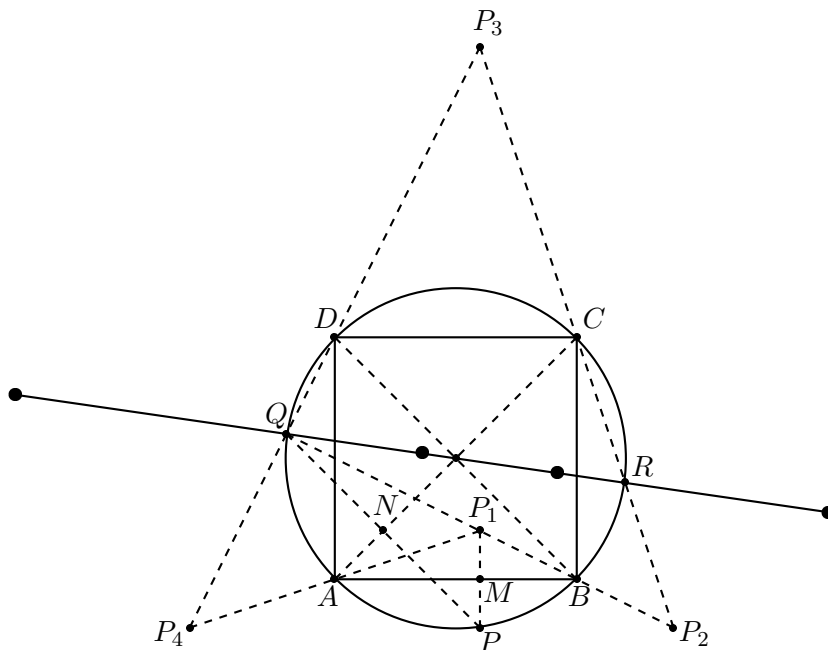
От $k \leq 20$ следва, че $d \leq 20$ и оттук $n_1 = \frac{n}{d} \geq \frac{100}{20} = 5$. Тъй като n_1 е точен квадрат, имаме всъщност $n_1 \geq 9$. Тъй като k_1 е разликата от n_1 поне до следващия точен квадрат, имаме $k_1 \geq 7$. Сега от $k = k_1 d \leq 20$ следва, че $d \leq 2$ и по същия начин, както по-горе, последователно получаваме $n_1 \geq 50$, т.е. $n_1 \geq 64$, откъдето $k_1 \geq 17$, $d = 1$, $n_1 \geq 100$ и накрая $k_1 \geq 21$, което е противоречие, защото $k_1 \leq k \leq 20$.

Втори начин. От $100(100 + 21) = 110^2$ следва, че $k \leq 21$. Ако допуснем, че $k \leq 20$, $n \geq 100$ и $n(n + k) = t^2$, то от квадратното уравнение $n^2 + kn - t^2 = 0$ следва, че неговата дискриминанта $k^2 + 4t^2$ е точен квадрат. Но от друга страна, $k^2 \leq 400 \leq 4n < 4t$ и следователно $(2t)^2 < k^2 + 4t^2 < (2t + 1)^2$, което е противоречие.

9.3. Да, винаги! Да допуснем, че съществуват две покрития A и B с правоъгълници 2×3 , които водят (при подходящи разрязвания) до едно и също покритие с по-малки правоъгълници. Тогава непременно има правоъгълник P_1 с размери 1×3 такъв, че правоъгълникът Q_1 с размери 2×3 , от който P_1 е част в A , е разположен по различен начин от правоъгълника R_1 с размери 2×3 , от който P_1 е част в B . Без загуба на общност, нека P_1 се съдържа в i -тия ред на дъската, Q_1 се съдържа в i -тия и $i - 1$ -вия, и R_1 се съдържа в i -тия и $i + 1$ -вия ред.

Аналогично, нека P_3 бъде правоъгълникът 1×3 , получен от Q_2 в A , и нека R_2 бъде правоъгълникът 2×3 , от който P_3 е част в A . Тогава P_3 се съдържа в $i + 2$ -вия ред на дъската и Q_2 се съдържа в $i + 2$ -рия и $i + 3$ -тия ред.

И така, измежду всички покрития с правоъгълници 2×3 има само едно – първоначалното – от което с разрязване може да се получи покритието с по-малки правоъгълници, наблюдавано от Николай. На него му остава само да провери всички възможни покрития и всички възможни разрязвания на всяко от тях едно по едно, докато намери исканото.



$= \angle MAP$ (понеже четириъгълникът $PMNA$ е вписан в окръжност с диаметър PA) $= \angle BAP = \frac{1}{2} \widehat{PB}$.

Аналогично се установява и $\angle P_2QP = \frac{1}{2} \widehat{PB}$, откъдето следва, че точките P_1 , P_2 и Q лежат на една права. На тази права лежи и точката B , понеже P_1 и P_2 са симетрични относно B .

От $\angle RQP = 2 \angle BQP = 2 \angle P_1QP$ следва, че точката, симетрична на P относно правата P_1P_2 , лежи на QR . Аналогично, на QR лежат и точките, симетрични на P относно P_2P_3 , P_3P_4 и P_4P_1 . Понеже QR е диаметър в описаната окръжност на $ABCD$ и съдържа неговия център, то с това задачата е решена.

10.1. Отговор: $x = 1$ и $x = -2$.

10.2. Нека $\angle ABC = \beta$. Тъй като точките A , D , E и C лежат на окръжност с диаметър AC , то

$$\angle AED = \angle ACD = \angle ABC = \beta$$

и следователно четириъгълникът $DBME$ е вписан в окръжност. Освен това, DM е медиана в правоъгълния $\triangle BDC$ и следователно

$$\angle BEM = \angle BDM = \angle DBM = \beta.$$

Така получаваме, че $\angle DEC = \angle CEB = 90^\circ + \beta$.

От друга страна, $\angle CDE = \angle CAE = \angle BCE$ и следователно $\triangle CDE \sim \triangle BCE$. Тогава

$$2 = \frac{BE}{DE} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{DE} = \left(\frac{BC}{CD} \right)^2,$$

т.е. $BC = \sqrt{2}CD$ и $\beta = 45^\circ$.

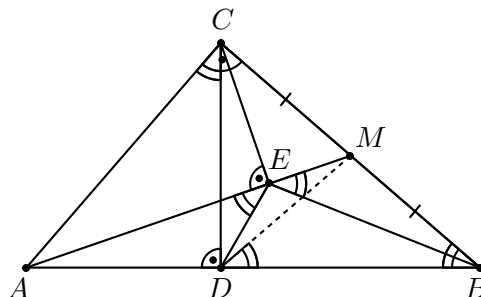
10.3. Известно е, че функцията $\varphi(n)$ има следния явен вид:

$$\varphi(1) = 1 \text{ и } \varphi(n) = p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \cdots p_k^{s_k-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) \text{ за } n > 1,$$

където $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ е каноничното разлагане на n на прости множители. В частност, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(n)$ е четно число при $n > 2$. Освен това, $\varphi(2n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{ако } n \text{ е четно;} \\ \varphi(n), & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$

Нека естественото число n е решение. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. Ако n е нечетно число, то $\varphi(n) = 1$ или $\varphi(n) = 2$ и след заместване в условието достигахме до единствено решение $n = 3$.



Случай 2. Нека n е четно число. Тогава $n = 2^s m$, където $s, m \in \mathbb{N}$ и m е нечетно число. След заместване в условието получаваме

$$\varphi(\varphi(2^s m)) + \varphi(2^s m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(2^{s-1} \varphi(m)) + 2^{s-1} \varphi(m) = 2^s m.$$

Ако $m = 1$, то последното равенство добива вида $\varphi(2^{s-1}) = 2^{s-1}$ и единствената възможност е $s = 1$, която ни води до второто решение $n = 2$. Ако $m > 1$, то $\varphi(m)$ е четно число и достигахме до равенството

$$2^{s-1}\varphi(\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) = 2m.$$

Но $\varphi(n) < n$ за всяко $n > 1$, т.е. $\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) < 2m$, което е противоречие.

Окончателно, $n = 2$ и $n = 3$ са единствените решения на задачата.

10.4. Разбиваме учениците на две групи V_1 и V_2 и означваме с e_i броя на двойките познати във V_i , $i = 1, 2$. Измежду всички възможни разбивания на учениците по стаи, които са краен брой, да разгледаме такова разбиване (то може и да не е единствено), при което числото $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$ е минимално.

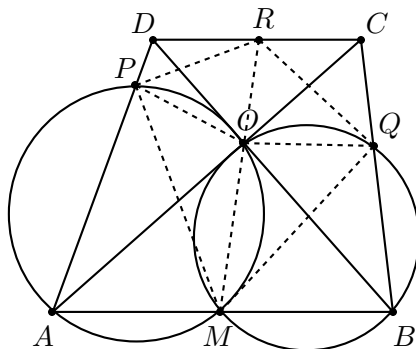
Ще докажем, че това разбиване изпълнява условието на задачата. Да допуснем противното и нека в поне една от групите, да речем V_1 , има ученик x , който има $d'_x \geq d_1 + 1$ познати в групата. Означаваме с d''_x броя на познатите на x във V_2 . При преместването на x във V_2 броят на познанствата във V_1 и V_2 става съответно $e'_1 = e_1 - d'_x \leq e_1 - d_1 - 1$ и $e'_2 = e_2 + d''_x \leq e_2 + d - d'_x \leq e_2 + (d_1 + d_2 + 1) - (d_1 + 1) = e_2 + d_2$. Оттук

$$e'_1(d_2 + 1) + e'_2(d_1 + 1) - e_1(d_2 + 1) - e_2(d_1 + 1) = -d_1 - 1 < 0,$$

което е противоречие с минималността на $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$. С това и доказателството е завършено.

11.1. Отговор: всички нечетни естествени числа.

11.2. Нека правата MO пресича отсечката CD в точка R .



От вписаните четириъгълници $AMOP$ и $MBQO$ имаме $\sphericalangle BMO = \sphericalangle APO$ и $\sphericalangle BMO = \sphericalangle CQO$. От $AB \parallel CD$ намираме $\sphericalangle BMO = \sphericalangle DRO$, откъдето получаваме

$$\sphericalangle BMO = \sphericalangle CQO = \sphericalangle APO = \sphericalangle DRO.$$

Следователно четириъгълниците $PORD$ и $OQCR$ са вписани. Имаме

$$\sphericalangle MQR = \sphericalangle MQO + \sphericalangle OQR = \sphericalangle MBO + \sphericalangle OCR = \sphericalangle MBO + \sphericalangle OAM = 90^\circ$$

и аналогично $\sphericalangle MPR = 90^\circ$.

Това означава, че четириъгълникът $MQRP$ е вписан и центърът на описаната окръжност е средата на отсечката MR . Оттук следва и твърдението на задачата.

11.3. Елементите на множеството $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ могат да се разделят по два начина (понеже $1 + 5 = 2 + 4$, $3 + 4 = 1 + 6$ и $6 + 2 = 3 + 5$) така че да е изпълнено свойството от условието. Следователно при $d = 2$ за получаване на множеството A към елементите на B прибавяме произволни $n - 6$ различни естествени числа, по-големи от 6. В двете разделяния тези $n - 6$ елемента групираме по един и същи начин на двуелементни подмножества.

Ще покажем, че ако в A имаме четири елемента a, b, c, d , за които $a + b = c + d$, то при всяко $d \geq 3$ търсените разделяния съществуват. Наистина нека първите две множества от първото разделяне да съдържат съответно $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ и още по $d - 2$ произволни елемента. Останалите елементи групираме по произволен начин в останалите множества. При второто разделяне сменяме местата на $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ в първите две множества, а останалите запазваме. Лесно се вижда, че условието е изпълнено.

Следователно е достатъчно да изберем множество A от различни естествени числа, което съдържа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

11.4. Отговор: всички нечетни естествени числа. Понеже $x^{2013} \equiv x \pmod{3}$, то съществува x_0 , за което $3 \mid x_0^{2013} + n$. Полагайки $x = x_0$ в даденото равенство, получаваме че по модул 3 то е възможно само при $3 \mid f_i(x_0)$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава $(-1)^n \equiv -1 \pmod{3}$, което означава, че n е нечетно число.

Да дефинираме редицата $g_1(x), g_2(x), \dots$ като $g_1(x) = x^{2013} + n$ и $g_{i+1}(x) = 4g_i(x)^3 - 3g_i(x)$ при $i \geq 1$. Ясно е, че $x^{2013} + n$ дели всеки от полиномите в дадената редица, като освен това

$$g_{i+1}(x)^2 - 1 = (4g_i(x)^2 - 1)^2(g_i(x)^2 - 1).$$

Следователно

$$g_t(x)^2 - 1 = (4g_{t-1}(x)^2 - 1)^2 \dots (4g_1(x)^2 - 1)^2(g_1(x)^2 - 1) = \prod_{i=1}^{2t-1} (f_i(x)^2 - 1),$$

където $f_1(x) = g_1(x)^2 - 1$ и $f_{2i}(x) = f_{2i+1}(x) = 4g_i(x)^2 - 1$ за $i = 1, 2, \dots, t-1$.

12.1. Отговор: $a_1 \geq 3/5$.

12.2. Нека $x \leq -1$ и $f(x) > 0$. Ако $f(x) + x - 1 \geq 0$, то от даденото равенство следва, че $x = 1$, противоречие. Ако $f(x) + x - 1 < 0$, то от даденото равенство следва, че $f(x) = 0$, което също е противоречие. Следователно $f(x) \leq 0$. Обратно, ако $x \leq -1$ и $f(x) \leq 0$ даденото равенство е изпълнено. Аналогично се проверява, че при $-1 < x < 0$ даденото равенство е изпълнено само ако $f(x) > 0$ и $f(x) + x - 1 \leq 0$. В този случай намираме, че $f(x) = x + 1$. Същите разсъждения показват, че при $0 \leq x < 1$ даденото равенство е еквивалентно на $f(x) \geq 1 - x$, а при $x \geq 1$ то е еквивалентно на $f(x) \geq 0$. Следователно множеството A съдържа вътрешността на триъгълника с върхове $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, който има лице 1.

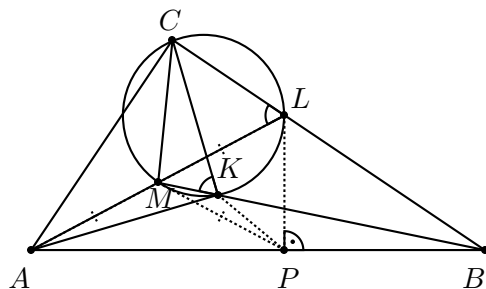
12.3. Нека P е петата на перпендикуляра от L към AB . Тогава PM се явява медиана в правоъгълен триъгълник и получаваме

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle PAM = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle AKM.$$

Следователно $APKM$ е вписан четириъгълник, откъдето

$$BP.BA = BK.BM = BL.BC,$$

т.е. $APLC$ също е вписан четириъгълник и $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle APL = 90^\circ$.



12.4. Да разгледаме граф с върхове $1, 2, \dots, 2013ab$ и за всяко $t = 1, \dots, 2013a$ да свържем с ребро върховете t и bt и върховете at и bt . Ще докажем, че всички цикли в този граф са с четна дължина. Да разгледаме произволен цикъл и нека $a^m b^n t$ е най-малкият елемент в него. Тогава най-големият елемент ще има вида $a^p b^q t$. Всеки път между $a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ ще се състои от няколко ребра, съответстващи на умножение с b и на няколко ребра, съответстващи на умножение с $\frac{b}{a}$. Това означава, че степента на b за всяко ново число се увеличава с 1 и следователно дължината на всеки път между

$a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ е $q - n$. Оттук следва, че всеки цикъл е с дължина $2(q - n)$, т.е. е четно число.

Тъй като всеки граф, в който всички цикли са с четна дължина е дву-делен, то върховете му могат да се оцветят в два цвята така, че свързани с ребро върхове да са разноцветни. Следователно, ако броят на свързаните компоненти в разглеждания граф е A , то различните оцветявания са 2^A . Ще намерим A , като разгледаме най-малкия елемент n на всяка компонента.

Ако b дели n , то $\frac{n}{b}$ е в същата компонента и тогава n не е най-малкият елемент.

Ако a дели n и $\frac{n}{a} \cdot b \leq 2013ab$, то $\frac{n}{a}$ ще бъде елемент на същата компонента и отново n не е най-малкият елемент.

Накрая, ако a дели n и $\frac{n}{a} \cdot b > 2013ab \iff n > 2013a^2$, то n е най-малкият елемент в съответната компонента. Броят на тези n е $2013(b - a)$.

Освен това, ако n не се дели нито на a , нито на b , то n е най-малък елемент в своята компонента. Броят на тези n е $2013ab - 2013a - 2013b + 2013$.

Окончателно $A = 2013(ab - 2a + 1)$ и отговорът е $2^{2013(ab - 2a + 1)}$.

Задачите са предложени както следва: Иван Тонов – 8.1, 8.3; Ивайло Кортезов – 8.2, 8.4; Петър Бойваленов – 9.1, 9.2; Николай Белухов – 9.3, 9.4; Стоян Боев – 10.1, 10.2; Иван Ланджев – 10.3, 10.4; Емил Колев – 11.1, 11.3; Александър Иванов – 11.2, 11.4, 12.4; Николай Николов – 12.1, 12.3; Олег Мушкаров – 12.2.

МНОГОЪГЪЛНИЦИ СЪС СЪИЗМЕРИМИ СТРАНИ И ЪГЛИ

АКАД. ЛЮБОМИР ЧАКАЛОВ

В статия в сп. „Математика“ бр. 6/2013 г. ние разгледахме обстойно проблема за тъй наречените **рационални триъгълници**, т.е. такива триъгълници, у които страните и височините са две по две съизмерими. В настоящата статия ще се спрем на аналогичния въпрос за равнинни многоъгълници със съизмерими страни и ъгли. Както ще видим, за триъгълниците този въпрос може да се реши напълно, и то с най-елементарни средства. При четириъгълниците вече задачата се усложнява значително и нейното решение изисква познания от висшата алгебра. Що се отнася до общата задача за равнинни n -ъгълници със съизмерими страни и ъгли, ние ще се задоволим тук само да я формулираме алгебрически, без да се занимаваме с нейното решение, което изисква по-деликатни изследвания из теорията на биномните уравнения.

I.

Да разгледаме най-напред следната задача: *ако ъгълът α е съизмерим с правия ъгъл, може ли $\cos \alpha$ да е рационално число и кога:*

Ако изразим, както обикновено е прието в математиката, ъгъла α в дъгови мерки, то по допускане, той е съизмерим с π (което отговаря на 180°), тъй че можем да положим $\alpha = \frac{m\pi}{n}$, дето m и $n > 0$ са някои цели числа.

Да допуснем освен това, че $\cos \alpha$ е рационално число. Тогава $2 \cos \alpha = \frac{p}{q}$ може да се представи като несъкратима дроб с цял положителен знаменател q .¹ Ако положим за краткост $u_k = 2 \cos k\alpha$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то от тъждеството

$$2 \cos \alpha \cos k\alpha = \cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha$$

получаваме, като умножим на 2 и заместим $2 \cos \alpha$ с $\frac{p}{q}$,

$$(1) \quad \frac{p}{q} u_k = u_{k+1} + u_{k-1}.$$

Последното равенство, приложено за $k = 1, 2, 3, \dots$, ни дава възможност да изчислим постепенно $u_2, u_3, \dots$ в зависимост от $u_0 = 2$ и $u_1 = \frac{p}{q}$. Да

¹Не изключваме при това възможността $2 \cos \alpha$ да е цяло число, в който случай полагаме $q = 1$.

положим най-сетне $v_k = q^k u_k$. Като умножим двете части на равенството (1) по на q^{k+1} , то се обръща в

$$(2) \quad pv_k = v_{k+1} + q^2 v_{k-1}.$$

От (2) следва непосредствено, че ако v_{k-1} и v_k са цели, то и v_{k+1} е също цяло. Но $v_0 = 2$ и $v_1 = p$ са цели; следователно, всички членове на редицата $v_0, v_1, v_2, \dots$ са цели числа.

Да допуснем по-нататък, че цялото число q е по-голямо от 1. Както ще видим, това допускане ще ни доведе до противоречие. За тази цел ще докажем най-напред, че никое от числата $v_1, v_2, v_3, \dots$ не може да бъде кратно на q . И наистина, $v_1 = p$ е взаимно просто с q и следователно, не се дели на q ; равенство (2), приложено при $k = 1$, показва, че и v_2 не може да бъде кратно на q . Изобщо от това равенство заключаваме лесно, че v_{k+1} и v_k или и двете са кратни на q , или никое от тях не е кратно на q . Според това, понеже v_2 не се дели на q , то и v_3 не се дели на q ; същите разсъждения са приложими и за двойките v_3, v_4 ; v_4, v_5 и т.н., тъй че никое от числата $v_1, v_2, \dots$ не може да се дели на q . От друга страна имаме

$$n\alpha = m\pi, u_n = 2 \cos n\alpha = \pm 2, v_n = \pm 2q^n,$$

т. е. v_n е кратно на q . Явно е прочее, че допускането $q > 1$ води към противоречие. Трябва да имаме, значи $q = 1$; с други думи $2 \cos \alpha$ трябва да бъде цяло число. Като вземем освен това пред вид, че $-2 \leq 2 \cos \alpha \leq 2$, явно е, че единствено възможните случаи са $2 \cos \alpha = 0, \pm 1, \pm 2$, т.е. $\cos \alpha = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$. Във всеки един от тези 5 случая ъгълът α е действително съизмерим с π .

Този резултат може да се резюмира така:

Теорема I. *За да бъде ъгълът α съизмерим с π и същевременно $\cos \alpha$ рационален, необходимо и достатъчно е $\cos \alpha$ да има една от следните 5 стойности: $\cos \alpha = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$. Или още: Всички съизмерими с π ъгли α , които имат рационални косинуси, са дадени чрез формулите*

$$\alpha = k\pi, \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

дето k означава произволно цяло число.

Разбира се, че ако α е остър ъгъл съизмерим с π , за който е дадено, че притежава рационален косинус, то от току-що доказаното следва, че $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°).

Забележка. Теорема I се доказва много лесно, ако използваме дефиницията и някои свойства на целите алгебрични числа, с които се занимава висшата аритметика. И наистина, ако $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ е съизмерим с π , то $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ и $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ са цели алгебрични числа, от които последното може да бъде рационално само когато е цяло число.

Следствие 1. *Ако в един правоъгълен триъгълник единият катет е съизмерим с хипотенузата, то ъглите му са два по два несъизмерими. Изключение прави само случаят, когато отношението на катета към хипотенузата е равно на $\frac{1}{2}$; в този случай ъглите на триъгълника се отнасят както 1 : 2 : 3.*

За да докажем това, ще забележим, че ако два ъгъла на правоъгълния триъгълник са съизмерими, то всеки от тях е съизмерим и с π , т. е. и трите ъгли на триъгълника притежават една обща мярка. Действително, когато един от двата съизмерими ъгли е прав, нашето твърдение е очевидно. Ако ли и двата ъгли са остри, то тяхната обща мярка трябва да се съдържа цяло число пъти и в сбора им $\frac{\pi}{2}$, а следователно и в π .

Нека отношението на катета b към хипотенузата a да е някое рационално число r , тъй като $\cos \gamma = r$. Ако два ъгъла на правоъгълния триъгълник са съизмерими, то острият ъгъл γ трябва да бъде съизмерим с π ; понеже неговият косинус е рационален, то според теорема I това е възможно само когато $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, т. е. когато $b = \frac{1}{2}a$. И наистина, в такъв случай $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ се отнасят както 1 : 2 : 3.

Следствие 2. *Ако страните на един неравноностранен триъгълник са съизмерими, трите му ъгли не могат да имат обща мярка, т. е. поне два от неговите ъгли са несъизмерими.*

Да си вземем един триъгълник със съизмерими страни a , b , c . Ако допуснем, че трите му ъгли имат обща мярка, тя трябва да се съдържа цяло число пъти и в тяхната сума π , тъй че кой да е ъгъл α на разглеждания триъгълник трябва да има вида $\alpha = \frac{m\pi}{n}$, дето m и n са цели и взаимно прости. От Карнотовото предложение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

следва, от друга страна, че $\cos \alpha$ трябва да бъде рационален, понеже се изразява рационално чрез отношенията на страните a , b , c . Ако $\nless \alpha$ е остър, то съгласно теорема I, той трябва да бъде равен на $\frac{\pi}{3}$. Но понеже триъгълникът има най-малко два остри ъгли, всеки един от тях трябва да бъде равен на $\frac{\pi}{3}$. А това значи, че разглежданият триъгълник трябва да бъде равноностранен, което трябваше да докажем.

Следствие 3. *В един рационален триъгълник трите ъгли не могат да имат обща мярка, т. е. поне два от ъглите му са несъизмерими.*

И наистина, в един рационален триъгълник страните са съизмерими. За да бъдат и ъглите му съизмерими, необходимо е, според следствие 2,

всеки от тях да е равен на $\frac{\pi}{3}$. А равностранный триъгълник не е рационален, понеже отношението на височината към страната му е ирационално ($= \frac{1}{2}\sqrt{3}$).

Пример. В рационалния правоъгълен триъгълник със страни $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ ъглите са два по два несъизмерими.

Нека забележим тук, че в един рационален триъгълник може да се случи два от ъглите му да бъдат съизмерими; нещо повече, тяхното отношение $m : n$ може да бъде отнапред дадено. За да намерим един такъв триъгълник, можем да постъпим така. Известно е, че съществуват рационални триъгълници с произволно малък остър ъгъл. Да вземем един такъв правоъгълен триъгълник с остър ъгъл δ по-малък от $\frac{\pi}{m+n}$. Тогава $\sin \delta$ и $\cos \delta$ са рационални числа, откъдето следва лесно същото и за $\sin m\delta$ и $\sin n\delta$ и $\sin(m+n)\delta$. Но от синусовата теорема заключаваме, че в триъгълника с ъгли $\alpha = m\delta$, $\beta = n\delta$, $\gamma = \pi - (m+n)\delta$ срещуположните страни a , b , c са съизмерими, понеже се отнасят, както $\sin m\delta : \sin n\delta : \sin(m+n)\delta$. Също тъй и височините h_a , h_b , h_c са съизмерими със страните, понеже $h_a = b \sin \gamma$, $h_b = c \sin \alpha$, $h_c = a \sin \beta$. Следователно, триъгълникът е рационален и при това ъглите му α и β се отнасят както $m : n$. Разбира се, според доказаното в следствие 3, ъгълът γ в този случай не може да бъде съизмерим нито с α , нито с β .

Пример. $m = 1$, $n = 2$; $\sin \delta = \frac{3}{5}$, $\cos \delta = \frac{4}{5}$; $\sin 2\delta = \frac{24}{25}$, $\sin 3\delta = \frac{117}{125}$; $a : b : c = \sin \delta : \sin 2\delta : \sin 3\delta = 25 : 40 : 39$. Следователно, триъгълник със страни $a = 25$, $b = 40$, $c = 39$ е рационален и при това ъглите срещу страните a и b са отнасят както $1 : 2$.

Следствие 4. Ако ъгълът α е съизмерим с π , неговият тангенс може да бъде рационален, само когато α има вида $\alpha = k\pi$ или $\alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, дето k е произволно цяло число.

От равенството $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ се вижда, че $\cos 2\alpha$ е рационален, щом $\operatorname{tg} \alpha$ е рационален. Ако същевременно α е съизмерим с π , то според теорема I, $\cos 2\alpha$ може да има едно от следните 5 стойности: 0 , $+1$, -1 , $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. Лесно е да се провери, че само на първите две отговарят рационални стойности и на $\operatorname{tg} \alpha$, а именно $\operatorname{tg} \alpha = 0$ или $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$; оттук следва, че $\alpha = k\pi$ или $\alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, дето k е някое цяло число. Разбира се, ако съизмеримият с π ъгъл α е остър, то $\operatorname{tg} \alpha$ може да бъде рационален само при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. На този резултат може да се даде още следната формулировка:

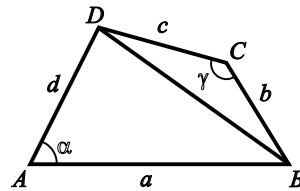
В един правоъгълен триъгълник със съизмерими катети ъглите са два по два несъизмерими, освен когато триъгълникът е равнобедрен.

II.

Да разгледаме на второ място следната задача: *Може ли в един (изпъкнал) четириъгълник както страните, така и ъглите му да бъдат съизмерими и кога?*

Лесно е да се види, че на този въпрос може да се отговори утвърдително в следните два случая: 1) четириъгълникът представя равнобедрен трапец със съизмерими основи, на които ъглите при голямата основа са равни по на $\frac{\pi}{3}$ (60°); 2) четириъгълникът е паралелограм, у който две съседни страни са съизмерими, и заключеният от тях ъгъл е съизмерим с π . *С това се изчерпват и всички решения на горната задача.* Ние ще скицираме накратко доказателството на това твърдение, без да се впускаме в подробностите, които изискват по-солоидни познания от висшата алгебра.

Да означим по ред с a, b, c, d (черт. 1) дължините на страните на един четириъгълник $ABCD$, който удовлетворява на условията на задачата. За единица дължина можем да вземем общата най-голяма мярка на четирите страни; в такъв случай a, b, c, d ще бъдат цели числа. Ако α и γ са два срещуположни ъгли (заградени съответно от страните a, d и b, c), то като приложим Карнотовото предложение за общата страна BD на двата триъгълника BCD и BAD , ще получим



$$(3) \quad a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma.$$

Това равенство показва, че между $\cos \alpha$ и $\cos \gamma$ съществува линейна зависимост с рационални коефициенти. По този начин достигае до следния въпрос: *Ако ъглите α и γ (заключени между 0 и π) са съизмерими с π , може ли между техните косинуси да съществува линейната зависимост*

$$\cos \gamma = A \cos \alpha + B$$

дето A и B са рационални и $A > 0$?

Отговор на този въпрос ни дава следната теорема, доказателството на която не може да бъде изложено тук, понеже излиза вън от рамките на елементарната математика.

Теорема II. *Ако ъглите α и γ (заключени между 0 и π) са съизмерими с π , то между $\cos \alpha$ и $\cos \gamma$ може да съществува линейна зависимост с рационални коефициенти*

$$\cos \gamma = A \cos \alpha + B \quad (A > 0)$$

само в следните два очевидни случая: 1) $\gamma = \alpha$, $A = 1$, $B = 0$ и 2) $\cos \alpha$ и $\cos \gamma$ са рационални.

Да допуснем сега, че един от ъглите на нашия четириъгълник, например $\nless \alpha$, има ирационален косинус. Според теорема **II**, $\alpha = \gamma$; освен това, от (3) следва, че трябва да имаме

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2; \quad ad = bc,$$

т. е. или $a = c$, $d = b$ или $a = b$, $d = c$. В първия случай четириъгълникът е успоредник. Ако ли $a = b$, $c = d$, то релацията

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta,$$

която свързва останалите два срещуположни ъгли β и δ , приема вида

$$a^2(1 - \cos \beta) = c^2(1 - \cos \delta).$$

Пак според теорема **II**, последното равенство е възможно или при $\beta = \delta$, или когато $\cos \beta$ и $\cos \delta$ са рационални. Но като вземем предвид, че единствените рационални стойности, които могат да приемат $\cos \beta$ и $\cos \delta$ са 0, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и че отношението $\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \delta}$ трябва да бъде точен квадрат, лесно се убеждаваме, че в този случай β и δ не могат да бъдат различни.

И така, *четириъгълникът $ABCD$ със съизмерими страни и ъгли е непременно успоредник, ако един от ъглите му има ирационален косинус.*

Остава да разгледаме още случая, когато косинусите на всички ъгли на четириъгълника са рационални (и, разбира се, четирите му страни са съизмерими). В този случай кой да е негов ъгъл трябва да има една от следните три стойности: $\frac{\pi}{3}$ ($= 60^\circ$), $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$), $\frac{2\pi}{3}$ ($= 120^\circ$); чрез един сравнително прост анализ се установява, че за да бъдат и страните му съизмерими, четириъгълникът трябва да бъде или успоредник (със съизмерими съседни страни), или равнобедрен трапец с ъгли $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ (и съизмерими основи). С това нашата задача е решена напълно.

III.

В този параграф ще формулираме алгебрически следното обобщение на разгледаните две задачи: *Може ли в един равнинен (изпъкнал) многоъгълник страните и ъглите да бъдат съизмерими и кога?*

За тази цел да разгледаме в равнината на комплексните числа една чупена линия, състояща се от отсечките $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ със съответни дължини $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ и да означим изобщо с α_k ъгъла, заключен от векторите $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1} ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и със z_k комплексното число, което отговаря на вектора A_kA_{k+1} . Ако, освен това, A_0A_1 сключва с реалната ос $\nless \alpha$, то

$$\begin{aligned}
z_0 &= a_0 e^{i\alpha}, \\
z_1 &= a_1 e^{i(\alpha+\alpha_1)}, \\
&\dots\dots\dots, \\
z_{n-1} &= a_{n-1} e^{i(\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})}
\end{aligned}$$

и на вектора $A_0 A_n$ отговаря, както е известно, числото

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = e^{i\alpha} (a_0 + a_1 e^{i\alpha_1} + \dots + a_{n-1} e^{i(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})}).$$

За да бъде нашата чупена линия затворена, необходимо и достатъчно е сумата в последните скоби да е равна на нула.

Да допуснем още, че страните и ъглите на така получения n - ъгълник са съизмерими. Тогава страните $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ се изразяват чрез рационални числа (ако вземем за единица дължина тяхната обща мярка) и освен това всеки от ъглите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ е съизмерим с π . Нека δ да означава мярка на тези ъгли, тъй че

$$\alpha_1 = m_1 \delta, \alpha_2 = m_2 \delta, \dots$$

Ако положим най-сетне $e^{i\delta} = x$, то получаваме уравнението

$$(4) \quad a_0 + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \dots + a_{n-1} x^{m_{n-1}} = 0$$

дето x означава корен на едно биномно уравнение $x^\nu = 1$, понеже ъгълът δ е съизмерим с π .

Нашата задача се свежда, прочее, към следното: *Да се подберат целите положителни числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, целите положителни показатели $m_1, m_2, \dots$ и един подходящ корен x на единицата тѣй, че да бъде удовлетворено уравнението (4).* При някои допълнителни условия тази обща задача може да се реши сравнително лесно. Така например, с помощта на горната алгебрическа формулировка се доказва лесно, че ако всички ъгли на един n -ъгълник са равни помежду си и n е просто число, то страните му могат да бъдат съизмерими само когато многоъгълникът е правилен.

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

ДИМИТЪР ДИМИТРОВ

На 14.12.2013 г. в Ботевград, Бургас, Варна, Велико Търново, Враца, Гоце Делчев, Димитровград, Кюстендил, Ловеч, Монтана, Перник, Плевен, Пловдив, Поморие, Разград, Русе, Самоков, Сандански, Силистра, Сливен, Смолян, Сопот, София, Хасково, Шумен и Ямбол се проведе 21-то Коледно математическо състезание, организирано от секция „Изток“ – София към СМБ.

Преди състезанието се състоя работна среща с експерти и учители от съответните райони, на която бяха обсъдени и редактирани състезателните теми.

Регламент на задачите от 4. до 6. клас. Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор от четири възможни. „Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите са разпределени на групи по трудност: от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки; от 3 до 6 с по 5 точки и от 7 до 9 с по 7 точки. Задача 10 се решава и описва подробно. Оценява се с 15 точки. Максималният брой точки е 60. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

4. клас

1. Пресметнете $2.99 + 3.99 - 4.99 - 1.99$

- A) 0 B) 1 В) 2014 Г) друг отговор

2. С колко ще намалеят дните на високосна година, ако всички месеци имат по 30 дена?

- A) с 6 B) с 5 В) със 7 Г) друг отговор

3. За новогодишна украса на класната стая момчетата от IV а клас подготвили надписа $\square\square14$. Момичетата предложили надписа $\square\square13$. В кой от надписите има повече прави ъгли и с колко ?

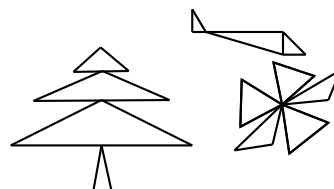
- A) в 2013 с 1 B) в 2013 с 2 В) в 2014 с 2 Г) друг отговор

4. В гората засадили 72 борчета за 4 часа, а в парка засадили 72 ели за 3 часа. Общо колко борчета и ели са засаждали за 1 час?

- A) 40 B) 42 В) 7 Г) друг отговор

5. Броят на видовете триъгълници от картината е:

	а	б	в	друг отговор
разностранни	5	4	2	
равностранни	7	3	7	
остроъгълни	4	4	4	
правоъгълни	3	3	3	
тупоъгълни	5	5	4	



6. Третинката от зелената свещ изгаря за 30 мин. Четвъртинката от синята свещ изгаря за 20 мин. Ако двете свещи се запалят едновременно коя от тях ще изгори първа?

- А) изгарят едновременно Б) зелената
В) не може да се определи Г) друг отговор

7. Диди прочела от училищната и от домашната си библиотека общо 45 книги. Ани прочела от градската и от училищната библиотека общо 55 книги. Двете са прочели едни и същи книги от училищната библиотека. Ако от домашната и от градската библиотека са прочетени общо 20 книги, колко книги са прочели момичетата от училищната библиотека?

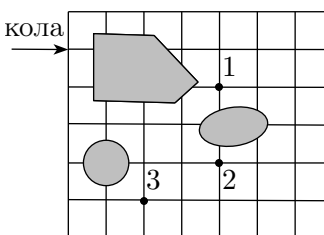
- А) 50 Б) 80 В) 40 Г) друг отговор

8. Джуджетата на Дядо Коледа решили да работят едно след друго, като всяко работи с 5 мин повече от предишното. Първото започнало работа в 9ч 10мин и работило 15 мин. Второто започнало веднага след него и работило 20 мин. След това заработило третото и така нататък. Дядо Коледа влязъл в работилницата в 10ч 45 мин . Кое джудже е работило тогава?

- А) шестото Б) третото В) петото Г) друг отговор

9. На картата с кръгчета са означени трите бензиностанции, от които може да се зареди бензин. Запърхованите области не трябва да се пресичат. Движението става само по линиите от мрежата. Всяко малко квадратче има обиколка 4 км. Колко метра е най-близкото разстояние до бензиностанция?

- А) 7000 м Б) 6 м
В) 1300 м Г) друг отговор



10. В едно училище са украсени шест елхи. На всяка от тях има по 14 зелени лампички. На половината елхи има по 18 сини лампички. Червените лампички са два пъти повече от зелените. Жълтите лампички са четвъртинка от червените. Половината от всички лампички светят силно, а

другите светят по-слабо. Всички елхи имат по равен брой червени и жълти лампички. Колко са:

- а) зелените лампички;
- б) сините лампички;
- в) червените лампички;
- г) жълтите лампички;
- д) силносветещите лампички?

На елха със сини лампи сложили и 29 оранжеви. Колко още трябва да добавят, за да станат 100 лампи?

Отговори. 1. а; 2. а; 3. г, равен брой; 4. б; 5. б; 6. г, синята; 7. в; 8. в; 9. г, 6000 м; 10. а) 84, б) 54, в) 168, г) 42, д) 174. Трябва да се добавят още 4 лампи.

5. клас

1. Колко от резултатите $3,81+2,18 = \dots$; $12,09-5,9 = \dots$; $19,7.0,3 = \dots$; $3,5+7,9-5,39 = \dots$ и $2,945:0,5 = \dots$ са по-големи от 5,9 и по-малки от 6,1 ?

- А) 2 Б) 4 В) 3 Г) друг отговор

2. През първия ден на поход Иванчо изминал 9,5 км, през втория ден с 2,6 км повече от първия, а през третия със 700 метра по-малко от втория ден. За трите дни Иванчо е изминал:

- А) 33 км Б) 23,5 км В) 21,6 км Г) друг отговор

3. Бутилка, пълна с мляко, тежи 1,6 кг. Четири празни бутилки тежат колкото една пълна. Колко тежат шест празни бутилки?

- А) 1,2 кг Б) 1,8 кг В) 2,4 кг Г) друг отговор

4. Митко имал 30 монети по 10 ст. и по 20 ст. на обща стойност 4,10 лв. Той похарчил 2,30 лв., използвайки 15 монети. Колко монети по 20 ст. са му останали?

- А) 3 Б) 4 В) 5 Г) друг отговор

5. Сумата на 105 естествени числа е 106. Произведението на тези числа е:

- А) 1 Б) 2 В) 105 Г) друг отговор

6. Ангел има сестра и брат. Той е по-голям от сестра си с 2 години и 8 месеца, а брат му е по-малък от сестра си с 3 год. и 5 месеца. Ангел е по-голям от брат си с:

- А) 5 г. и 3 мес. Б) 6 г. и 1 мес. В) 9 месеца Г) друг отговор

7. От две еднакви квадратчета чрез долепване е образуван правоъгълник с лице 0,18 кв.см. Намерете обиколката на правоъгълник, образуван от три такива квадратчета:

А) 0,18 дм Б) 2,4 см В) 27 мм Г) друг отговор

8. За $\triangle ABC$ е известно, че $AB + AC = 25$ см, $AB + BC = 23$ см и $BC + AC = 26$ см. Дължината на страната BC е:

А) 0,11 дм Б) 14 см В) 13 см Г) друг отговор

9. На три коледни елхи има общо 60 играчки. След като децата преместили 8 играчки от първата елха на втората, след това 6 играчки от втората на третата и накрая от третата на първата 2 играчки, се оказало, че елхите имат равен брой играчки. Колко играчки е имало първоначално на третата елха?

А) 20 Б) 18 В) 22 Г) друг отговор

10. Когато попитали господин Математиков кой е телефонният му номер, той отговорил: „Номерът ми е от шест различни цифри, подредени в низходящ ред. Произведението от тези цифри е 5040. Телефонният ми номер започва с най-голямата цифра, а шестата цифра е най-малкото естествено число“. Кой е телефонният номер на господин Математиков?

Отговори. 1. в; 2. а; 3. в - 2,4; 4. а; 5. б; 6. б; 7. б; 8. г, 12 см; 9. г, 16; 10. 987521.

6. клас

1. Най-малкото от числата $-0,1412$; $-0,412$; $-0,01402$; $-0,0001412$; $-0,1042$ е:

А) $-0,1412$ Б) $-0,412$ В) $-0,0001412$ Г) друг отговор

2. Обемът на правоъгълен паралелепипед с основни ръбове 6 см и 4 см и лице на повърхнината 168 cm^2 е:

А) 4032 cm^3 Б) 288 cm^3 В) 144 cm^3 Г) друг отговор

3. Четирицифрено число започва с цифрата 6. След като преместили тази цифра в края, получили ново четирицифрено число, което е с 1305 по-малко от първото. Първото число е:

А) 6301 Б) 6501 В) 6231 Г) друг отговор

4. Ако x и y са корени съответно на $x \cdot 17^5 \cdot \left(\frac{1}{34}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot 2^3$ и $2^{2y-1} = 128$, то стойността на израза $P = |x - 2y| - 2|x - y|$ е:

А) 2 Б) 4 В) -10 Г) друг отговор

5. Сборът на умаляемото, умалителя и разликата е 66. Умаляемото е:

А) 22 Б) 44 В) 30 Г) друг отговор

6. Точка P е от страната AB на успоредника $ABCD$, като $AP = \frac{2}{3}AB$. Ако $AD = 10,25$ cm и разстоянието от точка P до правата BC е 3,6 cm, то лицето на успоредника е:

- А) $221,4 \text{ cm}^2$ Б) $110,7 \text{ cm}^2$ В) $18,45 \text{ cm}^2$ Г) друг отговор

7. Стойността на израза $\frac{4^8 \cdot (-125)^3}{-10^2 \cdot (-25)^4 \cdot 64^2} + \frac{5^9 - 5^{10}}{5^{10}}$ е:

- А) 0 Б) 1,6 В) -1,6 Г) друг отговор

8. Колко най-много предмети с различно тегло можем да претеглим, ако разполагаме с везни и три теглилки-една от 1 г, една от 3 г и една от 14 г?

- А) 7 Б) 9 В) 10 Г) друг отговор

9. Турист може да измине 14 км за 3,5 ч, но той намалил това време с 20%. С колко процента е увеличил скоростта си, за да измине същия път?

- А) 20% Б) 80% В) 25% Г) друг отговор

10. Ани, Ния, Руми и Антон получили от Дядо Коледа повече от 1000, но по-малко от 1500 на брой календарчета за 2014 г, които да раздадат на учениците от училището. Ани, Ния и Руми взели съответно $\frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ от всичките календарчета, а Антон – останалите календарчета.

- а) Каква част от всички календарчета е взел Антон?
б) Колко са всички календарчета?
в) С колко календарчетата на Ани са повече от тези на Антон?

Отговори. 1. б); 2. в); 3. г) 6521; 4. а; 5. г) 33; 6. б); 7. а); 8. г) 13; 9. в);
10. а) $\frac{59}{504}$; б) 1008; в) 260.

7. клас

Регламент. Всяка задача от 1 до 16 има само един правилен отговор от четири възможни (отбелязани с а), б), в), г)). За задачи 17 до 22 трябва да бъдат записани само отговорите, а задачи 23 и 24 трябва да бъдат подробно решени. Задачите от 1 до 4 се оценяват с по 1 точка; задачи от 5 до 10 - с по 2 точки; задачи от 11 до 16 - с по три точки; задачи 17 до 20 - с по 5 точки; задачи 21 и 22 - с по 8 точки и задачи 23 и 24 - с по 15 точки. Максималният брой точки е 100. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

1. Стойността на израза $A = 2^7 - 2^3 + 2^0$ е:

- А) 210 Б) 72 В) 102 Г) 121

2. Успоредник има страни 9 см и 6 см, а едната му височина е 7,5 см. Лицето му е равно на:

- А) 45 кв.см Б) 54 кв.см В) 67,5 кв.см Г) 70,5 кв.см

3. Опростете израза $(a^2 + 2)^2 - (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$.

- А) $a^4 + a^2 + 4$ Б) $4a^2 + 20$ В) $a^4 - a^2 - 2$ Г) $2a^2$

4. За страните на $\triangle ABC$ е дадено, че $a : b : c = 3 : 5 : 7$, а периметърът му е равен на 165 см. Намерете най-малката страна на триъгълника.

- А) 31 см Б) 33 см В) 38 см Г) 43 см

5. Да се разложи на множители многочленът $2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y$.

- А) $(2x - y)(x + y + 1)$ Б) $(2x + y)(x - y + 1)$
В) $(2x + y)(x + y - 1)$ Г) $(2x - y)(x - y - 1)$

6. Две от страните на триъгълник имат сбор 18 см, а височините към тях са 6 см и 4 см. Намерете лицето на триъгълника.

- А) 21,3 кв.см Б) 21,6 кв.см В) 22,5 кв.см Г) 24,5 кв.см

7. Намерете най-малката стойност на израза $x \cdot (x + 8) - 2 \cdot x \cdot (4 - x) - 7$.

- А) -3 Б) 1 В) -7 Г) 9

8. Върху лъч с начало M са нанесени отсечките MN , MP и MQ . Краят на отсечката MN е среда на отсечката MP , а краят на отсечката MP е среда на отсечката MQ . Ако $MN + MP + MQ = 56$ см, да се намери дължината на отсечката MQ .

- А) 32 см Б) 16 см В) 24 см Г) 48 см

9. Намерете разликата между най-голямото и най-малкото четирицифрени числа, които могат да се запишат с цифрите 2, 0, 1 и 2.

- А) 1098 Б) 198 В) 118 Г) 1188

10. Ако $a + b = 8$ и $ab = 15$, да се намери $a^2 + b^2$.

- А) 34 Б) 17 В) 9 Г) 7

11. При коя стойност на параметъра b нормалният вид на многочлена, тъждествено равен на произведението $(x^2 - 10x + 6)(2x + b)$ има равни коефициенти пред x^3 и x ?

- А) 1 Б) -0,4 В) 0,6 Г) 0,2

12. Два от ъглите на триъгълник са 65° и 87° . Да се определи ъгълът между ъглополовящата и височината на триъгълника, построени през третия връх.

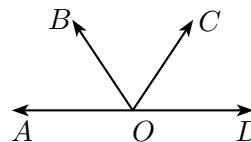
- А) 24° Б) 13° В) 11° Г) 3°

13. Намерете числената стойност на израза $x^2y(100xy^2 - x^2y^3 + x^3y^4)$ за $x = -\frac{3}{4}$, а $y = \frac{4}{3}$.

- А) 99 Б) -102 В) 101 Г) 102

14. На чертежа $\sphericalangle AOD$ е изправен, $\sphericalangle AOB = 40^\circ$ и $\sphericalangle BOC : \sphericalangle COD = 3 : 4$. Намерете големината на $\sphericalangle AOC$.

- А) 90° Б) 110°
В) 120° Г) 100°



15. Да се извърши степенуването $(1-x-a)^2$. Да се намери на колко е равно a , ако полученият израз се разглежда като многочлен на x и коефициентът пред x в нормалния му вид е равен на 4.

- А) -1 Б) 3 В) 1 Г) 2

16. Три от стените на правоъгълен паралелепипед имат лица съответно 28 кв.см, 12 кв.см и 21 кв.см. Намерете обема на паралелепипеда в куб. см.

- А) 48 Б) 68 В) 84 Г) 94

17. Даден е триъгълник ABC . Точките M и K лежат на страната AB и $AM = MK = KB$, а точката P е среда на AC . Ако лицето на $\triangle AMP$ е 2 кв.см, да се намери лицето на $\triangle ABC$.

18. Ако при $m = 3$, стойността на израза $\frac{a^2 - 3a + 5}{3} - 3m$ е равна на 5, да се намери стойността му при $m = 10$.

19. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC$ е тъп, а с H е означена пресечната точка на височините му. Ако $\sphericalangle ABC = 32^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 26^\circ$, намерете $\sphericalangle BHC$.

20. Разложете на множители израза $225y^2 - 25x^2 + 16x^2z^2 - 144y^2z^2$.

21. За построяването на квадратна детска площадка от квадратни плочки със страна 25 см са закупили точно необходимия брой. При превоза обаче са счупени 79 плочки. Било пресметнато, че от целите плочки може да се построи пак квадратна площадка със страна, която е с една плочка по-малка от първоначалната, след което я построили. След построяването площадката била оградени с бордюрни плочи.

- Колко са закупените плочки?
- Каква е била площта на предвидената площадка (в кв.м) и каква е площта на построената площадка (в кв.м)?
- Колко бордюрни плочи са били закупени за ограждането на построената площадка, ако дължината на една такава плоча е 65 см?

22. На класна работа в края на срока са зададени четири задачи. Една осма от учениците са решили всички задачи, една трета са решили три задачи, една четвърт са решили две задачи и една шеста са решили една задача. В класа е имало не повече от 30 ученици. Използвана е традиционната оценка, равна на две плюс броя на решените задачи.

- а) Колко ученици са правили класната работа?
- б) Колко ученици са получили слаба оценка?
- в) Какъв е средният успех от класната работа (с точност до стотни).

23. Дадено е числото $M = (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3)^2 - (x^3 - x^2y - xy^2 + y^3)^2$.

- а) Да се разложи на множители;
- б) Да се докаже, че ако x и y са числа с еднакви знаци, M е неотрицателно;
- в) Да се намери стойността на M при $x = 2^2$, $y = 1^2$.

24. Може ли даден квадрат да се разреже на:

- а) пет квадрата;
- б) шест квадрата;
- в) седем квадрата;
- г) осем квадрата;
- д) повече от осем квадрата.

Направете чертежи и обосновайте отговорите!

Отговори. 1. г; 2. а; 3. б; 4. б; 5. в; 6. б; 7. в; 8. а; 9. г; 10. а; 11. а; 12. в; 13. б; 14. г; 15. б; 16. в; 17. 12 кв.см; 18. -16 ; 19. $\sphericalangle BHC = 58^\circ$; 20. $(4z - 5)(4z + 5)(x - 3y)(x + 3y)$; 21. а) 1600; б) 100; 95,06; в) 60; 22. а) 24; б) 3; в) 4,17; 23. а) $M = 4xy(x + y)^2(x - y)^2$; в) 3600; 24. а) не; б) да; в) да; г) да.



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2013 г. и бр. 1, 2 от 2014 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2014 г. При равен брой точки от очния кръг за крайното класиране се вземат и резултатите от задочния кръг. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за погорните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.
3. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:
ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Четирицифрените числа със сбор на цифрите 7 са подредени по големина. На кое място е написано числото 2014?

Задача 2. За определянето на отбора за едно математическо състезание се провели два теста. Първият тест включвал 24 задачи, като за всеки верен отговор се давали по 5 точки, а за всеки грешен или непопълнен отговор се отнемала една точка от постигнатия резултат. Вторият тест включвал 15 задачи, като за всеки верен отговор се давали по 8 точки, а за всеки грешен или непопълнен отговор се отнемали по две точки от постигнатия резултат. Николай решил общо 30 задачи, като резултатът му на първия тест бил с 10 точки по-добър от резултата му на втория тест. Колко задачи е решил Николай на всеки от тестовете?

Задача 3. При делението на числото 2014 с a се получава частно b и остатък c . Да се намерят a , b и c , ако е известно, че те са дължини на страни на равнобедрен триъгълник.

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2014 г.

**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 6/2013 Г.**

Задача 1. Емил подрежда по големина числата, които се записват само с цифрите 0, 1, 2 и 3. Получила се следната последователност

0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, ...

На кое място е написано числото 2013?

Решение. Броят на записаните едноцифрени числа е 4, а двуцифрените са $3 \cdot 4 = 12$ (десетиците може да изберем по 3 начина – те са 1, 2 или 3, като за всеки избор на десетици има по 4 възможности за единиците). По същия начин, записаните трицифрени числа са $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. Четирицифрените записани числа, по-малки от 2000, са $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ (цифрата на хилядите е 1, а за всяка следваща цифра има по четири възможности). Следващите записаните числа са 2000, 2001, 2002, 2003, 2010, 2011, 2012, 2013, т.е. 2013 е записано на $4 + 12 + 48 + 64 + 8 = 136$ -то място.

Задача 2. Да се докаже, че числото 3^{2013} има поне 956 цифри.

Решение. Ще използваме неравенствата $3^4 = 81 > 80 = 10 \cdot 2^3$ и $2^7 = 128 > 125 = 5^3$. Имаме

$$\begin{aligned} 3^{2013} &= 3 \cdot 3^{2012} = \\ 3 \cdot (3^4)^{503} &> 3 \cdot (2^3 \cdot 10)^{503} = 3 \cdot 2^{1509} \cdot 10^{503} = \\ 3 \cdot (2^7)^{150} \cdot 2^{459} \cdot 10^{503} &> 3 \cdot (5^3)^{150} \cdot 2^{459} \cdot 10^{503} = \\ 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{450} \cdot 2^{450} \cdot 10^{503} &= 3 \cdot 512 \cdot 10^{450} \cdot 10^{503} = \\ 1536 \cdot 10^{953} &> 10^3 \cdot 10^{953} = 10^{956}. \end{aligned}$$

Следователно числото 3^{2013} се записва с поне 957 цифри.

Задача 3. След като разделили числото 2013 на едно число a , се получило частно b и остатък c . Да се намерят a , b , c , ако е известно, че тези числа са дължини на страни на равнобедрен триъгълник.

Решение. По условие $2013 = a \cdot b + c$, като $c < a$. Тъй като a , b , c са страни на равнобедрен триъгълник, то $b = c$ или $a = b$.

В първия случай $b = c < a < 2b$ и получаваме

$$2013 = ab + b \iff 3 \cdot 11 \cdot 61 = (a + 1)b.$$

Лесно се проверява, че естествените решения на това уравнение, които удовлетворяват условието $b < a < 2b$, са $a = 60$, $b = 33$.

Ако $a = b > c$, получаваме равенството $2013 = a^2 + c$. Оттук, като използваме условието $0 < c < a$, стигаме до

$$a^2 < 2013 < a^2 + a \implies a^2 < 2013 < (a + 1)^2.$$

Тъй като $44^2 = 1936$ и $45^2 = 2025$, от последното неравенство следва, че $a = 44$. Но при $a = 44$ имаме $44^2 + 44 = 1980 < 2013$, противоречие.

Следователно $a = 60$, $b = c = 33$.

Задача 3. от бр.5/2013 г. Нека m и n са две естествени числа, такива че $m + n$ е нечетно число. Да се докаже, че $13^m + 13^n$

а) може да се представи като сбор на три точни квадрата;

б) не може да се представи като сбор на два взаимнопрости точни квадрата.

Решение. Числата m и n са с различна четност; нека $m = 2m_1$ и $n = 2n_1 + 1$.

а) Имаме

$$\begin{aligned} 13^m + 13^n &= 13^{2m_1} + 13^{2n_1+1} = 13^{2m_1} + 13 \cdot 13^{2n_1} = \\ &= 13^{2m_1} + 4 \cdot 13^{2n_1} + 9 \cdot 13^{2n_1} = (13^{m_1})^2 + (2 \cdot 13^{n_1})^2 + (3 \cdot 13^{n_1})^2. \end{aligned}$$

б) Тъй като 13 дава остатък -1 при деление на 7, то $13^m = 13^{2m_1}$ дава остатък $(-1)^{2m_1} = 1$ при деление на 7, а $13^n = 13^{2n_1+1}$ дава остатък $(-1)^{2n_1+1} = -1$ при деление на 7. Следователно сборът $13^m + 13^n$ се дели на 7.

От друга страна, както показва таблицата

	Остатък при деление на 7						
a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1

всеки точен квадрат дава остатък 0, 1, 2 или 4 при деление на 7. Следователно сборът на два взаимнопрости точни квадрата не се дели на 7, т.е. не може да е равен на $13^m + 13^n$.



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2013/14 г. при следните условия:

Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)

Институт по математика и информатика – БАН

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. Квадрат със страна 1 е разрязан на правоъгълници. На всеки правоъгълник е отбелязана една от страните му. Да се докаже, че сборът от отбелязаните страни е поне 1.

Задача 2. Около триъгълника ABC е описана окръжност с център O . Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I се допира до страните AB, BC и CA съответно в точките D, E и F . Точката P е пета на перпендикуляра от D към правата EF . Да се докаже, че правите PI и CO се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 3. Да се намерят всички прости числа p , за които $p^3 - 4p + 9$ е точен квадрат.

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2014 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОТ БР. 5/2013 Г.

Задача 1. Наредената n -орка от естествени числа $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ се нарича “добра”, ако $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$ и за всяко k , $1 \leq k \leq n$ сборът на всеки k от дадените числа не е равен на n . Да се намерят всички добри n -орки.

Решение. За добра n -орка $(a_1, \dots, a_n)$ да разгледаме сборовете $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Всички тези сборове са между 0 и $2n$, и ако някой сбор е $0 \pmod{n}$, той е равен на n , което е противоречие. Освен това, ако някои два сбора са сравними по модул n след изваждане ще получим друг сбор, който е равен на n , отново противоречие. Следователно всички сборове по модул n са ненулеви и различни. В частност $a_2 \equiv a_1 + \dots + a_k \pmod{n}$ за някое $k \geq 1$. Ако $k > 1$ ще получим сбор, равен на n , което е невъзможно. Следователно $k = 1$ и $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$, откъдето получаваме, че всички числа са сравними по модул n . Оттук лесно следва, че търсените решения са $(1, 1, \dots, 1, n+1)$ и $(2, 2, \dots, 2)$, като втората n -орка е решение само при n нечетно число.

Задача 2. Подмножествата $A_1, A_2, \dots, A_k$ на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ са такива, че за всеки $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$ е изпълнено

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n - 2.$$

Да се докаже, че $k \leq 2^{n-2}$.

Решение. Ще казваме, че множеството $T \subset S$ е 2-покрито, ако $T \subset A_i \cup A_j$ за някои i и j (не непременно различни). Измежду подмножествата на S , които не са 2-покрити да изберем множество A с минимална мощност. Да разгледаме множеството $S_1 = \{A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_k\}$ ($A \cap A_i$ може да съвпада с $A \cap A_j$). Тъй като A не е 2-покрито, то ако $X \in S_1$, то $A - X \notin S_1$. Следователно най-много половината подмножества на A са от S_1 и $|S_1| \leq 2^{|A|-1}$. От друга страна нека $B = S - A$ и да разгледаме множеството $S_2 = \{A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_k\}$. Ще докажем, че ако $X \in S_2$, то $B - X \notin S_2$. Нека X и $B - X$ са от S_2 за някое $X = B \cap A_l$ и $B - X = B \cap A_{l'}$. От минималността на A следва, че съществуват A_i и A_j , за които $A_i \cup A_j = A \setminus \{m\}$ за някои i, j и m . Тогава

$$|A_l \cup A_{l'} \cup A_i \cup A_j| = n - 1,$$

противоречие. Следователно допускането е грешно и $|S_2| = 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}$. Понеже всяко множество се определя еднозначно от сечението му с множествата A и $B = S - A$, то $|A| \leq |B| \cdot |C| \leq 2^{n-2}$.

Задача 3. С $n(r)$ означаваме броят на точките с цели координати върху кръг с радиус $r > 1$. Да се докаже неравенството $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Решение. Понеже $r > 1$ имаме $6\sqrt[3]{\pi} > 8$ и можем да приемем, че $n > 8$. Да означим точките с $P_1, P_2, \dots, P_n$ в посока, обратна на часовниковата стрелка. Тъй като сборът от дъгите P_1P_3, P_2P_4, P_nP_2 е 4π , то съществува дъга P_iP_{i+2} с мярка не повече от $\frac{4\pi}{n}$. Без ограничение нека това е дъгата P_1P_3 . Да разгледаме триъгълник ABC вписан в дъга, отговаряща на ъгъл $\frac{4\pi}{n}$. Такъв триъгълник има максимално лице когато точките A и C са крайща на дъгата и B е средата на дъгата, която е по-отдалечена от AC . Тогава $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCA = \frac{\pi}{n}$ и $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \frac{2\pi}{n}$, откъдето

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4r} = \frac{(2r \sin \frac{\pi}{n})(2r \sin \frac{2\pi}{n})(2r \sin \frac{\pi}{n})}{4r} \leq \frac{(2r \frac{\pi}{n})(2r \frac{2\pi}{n})(2r \frac{\pi}{n})}{4r} = \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

Като приложим горните разсъждения за триъгълник $P_1P_2P_3$, намираме

$$S_{P_1P_2P_3} \leq \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

От друга страна точките P_1, P_2 и P_3 са точки с цели координати и следователно $S_{P_1P_2P_3}$ е поне $\frac{1}{2}$ (това неравенство следва директно от формулата на Пик за лице на триъгълник, чийто върхове са точки с цели координати). Получаваме

$$\frac{1}{2} \leq \frac{4r^2\pi^3}{n^3},$$

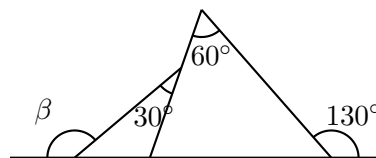
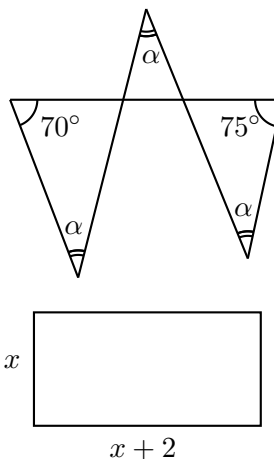
което е еквивалентно на неравенството от условието.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване
и приемни изпити след 7. клас

ПЪРВИ МОДУЛ ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $(x - 2)(4x - 3) - (2x - 3)^2$ при $x = 2014$ е:
А) 2011 Б) 2029 В) 2014 Г) -3
2. Ако $x - y = 53$ и $x^2 - y^2 = 2014$, колко е $x + y$?
А) 38 Б) 36 В) 34 Г) 33
3. Многочленът $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$ се представя като произведение на три множителя, сред които НЕ е:
А) $x + 4$ Б) $x - 4$
В) $x + 3$ Г) $x - 3$
4. $\alpha = ?$
А) 25° Б) 30°
В) 35° Г) 45°
5. Правоъгълник има обиколка 28 см, а дължината е с 2 см по-голяма от ширината му. Лицето на правоъгълника (в кв.см) е:
А) 24 Б) 35
В) 48 Г) 49
6. Решенията на неравенството $\frac{4x - 5}{5} < \frac{5x - 4}{4}$ са:
А) $x < 0$ Б) $x > 0$
В) $x \in \emptyset$ Г) всяко x
7. $\beta = ?$
А) 140° Б) 145°
В) 150° Г) 155°
8. Ъглите в един триъгълник изпълняват условието $\gamma : (\alpha + \beta) = 2 : 7$. Колко е γ ?
А) 60° Б) 40° В) 30° Г) 20°



9. Уравнението $(x - 2)^2 = (3 - x)(4 - x)$ е еквивалентно на:

A) $5 - \frac{x+2}{6} = x$

Б) $6 - \frac{x-1}{6} = 3x$

В) $7 - \frac{3x+2}{6} = 2x$

Г) $8 - \frac{3x-1}{6} = x$

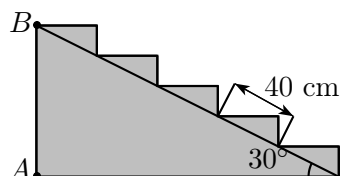
10. Стълбата на чертежа има пет еднакви стъпала. Височината AB на стълбата е равна на:

A) 2 m

Б) 1,5 m

В) 1 m

Г) 0.8 m



11. Лодка изминала 2 km по течението на река за 10 min и 1 km срещу течението за 15 min. Скоростта на течението на реката е:

A) 8 km/h

Б) 4 km/h

В) 2 km/h

Г) 1 km/h

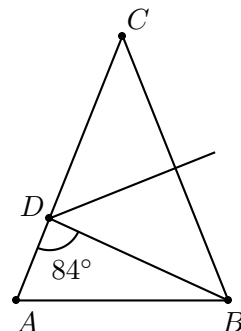
12. Симетралата на бедрото BC в равнобедрения триъгълник ABC пресича бедрото AC в точката D . Ако $\angle ADB = 84^\circ$, колко е $\angle ABD$?

A) 30°

Б) 29°

В) 27°

Г) 26°



13. Асен изиграл няколко партии шах срещу компютъра и победил в 60% от тях. След като си починал, Асен спечелил в 10 поредни партии, с което процентът на победите за деня станал 70%. Общо колко партии шах е изиграл Асен?

A) 20

Б) 30

В) 40

Г) 100

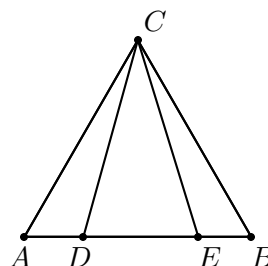
14. На страната AB на равностранныя триъгълник ABC са отбелязани точките D и E така, че $AD = BE$ и $\angle ACE = 4 \angle ACD$. $\angle AEC = ?$

A) 80°

Б) 75°

В) 72°

Г) 70°



15. Кое от изброените уравнения има корен, който удовлетворява неравенството $6 - x > 2x$?

A) $(x - 1)^2 = (x - 2)(x + 2)$

Б) $4 - 3(x - 2) = 1$

В) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x+3}{2}$

Г) $3x + 5 = 3x$

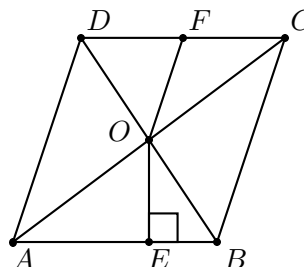
16. Диагоналите на ромба $ABCD$ се пресичат в точката O , а F е средата на страната CD . Построена е отсечката $OE \perp AB$ ($E \in AB$). Ако $\angle EOF = 164^\circ$, определете $\angle ABC$.

А) 106°

Б) 114°

В) 144°

Г) 164°



ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Дадено е уравнението $(a + 1)(x + 2) = a + 3$ с параметър a .

Попълнете в таблицата стойностите на параметъра, при които е изпълнено съответното условие.

Номер	Условие	Стойност на параметъра a
1.	Уравнението има корен $x = -2$	
2.	Уравнението има корен $x = -3$	
3.	Уравнението няма решение	

18. Даден е правоъгълният триъгълник ABC със страни $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm и $CA = 10$ cm. Построена е ъглополовящата AD и перпендикуляра DE към AC ($E \in AC$).

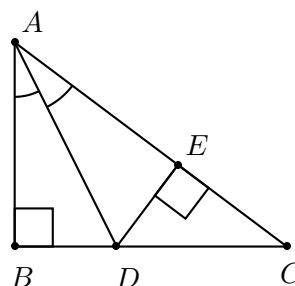
Допълнете текста.

Отсечката CE е равна на ... (А)... cm.

Периметърът на $\triangle DCE$ е ... (Б)... cm.

Да означим $BD = x$. Изразено чрез x , лицето на $\triangle ABD$ е ... (В)... cm^2 , а лицето на $\triangle ADC$ е ... (Г)... cm^2 .

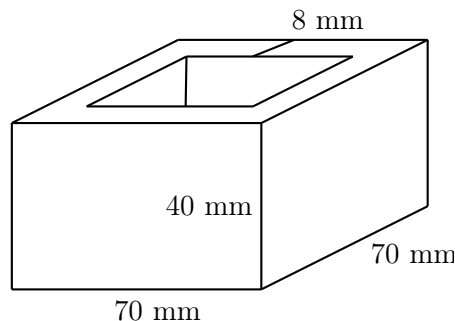
Отсечката BD е равна на ... (Д)... cm.



19. Дървен конструктор се състои от 49 елемента с форма на правоъгълен паралелепипед с размери $8 \times 10 \times 20$ mm.

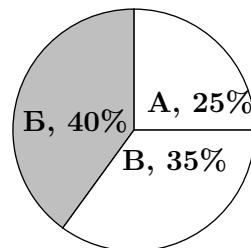
А) Всички елементи на конструктора се подреждат в кутия с форма на куб така, че тя се запълва. Определете ръба на кутията.

Б) Колко елемента са необходими за построяването на стената на чертежа?



20. Математика по време на избори.

Кръговата диаграма представя разпределението на гласовете на делегати при избор на председател на тяхната партия.



А) Ако за кандидата, събрал най-много гласове, гласували с 90 делегати повече отколкото за кандидата, който събрал най-малко гласове, колко делегати участвали в гласуването?

Б) Ако кандидат В оттегли кандидатурата си и 20% от неговите поддръжници решат да подкрепят кандидат А, колко процента от гласовете ще спечели А?

В) По правилник, председател се избира с подкрепата на поне половината делегати. При повторно гласуване част от поддръжниците на кандидат А гласували за кандидат В и той бил избран за председател. Най-малко колко процента от първоначалните поддръжници на А са гласували за В?

ВТОРИ МОДУЛ

21. Търговски въпроси.

Фирма произвежда сапун и го предлага в два вида опаковки.

	брой сапуни	цена на опаковката
малка опаковка	4	5 лв.
голяма опаковка	6	6 лв.

А) Клиент поръчал общо 80 сапуна. Поръчката включвала 2 пъти повече големи опаковки, отколкото малки. На каква стойност е поръчката?

Б) Един ден продали 70 опаковки на обща стойност 400 лв. Колко сапуна са продадени този ден?

В) Най-малко за колко лева могат да се купят точно 74 сапуна?

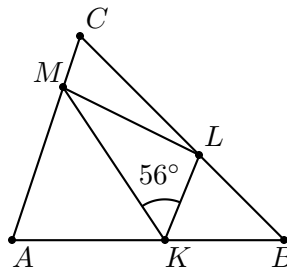
22. На страните AB , BC и CA на $\triangle ABC$ са избрани съответно точките K , L и M така, че K и M са на равни разстояния от върха A , а K и L са на равни разстояния от върха B . Известно е, че $\angle MKL = 56^\circ$.

А) Намерете $\angle C$.

Нека ъглоповящите през върховете A и B в триъгълника ABC се пресичат в точката I .

Б) Намерете $\angle AIB$.

В) Намерете $\angle MIL$.



На задачи 23. и 24. запишете решението с необходимите обосновки.

23. Дадено е уравнението $(x + a + 2)^2 + 5 = (a + x)(x - a) + (2a + 1)^2$ с параметър a . Да се определят стойностите на a , за които уравнението:

А) е еквивалентно на $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} = x$;

Б) има един корен, който удовлетворява неравенството

$$(5x - 4)^2 + 2^2 > (4x - 3)^2 + (3x + 2)^2.$$

24. В квадрата $ABCD$ със страна 4 cm са избрани вътрешни точки E и F така, че $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAF = \sphericalangle CBE = \sphericalangle CDF = \alpha$ и лицето на $\triangle ABE$ е равно на 2 cm^2 .

А) Да се намери разстоянието от точка E до страната AB .

Б) Да се намери разстоянието от точка E до средата на страната AB .

В) Да се определи големината на ъгъл α .

Г) Да се намери $\sphericalangle AEF$.

Отговори

1. А); 2. А); 3. Б); 4. В); 5. В); 6. Б); 7. А); 8. Б); 9. В); 10. В); 11. Б); 12. В); 13. В); 14. В); 15. В); 16. А); 17. 1. $a = -3$; 2. $a = -2$; 3. $a = -1$; 18. (А) 4; (Б) 12; (В) $3x$ или $24 - 5x$; (Г) $5x$ или $24 - 3x$; (Д) 3; 19. А) 280 mm; Б) 48; 20. А) 600; Б) 32%; В) 40%.

РЕШЕНИЯ

21. А) Ако поръчката включва x големи и $2x$ малки опаковки, получаваме уравнението $4x + 6.2x = 80$. Оттук $x = 5$. Пет големи и 10 малки опаковки струват общо $5.5 + 10.6 = 85$ лв.

Б) Ако са продадени x големи и $70 - x$ малки опаковки, получаваме уравнението $6x + 5(70 - x) = 400$. Оттук $x = 50$. Продадени са 50 големи и 20 малки опаковки, т.е. $50.6 + 20.4 = 380$ сапуна.

В) Сапунът в голяма опаковка струва 1 лв., а в малка е 1,25 лв. Следователно общата сума е най-малка, когато големите опаковки са възможно най-много. Тъй като $74 : 6 = 12$ (ост. 2), големите опаковки са най-много 12. Но 12 големи опаковки включват 72 сапуна и оставащите 2 сапуна не са цяла опаковка. С 11 големи опаковки се получават $11.6 = 66$ сапуна и оставащите $74 - 66 = 8$ сапуна се получават с две малки опаковки. Поръчката е на стойност $11.6 + 2.5 = 76$ лв.

22. А) Ако $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = \beta$, от равнобедрения $\triangle AKM$ изразяваме $\sphericalangle AKM = \sphericalangle AMK = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, а от равнобедрения $\triangle BKL$ имаме

$\sphericalangle BKL = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$. Тогава $\frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) + 56^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 180^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 112^\circ$, откъдето $\sphericalangle C = 68^\circ$.

Б) От $\triangle AIB$ намираме $\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 124^\circ$.

В) Ъглополовящата през A в равнобедрения $\triangle AKM$ е симетрала на KM , а ъглополовящата през B в равнобедрения $\triangle BKL$ е симетрала на KL . Тогава точката I лежи на симетралите на MK и KL , откъдето $IM = IK = IL$. Следователно $\sphericalangle IKM = \sphericalangle IMK$ и $\sphericalangle IKL = \sphericalangle ILK$, откъдето намираме $\sphericalangle MIL = \sphericalangle IMK + \sphericalangle MKL + \sphericalangle ILK = 2 \sphericalangle MKL = 112^\circ$.

23. Уравнението $(x + a + 2)^2 + 5 = (a + x)(x - a) + (2a + 1)^2$ е еквивалентно на $(a + 2)x = (a - 2)(a + 2)$ и при $a \neq -2$ има корен $x = a - 2$, а при $a = -2$ е изпълнено за всяко x .

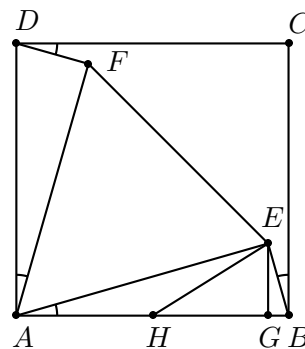
А) Тъй като $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} = x \iff 2(x-1) - (x-3) = 4x \iff x = \frac{1}{3}$,

това уравнение е еквивалентно на даденото при $a - 2 = \frac{1}{3}$, т.е. $a = \frac{7}{3}$.

Б) Решенията на неравенството $(5x - 4)^2 + 2^2 > (4x - 3)^2 + (3x + 2)^2$ са $x < 0,25$. При $a \neq -2$ коренът на уравнението е $a - 2$ и удовлетворява неравенство при $a - 2 < 0,25$, т.е. $a < 2,25$. Търсените стойности на a са $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2,25)$.

24. А) Построяваме търсеното разстояние $EG \perp AB$, $G \in AB$. От $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot EG \iff 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot EG$ намираме $EG = 1$ cm.

Б) Тъй като $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBE = 90^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle BAE = \alpha$, то в $\triangle AEB$ намираме $\sphericalangle AEB = 90^\circ$. (Аналогично и $\sphericalangle AFD = 90^\circ$.) В правоъгълния $\triangle ABE$ намираме медианата към хипотенузата $EH = \frac{1}{2}AB = 2$ cm.



В) В правоъгълния триъгълник HGE получихме, че $EH = 2EG$, откъдето следва, че $\sphericalangle GHE = 30^\circ$. Този ъгъл е външен за равнобедрения триъгълник AHE , откъдето намираме $\sphericalangle HAE = 15^\circ$, т.е. $\alpha = 15^\circ$.

Г) Тъй като $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ по втори признак, то $AE = AF$. От друга страна $\sphericalangle EAF = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$. Триъгълникът AEF е равнобедрен с ъгъл 60° , следователно е равностранен. Оттук $\sphericalangle AFE = 60^\circ$.

ТЕСТ

за подготовка за държавен
зрелостен изпит

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

- Числото $4^{12} \cdot 2^{-8} \cdot (\sqrt{2})^{-6} \cdot (\sqrt[3]{4})^{-18}$ е равно на:
А) 8 Б) 4 В) 2 Г) 1
- Ако $a = 2b + 1$ и $ab = 10$, стойността на израза $a^2 + 4b^2$ е:
А) 41 Б) 40 В) 36 Г) 30
- Ако $a = \sqrt{3} - 1$, то числото $\log_a(4 - 2\sqrt{3})$ е равно на:
А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4
- Числата a , b и c са различни от нула и в посочения ред са последователни членове на геометрична прогресия. Числата a , $2b$ и $3c$ в посочения ред са последователни членове на аритметична прогресия. Ако частното q на геометричната прогресия не е цяло число, то q е равно на:
А) $-\frac{1}{7}$ Б) $-\frac{2}{5}$ В) $-\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{3}$
- Ако 8% от числото a е $\frac{24}{5}$, то числото a е:
А) 24 Б) 40 В) 60 Г) 84
- За всяко естествено число n сумата от първите n члена на аритметична прогресия е $4n^2 + 3n$. Вторият член на прогресията е равен на:
А) 10 Б) 15 В) 20 Г) 21
- Стефан забравил последните две цифри от телефонния номер на Стоян, но запомнил, че те са различни помежду си. Вероятността Стефан да набере верния телефонен номер на Стоян от първия опит е:
А) $\frac{1}{40}$ Б) $\frac{1}{90}$ В) $\frac{1}{20}$ Г) $\frac{1}{21}$
- Модата на статистическия ред 9, 2, 9, 4, 3, 5, 3, 5, 6, 3, 7, 7, 8 е:
А) 3 Б) 4 В) 7 Г) 5
- В ромба $ABCD$ точката M е среда на страната AB и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Синусът на $\sphericalangle DMC$ е равен на:
А) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ Б) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ В) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Страните на триъгълник имат дължини 4, 5 и 6. Дължината на ъглополовящата на най-големия ъгъл на триъгълника е:

- А) $\frac{10}{3}$ Б) $\frac{13}{3}$ В) $\frac{14}{3}$ Г) $\frac{17}{3}$

11. Най-голямото число, което удовлетворява неравенството

$$\frac{1}{2 + 4\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{2 - 4\sqrt{4 - x^2}} > \frac{1}{x}, \text{ е:}$$

- А) -2 Б) 1 В) 2 Г) $\sqrt{3}$

12. Числата $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$ са корени на уравнението

- А) $x^2 - 4x + 2 = 0$ Б) $x^2 - 2x - 2 = 0$
 В) $x^2 + 4x - 2 = 0$ Г) $x^2 - 3x + 2 = 0$

13. Три числа със сума 2 образуват аритметична прогресия. Сумата от квадратите на тези числа е $\frac{14}{9}$. Да се намери най-голямото от трите числа.

- А) $\frac{3}{4}$ Б) 1 В) $\frac{5}{8}$ Г) $\frac{3}{8}$

14. Броят на решенията на системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \\ x - y = \frac{1}{2}xy \end{cases} \text{ е:}$$

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

15. Три различни числа a , b , c образуват в този ред геометрична прогресия, а числата a , $2b$, $3c$ образуват в този ред аритметична прогресия. Частното на геометричната прогресия е:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) 3 Г) 6

16. Решенията на уравнението $\sqrt{x - 2} = x - 4$ са:

- А) 3 Б) 3 и 6 В) 6 Г) 18

17. В окръжност с радиус R е вписан равнобедрен триъгълник. Сумата от дължините на основата и височината на триъгълника е $2R$. Дължината на височината на триъгълника е равна на:

- А) $\frac{2}{5}R$ Б) $\frac{3}{4}R$ В) $\frac{R}{2}$ Г) $\frac{4}{5}R$

18. Равнобедрен триъгълник с бедро 10 cm и основа 12 cm е вписан в окръжност. Радиусът на окръжността е равен на:

- А) 3 cm Б) 6 cm В) 4 cm Г) $6,25$ cm

19. В кутия има 6 бели и 5 червени карамфили. По случаен начин от кутията се изваждат 2 карамфила. Вероятността и двата карамфила да са червени е:

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{2}{11}$ В) $\frac{3}{11}$ Г) $\frac{5}{11}$

20. Диагоналът на равнобедрен трапец е 2 cm, а ъгълът между този диагонал и голямата основа на трапеца е 30° . Лицето на трапеца е:

- А) $\frac{3}{2} \text{ cm}^2$ Б) $\sqrt{2} \text{ cm}^2$ В) $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ Г) 4 cm^2

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Най-малката страна на триъгълник се отнася към радиуса на описаната около него окръжност както $6 : 5$, а другите му страни са съответно 20 cm и 21 cm. Да се намери най-малката страна на триъгълника.

22. Числата 2, $x - 2$, $y - 3$, взети в този ред, образуват геометрична прогресия, а числата 1, x , y , взети в посочения ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят числата x и y .

23. Средната аритметична стойност на пет броя данни е 5. Кое число трябва да се добави към данните така, че средната стойност да стане 6?

24. Да се реши системата

$$\begin{cases} xy = -6 \\ (x - 4)(y - 2) = -6. \end{cases}$$

25. В равнобедрен правоъгълен триъгълник е вписана окръжност с радиус $r = \sqrt{2} - 1$. Да се намери дължината на хипотенузата.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Страните на триъгълника ABC са $AB = c$, $AC = b$ и $CB = a$. Вътрешната ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ пресича описаната около триъгълника ABC окръжност в точката L . Да се намери отношението на лицата на триъгълника ABL и триъгълника ABC .

27. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) отношението на височината CD към основата AB е равно на $\sqrt{3} : 1$. Върху бедрото BC е избрана точката M така, че $CM = \frac{1}{3}BC$. Да се намери големината в градуси на $\sphericalangle MAB$.

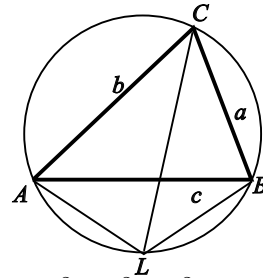
28. В урна има 10 червени топки и 9 бели топки. Да се намери вероятността от случайно избрани от урната три топки точно две топки да са бели.

ОТГОВОРИ

1. В); 2. А); 3. Б); 4. Г); 5. В); 6. Б); 7. Б); 8. А); 9. Б); 10. А); 11. В); 12. Б); 13. Б); 14. Г); 15. Б); 16. В); 17. А); 18. Г); 19. Б); 20. В); 21. 13 cm; 22. $x = 6$, $y = 11$; 23. 11; 24. $(-2, 3)$ и $(6, -1)$; 25. 2.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 26 ДО 28

26. Означаваме $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава $\sphericalangle LAB = \sphericalangle LBA = \frac{\gamma}{2}$. Имаме $S_{ABC} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$. Прилагаме синусовата теорема на $\triangle ALB$ и намираме $\frac{AL}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откъдето $AL = \frac{c \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma}$. Имаме $S_{ALB} = \frac{c \cdot AL}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}$.



От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Тогава

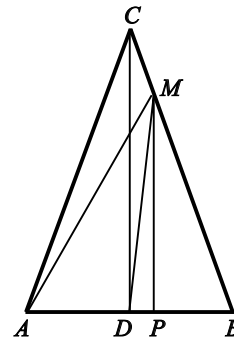
$$\frac{S_{ALB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{c^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}}{\frac{ab \sin \gamma}{2}} = \frac{c^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{ab \sin^2 \gamma} = \frac{\frac{c^2}{2}(1 - \cos \gamma)}{ab(1 - \cos^2 \gamma)} = \frac{c^2}{2ab(1 + \cos \gamma)} =$$

$$\frac{c^2}{2ab \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} = \frac{c^2}{(a + b + c)(a + b - c)}.$$

27. Построяваме $MP \perp AB$ ($P \in AB$). Тогава $AP = \frac{2}{3}AB$ и $MP = \frac{2}{3}CD$. От $\triangle APM$ ($\sphericalangle APM = 90^\circ$) имаме

$$\operatorname{tg} \sphericalangle MAP = \frac{MP}{AP} = \frac{\frac{2}{3}CD}{\frac{2}{3}AB} = \frac{CD}{AB} = \sqrt{3}.$$

Следователно $\sphericalangle MAP = 60^\circ$.



28. Общият брой на топките е 19. От 9 бели топките можем да изберем две по $C_9^2 = 36$ начина. За всеки от тези начини има по C_{10}^1 начина да се вземе червена топка. Две бели и една червена топка можем да изберем по $C_9^2 \cdot C_{10}^1 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10}{1} = 4 \cdot 9 \cdot 10 = 360$ начина. Всички възможни вземания на три топките от 19 са $C_{19}^3 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 17 \cdot 17$. Търсената вероятност е $P = \frac{C_9^2 \cdot C_{10}^1}{C_{19}^3} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 17 \cdot 19} = \frac{120}{323}$.

ФОНЕТИКА

БОЖИДАР БОЖАНОВ

Когато изучаваме езика, трябва да започнем с най-базовия компонент, а именно звуковете (когато говорим за реч, множественото число е „звукове“, а не „звуци“). Науката, която изучава звуковете (и по-точно – техните физически характеристики, свързани с произвеждане и възприемане), е фонетиката.

Кажете думата "лингвистика". Сега се опитайте да анализирате звук по звук това, което произнасяте. Какво представлява "л" и как се отличава от "в"? А "г" от "к"? Ако сте учили немски, знаете, че Мюнхен всъщност не се произнася така. Каква е разликата между "ю" и u-umlaut?

Тъй като става дума за физическо произвеждане на звукове, фонетиката разглежда детайлно структурата на устната кухина. Основните "участници" в учленяването на звуковете са зъбите, езикът, устните, небцето, гърлото и разбира се, гласните струни.

На база на тези физически характеристики звуковете се делят на различни групи в зависимост от мястото в устата, на което се учленяват, на особеностите на потока въздух, както и на източника на звука.

Знаем, че има два основни типа звукове - гласни и съгласни. Да видим как се различават и класифицират те.

При съгласните в устната кухина съществува някаква преграда и/или препятствие, което пречи на потока въздух и така създава специфично звучене. При гласните такива препятствия липсват и въздухът преминава свободно. Да започнем със съгласните.

Следват множество термини, като целта не е те да бъдат научени. Целта на следващите редове е читателят да осмисли движенията, които се извършват в устата му, докато говори.

В зависимост от мястото на учленяване, съгласните биват следните типове. Опитайте се да обръщате внимание на участието на езика, устните, зъбите, небцето, когато изговаряте звуковете (поне тези, които знаете как се изговарят).

- билабиални (двуустнени) – когато участват и двете устни. Например [b], [m], [p];
- лабиодентални (устнено-зъбни) – участва едната устна и зъбите ([f], [v]);
- интердентални – върхът на езика се поставя между зъбите (напр. в английските думи tooth и there);
- алвеоларни (венечни) – върхът на език опира във венеча, зад зъбите ([t], [d]);

- ретрофлексни – върхът на езика сочи право нагоре - тези звукове са характерни например за някои езици в Индия и Китай;

- палатални (небни) - задната част на езика опира в твърдото небце - това са *ш, ж, ч, дж, ѝ*;

- веларни – задната част на езика се опира в мекото небце ([k], [g]);

- увуларни (мъжечни) – задната част на езика се доближава до мъжеца. Пример за такъв звук е френското *p*;

- фарингални – началото на езика се поставя срещу фаринкса (намира се в гърлото);

- глотални – тези звукове се формират чрез глотиса. Често срещан е глоталният експлозив, например в семитските езици. В български може да се наблюдава в отрицателното *ъ-ъ*.

Тази класификация не е универсална и пълна. На места съществуват допълнителни подразделения, както и допълнителни, по-фино разграничени места на учленяване.

В зависимост от начина на учленяване:

- преградни – още наричани *експлозивни* – създава се преграда за потока въздух, която след това се освобождава. В момента на освобождаване се издава звук: [p], [k], [t]. При [p] преградата е плътното затваряне на устните. При [k] задната част на езика запущва гърлото.

- проходни – още наричани *фрикативни* – създава тесен канал (чрез поставяне на препятствия), през който въздухът може да премине ([f], [s]). При [f] препятствието е приближаването на устните и зъбите, при [s] – на езика до венеца зад зъбите.

- преградно-проходни – комбинация от предните два вида – започват като преградни, след което преградата се освобождава и остава тесния канал. Например *дж* и *ч*.

- сонорни – както при проходните, въздухът преминава сравнително свободно през устата. Разликата е, че при сонорните въздухът не е турбулентен, но това едва ли ни говори много. Затова е важно да се отбележи, че сонорните най-често са звучни и нямат беззвучни съответствия, за разлика от преградните и проходните. В български сонорните съгласни, както може би някои от вас са учили в 1. клас, са тези в думата *ламарина*, както и *й*. *Й* е от един определен тип сонорни звукове – полугласни. Напоследък в български навлиза още една полугласна, най-често в заемки от английски, като *суичер*, *туитър*, *уиски*. В азбуката няма буква у-кратко (*ћ*), поради което няма как да сме сигурни дали думата не се чете [у-и-ски] или [ћи-ски], ако не я знаем.

Гласните звукове понякога се разглеждат като подтип сонорен звук. Характеристиките са сходни - нетурбулентен въздух и звучност. При гласните няма прегради и въздухът преминава безпроблемно. Те се делят обаче

на групи по няколко признака: тесни/широки (още наричани високи/ниски), задни/предни, закръглени/незакръглени.

- тесни – в български това са *и, у, ъ*. Също се наричат високи, защото позицията езикът е повдигнат. Широки (или ниски) са *а, е, о*.

- предни – *е, и*, тъй като задната част на езика е изнесена напред, за разлика от задните *а, ъ, о, у*.

- закръглени – *о* и *у* се образуват чрез закръгляне на устните, за разлика от останалите гласни, които са незакръглени.

Може би прави впечатление, че горната система изглежда несиметрична. Веднъж имаме групи от по 3 гласни, два пъти от по 2 и 4. Това е, защото в български няма предни закръглени гласни. В немски и турски тези звукове се отбелязват с "ö" и "ü" и се произнасят също както *е* и *и*, но със закръгляне на устните. Ако българският притежаваше тези гласни, горните три групи щяха да бъдат симетрични и всяка щеше да съдържа по 4 звука. Графично тази система от гласни може да се представи като куб: www.personal.rdg.ac.uk/~llsling1/Logo.WWW/Sound.patterns/Pics/turkish.gif

Защо е необходимо това класифициране? Както ще разберем следващия път, когато разгледаме науката фонология, тези характеристики на звуковете са важни за взаимодействието помежду им.



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Дадени са турски думи и техните преводи.

güreşçi	борец	ormancı	горски
ikbalsız	неуспешен	sonsuz	безкраен
sözcü	говорител	içkici	пияница
isimsiz	безименен	takatsiz	безсилен
barutçu	барутчия	sütsüz	безмлечен
balıkcı	рибар	parasız	безпаричен
mumcu	свещар		

Задание 1. Две от горните думи са формирани по малко по-различен начин от останалите, поради това че техните корени са заемки от друг език. Кои са тези две думи?

Задание 2. Преведете на турски *млекар* и *безмълвен*.

Задание 3. Дадени са турски думи (които не са заемки от друг език): *dil* – език, *kalıp* – форма. Преведете на турски *лингвист*, *ням*, *леяр*, *безформен*.

Забележка. *ç* се чете като *ч*, *s* като *дж*, *ş* като *ш*. *ö* и *ü* се четат като *е* и *и*, но със закръглени устни. *ı* се произнася като *ъ*.

Задача 2. В баскския език има твърде много думи, заети от латински. Ето някои латински думи заедно с баскските, получени от тях.

латински	баскски	значение
CEDRUS	zedro	кедър
PERSONA	pertsona	личност
INJECTO	injektatu	инжектирам
FORUM	foro	форум
PROJECTO	proiektatu	проектирам
ABSOLUTUS	absolutu	абсолютен
ADJECTIVUM	adjektibo	прилагателно
INSTRUMENTUM	instrumentu	инструмент
ACACIA	akazia	акация
PULSO	pultsatu	пулсирам
CONVERSIO	konbertsio	преобразуване
TRAJECTORIA	traiektoria	траектория
CONSULTO	kontsultatu	съветвам се
ARCERA	artzera	линейка
CONCEPTUS	kontzeptu	разбиране
PERSPECTIVA	perspektiba	перспектива
CONVULSIO	konbultsio	конвулсия
CAPSULA	kapsula	капсула
TRANSCRIBO	transkribatu	преписвам
ALOPECIA	alopezia	плешивост
CALCIUM	kaltzio	калций

Напишете баскските думи, произлезли от следните латински:

INVERSIO инверсия, CONCERTUS концерт, SUBJECTUS субект,
 ABSURDUS абсурден, TRANSFORMO преобразувам,
 ASPERSIO пръскане.

(Буквата **z** в баскски се чете като българското *с*, а **s** е нещо средно между *с* и *ш*. Буквата **j** се произнася по много начини в зависимост от диалекта, в частност като *й*, *дъ*, *дж*, *ж*, *ш* или *х*.)

Забележка. Баскският език се говори от около 560 000 души в Испания до границата с Франция. Счита се, че той е изолиран (т.е. не е родствен на никой друг).

Срокът за представяне на решенията е 31.03.2014 г.

УСМИХНАТА МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЦИТЕ СЕ УСМИХВАТ

Жак Адамар (Jacques Salomon Hadamard) е френски математик, (1865 – 1963) и механик. Автор на множество фундаментални разработки по алгебра, геометрия, функционален анализ, диференциална геометрия, математическа физика, механика, хидромеханика и др. При него в Сорбоната е специализирал и известния български математик Георги Брандистиров. Ето две истории, свързани с великия математик.

Адамар бил страстен колекционер на папрати. Когато пристигнал в Москва, Андрей Колмогоров и Павел Александров го завели да се повозят на лодка. Изведнъж Адамар видял нещо на брега и помолил незабавно да отидат там. Той се преместил към носа на лодката и когато тя се приближила до брега, той така се развълнувал, че устремен към брега, паднал във водата. Оказало се, че там расте папрат от необичаен вид, който той търсил навсякъде от много години. Адамар бил безкрайно щастлив. Но трябвало незабавно да отиде на прием в президиума на Академията на Науките на СССР. Наложило се да го преоблекат в костюм на Павел Александров. Това обаче веднага се забелязало (Адамар бил чувствително по-висок). На приема всички питали Адамар: „Господин професоре, какво се е случило с Вас? Вие не сте в своя костюм – да не сте паднали във водата?“ На това Адамар гордо отвърщал: „Защо си мислите, че професор по математика не може да има никакви други приключения?“

Дъщерята на Адамар, Жаклин, описва стила на работа, към който се придържал баща ѝ така: „Той практически никога не е написал ни една дума. Казваше ми, че мисли без думи и че му е много трудно да преведе своите мисли с думи. Той само набързо записваше уравнения и то не на масата, а на висок дървен постамент. Можеше бързо да пише своите математически формули, разхождайки се из стаята. В продължение на много години ми се налагаше да слушам как майка ми записва фрази, нещо от рода на следното: „интегрирайки... пум-пум, ще видим, че уравнението... пум-пум-пум... приема вида... пум-пум-пум-пум“. Броя на „пум-пум-овете“ съответства на дължината на интервалите, оставяни за формулите. Майка ми, разбира се, не можеше да записва формулите, тъй като нейното математическо образование никога не е било по-високо от простата аритметика. Но затова пък в нея тя превъзхождаше баща ми, тъй като той никога не е използвал числа по-големи от четири – след това следваше n .“

Френският математик Манделброт на честването на стогодишнината на Адамар през 1966 г. разказва следната история. „Веднъж през войната на една лондонска улица, която току-що беше бомбандирана от „Фау-1“,

Адамар внезапно ми каза: „Манделброт, ако с мене се случи нещо, не забравяйте да разкажете, че всичко дължа на моята жена“. Сега аз изпълнявам неговата молба.“

В. Мазъя, Т. Шапошникова. „Жак Адамар“

ОТ УСТА — НА УСТА

Да разпределим парите

В общо жилище живеели леля Тройкина, г-жа Петоркина и г-н Безтопливов. Леля Тройкина хвърлила в общата печка три цепеници (парчета разцепено дърво, които се използват за горене), г-жа Петоркина сложила пет цепеници в печката, а г-н Безтопливов решил да се възползва от техния огън и им заплатил за това 8 рубли (парична единица в Русия). Как трябва да си разпределят парите леля Тройкина и г-жа Петоркина?

Яков Пелерман

Проблем с автомобил

- Имам голям проблем с автомобила.
- И какъв е проблемът ти?
- Виж, купих нов карбуратор, който икономисва 40% от бензина, системата на запалване, която дава 50% икономия на горивото, а новите свещи икономисват още 20% от бензина.
- Е, и какво?
- Ами ясно е – получаваме сбор 110%! И затова като потегля и измина няколко километра, резервоарът се препълва и бензинът започва да прелива.

ПАРАДОКСИ

Парадокс на всемогъщия

Може ли някой всемогъщ да създаде скала, толкова тежка, че даже той да не може да я повдигне? Ако може, значи той престава да е всемогъщ. Ако не може, значи не е всемогъщ...

Решения на задачите от брой 3/2013 г.

Наследство. Задачата има много решения. Едно от най-очевидните е единият брат да вземе десетте кози с по 2 козлета, а другите двама – по 5 кози с по 1 козле и 5 кози с по 3 козлета.

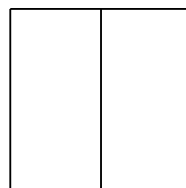
Ловци. Нека след подялбата всеки ловец е имал по x патрона. Тогава всички имат общо $3x - 3.4$ патрона, което е равно на x , т.е. $3x - 12 = x$. Решението на това уравнение е $x = 6$; тогава преди подялбата са имали 18 годни патрона.



4. клас

1. Да се намери стойността на израза $(345.9) : 5 + (147.9) : 7$.
2. Пипи влязла в сладкарницата и с третината от парите си купила бонбони. След това похарчила останалите 78 крони в магазина за играчки. Общо колко крони похарчила Пипи?
3. В класа на Петър момчетата са два пъти повече от момичетата. Когато Петър отсъства, момичетата са с 13 по-малко от момчетата. Колко са децата в класа на Петър?

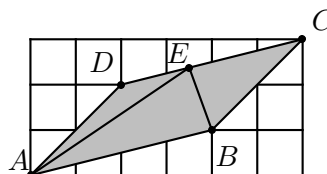
4. Квадратът на чертежа е съставен от два еднакви правоъгълника. Ако обиколката на правоъгълника е 108 см, да се намери обиколката на квадрата.



5. клас

5. Да се намери стойността на израза $\frac{0,3.1,4 + 0,6.2}{2,25.(10 - 5 : 2,5)}$.
6. Фирма произвежда комплекти с по 12 еднакви кубчета с ръб 5 см. Кубчетата във всеки комплект са плътно наредени в картонена кутия с форма на паралелепипед. Колко най-малко е повърхнината на кутията?

7. Върху страната CD на успоредник $ABCD$ е избрана точка E . Ако квадратчетата в мрежата имат страна 1 см, да се намери лицето на $\triangle ABE$.



8. Пипи обиколила три магазина и похарчила всички пари, които носела. С половината от парите си Пипи купила бонбони, след това с $\frac{1}{3}$ от останалите пари купила играчки, а с последните 18 крони платила новата си шапка. Общо колко крони похарчила Пипи?

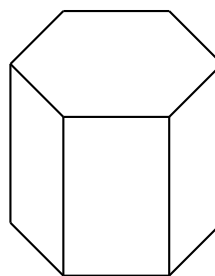
6. клас

9. Да се намери сборът на целите отрицателни числа, които са по-големи от x , където $(-2) : (-0,25) - 25 : (x + 3) = 13$.

10. Да се намери простото число p , ако е известно, че числото $p \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ има 90 делителя.

11. Иво, Краси и Стоян събрали общо 204 лв. Иво дал с 20 лв. повече от Краси, а Стоян дал с 20% по-голяма сума от Иво. Приблизително колко процента от общата сума е дал Краси?

12. Обиколката на основата на правилна шестоъгълна призма е с 20% по-голяма от обиколката на една от околните стени. Ако околната повърхнина на призмата е 225 кв.см, да се намери околният ръб.



7. клас

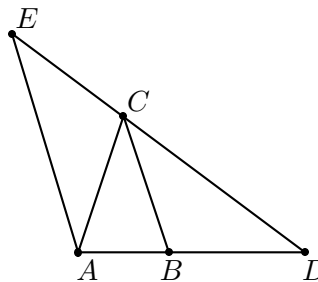
13. Да се решат уравненията $(x + 2)^2 = (4x - 1)^2$ и $|10x + a| = 4$. За коя стойност на параметъра a те са еквивалентни?

14. От две ниви с обща площ 500 дка фермер пожънал общо 222 тона пшеница. Средният добив от едната нива бил 400 кг/дка, а от другата – 500 кг/дка. Да се определи площта на всяка нива.

15. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC = BC$). На чертежа точката D лежи на правата AB и $BD = BC$, а точката E лежи на правата DC и $CE = CA$.

А) Ако $\angle ACB = 20^\circ$, да се намерят $\angle ADE$, $\angle AED$, $\angle BEC$ и $\angle ABE$.

Б) Ако правите BC и AE са успоредни, да се докаже, че триъгълникът ADE е равнобедрен.



за по-малките решения

на задачите от бр. 6/2013

76. Пресметнете $A = x + y + z$, ако $21496 - x = 8504$, $y - 2356 = 24356$, $z + 712 = 1720 - 712$.

Решение. Намираме $x = 12992$, $y = 26712$, $z = 296$ и $A = 40000$.

77. С колко трябва да се увеличи най-голямото число, записано с различни нечетни цифри, за да се получи най-малкото число, сборът на цифрите на което е 46?

Решение. Най-голямото число, записано с различни нечетни цифри, е 97531, а най-малкото число със сбор на цифрите 46 е 199999. Търсената разлика на двете числа е 102468.

78. Том пробягва разстоянието 1020 м за 5 минути, а Джери пробягва това разстояние за 3 минути. Ако стартират едновременно, с колко метра Джери ще изпревари Том за 2 минути?

Решение. Том изминава $1020 : 5 = 204$ метра в минута, а Джери $1020 : 3 = 340$ метра в минута. За една минута Джери ще изпревари Том с $340 - 204 = 136$ м, а за 2 минути – с $2 \cdot 136 = 272$ м.

79. Книгите в библиотеката на Хогвортс са подредени магически. На най-горния рафт има 7 книги, на този под него – 17 книги и т.н., на всеки следващ рафт книгите са с 10 повече, отколкото на горния. Хърмаяни иска да прочете всички книги в библиотеката, но засега е прочела само 107-те книги на най-долния рафт. Колко книги ѝ остават?

Решение. Непрочетените от Хърмаяни книги са

$$7 + 17 + 27 + 37 + 47 + 57 + 67 + 77 + 87 + 97 = 5 \cdot (7 + 97) = 5 \cdot 104 = 520.$$

80. Да се намери произведението $x \cdot (x - y)$, ако $1,1 \cdot (x - 3,3) = 1,43$ и $1,1 \cdot y - 3,3 = 1,43$.

Решение. Намираме $x = 4,6$, $y = 4,3$ и $x \cdot (x - y) = 4,6 \cdot 0,3 = 1,38$.

81. Диана иска да ушие покривка за правоъгълна маса с размери 1,5 м и 1 м. Покривката трябва да виси по 20 см от всяка страна, а за подгъване се предвиждат по 2 см. Колко квадратни метра плат са необходими за покривката?

Решение. Правоъгълното парче плат, необходимо за покривката, е с размери $1,5 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,02 = 1,94$ м и $1 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,02 = 1,44$ м и лице $1,94 \cdot 1,44 = 2,7936 \approx 2,80$ кв.м.

82. Петър и Иван заедно излезли от къщи и тръгнали към стадиона. Петър вървял със скорост 4,2 км/ч, а Иван бързал с 5,6 км/ч и пристигнал 10 минути по-рано от Петър. Колко метра е пътят от тяхната къща до стадиона?

Решение. След като Петър изминава 4,2 км за час, т.е. за 60 мин, то за 10 мин би изминал $4,2 : 6 = 0,7$ км. Следователно Петър е бил на 0,7 км от стадиона, когато Иван е пристигнал там.

Но Иван изпреварва Петър с $5,6 - 4,2 = 1,4$ км за час. Следователно, за да го изпревари с 0,7 км, са необходими $0,7 : 1,4 = 0,5$ часа. Получихме, че Иван е вървял 0,5 ч и оттук разстоянието до стадиона е $0,5 \cdot 5,6 = 2,8$ км, т.е. 2800 м.

83. Триъгълник има страна 48 см и височина към нея 0,5 дм. Намерете обиколката на успоредник с височини 0,12 м и 0,8 дм, който има лице, 1,2 пъти по-голямо от лицето на триъгълника.

Решение. Намираме $S_{\triangle} = (48 \cdot 5) : 2 = 120$ кв.см, откъдето следва, че $S_{\diamond} = 1,2 \cdot 120 = 144$ кв.см. Страните на успоредника са $a = 144 : 12 = 12$ см и $b = 144 : 8 = 18$ см, откъдето $P_{\diamond} = 2(12 + 18) = 60$ см.

84. Ако $45 : x - (-2) \cdot (-6) = -4,5 \frac{1}{4}$, да се намери неизвестното число x .

Решение. Имаме

$$45 : x - (-2) \cdot (-6) = -4,5 \frac{1}{4} \iff 45 : x - 12 = -21 \iff 45 : x = -9,$$

откъдето намираме $x = -5$.

85. Галя изрязала от лист А5 (с размери 148 мм × 210 мм) два кръга с диаметър 10 см и четири кръга с диаметър 4 см. Останалата част от листа била неизползваема. Приблизително колко процента от листа е използвала Галя?

Решение. Лицето на листа е $14,8 \cdot 21 = 310,8$ кв.см. Галя изрязала $2(\pi \cdot 25) + 4(\pi \cdot 4) = 66\pi \approx 66,3,14 = 207,24$ кв.см, приблизително $\frac{207,24}{310,8} \approx 67\%$ от листа.

86. Да се опрости изразът $\frac{(a \cdot a^n)^2 \cdot (b^3)^{n-1}}{(a^2 b^3)^n}$ и да се намери стойността му, ако $a = \frac{2^{61} + 2^{60}}{2^{61} - 2^{60}}$ и $27^b \cdot 3 = (81^2)^2$.

Решение. Преобразуваме равенството

$$27^b \cdot 3 = (81^2)^2 \iff (3^3)^b \cdot 3 = (3^4)^4 \iff 3^{3b+1} = 3^{16},$$

откъдето $3b + 1 = 16$ и намираме $b = 5$. Имаме $a = \frac{2^{60}(2+1)}{2^{60}(2-1)} = 3$. Стойността на израза

$$\frac{(a \cdot a^n)^2 \cdot (b^3)^{n-1}}{(a^2 b^3)^n} = \frac{(a^{n+1})^2 \cdot b^{3(n-1)}}{(a^2)^n (b^3)^n} = \frac{a^{2+2n} \cdot b^{3n-3}}{a^{2n} \cdot b^{3n}} = \frac{a^2}{b^3}$$

при $a = 3$ и $b = 5$ е $\frac{3^2}{5^3} = \frac{9}{125}$.

87. Еколози плавали с лодка по река Амазонка. В изследвания от тях участък потокът на реката се движел със скорост 5 метра в секунда. Един ден, докато обядвали на брега, еколозите забелязали, че реката носи огромен дънер. Три часа по-късно те отплавали по течението на реката и на втория час от плаването застигнали същия дънер. Определете скоростта, с която се движи лодката срещу течението на реката.

Решение. Скоростта на течението е 5 м/сек, т.е. $5 \cdot 3,6 = 18$ км/ч. От мястото на обяда до застигането си от лодката дънерът плавал 5 часа, за което време изминал $5 \cdot 18 = 90$ км. Същото разстояние лодката изминала за 2 ч, т.е. по течението тя се е движила със скорост $90 : 2 = 45$ км/ч. Оттук скоростта на лодката срещу течението е $45 - 2 \cdot 18 = 9$ км/ч.

88. Да се разложи на множители многочленът $(n-2)(n-1)(2n-3) + 6(n-1)^2 + 6n^2$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} & (n-2)(n-1)(2n-3) + 6(n-1)^2 + 6n^2 = \\ &= (n-1)[(n-2)(2n-3) + 6(n-1)] + 6n^2 = \\ &= (n-1)(2n^2 - n) + 6n^2 = (n-1)n(2n-1) + 6n^2 = \\ &= n[(n-1)(2n-1) + 6n] = n(2n^2 + 2n + n + 1) \\ &= n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

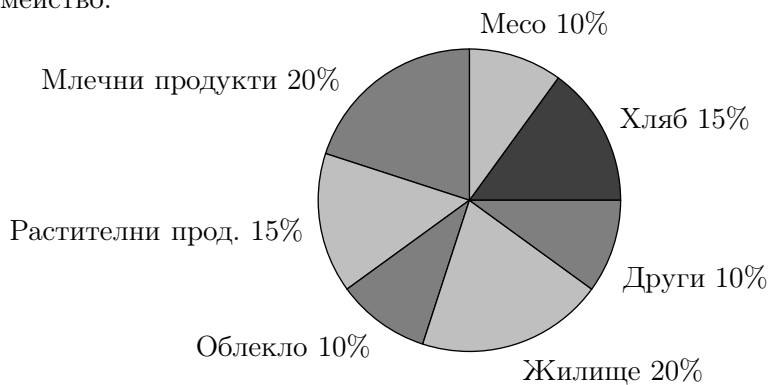
89. Организаторите на математическо състезание забелязали, че броят на участващите момчета и момичета се отнася както 4 : 3. Медали спечелили общо 31 ученика, като 25% от момичетата и 20% от момчетата получили медали. Колко деца са участвали в състезанието?

Решение. Нека в състезанието участвали $4x$ момчета и $3x$ момичета. Броят на медалистите е

$$25\% \cdot 3x + 20\% \cdot 4x = 31,$$

откъдето намираме $x = 20$. Броят на участниците в състезанието е $7x$, т.е. 140.

90. Кръговата диаграма представя разпределението на бюджета на едно семейство.



- А) Колко процента от доходите си това семейство харчи за храна?
 Б) Колко процента от семейните разходи за храна заема хлябът?
 В) Килограм хляб струва около 8 пъти по-евтино от килограм месо. Какво е отношението на количеството месо към количеството хляб на трапезата на това семейство?

Решение. А) Разходите за храна са $15\% + 20\% + 10\% + 15\% = 60\%$ от доходите на семейството.

Б) Разходите за хляб са 15% , а за храна – 60% от доходите. Следователно $\frac{15}{60} = 25\%$ от разходите за храна заема хлябът.

В) Семейството дава $15 : 10 = 1,5$ пъти повече пари за хляб, отколкото за месо. Освен това хлябът е 8 пъти по-евтин, следователно количеството хляб на трапезата е $1,5 \cdot 8 = 12$ пъти повече, отколкото количеството месо. Търсеното отношение е $1 : 12$.

8. клас

1. Да се докаже, че за всяко реално число a и всяко реално число b такива, че $a - b = 2$, е в сила равенството

$$a^3 - b^3 = 8 + 6ab.$$

2. Да се реши уравнението $|x - 1| + |x - 2| = 1$.
3. В трапеца $ABCD$ ъгъл ABD е равен на 30° . Правата l през точката C , успоредна на BD и перпендикулярна на AD , пресича продължението на бедрото AD в точката E така, че $AD : DE = m : n$. Да се определят дължините на основите на трапеца, ако средната му отсечка е равна на k .

9. клас

4. Да се реши неравенството $||x + 2| - 3| \leq 1$. Кои цели числа са решение на това неравенство?
5. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които двата корена на уравнението $2x^2 + (a + 1)x + 1 - a^2 = 0$ са равни на нула.
6. Да се реши уравнението $\frac{x + 3}{x + a} = 2a + 3$ и да се намерят стойностите на параметъра a , за които коренът на уравнението е по-голям от $-\frac{1}{2}$.

10. клас

7. Да се реши уравнението $\sqrt[3]{5 + x} - \sqrt[3]{x - 3} = 8$.
8. Да се намери лицето на триъгълника ABC , вписан в кръг с радиус 2, ако $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.
9. В триъгълника ABC е прекарана отсечката DE ($D \in AB$, $E \in BC$), успоредна на основата AB . Лицето на триъгълника ABC е равно на 8, а лицето на триъгълника BDE е 2. Да се намери отношението $\frac{DE}{AB}$.

11. клас

10. Да се реши неравенството $\frac{\log_3 x + 8}{\log_3 x + 2} \leq 4 \log_x 3 - 1$.

11. Да се реши системата

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

12. В триъгълника ABC точките K и E са среди съответно на страните BC и AC , точката M е пресечната точка на AK и BE . Освен това е известно, че $AK + BE = a$ и $\frac{\sin \sphericalangle MAB}{\sin \sphericalangle MEC} = t$. Да се намерят дължините на отсечките AK и BE .

12. клас

13. Ако $\cotg \alpha - \tg \alpha = 2m$ и $\frac{13\pi}{45} < \alpha < \frac{7\pi}{18}$, да се намери $\cos 2\alpha$.

14. Даден е триъгълникът ABC , в който $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{3}$, $\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{4}$ и $AB = c$. Разглеждаме всички правоъгълници $APQR$, за които точката B лежи на страната PQ , а C — на страната QR . Да се намери кой от тези правоъгълници има най-голямо лице и да се пресметне това лице.

15. Да се намери отношението на обема на кълбо, вписано в цилиндър, към обема на правилна триъгълна призма, вписана в този цилиндър.

на задачите от бр. 6/2013 г.

76. Автобус трябвало да измине разстоянието от град A до град B за 4 часа и 45 минути. Той тръгнал от град A и изминал 0,6 от цялото разстояние за 3 часа със скорост по-малка от определената. За да пристигне по разписание, шофьорът пресметнал, че трябва да увеличи скоростта си с 8,5 км/ч. Да се намери разстоянието между двата града.

Решение. Ако означим разстоянието между градовете A и B с x , за първите 3 часа автобусът е изминал 0,6 x км със скорост $\frac{0,6x}{3} = 0,2x$ км/ч. Останалото разстояние от 0,4 x км той изминал за $1\frac{45}{60}$ часа със скорост $(0,2x+8,5)$ км/ч. Следователно $(0,2x+8,5)1\frac{45}{60} = 0,4x$ или $1,4x+59,5 = 1,6x$. Оттук получаваме $x = 297,5$ или разстоянието е 297,5 км.

77. Да се опрости изразът $\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4}$.

Решение. Даденият израз има смисъл при $a \neq -2$. Преобразуваме дадения израз при условие $a \neq -2$ и получаваме

$$\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4} = \frac{a(a^2 - 1) + a(a-1)}{a|a+2| - a^2 + 4} = \frac{a(a+2)(a-1)}{a|a+2| - (a-2)(a+2)}.$$

1. Ако $a < -2$, имаме

$$\frac{a(a+2)(a-1)}{-a(a+2) - (a-2)(a+2)} = \frac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a+a-2)} = -\frac{a}{2}.$$

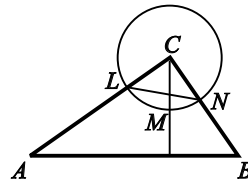
2. Ако $a > 2$, имаме

$$\frac{a(a+2)(a-1)}{a(a+2) - (a-2)(a+2)} = \frac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-a+2)} = \frac{a(a-1)}{2}.$$

Даденият израз е $-\frac{a}{2}$ при $a \in (-\infty, -2)$ и $\frac{a(a-1)}{2}$ при $a \in (-2, \infty)$.

78. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C и лице 6. За катетите му AC и BC е дадено, че $AC > BC$ и $AB = 5$. Окръжност с център C пресича височината към AB в средата ѝ – точката M , катета AC – в точката L , а катета BC – в точката N . Да се намери лицето на четириъгълника $ABNL$.

Решение. Означаваме с h_c височината към хипотенузата на дадения $\triangle ABC$. Изразяваме лицето на $\triangle ABC$ и получаваме $S_{ABC} = 6 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_c = \frac{5}{2} \cdot h_c$, откъдето $h_c = \frac{12}{5}$. Следователно $CL = CM = CN = \frac{h_c}{2} = \frac{6}{5}$. Получаваме $S_{ABNL} = S_{ABC} - S_{LNC} = \frac{132}{25}$.



79. Да се реши неравенството $x^2 - |x| - 12 < 0$.

Решение. 1. Ако $x \geq 0$, даденото неравенство приема вида $x^2 - x - 12 < 0$. Корени на уравнението $x^2 - x - 12 = 0$ са числата -3 и 4 , а решения на неравенството са числата $x \in (-3, 4) \cap [0, \infty) = [0, 4)$.

2. Ако $x < 0$, даденото неравенство приема вида $x^2 + x - 12 < 0$. Корени на уравнението $x^2 + x - 12 = 0$ са числата -4 и 3 , а решения на неравенството са числата $x \in (-4, 3) \cap (-\infty, 0) = (-4, 0)$. Всички решения на даденото неравенство са $x \in (-4, 0) \cup [0, 4) = (-4, 4)$.

Втори начин. Полагаме $|x| = y$ и получаваме неравенството $y^2 - y - 12 < 0$ с решения $y \in (-3; 4)$, откъдето $y \in [0; 4)$. Като вземем предвид полагането, получаваме $x \in (-4; 4)$.

80. Да се намерят стойностите на реалния параметър k , за които уравнението $|x^2 - 2kx + 2| = 2$ има точно три различни реални корена.

Решение. Тъй като $|x^2 - 2kx + 2| = 2 \iff x^2 - 2kx + 2 = \pm 2$, то уравнението $|x^2 - 2kx + 2| = 2$ има точно три различни реални корена тогава и само тогава, когато едното от уравненията $x^2 - 2kx + 2 = 2$ и $x^2 - 2kx + 2 = -2$ има двукратен корен, а другото има два различни реални корена. Имаме

$$x^2 - 2kx + 2 = 2 \iff x^2 - 2kx = 0, \text{ откъдето } x_1 = 0, x_2 = 2k.$$

При $k = 0$ имаме

$$x^2 - 2kx + 2 = x^2 + 2 > 0 \text{ за всяко } x \in \mathbf{R}, \text{ следователно } |x^2 - 2kx + 2| = x^2 + 2.$$

В този случай уравнението $|x^2 - 2kx + 2| = 2$ е еквивалентно на $x^2 = 0$ и има само един реален корен. Следователно $k \neq 0$ и $x^2 - 2kx + 2 = 2$ има два различни реални корена.

Уравнението $x^2 - 2kx + 2 = -2$ има двукратен корен точно когато дискриминантата на $x^2 - 2kx + 4$ е равна на 0. Оттук получаваме $4(k^2 - 4) = 0$, откъдето $k = \pm 2$.

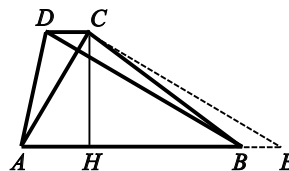
Наистина при $k = \pm 2$ корени на $|x^2 - 2kx + 2| = 2$ са числата $x_1 = 0$, $x_2 = 2k = \pm 4$, $x_3 = x_4 = \pm 2$.

81. Да се намери лицето на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с височина 12, ако диагоналите му AC и BD са взаимно перпендикулярни и $AC = 15$.

Решение. Построяваме $CE \parallel BD$ ($E \in AB$).

Тогава $\angle ACE = 90^\circ$, $BE = CD$ и $AE = AB + CD$. Построяваме $CH \perp AB$ ($H \in AB$). От правоъгълния $\triangle ACH$ намираме $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$. От $\triangle AHC \sim \triangle ACE$ следва, че $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AE}$, откъдето $AE = \frac{AC^2}{AH} = \frac{225}{9} = 25$. Следователно

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH = \frac{1}{2} AE \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150.$$



82. Да се реши системата $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Решение. Преобразуваме дадената система и получаваме

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x(1 + y) = (1 - y)(1 + y). \end{cases}$$

1. Ако $1 + y = 0$, т. е. $y = -1$, от първото уравнение на системата получаваме $x^2 + 5x + 1 = 0$, откъдето $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Тогава решенията на системата са $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$, $y_1 = -1$ и $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$, $y_2 = -1$.

2. Ако $1 + y \neq 0$, получаваме системата

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x = 1 - y, \end{cases}$$

откъдето намираме $x_3 = \frac{7 - \sqrt{21}}{14}$, $y_3 = \frac{7 + \sqrt{21}}{14}$ и $x_4 = \frac{7 + \sqrt{21}}{14}$, $y_4 = \frac{7 - \sqrt{21}}{14}$.

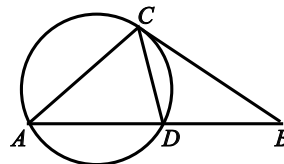
83. Даден е триъгълникът ABC , за който $AC = 9$ и $BC = 12$. Върху страната AB е избрана точката D така, че $CD = 6$ и окръжността, описана около триъгълника ADC , се допира до правата BC . Да се намери лицето на триъгълника ABC .

Решение. Тъй като BC е допирателна към описаната около $\triangle ADC$ окръжност, то

$$\angle BCD = \angle CAB = \frac{1}{2} \widehat{CD}.$$

Следователно $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ и тогава

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AC} \iff \frac{BD}{12} = \frac{12}{BA} = \frac{6}{9}.$$



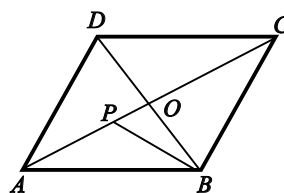
Следователно $AB = 18$.

За намиране на лицето на $\triangle ABC$ използваме Хероновата формула, т.е.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-9)(p-12)(p-18)} = \sqrt{\frac{81.455}{16}} = \frac{9\sqrt{455}}{4}.$$

84. В успоредника $ABCD$ ъглополовящата на $\angle ABD$ пресича диагонала AC в точката P така, че $AP : PC = 1 : 2$. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако $AC = 12$ и $BP = 4$.

Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD . Понеже O е средата на AC , от $AP : PC = 1 : 2$ следва, че $AP = \frac{1}{3}AC = \frac{2}{3}AO$ и $AP = 2PO = 4$. От свойството на ъглополовящата имаме $AB : BO = AP : PO = 2 : 1$, т. е. $AB = 2BO = BD$. От формулата за ъглополовящата в $\triangle ABO$ получаваме



$$BP^2 = AB \cdot BO - AP \cdot PO \iff 16 = \frac{AB^2}{2} - 8 \iff AB^2 = 32 + 16 = 48,$$

откъдето $AN = 4\sqrt{3}$.

От равенството $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ намираме $12^2 + 48 = 2(48 + AD^2) \iff 2AD^2 = 144 - 48 \iff AD^2 = 48$, т. е. $AD = 4\sqrt{3}$.

85. Да се реши неравенството $2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10$.

Решение. Полагаме $y = 2^{|x|}$, $y > 0$ и получаваме неравенството $\frac{y^2 - 10y + 16}{y} < 0 \iff y^2 - 10y + 16 < 0$, защото $y > 0$. Решенията на това неравенство са $y \in (2, 8)$. От $2 < 2^{|x|} < 8$ следва, че $1 < |x| < 3$, откъдето намираме, че $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.

86. Дадено е уравнението $(k+2)x^2 - 2kx - k = 0$, където k е реален параметър. Да се намерят:

- стойностите на k , за които даденото уравнение има реални корени;
- най-малката положителна стойност на израза $g(k) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, където x_1 и x_2 са реални корени на даденото уравнение, при $k \neq -2$.

Решение. а) При $k = -2$ уравнението има един реален корен $x = -\frac{1}{2}$. При $k \neq -2$ уравнението има реални корени точно тогава, когато дискриминантата му е неотрицателна, т. е.

$$D = 4k^2 + 4k(k+2) = 8k(k+1) \geq 0,$$

откъдето $k \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, \infty)$.

Следователно даденото уравнение има реални корени при $k \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$.

б) Като използваме формулите на Виет за даденото уравнение, получаваме $x_1 + x_2 = \frac{2k}{k+2}$, $x_1 x_2 = -\frac{k}{k+2}$. Тогава

$$g(k) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2.$$

Тогава

$$g(k) = \frac{-4k}{k+2} - 2 = \frac{8}{k+2} - 6.$$

Следователно $g(k) > 0 \iff \frac{8}{k+2} > 6 \iff -2 < k < -\frac{2}{3}$, откъдето $-2 < k \leq -1$. Но $k \leq -1 \iff k+2 \leq 1$. Тогава $\frac{8}{k+2} \geq 8$, следователно $g(k) \geq 2$.

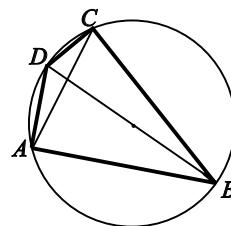
Равенство се достига при $k = -1$. Следователно най-малката положителна стойност на $g(k)$ е 2.

87. Около четириъгълника $ABCD$ е описана окръжност, за която диагоналът BD е диаметър. Намерете дължината на диагонала AC , ако $BD = 2$, $AB = \sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABD : \sphericalangle DBC = 2 : 1$.

Решение. От правоъгълния триъгълник BAD имаме $\cos \sphericalangle ABD = \frac{AB}{BD}$, т.е.

$$\cos \sphericalangle ABD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откъдето } \sphericalangle ABD = 30^\circ.$$

Понеже $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \sphericalangle ABD = 15^\circ$, то $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.



От синусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме $\frac{AC}{\sin \sphericalangle ABC} = 2R$, откъдето $\frac{AC}{\sin 45^\circ} = 2$. Следователно $AC = \sqrt{2}$.

88. Да се реши неравенството $\log_3 x + \log_x 3 < 3$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x > 0$ и $x \neq 1$. Полагаме $t = \log_3 x$ ($t \neq 0$). Тогава $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$ и получаваме неравенството $\frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0$ или $t(t-1)(t-2) < 0$. Решенията на това неравенство са $t \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$. От $\log_3 x < 0$ и $1 < \log_3 x < 2$ получаваме съответно $x \in (0, 1)$ и $x \in (3, 9)$. Следователно $x \in (0, 1) \cup (3, 9)$.

89. Да се определят стойностите на x , за които е дефинирана функцията $f(x) = \log_{\frac{4}{5}}(x^2 + 3x - 4) - 2\log_{\frac{4}{5}} x$ и да се намери най-малката стойност на $f(x)$.

Решение. Функцията $f(x)$ е дефинирана при $x^2 + 3x - 4 > 0$ и $x > 0$. Оттук намираме, че дефиниционната област на $f(x)$ е $x > 1$. Тогава

$$f(x) = \log_{\frac{4}{5}} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2} = \log_{\frac{4}{5}} \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right).$$

Разглеждаме функцията $g(x) = -4 \left(\frac{1}{x} \right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 1$, тя е квадратен тричлен относно $\frac{1}{x}$ и най-голямата ѝ стойност в интервала $(1, \infty)$ е $g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{25}{16}$.

Понеже логаритмичната функция при основа $\frac{4}{5} < 1$ е намаляваща, най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $(1, \infty)$ е

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \log_{\frac{4}{5}} \frac{25}{16} = \log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5} \right)^{-2} = -2.$$

90. Основата на пирамидата $ABCD$ е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C , $\angle CAB = 15^\circ$ и дължината на ъглополовящата CL е равна на $2\sqrt{2}$. Височината на пирамидата минава през точката L , а околната стена BCD сключва с основата на пирамидата ъгъл 60° . Да се намери обемът на пирамидата $ABCD$.

Решение. Прилагаме синусовата теорема за $\triangle ALC$ и получаваме

$$\frac{CL}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \iff AC = \frac{\sqrt{6}}{\sin 15^\circ} = 6 + 2\sqrt{3}.$$

Имаме $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ и

$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ и от правоъгълния $\triangle ABC$

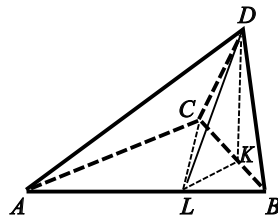
получаваме $AB = \frac{AC}{\cos 15^\circ} = 4\sqrt{6}$, $BC = AB \sin 15^\circ = 6 - 2\sqrt{3}$.

Нека $LK \perp BC$, $K \in BC$. От теоремата за трите перпендикуляра имаме $BC \perp DK$. Следователно ъгълът между околната стена BCD и основата е $\angle LKD = 60^\circ$. От равнобедрения правоъгълен $\triangle LKC$ намираме

$$LK = LC \cos 45^\circ = 2.$$

От правоъгълния $\triangle KLD$ определяме височината $DL = LK \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Тъй като $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 12$, то $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} DL = 8\sqrt{3}$.



С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

НОВИНИ	2
ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ	3
СЕДМИ ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, <i>Е. Колев, П. Бойваленов</i>	14
МНОГОЪГЪЛНИЦИ СЪС СЪИЗМЕРИМИ СТРАНИ И ЪГЛИ, <i>Акад. Любомир Чакалов</i>	26
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Д. Димитров</i>	33
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	41
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ	44
ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ И ПРИЕМЕН ИЗПИТ СЛЕД 7. КЛАС, <i>Н. Събева</i>	47
ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ, <i>Р. Русев</i>	53
ФОНЕТИКА, <i>Божидар Божанов</i>	57
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ПО ЛИНГВИСТИКА	59
УСМИХНАТА МАТЕМАТИКА	59
ЗАДАЧИ ЗА МАЛКИТЕ	63
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	65
ЗАДАЧИ	69
РЕШЕНИЯ	71

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70x100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 17.02.2014 г.
Печат „Дементра“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.