МАТЕМАТИКА

БРОЙ 6
2016 г.
ГОДИНА LV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

 ISSN 0204-6881

НЯКОЛКО ЗАДАЧИ ЗА ЗНАМЕНИТИТЕ ЧИСЛА НА РЕМЗИ

проф. дмн Николай Хаджииванов

Посвещавам на светлата памет на Руси Русев

Нека p и q са естествени числа. Английският математик Ф. Ремзи (1903–1930) доказал през 1930 г., че за всяка двойка естествени числа $p, q \geqq 2$ съществува такова естествено число n, че във всяка n-членна група от хора сигурно има група от p познати или група от q непознати. В негова чест най-малкото n с това свойство се нарича число на Ремзи $R(p, q)$.

Очевидно е, че $R(p, q) = R(q, p)$ и $P(p, 2) = p$.

През 1935 г. Ердьош и Секереш доказват, че

$$R(p, q) \leqq R(p-1, q) + R(p, q-1) \quad \text{при } p \geqq 3, q \geqq 3. \tag{1}$$

Едно допълнение към тази теорема дават Грийнвуд и Глисън през 1955 г.:

$$R(p, q) < R(p-1, q) + R(p, q-1), \tag{2}$$

ако $R(p-1, q)$ и $R(p, q-1)$ са четни.

Първо ще докажем

Теорема 1. *Ако $R(p-1, q)$ и $R(p, q-1)$ съществуват за $p \geqq 3$ и $q \geqq 3$, тогава съществува и $R(p, q)$ и удовлетворява* (1).

Доказателство. Нека K_n е n-членна група, в която няма нито p-орка познати, нито q-орка непознати. Да вземе произволен човек $v \in K_n$ и с $A(v)$ да означим множеството от познатите му в K_n, а с $B(n)$ – множеството от непознатите му. Очевидно в $A(v)$ няма $(p-1)$-орка познати, защото като прибавим към нея v, ще получим p-орка познати в K_n. Разбира се, в $A(v)$ няма q-орка непознати, защото такава няма в K_n. Следователно

$$|A(v)| \leqq R(p-1, q) - 1. \tag{3}$$

Аналогично достигаме до неравенството

$$|B(v)| \leqq R(p, q-1) - 1. \tag{4}$$

Следователно

$$n = 1 + |A(v)| + |B(v)| \leqq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1$$

и тогава

$$n \leqq R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1.$$

Поради това, ако $n \geqq R(p-1,q) + R(p,q-1)$, тогава в K_n има p-орка познати или q-орка непознати, така че $R(p,q)$ съществува и удовлетворява (1). Теоремата е доказана.

Тъй като $R(2,2)$ съществува ($R(2,2) = 2$), от теоремата с индукция по $h = p+q$ следва, че $R(p,q)$ *съществува за всяка двойка* (p,q), $p \geqq 2$, $q \geqq 2$.

Теорема 2. *Ако* $R(p-1,q)$ *и* $R(p,q-1)$ *са четни,* $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, *тогава е валидно неравенство* (2).

Доказателство. Да допуснем, че (2) не е вярно. От теорема 1 следва

$$R(p,q) = R(p-1,q) + R(p,q-1). \tag{5}$$

Нека $n = R(p,q) - 1$. От дефиницията на $R(p,q)$ следва, че има n-членна компания K_n без p-орка познати и q-орка непознати. От доказателството на теорема 1 е ясно, че за произволен $v_i \in K_n$ в $A(v_i)$ няма $(p-1)$-орка познати и q-орка непознати. Следователно

$$|A(v_i)| \leqq R(p-1,q) - 1 \tag{6}$$

и аналогично $|B(v_i)| \leqq R(p,q-1) - 1$. Имаме

$$n - 1 = |A(v_i)| + |B(v_i)| \leqq R(p-1,q) + R(p,q-1) - 2$$

и тъй като $n - 1 = R(p,q) - 2$ и е в сила (5), то в (6) трябва да има равенство, т.е. $|A(v_i)| = R(p-1,q) - 1$ за всяко i. От (5) следва, че n е нечетно, както и всяко $|A(v_i)|$. Следователно сумата $\sum_{i=1}^{n} |A(v_i)|$ е нечетна. От друга страна, всяко познанство $[v_i, v_j]$ има принос 1 към събираемите $A|(v_i)|$ и $|A(v_j)|$, така че тази сума е удвоеният брой на всички познанства. Полученото противоречие показва, че (2) е вярно и теоремата е доказана.

А сега ще намерим няколко числа на Ремзи.

Задача 1. $R(3,3) = 6$.

Решение. От (1) следва $R(3,3) \leqq 2.R(2,3) = 2.3 = 6$. Остава да докажем, че $R(3,3) > 5$. Наистина, ако разположим 5 души около кръгла маса и всеки познава само двата си съседа, тогава няма нито една тройка познати, нито тройка непознати, така че желаното неравенство е доказано.

Задача 2. $R(3,4) = 9$.

Решение. От (2) следва

$$R(3,4) < R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10.$$

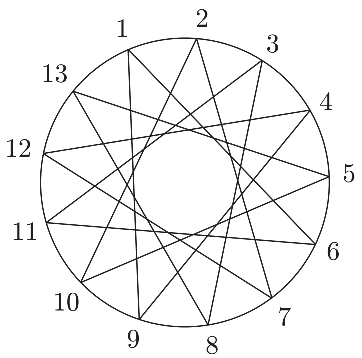
Остана да докажем, че има 8-членна компания без тройка познати и четворка непознати. Да разположим 8 души около кръгла маса на равни разстояния и всеки да познава само двата си съседа и седящия точно срещу него. Очевидно в тази компания няма тройка познати и четворка непознати.

Задача 3. $R(3,5) = 14$.

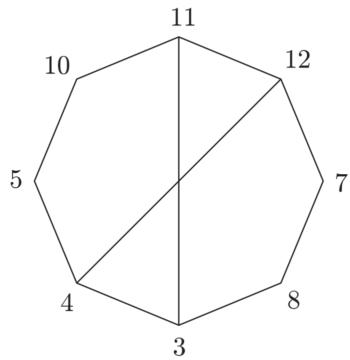
Решение. От (1) следва

$$R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14.$$

Остава да докажем, че има 13-членна компания без тройка познати и петорка непознати. На фиг. 1 е показана такава компания, като хората са изобразени с точките 1, 2, ..., 12, 13, а познанствата с отсечки, съединяващи двойките познати. Ясно е, че няма тройка познати с участието на 1, понеже познатите му са само 2, 13, 6 и 9, а никои двама от тях не се познават помежду си. Непознатите на 1 са 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12. Тяхната компания е изобразена на фиг. 2 и в нея очевидно няма четворка непознати. Следователно няма петорка непознати с участието на 1 в компанията от фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

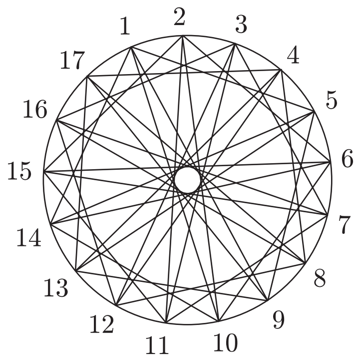
Тъй като останалите участници играят същата роля като 1, доказахме, че $R(3,5) > 13$ и следователно $R(3,5) = 14$.

Задача 4. $R(4,4) = 18$.

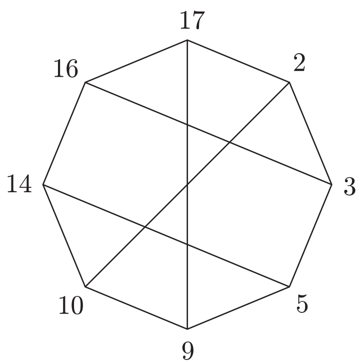
Решение. От (1) следва

$$R(4,4) \leqq 2R(3,4) = 2.9 = 18.$$

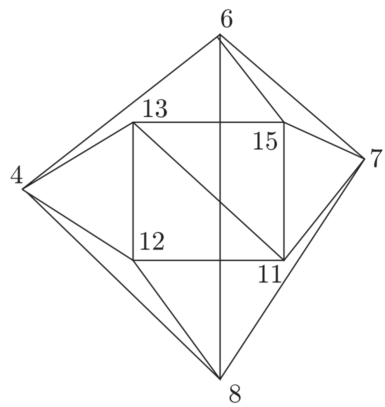
Ще докажем, че $R(4,4) > 17$. Компания без четворка познати и четворка непознати е изобразена на фиг. 3 и тя има 17 участника, които играят еднаква роля, така че е достатъчно да докажем, че няма нито четворка познати, нито четворка непознати с участието на 1. Познатите на 1 са 2, 3, 5, 9, 10, 14, 16 и 17 и между тях очевидно няма тройка познати (вж фиг. 4). Непознатите на 1 са 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 и 15 и между тях няма тройка непознати (вж фиг. 5).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Следователно няма нито четворка познати, нито четворка непознати с участието на 1. Задачата е решена.

За 85 години са открити много малко числа на Ремзи. Даже $R(5,5)$ не е известно. Като допълнителна литература може да използвате [1] и [2].

Литература

[1] Н. Хаджииванов. Числа на Рамзи. Изд. Народна просвета, София, 1982.

[2] Н. Хаджииванов. Екстремална теория на графите. Университетско издателство Св. Климент Охридски, София, 1990.

ТЕОРЕМА НА УИЛСЪН И НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Петър Бойваленков

Нека $p \geq 5$ е просто число и $k \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ е фиксирано. Както знаем, сравнението $kx \equiv 1 \pmod{p}$ има единствено решение. От избора на k следва, че това решение не е класът остатъци $\overline{1}$, нито пък класът $\overline{p-1}$.

Следователно съществува единствено число $k' \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$, за което $kk' \equiv 1 \pmod{p}$. Лесно се вижда, че $k \neq k'$ (в противен случай получаваме, че p дели $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, което е невъзможно при $k \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$).

Теорема 1. (Теорема на Уилсън) Естественото число p е просто тогава и само тогава, когато

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Доказателство. (*Необходимост*) Нека p е просто число. Трябва да докажем, че $(p-1)! + 1 \equiv 0 (\text{mod } p)$.

Твърдението е очевидно при $p = 2$ и $p = 3$. Нека $p \geq 5$. От горното разсъждение следва, че числата от множеството $\{2, 3, \ldots, p-2\}$ се разделят на $\dfrac{p-3}{2}$ непресичащи се двойки (k_1, k_1'), (k_2, k_2'), $\ldots$, $(k_{\frac{p-3}{2}}, k'_{\frac{p-3}{2}})$, за които

$$k_i k_i' \equiv 1 \pmod{p},$$

$i = 1, 2, \ldots, \dfrac{p-3}{2}$. Умножаваме всички тези сравнения и получаваме $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, от което след умножаване на двете страни с $p-1$ получаваме исканото.

(*Достатъчност*) Нека за естественото число p е изпълнено сравнението $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Очевидно $p > 1$. Да допуснем, че p не е просто. Тогава p има прост делител q, за който $1 < q < p$. Оттук следва, че $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{q})$, защото q дели p, и $(p-1)! \equiv 0 \pmod{q}$, защото q е един от множителите в $(p-1)!$. От последните две сравнения обаче следва, че $1 \equiv 0 \pmod{q}$, т.е. q дели 1 – противоречие.

Теорема 2. Нека p е нечетно просто число. Сравнението $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ има решение тогава и само тогава, когато $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Доказателство. (Необходимост) Нека $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ и да допуснем, че $p \equiv 3 \pmod{4}$. Тогава числото $\dfrac{p-1}{2}$ е нечетно и, повдигайки двете страни на сравнението $x^2 \equiv -1 \pmod p$ на степен $\dfrac{p-1}{2}$, получаваме $x^{p-1} \equiv -1 \pmod p$, което противоречи на Теоремата на Ферма.

(Достатъчност) Нека $p = 4k+1$. Тогава от Теоремата на Уилсън следва, че

$$0 \equiv (4k)!+1 = (2k)!(p-2k)(p-(2k-1))\dots(p-1)+1 \equiv [(2k)!]^2+1 \pmod p,$$

т.е. числото $x = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)!$ е решение на сравнението $x^2+1 \equiv 0 \pmod p$.

Задача 1. Да се докаже, че естествените числа $p \geq 3$ и $p+2$ са едновременно прости тогава и само тогава, когато $4[(p-1)!+1]+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$.

Решение. (*Необходимост*) Нека p и $p+2$ са прости числа. Лесно се вижда, че сравнението от Теоремата на Уилсън за p е еквивалентно на

$$4[(p-1)!+1]+p \equiv 0 \pmod p$$

(умножете по 4 и добавете p отляво).

От Теоремата на Уилсън за $p+2$ имаме $(p+1)!+1 \equiv 0 \pmod{p+2}$, откъдето след умножение по 2 и с помощта на $p(p+1) \equiv 2 \pmod{p+2}$ получаваме $4(p-1)!+2 \equiv 0 \pmod{p+2}$. Последното е еквивалентно на $4[(p-1)!+1]+p \equiv 0 \pmod{p+2}$ (добавете $p+2$ отляво).

Тъй като p и $p+2$ са взаимно прости, получаваме исканото

$$4[(p-1)!+1]+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}.$$

(*Достатъчност*) Нека $4[(p-1)!+1]+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$. Тъй като $(p,4)=1$, по модул p получаваме $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p$, т.е. p е просто число съгласно Теоремата на Уилсън.

Както по-горе по модул $p+2$ получаваме $2(p+1)!+2 \equiv 0 \pmod{p+2}$, което е еквивалентно на $(p+1)!+1 \equiv 0 \pmod{p+2}$, т.е. $p+2$ е просто.

Задача 2. (Австрийско-полско състезание 1996) Да се докаже, че не съществуват естествени числа k и m, за които $k!+48 = 48(k+1)^m$.

Решение. Да допуснем противното. От $48|k!$ следва, че $k \geq 6$. Тъй като $k=6$ и $k=7$ не са решения (Проверете!), всъщност имаме $k \geq 8$.

Ако $k+1$ не е просто число, то има прост делител p, за който $2 \leq p < k$ и следователно $p|k!$. Тогава p дели 48, откъдето следва, че $p=2$ или 3. Но p дели $\dfrac{k!}{48}+1 = 840.9\dots k+1$, което е невъзможно.

Следователно $k+1$ е просто число. От теоремата на Уилсън следва, че $k!+1$ се дели на $k+1$ и значи $k+1$ дели $47 = k!+48-(k!+1)$. Тогава

$k = 46$ и противоречие следва по модул 23^2; може и да проверим, че $\frac{46!}{48} + 1$ не е точна степен на 47; има достигане до противоречие и с два модула.

Задача 3. Да се докаже, че всички стойности на функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана чрез формулата

$$f(n) = 2 + (2n!) \pmod{n+1}$$

(с $a \pmod{m}$ е означен остатъкът на a при деление на m) са прости числа.

Упътване. Докажете с помощта на теоремата на Уилсън, че $f(n) = p$, ако $n + 1 = p$ е просто число, и $f(n) = 2$, ако $n + 1$ е съставно число.

Задача 4. Да се докаже, че ако p е нечетно просто число, то $(p-1)! \equiv p - 1 \pmod{p(p-1)}$.

Задача 5. (Обобщение на теоремата на Уилсън) Да се докаже, че ако p е просто число и $k < n$, $k \in \mathbb{N}$, то $(k-1)!(p-k)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$.

Решение. Твърдението е очевидно при $p = 2$. При нечетно просто p имаме от теоремата на Уилсън $-1 \equiv (p-1)! = (k-1)!k(k+1)\dots(p-1) = (k-1)![p-(p-k)][p-(p-k-1)]\dots(p-1) \equiv (k-1)!(p-k)!(-1)^{p-k} \pmod{p}$. Оттук очевидно следва исканото.

Задача 6. Да се докаже, че ако p е просто число и $k < n$, $k \in \mathbb{N}_0$, то $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$.

Решение. От формулата за биномните коефициенти и теоремата на Уилсън следва, че

$$k!(p-k-1)!\binom{p-1}{k} = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Остава да приложим предходната задача (с $k+1$ в ролята на k).

Задача 7. (ПМТ 2013) Нека p е нечетно просто число. Съществуват ли естествени числа

$$a, b_1, b_2, \dots, b_6 \in \{1, 2, \dots, p-2\},$$

за които да е изпълнено равенството

$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1} = \binom{p-1}{b_1}^2 + \binom{p-1}{b_2}^2 + \dots + \binom{p-1}{b_6}^2\ ?$$

Решение. Да предположим, че числа с исканите свойства съществуват. Да отбележим, че $a = p - 2$ не дава решение (Защо?). Тогава от предходната задача следва, че лявата страна на даденото равенство е сравнима с

$(-1)^a(-1)^{a+1} = 1$, а дясната с $(-1)^{2b_1} + (-1)^{2b_2} + \cdots + (-1)^{2b_6} = 6$. Оттук $-1 \equiv 6 \pmod p$, което означава, че $p = 7$.

Задача 8. Нека a и $n \geq 2$ са взаимнопрости естествени числа. Да се докаже, че n е просто тогава и само тогава, когато $a^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 \pmod p$.

Решение. Ако n е просто число, твърдението следва от теоремите на Ферма и Уилсън. Нека е изпълнено сравнението $a^{n-1}+(n-1)! \equiv 0 \pmod n$ и да допуснем, че n е съставно. Тогава за някое просто p имаме $p|n$, $p < n$ и $a^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 \pmod p$. Тъй като $p|(n-1)!$, получаваме $p|a$, което противоречи на $(a, n) = 1$. Следователно n е просто число.

Задача 9. Да се намерят всички естествени числа n, за които $2n + 7$ дели $n! - 1$.

Решение. Директна проверка при $n \leq 6$ дава решенията $n = 1$ и 5. При $n \geq 7$ числото $2n+7$ трябва да е просто, защото в противен случай ще има (нечетен) прост делител, по-малък от n и тогава този прост делител ще дели $n!$, откъдето ще дели и 1, противоречие.

Нека $2n + 7 = p \geq 23$ е просто число. Тогава условието е еквивалентно на $\left(\frac{p-7}{2}\right)! \equiv 1 \pmod p$. Оттук и от теоремата на Уилсън получаваме

$$-1 \equiv (p-1)! \equiv$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p-7}{2}} \left[\left(\frac{p-7}{2}\right)!\right]^2 \cdot \frac{p-5}{2} \cdot \frac{p-3}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+3}{2} \cdot \frac{p+5}{2} \pmod p.$$

Следователно $-64 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 225 \pmod p$. Сега при $p \equiv 1 \pmod 4$ получаваме $p|225 + 64 = 17^2$, което противоречи на $p \geq 23$, а при $p \equiv 3 \pmod 4$ имаме $p|225 - 64 = 7.23$, което дава решението $p = 23$.

Задача 10. (Контролно Румъния, 1986) Нека $p \geq 3$ е просто число и σ е пермутация на $(1, 2 \ldots, p-1)$. Да се докаже, че поне едно от числата $i\sigma(i) - j\sigma(j)$, $i \neq j$, се дели на p.

Решение. Да допуснем, че $i\sigma(i) - j\sigma(j)$ не се дели на p за никои i и j, $i \neq j$. Тогава числата $0, 1\sigma(1), 2\sigma(2), \ldots, (p-1)\sigma(p-1)$ образуват пълна система остатъци по модул p. Следователно

$$1\sigma(1)2\sigma(2)\ldots(p-1)\sigma(p-1) \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

От друга страна, очевидно имаме

$$1\sigma(1)2\sigma(2)\ldots(p-1)\sigma(p-1) = [(p-1)!]^2 \equiv 1 \pmod p,$$

противоречие.

ОКРЪЖНОСТИ ПРЕЗ ОРТОЦЕНТЪРА И ...ЕДНА СПЕЦИАЛНА ТОЧКА

Калин Върбанов, Емил Карлов

Ако ме попитате, ще Ви отговоря честно – има трудни геометрични задачи, при които не знаеш откъде да започнеш.

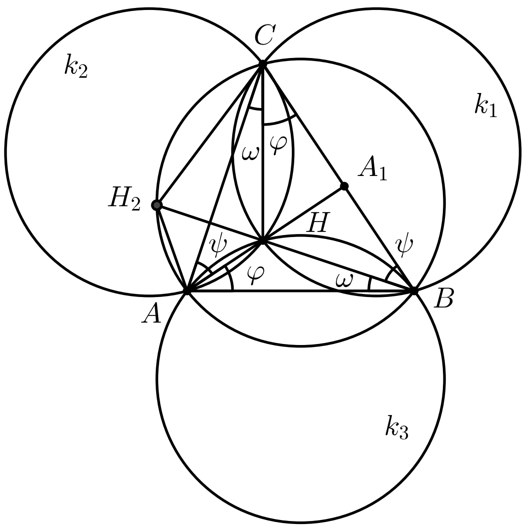
Чертая триъгълника, построявам дадените отсечки, а те отсечките, като въжета пристягат триъгълника. Всичко е неподвижно и липсва идея за решение.

Внезапно се появява окръжност. Забелязвам ъгли, които се измерват с дъга от окръжността. Чертежът оживява. Ъглите се движат, като коли по Цариградско шосе. При раздвижването се явяват идеи за решение на задачата.

Така че запомнете, окръжността е душата на триъгълника, а когато стане дума за окръжност, трябва да отбележим, че любима точка за всяка окръжност е ортоцентърът на триъгълника.

Наистина е така. Прочетете нататък.

Задача 1. През точката H минават три еднакви окръжности с радиус r, които две по две се пресичат в точки A, B и C. Да се докаже, че описаната окръжност около $\triangle ABC$ има радиус r.



Черт. 1

Решение. Ще докажем, че точката H е ортоцентър на ΔABC. Свързваме точката с точките A, B и C. Очевидно $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HCB = \varphi$, защото и двата ъгъла се измерват с дъга $\dfrac{\overset{\frown}{HB}}{2}$ (в k_3 и в k_1). По същата причина $\sphericalangle HBC = \sphericalangle HAC = \psi$ и $\sphericalangle HCA = \sphericalangle HBA = \omega$. Сумата от ъглите на $\triangle ABC$ е равна на $2(\varphi + \psi + \omega) = 180^\circ$.

Ако продължим отсечката AH до пресичането ѝ в точка A_1 с отсрещната страна BC, то сумата от ъглите

$$\sphericalangle HAB + \sphericalangle HBA + \sphericalangle HBC = \varphi + \psi + \omega = 90^\circ.$$

Следователно отсечката AH е височина. По същата причина BH и CH са височини.

Продължаваме височината BH до повторното ѝ пресичане с описаната окръжност около ΔABC в точка H_2. Очевидно $\sphericalangle H_2CA = \omega$ и ΔHCH_2 е равнобедрен (отсечката CA е височина и ъглополовяща в ΔHCH_2). Оттук $\Delta CH_2A \cong \Delta CHA$ според първи признак за еднаквост на триъгълници. Следователно описаните окръжности около тези триъгълници са с равни радиуси.

Твърдението в задача 1. позволява да докажем и обратното твърдение.

Задача 2. Даден е ΔABC. Ако точката H е от равнината на триъгълника и симетричните ѝ точки H_1, H_2 и H_3 съответно спрямо страните BC, CA и AB лежат на описаната около триъгълника окръжност, то точката H е ортоцентър на ΔABC.

Решение. Описваме окръжност k_2 около ΔACH. От дадената в условието симетрия следва, че $\Delta ACH \cong \Delta ACH_2$ (според III признак за еднаквост на триъгълници). Следователно окръжностите, описани около двата еднакви триъгълника ΔACH и ΔACH_2 са с равни радиуси. Аналогично окръжностите, описани около ΔABH и ΔBCH имат радиуси равни на радиуса на описаната окръжност около ΔABC.

Получихме конфигурацията от задача 1. Три окръжности с равни радиуси минават през точката H и две по две се пресичат в точките A, B и C. Тогава, според решението на задача 1., точката H е ортоцентър за ΔABC.

Така доказахме, че *единствената точка в равнината на даден триъгълник, на която симетричните ѝ точки, спрямо страните на триъгълника лежат на описаната му окръжност, е ортоцентърът на триъгълника.*

Всеки читател, който реши двете задачи от упражнението ще се убеди, че ортоцентърът на триъгълника има още едно *характеристично* свойство, т.е. свойство, което притежава само ортоцентърът на триъгълника.

Упражнение

Задача 3. За ΔABC точката H е ортоцентър. Да се докаже, че симетричните точки H_1, H_2 и H_3 на точката H съответно спрямо средите на страните BC, CA и AB лежат на описаната окръжност около триъгълника.

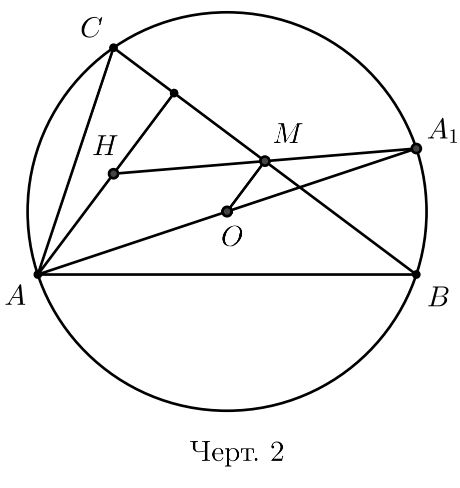
Задача 4. Даден е ΔABC. Ако точка H е от равнината на триъгълника и симетричните ѝ точки H_1, H_2 и H_3 съответно спрямо средите на страните BC, CA и AB лежат на описаната около триъгълника окръжност, то точката H е ортоцентър на триъгълника.

В тези две задачи е скрита още една уникалност на ортоцентъра на триъгълника:

Единствената точка в равнината на даден триъгълник, на която симетричните ѝ точки спрямо средите на страните на триъгълника лежат на описаната му окръжност е ортоцентърът на триъгълника.

Да продължим с ортоцентъра в следващата задача.

Задача 5. Триъгълникът ABC с ортоцентър H е вписан в окръжност k и точката M е среда на страната BC. Продължаваме отсечката HM, след точка M, докато правата HM пресече описаната окръжност k в точка A_1. Да се докаже, че отсечката AA_1 е диаметър в окръжността k.



Черт. 2

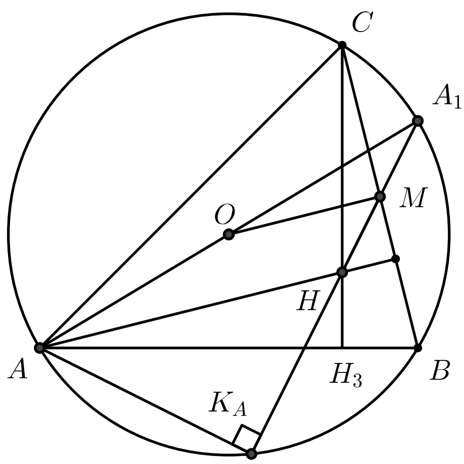
Решение. Нека точка O е център на окръжността k. Построяваме диаметъра AA_0 на окръжността k.

Отсечката OM е средна отсечка в ΔAHA_0, защото точката O е среда на страната AA_0 и отсечката OM е успоредна на страната AH (и двете отсечки OM и AH са перпендикулярни на страната BC на триъгълника).

Следователно точките H, M и A_0 лежат на една права т.е. точката A_0 съвпада с точката A_1 от условието.

Забележка. Тук е и решението на задача 3 от упражнението, защото точката M е среда на отсечката HA_1.

Задача 6. За триъгълника ABC ($AC \neq AB$) така избираме точка K_A от описаната му окръжност, че $AK_AM = 90^\circ$, като точката M е среда на страната BC на триъгълника. Ако правата K_AM пресича височината CH_3 на триъгълника в точка H, да се докаже, че точката H е ортоцентър за $\triangle ABC$.



Черт. 3

Решение. Продължаваме отсечката K_AH докато пресече описаната окръжност в точка A_1. Знаем, че AA_1 е диаметър, защото $\sphericalangle AK_AM$ е прав. От задача 3. следва, че ортоцентърът H лежи на правата A_1M. От друга страна ортоцентърът лежи на височината CH_3, следователно ортоцентърът H е пресечната точка на правите K_AH и CH_3.

Предлагаме Ви няколко задачи за упражнение, които ще подчертаят важността на точката K_A от описаната около триъгълника окръжност, която точка „гледа“ под прав ъгъл медианата AM на триъгълника. За краткост да наречем точката K_A *специална точка* за медианата AM.

Задача 7. За остроъгълния триъгълник ABC отсечките AA_1 и BB_1 са височини. Нека точката M е среда на страната AB. Около триъгълниците AA_1M и BB_1M описваме окръжности. Да се докаже, че

а) двете окръжности се пресичат повторно в специалната точка K_C за медианата CM;

б) отсечката K_CM е ъглополовяща на $\sphericalangle AK_CA_1$;

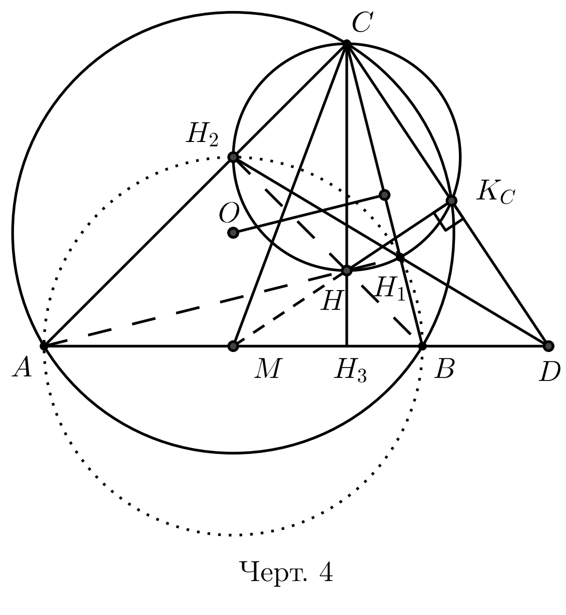
в) правата K_CA минава през симетричната точка на A_1 спрямо правата, определена от височината през върха C.

Задача 8. За остроъгълния триъгълник ABC отсечките AA_1 и BB_1 са височини, които се пресичат в точка H. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника ABC и описаната окръжност около четириъгълника CA_1HB_1 се пресичат в специалната точка K_A за медианата от върха A.

Задача 9. За остроъгълния триъгълник ABC отсечките AA_1 и BB_1 са височини и правата A_1B_1 пресича продължението на страната AB в точката D. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника ABC пресича правата CD в специалната точка K_C за медианата от върха C.

Тук ще разгледаме една известна задача, която най-неочаквано се решава с помощта на специалната точка.

Задача 10. (Конкурсна задача от сп. Квант, М 2187) Височините AH_1 и BH_2 на остроъгълния триъгълник ABC се пресича в точка H. Правата H_1H_2 пресича продължението на страната AB в точка D, а точката M е среда на страната AB. Да се докаже, че правите DH и CM са перпендикулярни.



Черт. 4

Решение. Спускаме перпендикуляр HK_C от ортоцентъра H към отсечката CD. Ще докажем, че точката K_C лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност. За тази цел е достатъчно да покажем верността

на равенството
$$DK_C \cdot DC = DA \cdot DB.$$
Очевидно
$$DK_C \cdot DC = DH_2 \cdot DH_1,$$
защото точките H, K_C, C, H_2, H_1 лежат на една окръжност с диаметър CH. От друга страна
$$DH_2 \cdot DH_1 = DA \cdot DB,$$
защото точките H_2, H_1, A и B лежат на една окръжност с диаметър AB.

След като доказахме, че точката K_C лежи на описаната окръжност около $\triangle ABC$, следва, че K_C е специалната точка за медианата CM, защото K_C „гледа“ отсечката CM под прав ъгъл. От задача 4. получаваме, че точките M, H и K_C лежат на една права, т.е. MK_C е височина в $\triangle DMC$ и като добавим, че CH_3 е също височина в $\triangle DMC$, то следва, че точката H е ортоцентър и за триъгълника DMC или че DH е перпендикулярна на CM като трета височина в триъгълника.

Още упражнения

Задача 11. На продълженията на височините AH_1 и BH_2 на остроъгълния триъгълник ABC са избрани точки P и Q съответно след H_1 и H_2 така, че $\sphericalangle PAQ = 90^\circ$. От точката A е спуснат перпендикуляр към правата PQ, който я пресича в точката E. Да се докаже, че $\sphericalangle CEB$ е прав.

Задача 12. Точките M и N лежат на страните BC и CD на квадрата $ABCD$ и $\sphericalangle MAN = 45^\circ$. Ако отсечката AM пресича диагонала BD в точка P, а отсечката AN пресича диагонала BD в точка Q, да се докаже, точките M, P, Q, N и C лежат на една окръжност.

Задача 13. Построяваме височините AH_1 и BH_2 на остроъгълния триъгълник ABC и допирателните t_2 и t_3 в точките B и C към описаната окръжност k на триъгълника. Ако правата H_1H_2 пресича допирателните t_2 и t_3 в точки M и N и $P = t_2 \cap t_3$, да се докаже, че описаната окръжност около $\triangle MNP$ допира окръжността k в специалната точка K_C за медианата през върха C.

Очакваме читателят да открие и други свойства на тази специална точка.

ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ОБЩИНСКИЯ КРЪГ НА РЕПУБЛИКАНСКАТА ОЛИМПИАДА

През учебната 2016 — 2017 година ще се проведе 66-тата олимпиада по математика — един истински празник за ценителите на математиката. То-ва е най-масовото математическо състезание, в което според олимпийския принцип истинската награда е самото участие.

От безценната съкровищница материали, които остави Руси Русев, Ви предлагаме задачи за подготовка за общинския кръг на олимпиадата.

4. клас

1. Придворен гадател всяка вечер предсказвал дали ще има дъжд през следващия ден. Когато прогнозата се сбъднела, царят награждавал гадате-ля с 4 жълтици, а когато не се сбъднела, го глобявал с 5 жълтици. Оказало се, че за 90 дни гадателят не е спечелил и не е изгубил нито една жълтица. Колко пъти се е сбъднала прогнозата му?

2. В киносалон подредили първоначално столовете на ред по 12, а после ги разместили и поставили на всеки ред по 8 стола. Колко точно са столовете в салона, ако са повече от 100 и по-малко от 130?

5. клас

1. Кое е най-малкото естествено число n, за което изразът

$$31 + n + 17 + n + 39 + n$$

се дели както на 5, така и на 7?

2. Квадрат има лице 36 кв.см. Всяка от страните му е разделена на 3 равни части. Да се намери дължината x см на всяка от тези части. От върховете на квадрата са изрязани 4 равнобедрени правоъгълни триъгълници с катети x см. Да се намери лицето на останалата част.

6. клас

1. Да се заменят с подходящи цифри звездичките в равенството

$$*2*\ .45 = (**)^2.$$

2. Три момчета и четири момичета изяждат по-малко от 32 кюфтета, а четири момчета и три момичета — точно 32 кюфтета. По колко кюфтета изяжда всяко дете?

7. клас

1. Даден е триъгълникът ABC и такива точки M и N съответно върху страните AB и BC, че $AM = 2.MB$ и $BN = NC$. Отсечките AN и CM се пресичат в точката P. Да се намери лицето на четириъгълника $MBNP$, ако лицето на триъгълника ABC е 30 кв. см.

2. Руси и Христо трябва да преведат общо 70 страници текст от чужд език на български. Руси разделил страниците между двамата, но Христо се възмутил, че на него се пада прекалено много и дал една трета от своята част на Руси. Така частта на Руси се увеличила три пъти. По колко страници ще превежда всеки според последното разпределение?

8. клас

1. Общият първоначален капитал на две фирми се увеличил 3 пъти, като капиталът на първата фирма не се изменил, а този на втората се увеличил 4 пъти. Да се намери отношението на първоначалните капитали на фирмите. Колко пъти трябва да се увеличи първоначалният капитал на първата фирма, така че, ако капиталът на втората остане непроменен, общият капитал да се увеличи 4 пъти?

2. В равнобедрения триъгълник ABC точката F е средата на основата AB, а точката K — средата на AC. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако $KF \perp AC$.

9. клас

1. Да се реши уравнението $x|x-4|+a=0$.

2. Даден е триъгълникът ABC. Точките P и Q делят AC на три равни части, Q е между P и C. Средите на отсечките AB и BC са означени съответно с M и N,а средите на отсечките NQ и PN са означени съответно с S и T. Да се докаже, че точките S и T лежат в различни полуравнини спрямо CM и са равноотдалечени от CM.

10. клас

1. Да се реши уравнението $\sqrt{\log_x(5x)}.\log_5 x=-\sqrt{2}$.

2. Да се намери за кои стойности на параметъра a уравнението

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

има четири различни решения.

11. клас

1. Да се намери най-малкото разстояние от точката $A\ (3,0)$ до графиката на функцията $y=|2x-2|$.

2. В равнобедрения триъгълник ABC с основа AB точката D дели страната BC в отношение $1:3$, считано от върха B, а точката E е среда на отсечката AD. Ако $CE=\sqrt{7}$ и $BE=3$, да се намери лицето на триъгълника ABC.

12. клас

1. Да се намерят стойностите на параметъра m, за които графиката на функцията $f(x)=m+2\sin x$ в интервала $[0,2\pi]$ се допира до правата $y=3$.

2. Да се намери най-голямата стойност на обема на пирамидата $SABC$ при следните условия:

$$SA\leqq 4,\ SB\geqq 7,\ SC\geqq 9,\ AB=5,\ BC\leqq 6,\ AC\leqq 8.$$

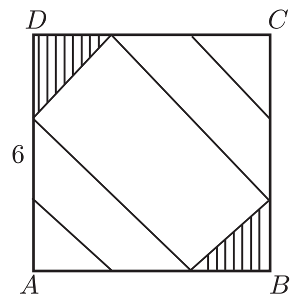
ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ и РЕШЕНИЯ

4.1. Ако гадателят познае 5 пъти, печели толкова жълтици, колкото губи, ако 4 пъти не познае (защото $5.4 = 4.5$). Аналогично, ако 50 пъти е познал, а 40 пъти не е, той печели толкова, колкото губи. И понеже $50 + 40 = 90$, отговорът на задачата е 50. Решението е единствено: лесно се вижда, че ако гадателят познае повече от 50 пъти, ще спечели жълтици, а в противен случай ще загуби.

4.2. Столовете в салона са 120.

5.1. Числото $31 + n + 17 + n + 39 + n = 3n + 87$ се дели на 3, на 5 и на 7. Най-малкото естествено, число по-голямо от 87, което се дели на 5, 7 и 3, е 105. Следователно $n = 6$.

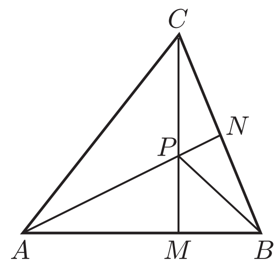
5.2. Тъй като лицето на квадрата е $36 = 6.6$, то страната му е 6 см. Тогава $x = 2$ см. Така от върховете A, B, C и D на квадрата са изрязани равнобедрени правоъгълни триъгълници с бедра по 2 см. Да преместим триъгълника с връх B до положението на чертежа, при което основата на преместения триъгълник съвпадне с основата на триъгълника с връх D. Получава се квадрат със страна 2 см и лице 4 кв.см. Тогава сборът от лицата на четирите изрязани триъгълника е 8 кв.см, а лицето на останалата част е 28 кв.см.



6.1. Последната цифра на първия множител очевидно е 5. Тъй като $45 = 3^2.5$, първият множител трябва да е нечетна степен на 5, т.е. да се дели на $5^3 = 125$ и частното при това деление да е точен квадрат. Тъй като първият множител е трицифрен, това е възможно само при частно 1. Следователно единственото решение е $125.45 = (75)^2$.

6.2. Нека момчетата изяждат по x кюфтета, а момичетата — по y кюфтета. Тогава $4x + 3y = 32$. Понеже x и y са естествени числа, следва, че y се дели на 4. Ако $y \geqq 8$, то $4y \geqq 32$, което е невъзможно. Така $y = 4$. Тогава $4x + 3.4 = 32$ и $x = 5$. При това $3.5 + 4.4 = 31 < 32$. Момчетата изяждат по 5 кюфтета, момичетата — по 4.

7.1. От $CN = NB$ следва, че $S_{BNP} = S_{PNC}$. Означаваме $S_{MBP} = x$. Тогава $S_{AMP} = 2S_{MBP} = 2x$ и $S_{APC} = S_{ANC} - S_{PNC} = S_{ABN} - S_{BNP} = S_{ABP} = 3x$. Следователно $S_{AMC} = \dfrac{2}{3}S_{ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot 30 = 20$ кв.см, но $S_{AMC} = S_{APC} + S_{ABP} - S_{MBP} = 5x$. Тогава от $5x = 20$ намираме $x = 4$.



Следователно $S_{PBN} = \dfrac{1}{2}(30 - 20 - 4) = 3$ кв.см и $S_{MBNP} = 4 + 3 = 7$ кв.см.

7.2. Ако означим броя страници, които Руси си е определил да преведе с x, то за Христо остават $70 - x$. Той от своя страна е дал на Руси $\dfrac{1}{3}(70 - x)$ и тогава

$$x + \frac{1}{3}(70 - x) = 3x.$$

Решението на това уравнение е $x = 10$ страници, които е искал да превежда Руси, но е превеждал 30 страници, а Христо — 40 страници.

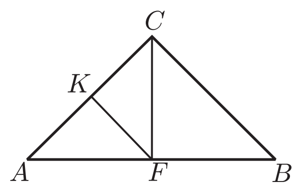
8.1. Означаваме с x и y първоначалните капитали съответно на първата и втората фирма. Тогава от условието получаваме уравнението

$$x + 4y = 3(x + y) \iff y = 2x.$$

Следователно отношението на първоначалните капитали е $1 : 2$. Сега да приемем, че капиталът на първата фирма трябва да се увеличи k пъти, за да се получи общо увеличение на общия капитал 4 пъти. Тогава достигаме до уравнението

$$kx + y = 4(x + y).$$

Като вземем предвид, че $y = 2x$, намираме $kx + 2x = 4(x + 2x)$, откъдето $kx = 10x$. Тъй като $x \neq 0$, то $k = 10$.



8.2. Щом K е средата на AC и $KF \perp AC$, то FK е височина и медиана в $\triangle ACF$, следователно този триъгълник е равнобедрен. Така получаваме $CF = AF = BF$, т.е. медианата CF в $\triangle ABC$ е равна на половината от страната AB. Тогава $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, така че $\triangle ABC$ е правоъгълен и равнобедрен. Ето защо $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC = 45^\circ$.

9.1. 1. Ако $x \geqq 4$, то $|x - 4| = x - 4$ и даденото уравнение приема вида $x^2 - 4x + a = 0$. Корените на полученото уравнение са: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - a}$. Тъй като $2 \pm \sqrt{4 - a} \geqq 4$, то при $a \leqq 0$ решението на даденото уравнение е $x = 2 + \sqrt{4 - a}$.

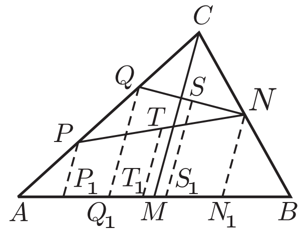
2. Ако $x < 4$, тогава $|x - 4| = -x + 4$ и даденото уравнение приема вида $x^2 - 4x - a = 0$, откъдето $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}$.

При $-4 < a < 0$ имаме $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}$.

При $a = 0$ имаме $x_1 = 0, x_2 = 4$.

При $a > 0$ имаме $x = 2 - \sqrt{4 + a}$.

9.2. Построяваме правите NN_1, QQ_1, PP_1, SS_1 и TT_1, успоредни на CM, точките N_1, S_1, T_1, Q_1 и P_1 лежат на AB. Тъй като NN_1 е средна отсечка в $\triangle MBC$, PP_1 — средна отсечка в $\triangle AQ_1Q$ и QQ_1 — средна отсечка в трапеца PP_1MC, то $MN_1 = N_1B = \dfrac{AB}{4}$ и $AP_1 = P_1Q_1 = Q_1M = \dfrac{AB}{6}$.



Като вземем предвид, че $P_1T_1 = T_1N_1$, защото TT_1 е средна отсечка в трапеца P_1N_1NP, заключаваме, че

$$P_1T_1 = \frac{1}{2}P_1N_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6}AB + \frac{1}{4}AB\right) = \frac{7}{24}AB < P_1M = \frac{1}{3}AB,$$

$$N_1S_1 = \frac{1}{2}N_1Q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}AB + \frac{1}{6}AB\right) = \frac{5}{24}AB < N_1M = \frac{6}{24}AB.$$

Тогава S_1 и T_1 , а следователно и S и T лежат в различни полуравнини спрямо CM. Имаме

$$T_1M = P_1M - P_1T_1 = \frac{AB}{3} - \frac{7}{24}AB = \frac{AB}{24};$$

$$S_1M = N_1M - N_1S_1 = \frac{AB}{4} - \frac{5}{24}AB = \frac{AB}{24}.$$

Тъй като $SS_1 \parallel CM \parallel TT_1$ и $S_1M = T_1M$, то точките S и T са еднакво отдалечени от CM.

10.1. Единственото решение на уравнението е $x = 0{,}04$.

10.2. Ако $a = 0$, даденото уравнение приема вида $|x+1| = 1$ и има само два различни корена ($x_1 = 0$, $x_2 = -2$). При $a \neq 0$ полагаме $|x+1| = t$ и получаваме квадратното уравнение

$$2at^2 - t + 1 = 0.$$

Уравнението $|x+1| = t$ има два различни корена при $t > 0$, един корен при $t = 0$ и няма решение при $t < 0$. Ето защо уравнението от условието има четири различни решения точно тогава, когато уравнението (1) има два реални различни положителни корена. От формулите на Виет имаме $t_1 + t_2 = \dfrac{1}{2a}$, $t_1t_2 = \dfrac{1}{2a}$, а дискриминантата на (1) е $D = 1 - 8a > 0$, търсените стойности на a са решенията на системата неравенства

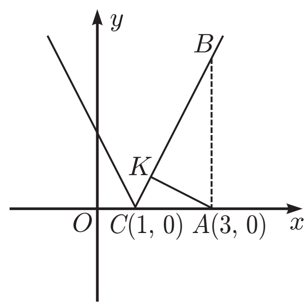
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{2a} > 0 \\ 1 - 8a > 0 \end{array}\right. .$$

От нея намираме $a \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

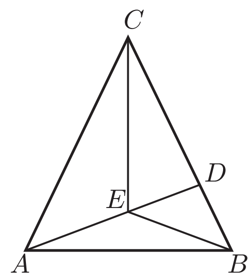
11.1. Функцията е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$, а стойностите на функцията са $y \in [0, +\infty)$. Дадената функция може да се запише във вида

$$y = |2x-2| = \begin{cases} 2x-2, & \text{ако } x \geqq 1 \\ -2x+2, & \text{ако } x < 1. \end{cases}$$

Графиката на тази функция е построена на чертежа, където $C(1,0)$. Построяваме $AB \perp OA$ ($A \in Ox$), точката B е с координати $(3,4)$. Построяваме $AK \perp BC$, $K \in BC$. Като вземем предвид, че $\triangle ABC$ е правоъгълен и че $AB = 4$, $AC = 2$, по Питагоровата теорема намираме $BC = \sqrt{20}$. Тогава $S_{ABC} = \dfrac{AC.AB}{2} = \dfrac{BC.AK}{2}$, т. е. $\dfrac{2.4}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}.AK}{2}$. Оттук $AK = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.



11.2. Означаваме $AB = 2x$, $AC = BC = y$. Тогава $\cos\sphericalangle BAC = \cos\sphericalangle ABC = \dfrac{x}{y}$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle ABD$ и получаваме



$$AD^2 = DB^2 + AB^2 - 2BD.AB.\cos\sphericalangle ABC =$$

$$\frac{y^2}{16} + 4x^2 - \frac{2y}{4}.2x.\frac{x}{y} = 3x^2 + \frac{y^2}{16}.$$

По формулата за медианите (CE — медиана в $\triangle ACD$) намираме

$$(2CE)^2 = 2CD^2 + 2AC^2 - AD^2 \Longrightarrow 28 = \frac{18y^2}{16} + 2y^2 - 3x^2 - \frac{1}{16}y^2,$$

т.е. $\dfrac{49}{16}y^2 - 32x^2 = 28$. Аналогично от $\triangle ADC$ намираме

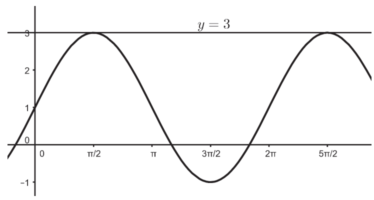
$$(2BE)^2 = 2DB^2 + 2AB^2 - AD^2 = \frac{2y^2}{16} + 8x^2 - 3x^2 - \frac{1}{16}y^2 \Longrightarrow \frac{y^2}{16} + 5x^2 = 36.$$

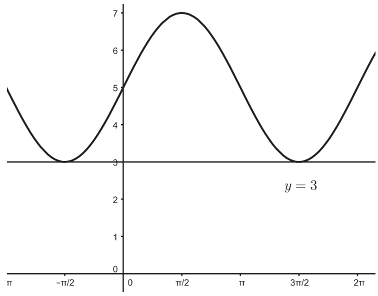
Решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{49}{16}y^2 - 32x^2 = 28 \\ \dfrac{y^2}{16} + 5x^2 = 36 \end{array}\right.$$

и намираме $y^2 = 16$, $x^2 = 7$. Тогава $S_{ABC} = 3\sqrt{7}$.

12.1. Графиката на $f(x)$ е „удвоена синусоида“, преместена вертикално с m единици. Следователно най-голямата и най-малката ѝ стойност се достигат съответно при $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$. Оттук може да се направи изводът, че правата $y = 3$ се допира до графиката на $f(x)$ единствено когато $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$ или $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 3$. Така за m получаваме условията $m + 2 = 3$ и $m - 2 = 3$. Те показват, че допирането е възможно само при $m = 1$ или $m = -5$.





12.2. Разглеждаме стената ABS като основа на пирамидата. Като приложим косинусовата теорема за $\triangle ABS$ и вземем предвид ограниченията за AS и AB, намираме

$$\cos\sphericalangle SAB = \frac{AS^2 + AB^2 - BS^2}{2.AS.AB} \leqq \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2.5.AS} = -\frac{8}{10AS} \leqq -\frac{8}{10.4} = -\frac{1}{5}.$$

Следователно $\sin\sphericalangle SAB \leqq \dfrac{\sqrt{24}}{5}$. Тъй като височината към основата не надминава околните ръбове, то

$$V_{SABC} \leqq \frac{1}{3}BC.S_{SAB} = \frac{1}{6}BC.AB.SA\sin\sphericalangle SAB \leqq \frac{1}{6}.6.5.4.\frac{\sqrt{24}}{5} = 8\sqrt{6}.$$

Доказахме, че обемът на всяка пирамида от разглеждания вид не надминава $8\sqrt{6}$. Сега ще посочим пример, от който се вижда, че $8\sqrt{6}$ се достига като най-голяма стойност на обема. Нека $SABC$ е пирамидата, за която $AB = 5$, $SA = 4$, $SB = 7$, $BC = 6$ и BC е перпендикулярна на стената ABS. Тя удовлетворява всички изисквания на условието и непосредствено се пресмята, че обемът ѝ е $8\sqrt{6}$. Следователно търсената най-голяма стойност е $8\sqrt{6}$.

БЪЛГАРСКОТО УЧАСТИЕ НА ПЪРВАТА ОЛИМПИАДА НА МЕГАПОЛИСИТЕ

От 4 до 9 септември 2016 г. в Москва се проведе Първата международна олимпиада на мегаполисите (IOM 2016), в която взеха участие 22 отбора.

Участниците бяха ученици на възраст между 14 и 18 години от столиците и големите градове по света – Москва, Санкт Петербург, Белград, Минск, София, Будапеща, Джакарта, Ереван, Талин, Астана, Лайпциг, Рига, Алмати, Пекин и др.

България бе представена от отбор на Софийска математическа гимназия, който завоюва четири сребърни и четири бронзови медала в четирите дисциплини – математика, информатика, физика и химия. Бронзови медали по математика спечелиха **Георги Димитров** от 11 клас и **Георги Русинов** от 12 клас. В отборното класиране тимът на СМГ зае второ място.

Участниците споделиха изключителното си задоволство от богатата културна програма, включваща разходка с кораб по река Москва, състезание по ориентиране из Москва (в дъждовен ден), екскурзия в музея на космонавтиката и посещение в IT компанията *Яндекс*.

Представяме ви темата по математика с любезното съдействие на проф. Йордан Табов, член на екипа на организаторите.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n със следното свойство: съществуват n поредни естествени числа, сборът на които е квадрат на цяло число.

Задача 2. Дадени са естествените числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяващи неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}.$$

Правителството на страната Оптимистика всяка година публикува *Годишен Отчет*, съдържащ n икономически индикатора. За всяко $i = 1, \ldots, n$ индикаторът с номер i може да приема естествени стойности $1, 2, \ldots, a_i$. Годишният Отчет се нарича *оптимистичен,* ако стойностите на поне $n-1$ индикатора са се увеличили в сравнение с предишната година. Да се докаже, че правителството може безкрайно дълго да публикова оптимистични Годишни Отчети.

Задача 3. В окръжност е вписан изпъкнал многоъгълник $A_1A_2\ldots A_n$. Известно е, че центърът на тази окръжност се намира строго вътре в многоъгълника $A_1A_2\ldots A_n$. На страните A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 са взети съответно точки B_1, B_2, $\ldots$, B_n, различни от върховете. Да се докаже, че

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \cdots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1.$$

Задача 4. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ъглите A и C са прави. На продължението на страната AD след точката D е дадена такава точка E, че $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADC$. Точката K е симетрична на точката C спрямо точката A. Да се докаже, че $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AKE$.

Задача 5. Даден е многочлен $r(x)$ от нечетна степен. Да се докаже, че множеството на двойките многочлени $p(x)$ и $q(x)$, удовлетворяващи равенството $(p(x))^3 + q(x^2) = r(x)$, е крайно или празно. (Всички многочлени са с реални коефициенти.)

Задача 6. В една страна има n града и две авиокомпании A и B. Някои двойки градове са съединени с еднопосочни и без междинни спирки авиолинии (всяка авиолиния принадлежи или на A, или на B, между два града може да има повече от една авиолинии). Казваме, че думата w от буквите A и B е *реализуема*, ако има маршрут от последователни авиополети, в който названията на авиокомпаниите са разположени в същия ред, както и буквите в думата w. Дадено е, че всички думи с дължина 2^n от буквите A и B са реализуеми. Да се докаже, че всяка дума с крайна дължина от буквите A и B е реализуема. (Дума с дължина k наричаме всяка редица от k букви A и B; например, $AABA$ е дума с дължина 4.)

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2016/17 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Даден е правилен $2n$-ъгълник $A_1A_2\dots A_{2n}$ с център O, като $n \geq 5$. Диагоналите A_2A_{n-1} и A_3A_n се пресичат в точката F, а A_1A_3 и A_2A_{2n-2} — в точката P. Докажете, че $PF = PO$.

Задача 2. Квадратна кутия за бонбони има 49 еднакви квадратни гнезда и във всяко гнездо е поставен или черен, или бял шоколадов бонбон. Емил може да изяде два бонбона, ако те са едноцветни и са в гнезда с обща страна или с общ връх. Най-много колко бонбона Емил гарантирано ще изяде, както и да са разположени бонбоните в кутията?

Задача 3. На 2016 червени и 2016 сини картончета са записани положителни числа, всеки две от които са различни. Известно е, че съществува такова множество от 64 числа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{64}\}$, че на картончетата от единия цвят са записани сборовете $\{a_i + a_j |\ i < j,\ a_i, a_j \in A\}$, а на картончетата от другия цвят са произведенията $\{a_ia_j |\ i < j,\ a_i, a_j \in A\}$. Винаги ли е възможно да се определи цвета на картончетата, на които са записани сборовете?

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2017 г.

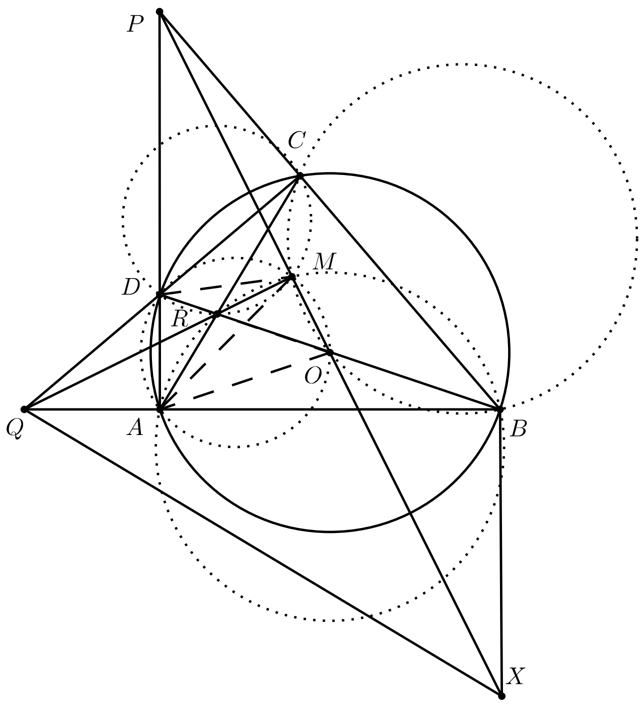
Решения на конкурсните задачи от бр. 4/2016 г.

Задача 1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O. Продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка P, а продълженията на страните BA и CD се пресичат в точка Q. Правата, през Q, перпендикулярна на AC, пресича OP в точка X. Да се докаже, че $\sphericalangle ABX = 90^\circ$.

Решение. Представяме решението на **Мирослав Маринов** от ОМГ, Пловдив.

Нека $AC \cap BD = R$ и M е втората пресечна точка на окръжностите, описани около $\triangle ARB$ и $\triangle CRD$. От съображения за радикални оси следва че правите BA, DC и RM се пресичат в една точка, т.е. точките Q, R и M лежат на една права. От друга страна

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMD &= \sphericalangle DMR + \sphericalangle AMR = \sphericalangle DCR + \sphericalangle ABR = \\ &= \sphericalangle DCA + \sphericalangle ABD = \frac{\sphericalangle AOD}{2} + \frac{\sphericalangle AOD}{2} = \sphericalangle AOD,\end{aligned}$$



т.е. точките A, D, M и O лежат на една окръжност. Аналогично точките B, C, M и O са от една окръжност. Тогава от съображения за радикални оси следва, че правата MO минава през $AD \cap BC = P$, т.е. точките M, O, P и X лежат на една права. Сега имаме

$$\sphericalangle RMO = \sphericalangle AMR + \sphericalangle AMO = \sphericalangle ABR + \sphericalangle ADO = 90^\circ.$$

Оттук и от условието $RA \perp QX$ следва, че $aARM = 180^\circ - \sphericalangle QMX$. Освен това точките A, R, M и B са от една окръжност и $aARM = 180^\circ - \sphericalangle ABM$, което означава че $\sphericalangle QMX = \sphericalangle ABM$, т.е. точките Q, B, M и X лежат на една окръжност. Понеже $\sphericalangle QMX = 90^\circ$, последното дава $\sphericalangle QBX = 90^\circ$, както се искаше.

Задачата е решена и от **Илиян Йорданов** от МГ, Варна.

Задача 2. Дадени са реални числа x, y и z, всяко от които е по-голямо от 1 и $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$. Да се докаже неравенството:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Решение. Представяме решението на **Димитър Опърлаков** от МГ, Варна.

Прилагаме неравенството на Коши-Шварц

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

за числата $a_1 = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$, $a_2 = \dfrac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}}$, $a_3 = \dfrac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}$ и $b_1 = \sqrt{x}$, $b_2 = \sqrt{y}$ и $b_3 = \sqrt{z}$. Получаваме

$$\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

и от условието $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$ получаваме исканото неравенство.

Задача 3. Дадено е безкрайно множество A от естествените числа. Да се докаже, че в A има два елемента, чиито сбор има прост делител, по-голям от един милион.

Решение. Представяме решението на **Иван Ганев** от АК, София.

Да допуснем, че такива два елемента не съществуват. Нека $p_1, p_2, \ldots p_k$ са всички прости числа, които са по-малки от един милион.

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k+1}$ са $2^k + 1$ различни елемента от A. За всеки елемент $x \in A$, който е различен от избраните, всяко от числата $x + a_i$ се представя във вида $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. За свободната от квадрати част на това число има 2^k възможности и от принципа на Дирихле следва, че съществуват i и j, за които $x+a_i$ и $x+a_j$ имат равни свободни от квадрати части. Следователно $x+a_i=dm^2$ и $x+a_j=dn^2$. Тогава

$$m^2-n^2=\frac{a_i-a_j}{d},$$

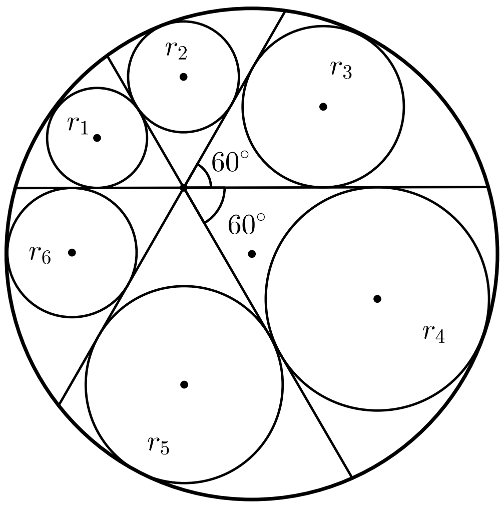
като частното $\dfrac{a_i-a_j}{d}$ може да приема само краен брой стойности. Освен това уравнението

$$m^2-n^2=c$$

при фиксирано c също има краен брой решения в естествени числа. Следователно уравнението $m^2-n^2=\dfrac{a_i-a_j}{d}$ има краен брой решения в естествени числа. Всяко такова решение определя числото $x=dm^2+a_i$. Но множеството A е безкрайно, противоречие.

Математиците разговарят – 1.

През 2014 г. известният любител-математик Борислав Мирчев изпратил на своя румънски приятел Leo Giugiuc следното писмо.



$$r_1.r_3+r_3.r_5+r_5.r_1=r_2.r_4+r_4.r_6+r_6.r_2$$

Как е продължил разговорът може да видите на страница 51.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2016 г. и бр. 1, 2 от 2017 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2017 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

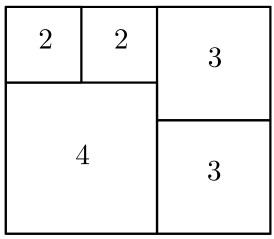
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

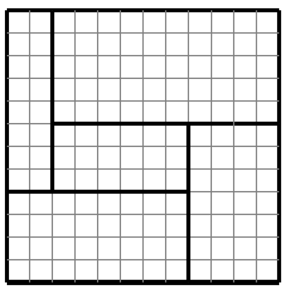
Задача 1. Правоъгълникът 6×7 на чертежа е разрязан на пет квадрата – два квадрата със страна 2, два със страна 3 и един със страна 4. Намерете размерите на правоъгълник, който може да се нареже на десет квадрата, чиито страни са съответно 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 и 25 и скицирайте това разрязване.



Задача 2. По колко различни начина в полетата на таблица 4×4 могат да се запишат 8 единици и 8 нули така, че сборът от числата във всеки ред и във всеки стълб на таблицата да е равен на 2? (Един възможен запис е показан в таблицата.)

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

Задача 3. В квадратна мрежа е даден квадрат 12×12. По колко различни начина той може да се разреже по линиите на мрежата на пет правоъгълника, един от които е *вътрешен*, т.е. няма връх на страните на дадения квадрат? (Едно от възможните разрязвания е показано на чертежа. Различни са и разрязванията, които съвпадат при завъртане или преобръщане.)



Срокът за представяне на решенията е 31.01.2017 г.

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до месец декември.

Мария Томова

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $-\frac{2}{7}+\left|-\frac{2}{7}\right|.3{,}5$ е:

А) 0 **Б)** $\frac{5}{7}$ **В)** $\frac{9}{7}$ **Г)** $-\frac{9}{7}$

2. Степента на многочлена $(-x+3)(x+3)+x^2$ е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

3. Градусната мярка на ъгъл, който е с 20% по-малък от изправения е:

А) 70° **Б)** 72° **В)** 144° **Г)** 160°

4. Колко от дадените равенства са тъждества?

(1) $(-x-5)^2=-x^2-10x-25$

(2) $8a^3-1=(2a-1)\left(4a^2+4a+1\right)$

(3) $\left(3x-y^2\right)^3=\left(y^2-3x\right)^3$

(4) $\left(-3x^2\right)^3=\left(-3x^3\right)^2$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

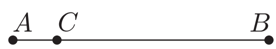
5. Едночленът $5x^6y^2$ е подобен на:

А) $\left(-2x^4y\right)^2$ **Б)** $5\left(xy^2\right)^3$ **В)** $-3\left(x^3\right)^2y^2$ **Г)** $\left(-2x^3\right)^3y^2$

6. Стойността на израза $\dfrac{27{,}6^2+2{,}6^2+2{,}6.27{,}6}{27{,}6^3-2{,}6^3}$ е:

А) $0{,}04$ **Б)** $0{,}4$ **В)** 1 **Г)** 25

7. На чертежа отсечката AB има дължина x cm, а точката C от вътрешността ѝ е такава, че $AC:CB=1:5$. Разстоянието между средите на отсечките AC и AB в сантиметри е:



А) $\frac{1}{2}x$ **Б)** $\frac{5}{12}x$ **В)** $\frac{2}{5}x$ **Г)** $\frac{7}{12}x$

8. За да бъде прав, на един ъгъл не му достигат $28\frac{4}{7}\%$ от мярката му. С колко градуса съседният на този ъгъл е по-голям от него?

А) 20° **Б)** 40° **В)** 70° **Г)** 72°

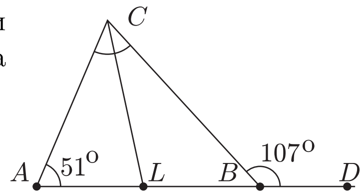
9. Един от множителите в разлагането на многочлена $a^2 - 4b^2 + 4b - 1$ е:

А) $a - 2b - 1$ **Б)** $a + 2b + 1$ **В)** $a - 2b$ **Г)** $a - 2b + 1$

10. На чертежа са дадени $\sphericalangle CAB = 51^\circ$ и $\sphericalangle CBD = 107^\circ$. Ако CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, то мярката на $\sphericalangle LCB$ е:

А) 28° **Б)** $36{,}5^\circ$

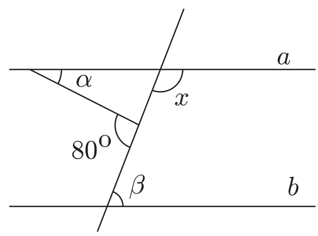
В) 56° **Г)** 73°



11. На чертежа правите a и b са успоредни. Каква е градусната мярка на ъгъла, означен с x, ако мерките на ъглите, означени с α и β се отнасят съответно както 3 към 5?

А) 100° **Б)** 120°

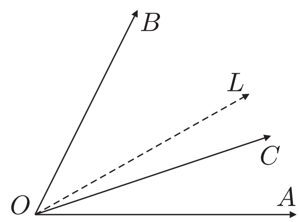
В) 130° **Г)** 150°



12. На чертежа $\sphericalangle AOC = x + 20^\circ$, а $\sphericalangle COB$ е с 50% по-голям от него. Ако лъчът $OL^{\rightarrow}$ е ъглополовящ на $\sphericalangle AOB$, то мярката на $\sphericalangle AOL$ е равна на:

А) $\frac{x}{2} + 35^\circ$ **Б)** $\frac{3}{2}x + 30^\circ$

В) $\frac{5}{2}x + 50^\circ$ **Г)** $\frac{5}{4}x + 25^\circ$



13. Ако $x + \frac{1}{x} = 3$, то изразът $x^2 + \frac{1}{x^2}$ е равен на:

А) 1 **Б)** 7 **В)** 9 **Г)** 10

14. Кой от посочените изрази е множител в разлагането на $16x^3 - \frac{2}{27}$?

А) $2x - \frac{1}{9}$ **Б)** $4x - \frac{1}{3}$ **В)** $4x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ **Г)** $4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

15. Сборът от мерките на един от външните и един от вътрешните ъгли на триъгълник е 146°. Сборът на същия външен ъгъл с друг вътрешен ъгъл на триъгълника е 172°. Каква е мярката на средния по големина от вътрешните ъгли на триъгълника?

А) 66° **Б)** 70° **В)** 74° **Г)** 78°

16. Ако Митко стои неподвижен на даден движещ се ескалатор, се изкачва с него за 2 минути. Ако тича нагоре по неподвижния ескалатор, се изкачва за 1 минута. За колко секунди Митко ще се изкачи, тичайки по ескалатора, ако той се движи?

А) 30 **Б)** 40 **В)** 90 **Г)** 180

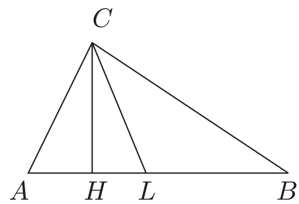
ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Да се представят като произведение на неразложими множители многочлените M и N:

$$M = (3x + 7y)^2 - 25x^2$$

$$N = x\,(x + y)\,(x - z) - y\,(x + y)\,(z - x)\,.$$

18. На чертежа триъгълник ABC е правоъгълен с $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, а $CH(H \in AB)$ и $CL(L \in AB)$ са съответно височина и ъглополовяща в него.



А) Ако $\sphericalangle HCL = 10^\circ$, намерете разликата в градусните мерки на острите ъгли на $\triangle ABC$.

Б) Ако мерките на ъглите при върховете A и B на $\triangle ABC$ се отнасят съответно както $2 : 1$, намерете мярката на $\sphericalangle HCL$.

19. Даден е многочленът $P = (x - a)\,(x + 2)$, в който a е параметър.

А) Ако $a = \dfrac{4^{2017} - (-4)^{2016}}{4^{2016}}$, представете P в нормален вид.

Б) Ако при $x = 1$ многочленът $P = -9$, намерете стойността на P при $x = -1$.

20. В таблицата са представени данни за средната температура на въздуха, измерена в градуси по Целзий през всеки от дните на една седмица през месец ноември.

ден	понеделник	вторник	сряда	четвъртък	петък	събота	неделя
средна температура	8°C	4°C	0°C	-2°C	-5°C	-6°C	1°C

А) Колко градуса по Целзий е средната температура за тази седмица?

Б) През какъв процент от дните през тази седмица средната температура не е била положителна?

В) В някои държави е възприето температурата да се измерва в градуси по Фаренхайт. Ако за температура F в градуси по Фаренхайт и температура C в градуси по Целзий е в сила зависимостта $F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$, то колко градуса по Фаренхайт е средната температура в петък през разглежданата седмица?

ВТОРИ МОДУЛ

21. На диаграмата са представени данни за хранителното съдържание на пресните банани. Като ги използвате, отговорете на поставените въпроси.

А) Колко грама белтъчини се съдържат в 350 грама пресни банани?

Б) Ако 60% от въглехидратите в пресните банани са захари, то колко грама са захарите в 100 грама пресни банани?

В) Ако при сушене бананите губят 60% от теглото си, то колко процента е съдържанието на вода в сушените банани?

22. Разглеждаме плътен куб с ръб n cm ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$), сглобен от еднакви бели кубчета с ръб 1 cm. Кубът е потопен в боя.

А) Ако $n = 5$, то какъв процент от малките кубчета, от които е сглобен кубът, са останали бели след потапянето му в боя?

Б) Намерете n, ако $3\frac{19}{27}\%$ от малките кубчета имат точно 3 оцветени стени при боядисването.

ЗАДАЧИ ЗА ПОДРОБНО АРГУМЕНТИРАНО РЕШЕНИЕ

23. Дадени са многочлените

$$M = (x-m)^3 - 2(x+m)^2,$$

$$N = m(x-1)\left(x^2+x+1\right) - m^2(3x-m-2) \text{ и}$$

$$P = m^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+0,5x+0,25\right) - m(x-2)(2+x) - 2x^2(2x-1) - mx$$

с параметър m. За кои стойности на параметъра m:

А) коефициентите пред едночлена от най-висока степен и пред този от втора степен в нормалния вид на M са противоположни числа;

Б) сборът от коефициентите на многочлена $M+N$ е равен на 15;

В) многочленът P е от втора степен?

24. Даден е $\triangle ABC$, в който $CL (L \in AB)$ е ъглополовяща. Нека LP $(P \in AC)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ALC$, LQ $(Q \in BC)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BLC$, а AK $(K \in BC)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$.

А) Ако $AK \cap LP = O$ и $\sphericalangle AOL = 110^\circ$, намерете мярката на $\sphericalangle ACB$.

Б) Ако $\sphericalangle ACB = 100^\circ$, намерете ъгъла между правите AK и LQ.

В) Известно е, че $CL \cap AK = I$, ABC е остроъгълен и височините му през върховете A и C се пресичат в точка H. Ако $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AIC$, намерете мярката на $\sphericalangle ABC$.

ОТГОВОРИ

1. Б
2. А
3. В
4. А
5. В
6. А
7. Б
8. Б
9. Г
10. А
11. В
12. Г
13. Б
14. Г
15. А
16. Б
17. $M = (8x+7y)(7y-2x), N = (x+y)^2(x-z)$
18. А) 20° Б) 15°
19. А) $x^2 - x - 6$ Б) -5
20. А) 0° Б) $57\frac{1}{7}$ В) 23°
21. А) 5,25 Б) 13,8 В) 37,5
22. А) 21,6% Б) 6
23. А) $-\frac{1}{3}$ Б) $-\frac{16}{7}$ В) -2
24. А) 80° Б) 25° В) 60°

КАК ДА ПОПЪЛВАМЕ ТЕСТОВЕ

Невена Събева

В последните години тестовете се наложиха като инструмент за измерване и оценка на знанията. И макар учените да спорят за качествата на този инструмент – какви знания оценява и колко точно ги мери, все по-често се срещаме с тестове. Затова е полезно да познаваме **изкуството за попълване на тест**.

Първата стъпка, разбира се, е да овладеем нужните знания и умения. Това обаче не е достатъчно!

Не само на вас ви се струва, че задачите в теста не приличат на тези от учебника – понякога наистина е така! Ако тестът ни изправи пред *непознат враг* (а и не само тогава), може да използваме някои универсални техники и стратегии.

1. Да отхвърлим грешните отговори

Преди да решим задачата, е полезно да разгледаме предложените отговори. Този метод често се прилага при задачи за решаване на уравнение, като например следния въпрос от теста за НВО – 2016 г.

Коренът на уравнението $2 - 2x = \dfrac{1}{2}$ е:

А) $1\dfrac{1}{4}$ **Б)** $1\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{3}{4}$ **Г)** 0

Отговор Г) отпада, защото при $x = 0$ лявата част на уравнението е 2 и не е равна на $\dfrac{1}{2}$. Останалите отговори са дроби и не е удобно да заместваме с тях. Но забелязваме, че числата в А) и Б) са по-големи от 1, значи за тях $2x$ е по-голямо от 2 и разликата $2 - 2x$ ще е отрицателно число, т.е. няма да получим $\dfrac{1}{2}$. Остава да е верен отговор В.

Анализът на предложените отговори помага в случаи, когато се затрудняваме да решим задачата, но сме успели да отхвърлим някои отговори. Тогава избираме измежду по-малкото останали възможности и имаме по-голям шанс *да уцелим* верния отговор!

Друга стратегия за налучкване (която не може да замести подготовката и знанията, нито да гарантира успех!) е разглеждането на частен случай.

2. Да разгледаме частен случай

В задачи за преобразуване на израз понякога е полезно да заместим променливата с подходящо число (например 0 или 1), при което лесно се пресмята стойността и на израза, и на предложените отговори. Разбира се, тъждествено равните изрази ще имат равни стойности. Да разгледаме следния въпрос от НВО – 2015 г.

Многочленът $n^2 - 4 - n - 2$ е тъждествено равен на:

А) $(n-2)n$ **Б)** $(n-2)(n+1)$

В) $(n+2)(n-3)$ **Г)** $(n+2)n$

Да пресметнем стойността на дадения израз и на всеки от предложените отговори при $n = 0$. Това се прави наум, но тук за удобство ще подредим съответните стойности в таблица.

	$n^2 - 4 - n - 2$	$(n-2)n$	$(n-2)(n+1)$	$(n+2)(n-3)$	$(n+2)n$
$n = 0$	-6	0	-2	-6	0

Стойността на дадения израз при $n = 0$ е -6 и съвпада само със стойността на отговор В). Ясно е, че само отговор В) може да е верен.

Ето още една задача от НВО – 2014 г., при която може да използваме проверка с частен случай.

Цената за пътуване с такси се определя по формулата

$$C = 1,20 + 0,80.k,$$

където k са изминатите километри, а C е цената в левове. От тази формула изминатите километри k за дадена цена се определят така:

А) $k = (C - 1,20) : 0,80$ **Б)** $k = (C + 1,20).0,80$

В) $k = 0,80.C - 1,20$ **Г)** $k = C : 2,00$

От формулата в условието виждаме, че при $k = 0$ се получава $C = 1,20$. Като заместим в предложените отговори $k = 0$, само в случай А) се получава $C = 1,20$, т.е. А) е верният отговор.

3. Да се усъмним в твърде различните отговори

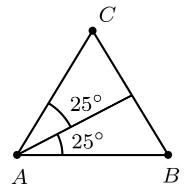
Ако някой от предложените отговори се различава твърде много от останалите, тъй като е много по-голям или много по-малък от тях, то е много вероятно той да е грешен.

Например, в следващата задача от теста за НВО – 2016 г. отговор Г) е *съмнителен.*

На чертежа $AC = BC$. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:

А) 80° **Б)** 75°

В) 50° **Г)** 25°



От останалите три отговора, А) и Б) са *близки* и може да предположим, че един от тях е верният (това е отговор А).

4. Да се насочим към един от два противоположни отговора

В някои задачи са предложени два противоположни отговора. Често верният отговор е един от тях.

Да разгледаме следния въпрос от НВО – 2016 г.

Решенията на неравенството $\dfrac{2x-3}{3} > \dfrac{2x+3}{2}$ са:

А) $x < -17$ **Б)** $x < -7{,}5$ **В)** $x > -7{,}5$ **Г)** $x > 3$

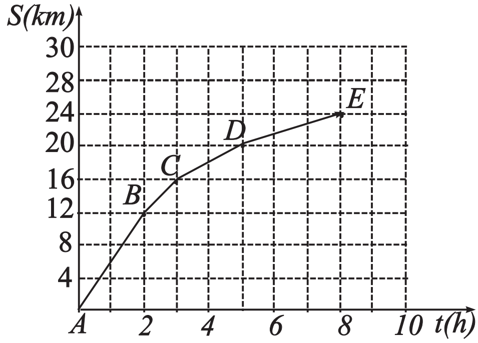
Отговорите Б) и В) са противоположни и веднага привличат вниманието. Единият от тях ще отпадне, ако проверим дали неравенството е изпълнено при $x = 0$ например. Тъй като при $x = 0$ лявата част на неравенството е отрицателна, а дясната – положителна, то $x = 0$ не е решение. Следователно отговор В) отпада и може да предположим, че верният отговор е Б) (което в случая е така.)

5. Да импровизираме

Примерите, с които илюстрирахме различните стратегии за отгатване, са стандартни задачи и добре подготвеният ученик навярно ще ги реши без проблем. Истинското изкуство на досещането обаче може да се демонстрира най-добре, когато решаваме задача от непознат вид, каквато не се среща в учебника ни, но за наша изненада се е появила в теста за външно оценяване. Въпреки това, не трябва да прескачаме подобна задача, а да опитаме *да разберем условието*, да *определим най-важното в задачата* и *да я решим със знанията, които имаме.*

Да разгледаме следната задача от теста за НВО – 2015 г.

Турист изминал разстоянието от пункт A до пункт E. На графиката е показана зависимостта на изминатия път S (km) от времето t (h). В кой участък той се е движил със скорост 6 (km/h)?



А) AB **Б)** BC **В)** CD **Г)** DE

В задачата е дадена графика на частично линейна функция. Темата *Линейна функция* се изучава в 8. клас, когато и в часовете по физика се разглеждат графики на зависимостта на пътя от времето. Ако сме седмокласници, ние нямаме тези знания и може да предположим, че задачата се решава и без тях. Затова смело да импровизираме.

Като начало може да се опрем на *ключовите думи* – път, време и скорост и на познатата зависимост между тях.

Да погледнем първия възможен отговор – участъкът AB. В точката A пътят е 0 и времето е 0, а в точката B пътят е 12 km, а времето е 2 h. До B са изминати 12 km за 2 h, значи скоростта е била 6 km/h и верният отговор е А).

Задачата се оказа лесна – да намерим скоростта, с която 12 km са изминати за 2 h! Основната трудност при подобни задачи е да разчетем условието и да открием какво се иска от нас – често то е нещо елементарно!

Например, в следващата задача се използва само формулата за обем на кълбо и основни умения за работа с проценти.

Портокал. Портокалът е цитрусов плод с много разновидности. Изключително богат е на витамин С, като 100 г плод осигуряват 64% от препоръчителната дневна норма за прием на витамин С. Още от древността портокалите са важен търговски продукт.

А) Един от най-разпостранените сортове е безсемковият портокал. Той е голям (с диаметър около 10 см) и има дебела кора (широка 1 см), която лесно се бели. Приблизително колко процента от неговия обем е обемът на кората му?

Б) В момента най-големите производители на портокали в света са Бразилия, САЩ, Мексико, Индия и Китай. Производството на портокали в Бразилия през 2013 г. е около 35 млн. тона, което е 2,5 пъти повече от годишното производство на портокали в Китай, а в Индия са произведени с 25% повече портокали, отколкото в Мексико.

Като използвате и данните от графиката, попълнете таблицата.

	Бразилия	САЩ	Мексико	Индия	Китай
млн. т					

Като подскажем, обемът на кората е равен на разликата на обема на портокала и обема на вътрешната част, т.е. на $\frac{4}{3}\pi(5^3 - 4^3)$, ще предоставим на читателя удоволствието да реши задачата.

Накрая да споменем и третата важна съставка на успеха. Освен знания и изпитна техника, е нужно *спокойствие*! То ни помага да се концентрираме и да постигнем по-висок резултат. Както е в песента:

Don’t stress. Do your best. Forget the rest!

Емил Колев

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Кое от числата е най-малко?

А) $\frac{1}{5}$ от 115 **Б)** 6% от 400 **В)** 3,5.8 **Г)** 78 : 3

2. Изразът $\frac{3-x}{\sqrt{x^2-1}}$ не е дефиниран за:

А) $x = \pm 1$ **Б)** $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

В) $x \in (-1, 1)$ **Г)** $x \in [-1, 1]$

3. При $x \geq 0$ изразът $\frac{x^3 - x + 3}{x} - x^2$ е тъждествено равен на:

А) $\frac{2x^3 - x + 3}{x}$ **Б)** $\frac{x^3 - x^2 - x + 3}{x}$

В) $\frac{3-x}{x}$ **Г)** $\frac{x-3}{x}$

4. Решенията на неравенството $\frac{3-4x}{x-2} \leqq 0$ са:

А) $x \in (-\infty, \frac{3}{4}) \cup [2, +\infty)$ **Б)** $x \in (-\infty, \frac{3}{4}] \cup (2, +\infty)$

В) $x \in (\frac{3}{4}, 2)$ **Г)** $x \in (\frac{3}{4}, 2]$

5. Стойността на израза $3^{\log_3 7} - \sqrt{2\log_2 256}$ е равна на:

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 0

6. Ако $\frac{3}{4}$ от x е равно на 51, то $\frac{1}{5}$ от $(x+2)$ е равно на:

А) 10 **Б)** 11 **В)** $12\frac{1}{5}$ **Г)** 14

7. Броят на различните двойки $(x,\ y)$, които са решения на системата

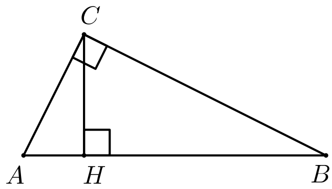
$$\left| \begin{array}{l} x - y = 4 \\ x^2 - 5y^2 = 16, \quad \text{е:} \end{array} \right.$$

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

8. Стойността на израза $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$ е равна на:

А) 1 **Б)** $\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{4}$ **Г)** $\frac{1}{8}$

9. В правоъгълния $\triangle ACB$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) е построена височината CH. Ако $AH = 1{,}96$ cm и $BH = 23{,}04$ cm, то височината CH е равна на:



А) 5,5 **Б)** 5,92

В) 6,03 **Г)** 6,72

10. Върху хорда AB от окръжност с център O е избрана точка C. Ако $OC = 2$ cm, $AC = 4$ cm и $BC = 8$ cm, то радиусът на окръжността е равен на:

А) 4 cm **Б)** 5 cm **В)** 6 cm **Г)** 7 cm

11. Кое от уравненията има корени с различни знаци?

А) $x^2 + x - 4 = 0$ **Б)** $-2x^2 + 7x - 11 = 0$

В) $x^2 + 11x + \sqrt{2} = 0$ **Г)** $x^2 + 4x + 7 = 0$

12. Разликата на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, за която $a_{25} - a_{10} = 30$ е равна на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 5

13. Разликата $a_{15} - a_{10}$ на редицата с общ член $a_n = n^2 - n + 3$ е равна на:

А) 150 **Б)** 140 **В)** 130 **Г)** 120

14. Най-малката стойност на израза $1 - 2\sin x \cos x$ е равна на:

А) 0 **Б)** $\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Г)** 1

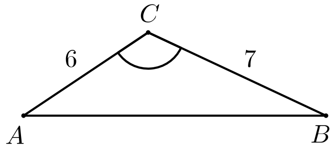
15. От клас от 12 момчета и 15 момичета трябва да се избере комисия от две момичета и едно момче. По колко различни начина може да стане избора на комисията?

А) 960 **Б)** 1180 **В)** 1260 **Г)** 1800

16. Координатите на върха на параболата $y = 2x^2 - 4x + 7$ са:

А) $(1; 13)$ **Б)** $(2; 7)$ **В)** $(1; 5)$ **Г)** $(-1; 13)$

17. Тъпоъгълният $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB > 90^\circ$) със страни $AC = 6$ cm и $BC = 7$ cm има лице $10{,}5$ cm^2. Страната AB има дължина:



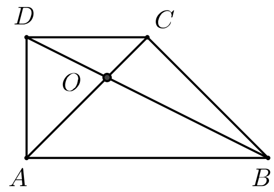
А) $\sqrt{85 + 42\sqrt{3}}$ cm **Б)** $\sqrt{85 - 42\sqrt{3}}$ cm

В) 9 cm **Г)** 10 cm

18. Страната AB на триъгълник ABC със страни $AC = 9$ cm, $BC = 40$ cm и медиана $AM = \sqrt{481}$ cm е равна на:

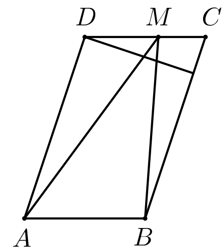
А) 40 cm **Б)** 41 cm **В)** 42 cm **Г)** 43 cm

19. Правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB||CD$, $AB \perp AD$) има лице 27 cm^2. Ако $AD = 6$ cm и $AO : OC = 2 : 1$, където O е пресечната точка на диагоналите, да се намери дължината на страната AB.



А) 5 cm **Б)** 6 cm **В)** 7 cm **Г)** 8 cm

20. Върху страната DC на успоредника $ABCD$ със страни $AB = 6$ cm и $AD = 9$ cm е избрана точка M. Ако лицето на триъгълника ABM е равно на 9 cm^2, то разстоянието от върха D до правата BC е равно на:



А) 5 cm **Б)** 4 cm

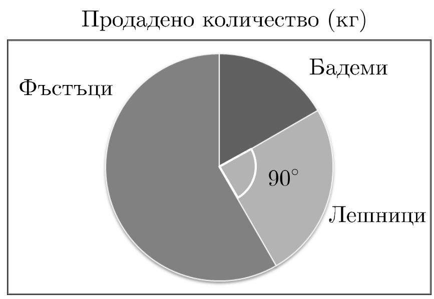
В) 3 cm **Г)** 2 cm

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Да се намери броят на корените на уравнението $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

22. Ако $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{24}{7}$ и $\alpha \in (0, 90^\circ)$, да се намери стойността на израза $\sin\alpha - 2\cos\alpha$.

23. Търговец предлага ядки: фъстъци, лешници и бадеми съответно по 6 лв., 15 лв. и 18 лв. за килограм. Данните за продадените количества ядки за определен период са представени с кръгова диаграма. Известно е, че количеството продадени лешници е 50% по-голямо от количеството продадени бадеми. Да се определи средната цена на килограм продадени ядки за този период.



24. В квадрата $ABCD$ е избрана точка M, за която триъгълникът ABM е равностранен. Да се намери големината на ъгъл DMC.

25. Да se намери радиусът на вписаната окръжност на триъгълник ABC със страни $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm и $BC = 8$ cm.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26 до 28 включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+5}$.

27. Да се намери вероятността при хвърляне на три зара сборът от точките на първите два зара да се дели на броя на точките на третия зар.

28. Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност и в него може да се впише окръжност. Да се намери $\sphericalangle ABC$, ако $AB=CD=2BC$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. А; **2.** Г; **3.** В; **4.** Б; **5.** А; **6.** Г; **7.** Б; **8.** А; **9.** Г; **10.** В; **11.** А; **12.** Б; **13.** Г; **14.** А; **15.** В; **16.** В; **17.** А; **18.** Б; **19.** Б; **20.** Г; **21.** 2; **22.** $\frac{2}{5}$; **23.** 10,25 лв.; **24.** 150°; **25.** $\sqrt{3}$.

26. След повдигане на уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+5}$ на втора степен и съкращаване получаваме

$$\sqrt{x(x+1)}=2.$$

След повторно повдигане на втора степен намираме $x^2+x-2=0$ с корени $x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Тъй като $x\geqq 0$, то само коренът $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ е решение.

27. Нека при хвърлянето на трите зара са се паднали точки a, b и c. Всички тройки (a,b,c) са $6^3=216$. Остава да преброим онези тройки, за които $a+b$ се дели на c. Ако $c=1$ всички 36 възможности за a и b са решения. Ако $c=2$ само 18 двойки са решения, при $c=3$ двойките са 12. При $c=4$ двойките са 9 ((1,3), (2,2), (3,1),(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6) и (6,6)), при $c=5$ двойките са 7 ((1,4), (2,3), (3,2),(4,1),(6,4),(5,5) и (4,6)), при $c=6$ двойките са 6 ((1,5), (2,4), (3,3),(4,2),(5,1) и (6,6)). Общо има 88 благоприятни възможности. Търсената вероятност е $\dfrac{88}{216}=\dfrac{11}{27}$.

28. Нека $BC=x$ и $\sphericalangle ABC=\alpha$. Тогава $AB=CD=2x$ и понеже четириъгълникът е описан, то $AD+BC=AB+CD$. От тук $AD=3x$. Сега от косинусовата теорема за триъгълниците ABC и ADC ($\sphericalangle ADC=180^\circ-\alpha$, тъй като четириъгълникът е вписан в окръжност) получаваме

$$AC^2=5x^2-4x^2\cos\alpha=13x^2+12x^2\cos\alpha.$$

От това равенство следва, че $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, т.е. $\alpha=120^\circ$.

ЕДНА НЕВЕРОЯТНА ЛАГЕР ШКОЛА В ПАМПОРОВО

Мадлен Христова, Динко Раднев

В средата на лятото тази година повече от 40 деца от цяла България се срещнаха в Пампорово. От 29 юли до 4 август те споделяха своите идеи и решаваха задачи в първата лятна лагер школа *Състезателна математика* за ученици от V, VI и VII клас. Много от тях си водиха бележки и записваха преживяното в дневници. Ето какво прочетохме в тях.

ДЕН ПЪРВИ – 29.07.2016 г.

Момичета и момчета от Бургас, Варна, Габрово, Гоце Делчев, Кърджали, Плевен, Пловдив, Самоков, София, Стара Загора, Ямбол се събрахме в Пампорово. Всеки бе сложил в раницата си успехите, грамотите и медалите си от състезанията през годината, бе понесъл в сърцето си духа на победителя и откривателя. За нас бе чест да бъдем младите надежди в математиката и да се срещнем с част от екипа, който подготвя нашите олимпийци. Искахме да покажем, че можем и знаем.

И надпреварата започна още следобед. Първо всички 46 млади математици бяхме разпределени в седем отбора. Ето ни и нас.

Отбор ЖЪЛТИ СВЕТКАВИЦИ – Ангел Райчев (София), Бояна Христова (Бургас), Виктор Попдончев (София), Гергана Пеева (София), Гриша Лилов (София), Живомир Грозев – капитан (Ямбол)

Отбор ПУРПУРНИ ПОБЕДИ – Владимир Слепцов (София), Георги Любенов (София), Жаклин Катърджиева (Бургас), Ивайла Радкова – капитан (София), Мартин Рачев (Плевен), Михаил Цветков (Стара Загора), Персиан Турсунов (София)

Отбор СИНИ ЩИТОВЕ – Антония Илиева (София), Валери Ванков (София), Кристиян Чолаков – капитан (Кърджали), Марина Стоянова (Плевен), Никола Коларов (Бургас), Петър Дойнов (София), Петър Куков (Варна)

Отбор ЗЕЛЕНИ ГИГАНТИ – Богдан Стефанов (София), Гергана Тагарева (София), Йово Йовчев (София), Катрин Евгениева (София), Калоян Цветков (Стара Загора), Мартин Копчев – капитан (Габрово), Руси Шишманов (София)

Отбор БЕЛИ ВЪРХОВЕ

Георги Димитров (Самоков), Иван Тагарев – капитан (София), Йоана Пеева (Бургас), Мария Дренчева (София), Никола Джунов (София), Симеон Дойчинов (София)

Отбор ОРАНЖЕВИ МОРЕТА

Анжелина Йовчева (София), Велизар Чиликов (Бургас), Георги Вълков (София), Емилиян Симеонов – капитан (Плевен), Мартин Димитров (София), Станислава Минчева (София)

Отбор ЧЕРВЕНИ ДРАКОНИ

Александър Даскалов (София), Александър Дойчинов (София), Димитър Русев (София), Иван Божанин (София), Марина Бояджиева – капитан (Бургас), Самуил Петров (София), Христо Щерев (Варна)

Като на истински съмишленици и приятели, не ни бе нужно много време за подготовка и веднага се впуснахме в първите спортни квалификации – по фризби и боулинг. Появиха се имената на първите отбори – победители. Дълго време – и на вечеря и в свободното време, по отбори коментирахме първите несполуки, чертаехме победни схеми, разказвахме пред съотборниците къде и в какво сме полезни.

ДЕН ВТОРИ – 30.07.2016 г.

Днес е събота – пълен с изненади весел ден. С неочаквани импровизации на задачи от международни и национални олимпиади проф. Петър Бойваленков и Александър Иванов предизвикаха изследователския ни дух. Да усетиш как се ражда една хубава състезателна задача, как можеш да я *кажеш на друг език*, за да я разбереш, да забравиш, че това са задачи за гимназистите – това възпламени залите. Въпроси, отговори, идеи, открития – и четирите часа лекции минаха като на шега. Забавните случки се превърнаха в сериозни математически проблеми. Така се роди и първата отборна задача – до началото на спортните състезания всеки отбор да подготви една задача за останалите отбори. Имаше три критерия за оценка:

(1) Задачите да са формулирани забавно и интересно.

(2) Предложените задачи и решенията им да са математически точни.

(3) Всеки отбор да реши колкото може повече задачи на противниците.

Тази вечер тишината настъпи по-рано. Но никой не спеше. Два часа отборите обсъждаха и решаваха предложените им 6 задачи. Точките, които всички отбори спечелиха, бяха заслужени. Три отбора – на белите, на пурпурните и на оранжевите, се откроиха в етапа на съставяне на задачи, а пурпурният и оранжавият отбори взеха най-много точки и в етапа на решаване.

Споделяме с Вас две от задачите, които решавахме.

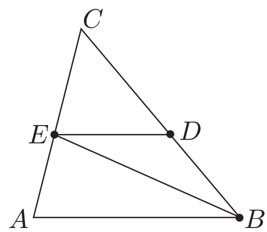
Задача 1. Всеки знае, че денонощието има 24 *кръгли* часа.

Рони за едно денонощие изяжда общо A бонбона, като на всеки 3 кръгли часа яде по 2 жълти бонбона, на всеки 5 кръгли часа по 1 бял бонбон, на всеки 8 кръгли часа по 1 син бонбон, на всеки 11 кръгли часа по 1 шарен бонбон.

Рени за едно денонощие изяжда общо B бонбона, като на всеки 2 кръгли часа яде по 4 жълти бонбони, на всеки 17 кръгли часа по 1 бял бонбон, на всеки 23 кръгли часа по 1 син бонбон.

Докажете, че дробта $\dfrac{A}{B}$ може да се представи като сбор на три различни египетски дроби.

Задача 2. Майстор Четко боядисал части от триъгълна плочка по следния начин. Избрал върху страната AC точка E и върху страната BC точка D така, че $ED||AB$ и боядисал триъгълника ABE в синьо, а триъгълника EDC в жълто. Ако $CE = 12$ и $CD = 13$, намерете отношението на лицата на боядисаните в синьо и жълто части.



И този ден не мина без спорт – започнаха квалификациите по *горски слалом* и футбол. Емоциите и смехът завладяха всички. Представяте ли си! – тъкмо си овладял топката и наклонената поляна я повежда в друга посока, тъкмо я укротиш, и заради неравния терен се спъваш в топката! А ти си вързан са свой съотборник и след всяка непредпазлива стъпка разпиляваш ценния товар, който носиш!

ДЕН ТРЕТИ – 30.07.2016 г.

Неделя е. Слънцето отново се усмихва измежду дърветата. Усмихнете се и Вие!

И отново – четири часа жабчета скачаха от точка в точка, отсечки се издуваха в дъги, числата полудяваха от факторизиране, и аха да си кажеш *Какъв ужас!*, всички се укротяваха и решението изкачаше като заек от магическа шапка. Само с Вас ще споделим една от тези чудесии.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $n^2 + 3n + 5$ не се дели на 121.

Следобед въодушевлението обхвана всички. Координаторите измислиха нови игра – *Открий морските кораби.* За 60 минути всеки отбор трябваше да открие различни морски съдове в квадратна врежа, части от които бяха зададени чрез кодови знаци. Най-много точки спечели зеленият отбор, а пурпурните бяха втори. Последваха финали и полуфинали. Пурпурните победиха на боулинг и слалом, а белите спечелиха на фризби. Започна и турнирът по шах (с часовник!). Още от началото стана ясно, че добрите и тренирани шахматисти от отбора на белите ще ги доведат до победа.

Всеки от нас беше някъде – или играеше, или помагаше или подкрепяше. Екоразходката и *нападението* на най-близкия маркет разредиха напрежението. Вечерният конкурс за най-добра собственоръчно направена татуировка даде шанс да се изявят художниците, актьорите и стилистите.

ДЕН ЧЕТВЪРТИ – 01.08.2016 г.

Родопите разкриха пред нас част от своята магия – Ягодинската пещера и Дяволското гърло. Всеки остави част от своя дъх и сърце и взе светлина и топлина от планината. Заредихме се със спокойствието и с нетърпението на изследователите.

Като истински търсачи следобед влязохме в залите и нападнахме задачите. Ето още едно предизвикателство към Вас.

Задача 4. Нека n е естествено число. Означаваме $P_n = n^2 + n + 1$. Намерете най-големия общ делител на числото P_n с всяко от числата от вида $P_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) + 1$, P_{n+2}, P_{n+3}и P_{n+4}.

Сутринта предстоеше футболният финал и затова до късно вечерта зелените и пурпурните тренираха на поляната, огряна от луната. Познайте къде бяха останалите? Около тях – гонеха и търсеха топката в тъмнината.

ДЕН ПЕТИ – 02.08.2016 г.

Най-нетърпеливите подраниха на игрището. Г-о-о-о-л! Зелените бяха във вихъра си и вкараха 5 победни гола на пурпурните.

Но денят едва започваше. Предстоеше програмата *Оцеляване* – маркировка в планината, разпъване на палатка, връзване на възли, палене на огън, търсене на укрития при дъжд и сняг. И като по поръчка, дъждат се изсипа. Бегом до базата. Мокри индиански воини, нашарени с въглен усмихнати лица, всички се справихме отлично!

Следобедните лекции при доц. Емил Колев ни потопиха в комбинаторните съображения, триковете за оцветяване, скоковете на бълхи и други насекоми. Ето една *загряваща* задача.

Задача 5. Известно е, че трицифрено число намалява k пъти (k е естествено число), ако задраскаме цифрата на десетиците. За кои стойности на k това е възможно?

Вечерта дойде весела и бъбрива, с музика, малко задачи и много смях.

ДЕН ШЕСТИ – 03.08.2016 г.

Последните лекции със състезателни задачи – сериозни, трудни и провокиращи. Но вече бяхме тренирани: *търси, преведи, разбий, открий малките камъчета, които показват пътя на решението.* Ето и за Вас една от задачите за дъски и таблици.

Задача 6. Най-много колко коня могат да се разположат на шахматна дъска 8×8 така, че никои два коня да не се бият взаимно? А ако фигурите са офицери; топове; царици?

Следобед ни очакваше най-сериозното предизвикателство – *Математически квадрат.* За 75 минути всеки отбор получава 16 задачи, разделени в четири области. Във всяка област задачите са наредени по трудност, като на първата и втората се дава само отговор, а на останалите две – отговор и кратко обяснение. Ако отборът направи линия – ред, стълб или диагонал, резултатът му по тази линия се удвоява.

Старт. В залата се чуваше само „*Имаме решение*, *Предаваме първа задача*“, „*Правилен отговор*“, „*Имаме ред!* “ Съдийският състав, включващ координаторите на лагера – Ваня Стоянова, Виржиния Ованесян, Димитър Димитров, Динко Раднев, Мадлен Христова, Павлин Цонев и лекторите от екипа за извънкласна работа, ни подкрепяше през цялото време и се радваше на успехите ни.

Сега можем да Ви кажем и някои от задачите.

Алгебра 1. Средната възраст на 11 играчи от един футболен отбор е 22 години. По време на футболна среща изгонили един от играчите, след което средната възраст на останалите играчи станала равна на 21 години. На колко години е изгоненият футболист?

Алгебра 3. Колко пъти сред първите 2016 цифри след десетичната запетая в десетичния запис на дробта $\dfrac{373}{3100}$ се среща числото 2?

Геометрия 3. Във върха на ъгъл, равен на 1°, стои скакалец. Скакалецът прави скокове с дължина 1, всеки път скачайки от едното рамо на ъгъла на другото, без да се връща в точка, на която вече е бил. Най-много колко скока може да направи той?

Теория на числата 1. Кое е най-голямото число, равно на поризведението на естествени числа със сбор 13?

Теория на числата 3. Намерете всички тройки прости числа, произведението на които е 11 пъти по-голямо от техния сбор.

Комбинаторика 2. Дадена е квадратна мрежа 2×3. Колко са правоъгълните триъгълници с върхове във възлите на мрежата?

Комбинаторика 4. Три деца играли на думи, като всяко от тях съставило по 10 думи. Ако една дума я имат всички, тя се зачерква; ако я имат двама, те получават по една точка; за останалите думи всеки получава по 3 точки. Накрая се оказало, че всички получили по равен брой думи, при това детето с най-нисък резултат събрало 19 точки. По колко точки са събрали другите?

В тази игра червеният отбор изненада всички – беше решил 13 задачи и имаше 6 линии. Събра почти 2,5 пъти повече точки от последните отбори в тази игра! Този резултат ги изстреля от предпоследно на първо място в крайното класиране.

На официалната вечеря ни очакваха наградите. А те бяха много – Съюзът на математиците в България и фондация „Георги Чиликов“ осигуриха богат награден фонд, в това число и най-новите издания със състезателни задачи.

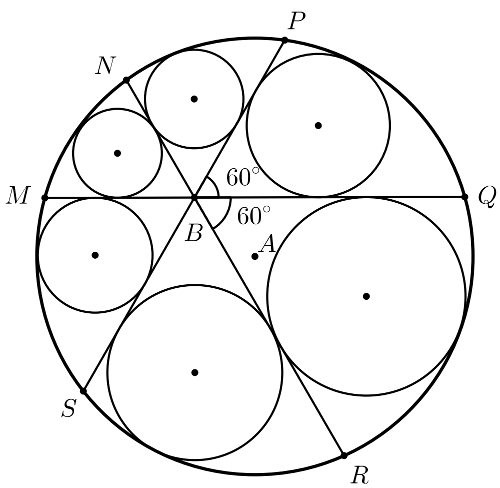
ДЕН СЕДМИ – 03.08.2016 г.

Днес нямаме програма – пише *Отпътуване*. Кога ли ще е следващата лагер-школа *Състезателна математика*?

Скоро, много скоро! До нови срещи, приятели!

Математиците разговарят – 2.

Ето следващото писмо в кореспонденцията на Борислав Мирчев и Leo Giugiuc.



$$BM + BP + BR = BN + BQ + BS.$$

Кой се включил в разпаления разговор може да видите на страница 59.

Ученическо творчество

Скъпи ученици, списание „Математика“ обявява конкурс за авторска задача за ученици от 4.-12. клас. Най-интересните и оригинални задачи ще публикуваме на страниците на списанието.

Вярваме във Вашата изобретателност и очакваме вдъхновяващи и провокиращи мисълта задачи (заедно с решенията им) на e-mail: math_competition@abv.bg.

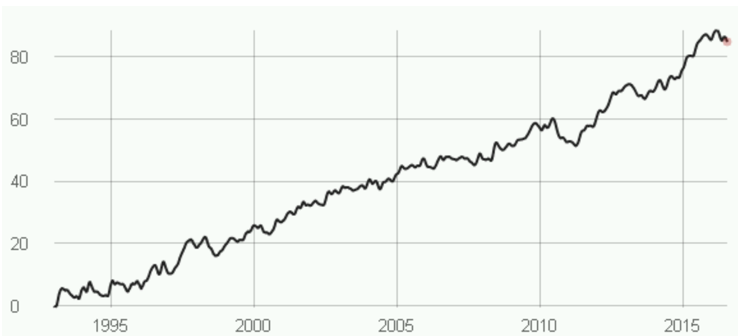
В този брой публикуваме задача на **Ирина Колева** от 6. клас, 107 ОУ, София. Задачата е вдъхновена от документалния филм *Преди потопа/Before the Flood* (2016) с Леонардо ди Каприо.

Глобално затопляне

Глобално затопляне е повишаването на средната температура на Земята, което се наблюдава от средата на XX век насам. За периода 1906–2005 средната температура на земята се е повишила средно с 1 °C. В резултат на това се наблюдава топене на полярните ледове, което води до покачване на морското равнище.

А. Графика 1 проследява промяната на морското равнище спрямо 1993 г. (по данни от сателитни наблюдения на NASA).

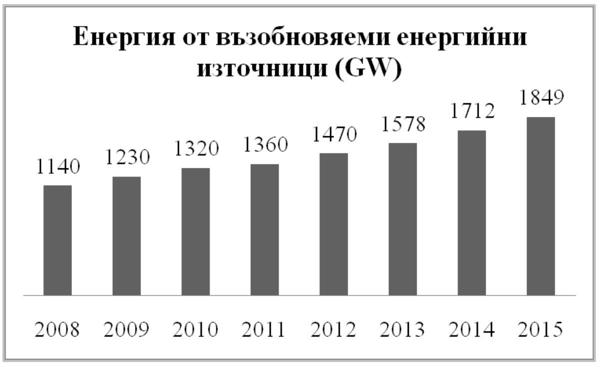
Промяна на морското равнище (мм)



Графика 1

Определете средно с колко милиметра за година се е покачвало морското равнище в периода 1995–2015 г. Ако тези темпове се запазят, приблизително с колко милиметра ще се повиши морското равнище до 2100 г. спрямо 2000 г.?

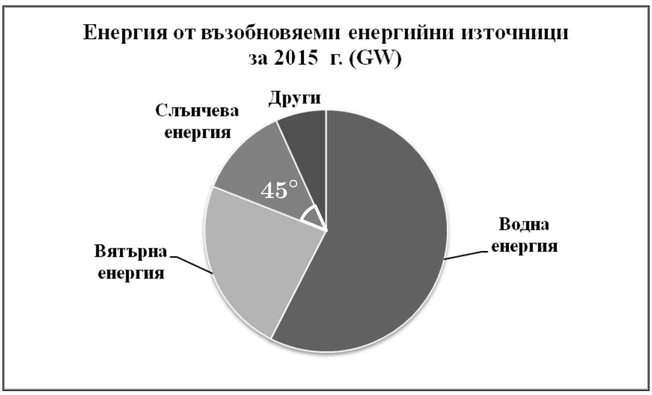
Б. Един от начините за спиране на процеса на глобално затопляне е вместо изкопаеми горива, които замърсяват въздуха и допринасят за парниковия ефект, да се използват възобновяеми енергийни източници – слънчева светлина, вятър, биогорива и др. Графика 2 представя енергията от възобновяеми източници, произведена в света за последните години.



Графика 2

Приблизително с колко процента се е увеличило производството на енергия от възобновяеми източници през 2015 г. в сравнение с 2008 г.?

В. На графика 3 е представена структурата на производството на енергия от възобновяеми източници в света през 2015 г.



Графика 3

Колко процента от енергията от възобновяеми източници са получени от използването на слънчева енергия? Като използвате и графика 2, определете приблизително колко гигавата слънчева енергия са произведени през 2015 г. в света.

За по-малките задачи

4. клас

76. Еми записала числата 1, 2, 3 и така нататък, до 30 включително. Диди преписала числата на Еми, но заместила всяка цифра 2 с цифрата 1. С колко сборът от числата на Еми е по-голям от сбора от числата на Диди?

77. Мила прочела 15 книги една след друга. Първата книга прочела за един ден, четенето на втората книга продължило два дни, след нея третата книга – 3 дни и т.н. За четенето на всяка следваща книга Мила отделила с един ден повече, отколкото за предишната. Мила прочела първата книга в понеделник и завършила втората в сряда. В кой ден от седмицата Мила завършила 15-тата книга?

78. За да огради правоъгълната си градина, Кольо купил 20 колчета, забил по едно колче във всеки ъгъл на градината, а останалите разпределил по страните така, че разстоянието между две съседни колчета да е 4 метра. Оказало се, че броят на колчетата (като се броят и ъгловите) на по-дългата страна на градината е 2 пъти по-голям от броя на колчетата на по-малката страна (заедно с ъгловите). Да се намерят размерите на градината.

79. Ани, Бети, Вили, Гого и Дани отишли на кино и седнали на един ред с 5 места, номерирани с числата от 1 до 5 отляво надясно. По време на прожекцията Ани излязла от залата. Като се върнала, видяла, че Бети се е изместила с две места надясно, Вили се преместила с едно място наляво, Гого и Дани си разменили местата и за нея останало крайно място. На кое място е седяла Ани преди да излезе от залата?

5. клас

80. В една болница за последната година се родили общо 1000 бебета близнаци, тризнаци или четиризнаци. Имало 4 пъти повече раждания на тризнаци, отколкото на четиризнаци, а 3 пъти повече раждания на близнаци, отколкото на тризнаци. Колко четиризнаци се родили в тази болница през последната година?

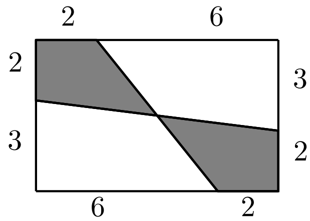
81. Първите пет цифри на седемцифрен PIN код са 10203. Намерете кода, ако е известно, че той е число, което се дели на 9 и на 10.

82. Даден е правоъгълник със страни 60 cm и 84 cm. Иво нарязал правоъгълника на възможно най-малко на брой еднакви квадратчета. Не останали никакви изрезки. Колко сантиметра е страната на квадратчетата?

83. По колко различни начина 2016 може да се представи като сбор на двойки и тройки, ако редът на събираемите не е от значение? (Например, $2016 = 1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$ и $2016 = 402 \cdot 2 + 404 \cdot 3$ са два такива начина.)

6. клас

84. Ако $n \heartsuit m = n^3 . m^2$, да се пресметне $\dfrac{2\heartsuit 4}{4 \heartsuit 2}$.

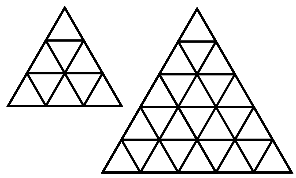


85. Да се намери лицето на оцветената част от правоъгълника 8×5.

86. Да се намери числото n от равенството

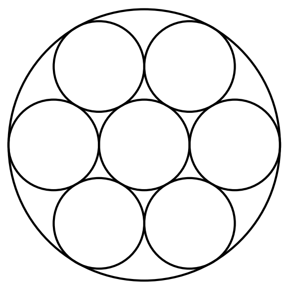
$$\frac{2^{100} + 2^{97}}{2^{100} - 2^{99}} = 1,5^n.$$

87. Дървен елемент с форма на равностранен триъгълник със страна 3 cm тежи 12 g. Приблизително колко грама тежи дървен елемент с форма на равностранен триъгълник със страна 5 cm, който е със същата дебелина и е изработен от същия материал?



7. клас

88. От тесто с форма на кръг изрязали седем кръгли меденки с радиус R, разположени както е показано на чертежа. Колко меденки със същия размер могат да се оформят от останалото тесто?



89. За коя стойност на x е изпълнено равенството

$$10^x \cdot 100^{2x} = 1000^5?$$

90. Да се намерят ъглите α и β, ако $\alpha : \beta = 5 : 4$, а съседният ъгъл на α е два пъти по-малък от съседния ъгъл на β.

за по-малките решения

на задачите от бр. 5/2016

61. Баба Цоцолана набрала ябълки за внуците си. Ако даде на всеки внук по 7 ябълки, ще останат 6 ябълки, а 12 ябълки не стигат, за да им даде по 9 ябълки. Колко внуци има баба Цоцолана?

Решение. Шестте останали ябълки и 12-те недостигащи ябълки, общо 18 ябълки, стигат, за да получи всеки внук по $9 - 7 = 2$ ябълки. Значи внуците са $18 : 2 = 9$.

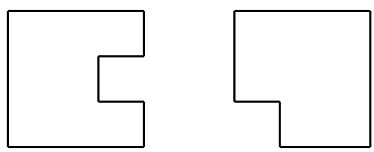
62. Дребосъчето и Карлсон имали общо 120 бонбона. Бонбоните на Дребосъчето били с 10 по-малко от бонбоните на Карлсон. То дало няколко от своите бонбони на Карлсон, след което бонбоните на Карлсон станали 4 пъти повече от бонбоните на Дребосъчето. Колко бонбона дало Дребосъчето на Карлсон?

Решение. В началото Дребосъчето имало $(120 - 10) : 2 = 55$ бонбона, а след това останало със $120 : 5 = 24$ бонбона. То е дало на Карлсон $55 - 24 = 31$ бонбона.

63. Всяка сутрин Сашо печели по 35 лева. Всеки следобед той изхарчва половината от парите си. На 4 май вечерта той имал 87 лева. Колко лева е имал на 1 май по обяд?

Решение. На 4 май по обяд Сашо има $87.2 = 174$ лв.; на 3 май вечерта има $174 - 35 = 139$ лв.; по обяд има $139.2 = 278$ лв.; на 2 май вечерта има $278 - 35 = 243$ лв.; по обяд има $243.2 = 486$ лв.; на 1 май вечерта има $486 - 35 = 451$ лв.; по обяд има $451.2 = 902$ лв.

64. От два еднакви квадратни листа със страна X см изрязали еднакви квадратчета със страна Y см. Обиколката на едната от останалите фигури била 76 см, а на другата – 94 см (виж чертежа). Да се намерят X и Y.



Решение. Обиколката на фигурата не се променя, когато малкият квадрат е изрязан ъглово. Затова $X = 76 : 4 = 19$ см. Когато малкият квадрат е изрязан вътрешно за страната, обиколката на фигурата се увеличава с две страни на малкия квадрат. Оттук $Y = (94 - 76) : 2 = 9$ см.

65. Да се намерят неизвестните числа x и y от равенствата

$$204 : (x + 6) = 12 \quad \text{и} \quad 204 : y + 6 = 12.$$

Решение. Имаме $x = 204 : 12 - 6 = 11 \quad$ и $\quad y = 204 : (12 - 6) = 34$.

66. Иван, Асен и Катя си купили еднакви пасти на обща стойност 24 лв. Иван платил 8 лв. 40 ст., а Асен платил с 2 лв. 40 ст. по-малко от Иван. Катя и Иван купили общо 15 пасти. Колко пасти е купил Асен?

Решение. Намираме, че Асен е платил 6 лв., а Катя – останалите 9 лв. 60 ст. Цената на 15 пасти е 18 лв., значи една паста струва 1 лв. 20 ст. Асен е купил 5 пасти.

67. Правоъгълник има лице 700 кв.см и дължина 28 см. Да се намери обиколката на правоъгълника и лицето на най-големия квадрат, който може да се изреже от този правоъгълник.

Решение. Широчината на правоъгълника е 25 см, а обиколката му е 106 см. Най-големият квадрат, който може да се изреже от този правоъгълник, има страна 25 см и лицето му е 625 кв.см.

68. Иво и Емо получили кутия с бонбони. Иво веднага изял половината от бонбоните и още един бонбон. След това Емо взел третината от останалите бонбони и още два бонбона. Ако накрая са останали 20 бонбона, колко са били бонбоните в началото?

Решение. Две третини от останалите след Иво бонбони са $20+2 = 22$ бонбона. Значи след Иво са останали $(22 : 2).3 = 33$ бонбона. Половината от бонбоните в кутията са $33+1 = 34$, значи в кутията е имало 68 бонбона.

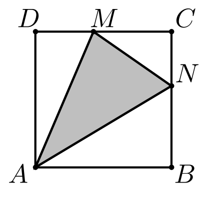
69. От произведението на числата x и 0,4 извадили $\dfrac{1}{4}$ и получили 4. Сбора на числата y и 0,4 умножили по $\dfrac{1}{4}$ и получили 4. Да се намери разликата на x и y.

Решение. Намираме $x = \left(4 + \dfrac{1}{4}\right) : 0,4 = 10,625$ и $y = 4 : \dfrac{1}{4} - 0,4 = 15,6$. Разликата на x и y е 4,975.

70. Колко кубични метра е обемът на правоъгълен паралелепипед с лице на повърхнината 34 m^2 и основа с размери 2 m и 5 m?

Решение. Лицето на околната повърхнина на паралелепипеда е $34 - 2.10 = 14$ m^2, а височината му е $14 : (2.2 + 2.5) = 1$ m. Обемът е $1.2.5 = 10$ m^3.

71. Квадрат $ABCD$ има страна 5 см. Точките M и N съответно от страните CD и BC са такива, че $DM = 2$ cm и $BN = 1$ cm. Колко процента от лицето на квадрата е лицето на триъгълника AMN?



Решение. Като извадим от лицето на квадрата $ABCD$ лицата на правоъгълните триъгълници ADM, ABN и CMN, намираме

$$S_{AMN} = 5.5 - \left(\frac{1}{2}.2.5 + \frac{1}{2}.1.5 + \frac{1}{2}.3.4\right) = 11,5,$$

което е $\dfrac{11,5}{25} = 46\%$ от лицето на квадрата $ABCD$.

72. Турист изминал 80% от маршрута си и пресметнал, че му остават 12 км. Но $\dfrac{2}{3}$ от предстоящия път са по труден терен, докато само $\dfrac{1}{3}$ от изминатия път била по труден терен. Колко километра е маршрутът и колко процента от него са по труден терен?

Решение. Щом 12 км са оставащите 20% от маршрута, то целият машрут е $12 : 0,2 = 60$ км, от които туристът е изминал 48 км. Пътят по труден терен е $\dfrac{2}{3}.12 + \dfrac{1}{3}.48 = 24$ км, което е $\dfrac{24}{60} = 40\%$ от целия маршрут.

73. Да се намери $m + n$, ако m и n са естествени числа и

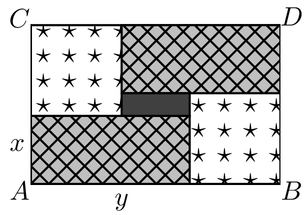
$$\frac{14^m(3^4 - 5^2)}{2(18^2 + 18 + 1)^3} = 2^{12}.7^n.$$

Решение. Преобразуваме лявата част на равенството

$$\frac{14^m(3^4 - 5^2)}{2(18^2 + 18 + 1)^3} = \frac{14^m.56}{2.343^3} = \frac{2^m.7^m.2^3.7}{2.(7^3)^3} = 2^{m+2}.7^{m-8}.$$

От равенството $2^{m+2}.7^{m-8} = 2^{12}7^n$ и условието, че числата m и n са естествени следва, че $m + 2 = 12$ и $m - 8 = n$, т.е. $m = 10$ и $n = 2$, а $m + n = 12$.

74. Правоъгълникът $ABCD$ е сглобен от две еднакви сиви плочки с размери x и y dm, две еднакви плочки на звездички и една черна плочка, чиито страни са 1 dm и 3 dm.



а) Да се изразят чрез x и y страните на една плочка със звездички и страните на $ABCD$.

б) Ако сивата плочка има обиколка 56 dm, да се намери обиколката на плочката със звездички и обиколката на $ABCD$.

Решение. а) Страните на плочка със звездички са $y - 3$ и $x + 1$. Оттук страните на $ABCD$ са $y + (y - 3) = 2y - 3$ и $x + (x + 1) = 2x + 1$.

б) От равенството $2(x + y) = 56$ намираме $x + y = 28$. Обиколката на на $ABCD$ е $2(2x + 1) + 2(2y - 3) = 4(x + y) - 4 = 4.28 - 4 = 108$ дм.

75. Номерът на стаята ми е трицифрено число. Ако между цифрата на стотиците и цифрата на десетиците сложа знак за умножение, а между цифрата на десетиците и цифрата на единиците сложа знак за събиране, стойността на получения израз ще е 27. Ако разменя местата на знаците, ще получа 22. Кой е номерът на моята стая?

Решение. Нека търсеното трицифрено число е $\overline{abc}$. От условието имаме равенствата

$$ab + c = 27 \quad \text{и} \quad a + bc = 22.$$

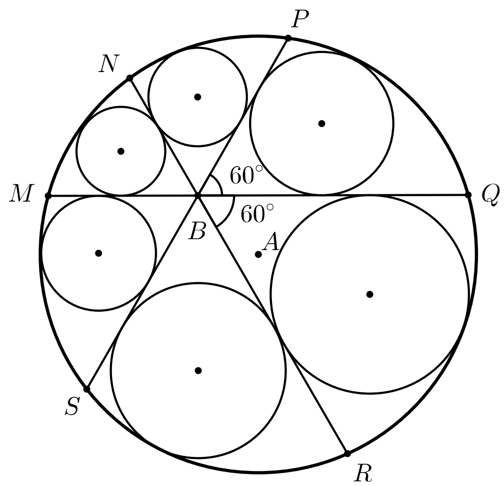
Като съберем почленно двете равенства и разложим на множители, получаваме

$$(a + c)(b + 1) = 49.$$

Оттук лесно следва, че $b + 1 = a + c = 7$. Следователно $b = 6$. Условието $6a + c = 27$ записваме във вида $5a + (a + c) = 27$, т.е. $5a + 7 = 27$, откъдето намираме $a = 4$. Тогава $c = 3$ и номерът на стаята е 463.

Математиците разговарят – 3.

В разговора на Борислав Мирчев и Leo Giugiuc се включил и Daniel Hardisky. Ето какво отбелязал той.



$$BM^2 + BP^2 + BR^2 + BN^2 + BQ^2 + BS^2 = 6R^2$$

Как е продължил разговорът може да видите на страница 72

за по-малките

На страниците на списание *Математика* гостува клуб *Математически таланти*! Ръководител на клуба е известният математик Любомир Любенов, основател на състезанието *Математика без граници*, в което тази година се включиха повече от 16 000 български ученици.

С любезното съдействие на автора представяме темата *Ребуси* от задочния клуб. Тя е подходяща за ученици от 4., 5. и 6. клас, които се подготвят за участие в математически състезания.

РЕБУСИ

Любомир Любенов

Ребусът (на латински: rebus, „с помощта на вещи“; res – „вещ“) е загадка, в която разгадаеми думи са дадени във вид на рисунки в съчетание с букви и други знаци.

Не минава математическо състезание без математически ребус. Примери – много. Как успешно да се справим с решаването на предложения ребус?

Няма рецепта за решаването на ребуси, но със сигурност трябва отнякъде да започнем развързването на възела: от разположението на цифрите, от броя на символите, от последните цифри и още много хитрини.

Навсякъде в задачите ще имаме предвид, че на **еднаквите букви съответстват еднакви цифри** и на **различните букви – различни цифри**.

Един от основните методи за решаване на ребуси е

МЕТОДЪТ НА НЕПОСРЕДСТВЕНАТА ПРОВЕРКА

Задача 1. Заменете звездичките с цифри, така че

$$** \times ** = 1*1.$$

Решение. Първите цифри на множителите са 1, защото иначе произведението ще е по-голямо или равно на 10.20=200. Задачата се свежда до

$$1*\times 1* = 1*1.$$

Цифрата на единиците на произведението е 1. Това е възможно, когато цифрите на единиците в множителите са 1×1; 3×7 и 9×9.

Да извършим **проверка:**

$$11 \times 11 = 121;$$

$$13 \times 17 = 221;$$

$$19 \times 19 = 361.$$

Така достигаме до отговора на задачата, $11 \times 11 = 121$.

Задача 2. (*Диана Раковска*) Възстановете липсващите цифри в умножението

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 126 \\ ** \end{array} \\ \hline *** \\ *\,*** \\ \hline 1*2*6 \end{array}$$

Решение. Тъй като последната цифра на произведението е 6, то цифрата на единиците на втория множител е или 1, или 6.

Тъй като второто междинно произведение е четирицифрено число, тогава цифрата на единиците на неизвестния множител е или 8, или 9.

Така вторият множител е възможно да е 81, 91, 86 или 96.

Извършваме **проверка**.

$126 \times 81 = 10\,206$. Това е едно възможно решение.

Продължаваме с проверките, защото ребусът може да има и друго възможно решение.

$126 \times 91 = 11\,466$, число което не съответства на $1*2*6$.
$126 \times 86 = 10\,836$, число което не съответства на $1*2*6$.
$126 \times 96 = 12\,096$, число което не съответства на $1*2*6$.

Окончателно получаваме, че задачата има едно решение:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 126 \\ 81 \end{array} \\ \hline 126 \\ 1\,008 \\ \hline 10206 \end{array}$$

Задача 3. (*Олимпиада в София, 1992 г.*) Възстановете липсващите цифри в умножението

$$\begin{array}{r}
27 \times {*}{*} \\ \hline
5{*} \\
+\quad {*}{*} \\ \hline
{*}{*}{*}
\end{array}$$

Решение. Първото междинно произведение е $5*$, което е възможно ако умножим 27 с 2.

$$\begin{array}{r}
27 \times {*}2 \\ \hline
54 \\
+\quad {*}{*} \\ \hline
{*}{*}4
\end{array}$$

Второто междинно произведение е двуцифрено число и то е възможно, ако умножим 27 с 1, 2 или 3. Решенията на ребуса са **три**:

$$\begin{array}{r}
27 \times 12 \\ \hline
54 \\
+\quad 27 \\ \hline
324
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
27 \times 22 \\ \hline
54 \\
+\quad 54 \\ \hline
594
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
27 \times 32 \\ \hline
54 \\
+\quad 81 \\ \hline
864
\end{array}$$

Решете самостоятелно следващия ребус.

Задача 4. Възстановете липсващите цифри в умножението

$$\begin{array}{r}
63 \times {*}{*} \\ \hline
{*}{*} \\
+\quad {*}{*} \\ \hline
{*}{*}{*}
\end{array}$$

Продължаваме с една задача от 10. Есенен турнир „Черноризец Храбър“, 2001 г.

Задача 5. Цифрата a, която е решение на ребуса $\overline{8a} \times \left(\overline{5a} - \overline{a2}\right) = \overline{2aa}$, е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

Решение. *Първи начин.* Проверяваме кой от посочените отговори води до вярно числово равенство.

$$81 \times (51 - 12) = 3159 \neq 211;$$

$$82 \times (52 - 22) = 2460 \neq 222;$$

$$83 \times (53 - 32) = 1743 \neq 233;$$

$$84 \times (54 - 42) = 1008 \neq 244;$$

$$85 \times (55 - 52) = 255.$$

Оказа се, че последното числово равенство е вярно и отговорът е **Д**) $a = 5$.

Втори начин. Единият множител е двуцифреното число $\overline{8a}$, а произведението е трицифреното число $\overline{2aa}$. От $80.2 = 160$ и $80.4 = 320$, следва че вторият множител $\overline{5a} - \overline{a2}$ е едноцифрено число. Това обаче е възможно само ако $a = 5$.

Трети начин. Това решение е разбираемо за учениците от 8. клас и за … родителите ви! Тук са нужни познания за квадратно уравнение. От

$$\overline{8a} = 80 + a;$$

$$\overline{5a} - \overline{a2} = 50 + a - (10.a + 2) = 48 - 9.a;$$

$$\overline{2aa} = 200 + 10.a + a = 200 + 11.a$$

достигаме до квадратното уравнение

$$9a^2 + 683a - 3640 = 0.$$

Единият от корените на уравнението е 5, а другият – отрицателно дробно число.

Със **задача 5**. показахме, че решенията могат да бъдат:

— технически трудни за изпълнение, но достигаме до крайния резултат, въпреки ограниченото време (*първи начин*);

— облекчени след наблюдение и с „хитрост“ от наша страна (*втори начин*);

— не особено привлекателни, но резултатни, но ако имаме повече познания (*трети начин*).

С помощта на непосредствена проверка, но и с

ОГРАНИЧАВАНЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИТЕ

се решават редица задачи. Ето един пример.

Задача 6. Да се реши числовият ребус

$$\overline{abc} + \overline{abcd} = 2017,$$

в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

Решение. Цифрата, отговаряща на a, може да е само 1, защото иначе

$$\overline{abc} + \overline{abcd} > 200 + 2000 = 2\ 200,$$

което означава че $\overline{abc} + \overline{abcd} \neq 2017$.

Но тогава $\overline{abc} = \overline{1bc} < 200$, откъдето намираме, че

$$\overline{abcd} = 2008 - \overline{abc} > 2017 - 200 = 1817.$$

От $\overline{abcd} > 1817$, получаваме че $b = 9$ или $b = 8$.

Нека $b = 9$, тогава

$$\overline{abc} + \overline{abcd} > 190 + 1900 = 2090,$$

т.е. невъзможно е при $a = 1$ и $b = 9$ сборът $\overline{abc} + \overline{abcd}$ да е равен на 2017 за някои цифри c и d.

Втората и последна възможност е $b = 8$. Тогава

$$\begin{array}{r} 1\,8\,c\,d \\ +\,1\,8\,c \\ \hline 2\,0\,1\,7 \end{array}$$

Сега от разреда на десетиците получаваме, че $c = 3$ или $c = 2$.

Ако $c = 3$, тогава от $d + c = 7$ получаваме, че $d = 4$.

Ако $c = 2$, тогава от $d + c = 17$ (има пренос!) получаваме, че $d = 15$, невъзможно.

Следователно $c = 3$ и оттук получаваме единственото решение на ребуса

$$183 + 1834 = 2017.$$

Интересна и поучителна е и следващата задача.

Задача 7. Да се реши числовият ребус

$$ЛЕВ + ЛЕВ = ЕВРО,$$

в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

Решение.Понеже $ЛЕВ$ е трицифрено число, то

$$ЛЕВ + ЛЕВ \leqq 987 + 987 = 1974.$$

Получаваме, че $Е = 1$.

Ако трицифреното число *ЛЕВ* е по-малко от 500, то *ЛЕВ*+*ЛЕВ* < 1000, а търсеният сбор *ЕВРО* е четирицифрено число. Тогава буквата *Л* можем да заменим с някои от от цифрите 5, 6, 7, 8 или 9.

Също така, понеже $E = 1$, от разреда на десетиците няма да имаме пренос към разреда на стотиците. Следователно сборът $Л + Л$ завършва на B.

Сега да проверим последователно всички възможности за буквата *Л*.

Ако $Л = 5$, тогава $B = 0$, което е невъзможно, защото тогава и $O = 0$, а на различните букви отговарят различни цифри.

Ако $Л = 6$, то трябва $B = 2$, тогава $O = 4$ и $P = 2$ – невъзможно.

Ако $Л = 7$, то $B = 4$, $O = 8$, $P = 2$ и получаваме решението

$$714 + 714 = 1428.$$

Разсъждавайки по същия начин за другите две възможности за цифрата *Л*, получаваме още две решения на дадения ребус:

$$816 + 816 = 1632 \quad \text{и} \quad 918 + 918 = 1836.$$

Срещат се и

ЗАДАЧИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С ПОМОЩТА НА РЕБУСИ

Задача 8. *(списание „Математика“, бр. 1, 1990 г.)* Разликата на две естествени числа е 208. Последната цифра на едното число е 1, а ако я задраскаме се получава другото число. Да се намерят двете числа.

Решение. Нека $\overline{AB1}$ е едното от търсените числа, а $\overline{AB}$ е другото. Достигаме до

$$\begin{array}{r} A\,B\,\,1 \\ -\,A\,B \\ \hline 2\;\,0\;\,8. \end{array}$$

От $11 - B = 8$ получаваме, че $B = 3$. От разликата на десетиците имаме $2 - A = 0$, значи зад буквата A е скрита цифрата 2. Търсените числа са 231 и 23.

ОЩЕ ЗАДАЧИ С РЕБУСИ

Задача 9. („*Математика в училище*“, *1–1979*) Намерете цифрите x и y , за които е изпълнено

$$3 \times \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y.$$

Решение. От двете страни на равенството изваждаме числото $\overline{xxxxx}$ и получаваме:

$$2 \times \overline{xxxxx} = \overline{y00000} - y.$$

Последователно преобразуваме

$$\begin{aligned} 2 \cdot x \cdot 11\,111 &= y \cdot 100000 - y \quad &\text{или}\\ 2 \cdot x \cdot 11\,111 &= 99\,999 \cdot y, &\text{т.е.}\\ 2 \cdot x \cdot 11\,111 &= 11\,111 \cdot 9 \cdot y, \end{aligned}$$

откъдето $2 \cdot x = 9 \cdot y$. Следователно $x = 9$ и $y = 2$.

Задача 10. (*Зимни математически празници, 2004 г.*) На местата на звездичките да се поставят цифри така, че да се получи верен сбор:

$$\begin{array}{r} 7\,* \\ +\,*\,*\,6 \\ *\,4\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,4 \end{array}$$

Решение. Като сравним сбора на единиците, ще получим, че звездичката в двуцифреното събираемо е равна на 9. Преносът към десетиците е 2. Оттук цифрата на десетиците на второто събираемо е 7. Към стотиците отново имаме пренос 2 и трябва сборът на цифрите на стотиците да е 18, т.е. цифрите на стотиците и на двете събираеми са равни на 9. Следователно задачата има само едно решение:

$$79 + 976 + 949 = 2004.$$

Задача 11. (*Зимни математически празници, 2005 г.*) Да се реши ребусът

$$\text{РАЛИ} + \text{РАЛИ} = \text{ДАКАР}.$$

Решение. Първо се вижда, че в сбора ДАКАР цифрата на десетохилядите Д е равна на 1, тъй като РАЛИ +РАЛИ е най-много $2.9876 = 19752$. Цифрата на единиците Р е четна, тъй като се получава от сбора И+И. Освен това в събираемите цифрата на хилядите Р е по-голяма от 4, защото иначе сборът ще бъде четирицифрен, а не петцифрен. Следователно Р е четна цифра, по-голяма от 4, т.е. Р $= 6$ или Р $= 8$.

Нека Р $= 6$. От сбора на хилядите следва, че А $= 2$ или А $= 3$.

Ако А $= 3$, трябва да има пренос към хилядите, което е невъзможно, защото цифрите на стотиците в събираемите са равни на 3.

Ако А $= 2$, от сборът на десетиците Л + Л завършва на 2, т.е. Л $= 1$ или Л $= 6$, което е невъзможно, тъй като Д$= 1$ и в случая Р $= 6$.

Нека Р = 8. От сбора на хилядите следва, че А = 6 или А = 7.

Ако А = 6, от сбора на стотиците ще има пренос към хилядите и сборът на хилядите ще е нечетен, т.е. е невъзможно да завършва на 6.

Ако А = 7, трябва да има пренос от единици към десетици, така че последната цифра на 1 + Л + Л да е 7. Значи Л е или 3, или 8. Но Л не може да е 8, защото Р = 8. Следователно Л = 3. Получаваме К = 4 и И = 9 и решението на ребуса е 8739 + 8739 = 17 478.

Задача 12. (*Зимни математически празници, 2006 г.*) Възстановете събирането

ИРЕБУС + ИРЕБУС + ИРЕБУС = РЕБУСИ.

Отговор. 142 857 + 142 857 + 142 857 = 428 571;
285 714 + 285 714 + 285 714 = 857 142.

Задача 13. Възстановете събирането

$$
\begin{array}{rr}
 & \text{СБОРНИК} \\
 & \text{БОРНИК} \\
 & \text{ОРНИК} \\
+ & \text{РНИК} \\
 & \text{НИК} \\
 & \text{ИК} \\
 & \text{К} \\
\hline
 & 5592321
\end{array}
$$

Решение. Първо да отбележим, че цифрите С, Б, О, Р, Н, И и К са първи цифри в събираемите, значи измежду тях няма 0.

От сбора на единиците следва, че 7.К завършва на 1, т.е. К е равно на 3 и има пренос 2 към десетиците. Сборът на десетиците е 6.И плюс пренос 2 и завършва на 2, значи И е равно на 5.

Следователно С не е 5 и за да се получи в сбора цифра на милионите 5, трябва С да е 4 и да има пренос 1 или С да е 3 и да има пренос 2. Вторият случай отпада лесно (защо?) и остава С = 4 .

Сборът Б + Б и евентиален пренос (0, 1 или 2) е равен на 15. Следователно Б = 7 и преносът от десетохилядите е 1.

Сборът О + О + О и евентиален пренос (0, 1, 2 или 3) е равен на 19. Следователно О е 6 и преносът от хилядите е 1.

Сборът Р + Р + Р + Р и евентиален пренос (от 0 до 4) е равен на 12. Следователно Р е 3 или 2. Тъй като К = 3, то Р = 2 и преносът от стотиците е 4.

Накрая от сбора на стотиците 5.Н+ пренос 3 = 43 намираме Н = 8. Следователно

СБОРНИК = 4 762 853.

ПЕТ ЗАДАЧИ ОТ ШКОЛАТА „МАТЕМАТИКА ЗА НАПРЕДНАЛИ“

Невена Събева, Емил Колев

На страниците на списание *Математика* гостува школата *Математика за напреднали*, която вече втора година се провежда в Института по математика и информатика. Представяме Ви пет комбинаторни задачи, разгледани на школата.

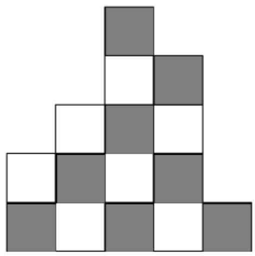
Задача 1. Кула с височина h се получава от h реда слепени квадратчета, като:

• на най-долния ред на кулата има h квадратчета;

• на всеки по-горен ред има с едно квадратче по-малко, отколкото на реда под него;

• всяко квадратче от по-горен ред е разположено точно над квадратче от долния ред.

Кулата се нарича **балансирана**, ако при шахматно оцветяване на квадратчетата в бяло и черно, броят на белите квадратчета е равен на броя на черните.



Например показаната кула с височина 5 не е балансирана, защото има 7 бели и 8 черни квадратчета.

Колко са балансираните кули с височина 2016?

Решение. На всеки ред с четен брой квадратчета има равен брой бели и черни квадратчета. На всеки ред с нечетен брой квадратчета броят на квадратчетата от единия цвят е с 1 по-голям от броя на квадратчетата от другия цвят. Следователно в балансираната кула броят на нечетните редове с повече черни квадратчета е равен на броя нечетни редове с повече бели квадратчета. В случая на балансирана кула с височина 2016 трябва да има 504 нечетни реда с повече бели квадратчета и 504 нечетни реда с повече черни квадратчета.

Всеки ред, различен от най-долния, може да се нареди по два начина. За нечетните редове едното разполагане води до повече бели квадратчета, а другото – до повече черни квадратчета.

Да преброим по колко начина може да се конструира балансирана кула с височина 2016. Всеки четен ред освен най-долния може да се разположи по два начина, т.е. за поставянето на четните редове има 2^{1007} възможности. Сред останалите 1008 нечетни реда трябва да изберем 504, във всеки от които има повече черни, отколкото бели квадратчета. Това може да стане по

$$\frac{1008.1007.\ldots.506.505}{504!} = \frac{1008!}{(504!)^2}$$

начина. Останалите нечетни редове се определят еднозначно (те се поставят така, че да имат повече бели квадратчета). Следователно броят на балансираните кули с височина 2016 е $2^{1008}.\dfrac{1008!}{(504!)^2}$.

Задача 2. В някои от квадратчетата на таблица са записани числа по следния начин.

					6	5	6
4			2			4	
	3		3		4		
				4			
		4				3	
	4			4			4
1	1	1					

Разделете показаната таблица на части, така че да са изпълнени условията:

• всяко квадратче лежи в точно една част;

• всяка част е свързана, т.е. от всяко квадратче от нея може да се стигне до всяко друго квадратче от частта, като може да се преминава в съседно по страна квадратче от тази част;

• броят на квадратчетата във всяка част е един и същ;

• сборът от числата във всяка част е един и същ.

Решение. Нека броят на частите е n и във всяка част има a квадратчета, а s е сборът от числата във всяка част. Тъй като в таблицата има 56 квадратчета и сборът от записаните числа е 63, то

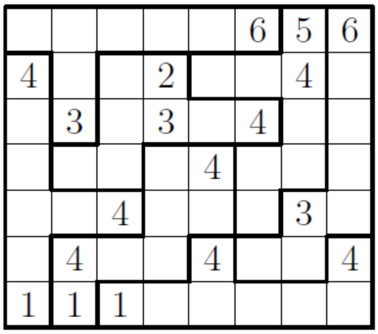
$$na = 56 \quad \text{и} \quad ns = 63.$$

Тъй като $n > 1$ и n е общ делител на 56 и 63, то $n = 7$. Оттук следва, че $a = 8$ и $s = 9$, т.е. има 7 части от по 8 квадратчета и сборът от числата във всяка част е равен на 9.

Сега да забележим, че двете шестици и петицата от най-горния ред са в различни части, иначе сборът на числата в една част ще надхвърли 9. Освен това единственият начин да разположим шестиците в част със сбор 9, е да ги комбинираме с 3 (тъй като единиците са твърде далече).

Петицата от горния ред се комбинира с четворка и оставащите числа са 1, 1, 1, 2, 3 и седем четворки. Сред тези числа единственият начин да получим сбор 9, като използваме 1, е $1+4+4$; има три такива части. В последната част са числата 2, 3 и 4.

След тези наблюдения остава да построим търсеното разделяне (по метода на пробите и грешките). Ето го:



Задача 3. Някои от буквите са кодирани с едноцифрени или двуцифрени числа, като са използвани само цифрите 1, 2 и 3 (различните букви са кодирани с различни числа). Думата РОБОТ се кодира като 3112131233. Думите КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ се кодират с една и съща последователност от 1, 2 и 3. Как се кодира думата МАТЕМАТИКА?

Решение. Първо ще отбележим, че думата РОБОТ е записана с 5 букви, а нейният код 3112131233 е записан с 10 цифри. Следователно всяка от буквите в думата се кодира с друцифрено число и то е еднозначно определено:

$$\text{Р} = 31,\ \text{О} = 12,\ \text{Б} = 13,\ \text{Т} = 33.$$

Заместваме познатите букви в думите КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ

$$\text{К}\ 3\ 1\ 1\ 2\ \text{К}\ 1\ 2\ \text{Д}\ \text{И}\ \text{Л} = 1\ 3\ \text{Е}\ \text{Г}\ \text{Е}\ \text{М}\ 1\ 2\ 3\ 3.$$

Буквата К се кодира с 1 или с 13, но 13 е кодът на буквата Б, значи К = 1. По същия начин, Л е 3 или 33, но Т = 33, значи Л = 3. Получаваме

$$1\ 3\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ \text{Д}\ \text{И}\ 3 = 1\ 3\ \text{Е}\ \text{Г}\ \text{Е}\ \text{М}\ 1\ 2\ 3\ 3.$$

Буквата Е е 1 или 11, но К = 1, значи Е е 11. Очевидно И = 23. Записваме още веднъж

$$1\ 3\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ \text{Д}\ 2\ 3\ 3 = 1\ 3\ 1\ 1\ \text{Г}\ 1\ 1\ \text{М}\ 1\ 2\ 3\ 3.$$

Буквата Г е 2 или 21, но ако Г е 21, първите осем цифри отляво не съвпадат с първите осем цифри отдясно (проверете!). Тогава Г е 2. Като сравним последните шест цифри на кодовете, разбираме, че 2Д = М1. Тъй като остамалите свободни кодове са 21, 22 и 32, оттук определяме Д е 21, а М е 22. За буквата А остава да е 32.

Думата МАТЕМАТИКА се кодира като 22323311223233231 32.

Задача 4. Възможно ли е

$$\text{НОК}(1, 2, \ldots, m) = 2016.\ \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)?$$

Решение. Да допуснем, че 2016. НОК $(1, 2, ..., m)$ = НОК $(1, 2, ..., n)$. Тъй като $2016 = 2^5.3^2.7$, в най-малкото общо кратно на числата от 1 до n простият множител 2 участва на степен, с 5 по-голяма от степента на 2 в двойката в разлагането на най-малкото общо кратно на числата от 1 до m.

Нека в разлагането на НОК $(1, 2, ..., m)$ простият множител 2 участва на степен k. Това означава, че

$$2^k \leqq m < 2^{k+1}.$$

В разлагането на НОК $(1, 2, ..., n)$ двойката е на степен $k + 5$, следователно

$$n \geqq 2^{k+5}.$$

Следователно

$$n \geqq 2^{k+5} = 2^4.2^{k+1} > 16m. \tag{1}$$

От даденото равенство следва, че в разлагането на НОК $(1, 2, ..., m)$ и на НОК $(1, 2, ..., n)$ простият множител 5 участва на една и съща степен; нека тя е l. Това означава, че

$$5^l \leqq m < n < 5^{l+1}.$$

Оттук

$$n < 5^{l+1} = 5.5^l \leqq 5m,$$

което е противоречие с (1).

Следователно отговорът на въпроса в задачата е отрицателен.

Задача 5. На нов сайт се регистрирали 2000 потребители. Всеки от тях поканил 1000 (от регистрираните на сайта) да станат приятели. Двама стават приятели, само ако всеки от тях е поканил другия. Най-малко колко приятелски двойки има на сайта?

Решение. Оценка. Изпратените покани за приятелство са общо

$$2000.1000 = 2000000.$$

Двойките потребители на сайта са

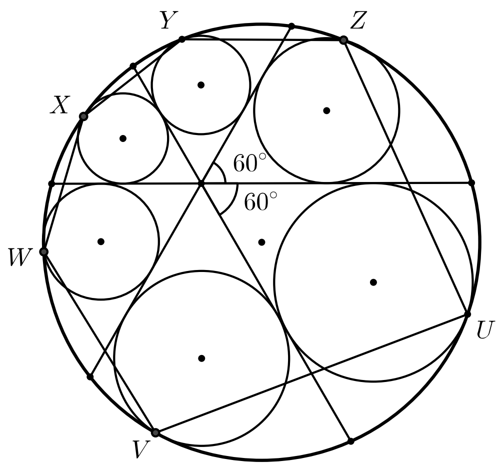
$$(2000.1999) : 2 = 1999000.$$

Броят на поканите е с 1000 повече от броя на двойките, следователно има поне 1000 двойки, в които са разменени покани и се е завързало приятелство.

Пример. Точно 1000 приятелски двойки се получават, ако разположим всички потребители в кръг и всеки покани следващите 1000 след себе си (по посока на часовниковата стрелка). Така ще се образуват приятелски двойки само между тези потребители, които са разположени диаметрално противоположно.

Математиците разговарят – 4.

В разпаления разговор побързал да се включи Miguel Ochoa Sanchez от Перу.



$$UV + WX + YZ = VW + XY + ZU$$

Разбрахте ли какво са си казали математиците? Разговорът е отворен за всички желаещи да се включат!

Целия разговор на математиците може да проследите на сайта http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/6x60.shtml.

В редакцията на сп. *Математика* се получи следното писмо от А. Стоянов (директор на СМГ), В. Данова и Е. Киселова (преподаватели от СМГ):

Уважаеми г-н Гл. редактор,

Уважаеми г-н Колев,

Коментарът по повод Пролетните математически състезания, публикуван на стр. 26 в бр. 3 от 2016 г. на списанието, огорчи и обиди Ръководството на СМГ, учителите, учениците, отличени с награди, и техните родители.

Квалификацията „странни среднощни „раздавания" на точки" навежда на мисълта за незаслужено присъдени точки и обезценява труда на състезателите. „Раздаване" на точки не е имало. Ученичката от 7. клас на СМГ Лилиана Велизар Чернев убеди проверяващата задача 7.3 и председателя на комисията доц. Веселин Ненков, че в задача 7.3 всяка стратегия е печеливша. Решението на председателя бе да се преразгледат работите на всички ученици, подали контестация по задачата. Това е причината за промяна в точките на ученици от СМГ, Бургас и други градове. Децата откриха, че задачата е „счупена", както се изрази доц. Ненков, и заслужиха достойно всяка присъдена точка. Всеки може да провери, че първенци са същите онези ученици, които заемат първите места и на другите състезания.

Факт е, че контестациите бяха среднощни, защото някой не си бе свършил работата навреме. Ние стояхме с децата и ги подкрепяхме до един часа след полунощ. От Вашата редколегия не видяхме никого. Очевидно коментарът Ви се базира на слухове.

Странно е и това, че не сте отбелязали , че не само официалното решение, но и самата задача 7.3 е несъстоятелна. Повтаряме, че е конструирана безмислена игра, при която при ***произволни ходове*** на играчите , винаги печели , този, който играе първи. Каква задача за игри и стратегии е това? Задачата си има автор, темата си има автори, комисията си има председател. Когато пишете за отговорност, напишете всички, които носят отговорност. В крайна сметка, Вашият коментар обиди единствено децата, които бяха поставени в условия да решават една „празна" задача и да убедят възрастните, че е така.

P.S. Настояваме нашият коментар-отговор да бъде публикуван.

Бележка на редакцията. Очевидно фокусът на колегите от СМГ е различен от нашия. Според нас проблемите са много по-сериозни от една сгрешена задача и събитията от началото на ноември доказват това. Ако учители или родители са се почувствали засегнати, ние се извиняваме – не сме искали да обидим никого.

ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ — 2016 г.

НАУЧНОПОПУЛЯРНИ СТАТИИ

КОНКУРСИ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

ЗА ПО-МАЛКИТЕ

ИЗВЪНКЛАСНА РАБОТА И ИНФОРМАЦИЯ

ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА КОНКУРСНИ ИЗПИТИ

ЗА КАНДИДАТ-СТУДЕНТА

ЗА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКА ЖУРНАЛИСТИКА

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по . . .

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 08.11.2016 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.