МАТЕМАТИКА

БРОЙ 3
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ — СОФИЯ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. Стойността на израза $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$ при $\log_b a = 3$ е:

А) $\frac{3}{2}$ **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 5

Задача 2. Ъгълът, който допирателната към графиката на функцията $f(x) = (2-x)\cos x$ в точката с абсциса $x = 0$ сключва с положителната посока на оста Ox е:

А) $\frac{\pi}{4}$ **Б)** $\frac{3\pi}{2}$ **В)** $\frac{\pi}{2}$ **Г)** $\frac{3\pi}{4}$

Задача 3. Стойността на израза

$$\frac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}\cos^2\frac{2\pi}{5}} \text{ е:}$$

А) 4 **Б)** $\frac{1}{4}$ **В)** 2 **Г)** $\frac{1}{2}$

Задача 4. Лицето на равнобедрен трапец, описан около окръжност, е $128\sqrt{3}$, а острият му ъгъл е 60°. Бедрото на трапеца и радиусът на окръжността са:

А) 14 и $2\sqrt{3}$ **Б)** 15 и $3\sqrt{3}$

В) 16 и $4\sqrt{3}$ **Г)** 17 и $5\sqrt{3}$

Задача 5. Дадена е правилна триъгълна призма с основен ръб 4. През околен ръб, перпендикулярно на срещулежащата околна стена, е построено сечение с лице 16. Пълната повърхнина и обемът на призмата са:

А) $39\sqrt{3}$ и 31 **Б)** $40\sqrt{3}$ и 32

В) $40\sqrt{3}$ и 31 **Г)** $39\sqrt{3}$ и 32

Задача 6. Дадено е уравнението

$$(k+4)\log_2^2 x + k\log_2 x + k + 8 = 10^{2-\lg 4} - 25^{\log_5 4}, \qquad (1)$$

където k е параметър.

а) За кои стойности на параметъра k уравнението (1) има корен $x = 16$?

б) За кои стойности на параметъра k уравнението (1) има единствено решение?

в) За кои стойности на параметъра k уравнението (1) има едно решение в интервала $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$?

Задача 7. Дадена е окръжност k с център O и радиус R. Окръжност k_1 се допира вътрешно до k в точката A така, че точката O е външна за k_1. От O е прекарана допирателна OB ($B \in k_1$) към k_1 така, че $\sphericalangle OAB = \alpha$.

а) Намерете радиуса на k_1.

б) Докажете, че $OB = R\operatorname{tg}\alpha$.

в) Докажете, че, ако за ъгъл α е изпълнено $\cos 2\alpha = \sin^2 2\alpha$, то разстоянието от B до OA при фиксирано R е най-голямо. В този случай намерете $\cos 2\alpha$.

Задача 8. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $2m$ и двустенен ъгъл при основата β.

а) Намерете обема на пирамидата.

б) Докажете, че $\cos\varphi = -\cos^2\beta$, където φ е двустенният ъгъл при околен ръб на пирамидата.

Забележка. Тази (тренировъчна!) тема по принцип трябва да е по-трудна от очакваните на приемните изпити.

ТЕМА 2: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи — 0 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2 - 3x + 15 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ е равна на

А) $-\dfrac{1}{5}$ **Б)** $\dfrac{3}{5}$

В) $\dfrac{1}{5}$ **Г)** не може да се намери

2. Решенията на неравенството $8x - 1 < 4x^2$ са:

А) $x \in \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ **Б)** $x \in \left(0;\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

В) $x > \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ **Г)** $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2};\ \infty\right)$

3. Изразът $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \dfrac{5}{\sqrt{5}}$ е равен на

А) 1 **Б)** 5 **В)** $\sqrt{5}$ **Г)** $2\sqrt{5}+1$

4. Корените на уравнението $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 0$ са:

А) $\pm\sqrt{3}$ **Б)** $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **В)** 1 **Г)** -1

5. Решенията на неравенството $\dfrac{x+7}{x-2} \geqq x-1$ са:

А) $x \in [-1;\ 2) \cup [5;\ \infty)$ **Б)** $x \in (-\infty;\ -1] \cup (2;\ 5]$

В) $x \in (2;\ 5]$ **Г)** $x \in [-1;\ 5]$

6. Решенията на неравенството $2^{x-1} > \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$ са:

А) $x < 0$ **Б)** $x \in (-\infty; \infty)$

В) $x > 4$ **Г)** $x > 0$

7. Решенията на неравенството $f(g(x)) < g(f(x))$, където $f(x) = 2x+3$, $g(x) = x-2$ са:

А) $x > \dfrac{1}{2}$ **Б)** няма решение

В) $x \in (-\infty; +\infty)$ **Г)** $x > 0$

8. Корените на уравнението $(1 - 2\log_2 x)\log_2 x + 3 = 0$ са:

А) $\dfrac{1}{2}$; $2^{\frac{3}{2}}$ **Б)** -1; $\dfrac{3}{2}$ **В)** 2; $2^{\frac{2}{3}}$ **Г)** $2^{\frac{3}{2}}$

9. Уравнението, чиито корени са $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$, където x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 7x + 12 = 0$, е:

А) $12x^2 + 7x + 1 = 0$ **Б)** $12x^2 - 7x + 1 = 0$

В) $x^2 - 7x + 1 = 0$ **Г)** $12x^2 - 7x - 1 = 0$

10. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ имаме $AC = BD = 4$. Ако отсечките, съединяващи средите на срещуположните страни на четириъгълника, са равни, то лицето на $ABCD$ е:

А) 16 **Б)** не може да се намери **В)** 4 **Г)** 8

11. В равнобедрения $\triangle ABC$ $(AC = BC)$ е вписана окръжност с радиус 3. Права p, успоредна на AB, се допира до окръжността и разстоянието от C до p е 3. Намерете разстоянието между допирните точки на окръжността с бедрата.

А) 9 **Б)** 6 **В)** $3\sqrt{3}$ **Г)** $2\sqrt{3}$

12. Височината в основата на правилна триъгълна пирамида е $\sqrt{3}$, а околните ръбове на пирамидата образуват с равнината на основата ъгъл 60°. Обемът на пирамидата е:

А) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **Б)** $2\sqrt{3}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **Г)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Решенията на неравенството $x^3 \leqq \dfrac{16}{x}$ са:

14. Корените на уравнението $\dfrac{2x^2}{x-3} = \dfrac{1}{x-1}$ са:

15. Решенията на неравенството $x^2 - 6 \geqq |x|$ са:

16. Дадена е правоъгълен триъгълник с катети $AC = 6$ см и $BC = 8$ см. Ако M е допирната точка на вписаната в триъгълника окръжност с хипотенуза AB, то AM е равна на:

17. Върху страната AB на равностранния $\triangle ABC$ е взета точка M така, че $AM = 11$. Ако страната на триъгълника е 24, то намерете разстоянието от M до центъра на триъгълника.

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 15.

18. Намерете стойностите на реалния параметър a, при които неравенството $\log_a(x^2+4) > 1$ е изпълнено за всяко реално число x.

19. За кои цели стойности на параметъра a уравненията $3x^2-4x+a-2=0$ и $x^2-2ax+5=0$ имат общ корен? Намерете този корен.

20. За правоъгълния трапец $ABCD$ ($AB \| CD$, $AD \perp AB$ и $AB > CD$) са известни $DC = 3$ и $BC = 6$. Средата E на BC е свързана с точка D и $\sphericalangle EDC = \alpha$. Намерете лицето на трапеца.

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

Татяна Ичева, Емил Колев

От 1997 година в Ловеч се провежда Националното състезание по математика за ученици от профилирани гимназии и паралелки на СУ с чуждоезиков профил. Всяка година в него участват около 300–350 ученици от близо 25 училища в цялата страна. Състезанието се организира от Министерството на образованието и науката съвместно с Регионално управление на образованието – Ловеч. През годините състезанието се е провеждало освен в Ловеч и в Троян и Тетевен. Така участниците могат да се запознаят с културно-историческите забележителности на цялата област.

Националното състезание по математика за ученици от профилирани гимназии и паралелки на СОУ с чуждоезиков профил:

- предоставя възможност за индивидуална изява на ученици със задълбочени знания и засилен интерес към математиката;
- осигурява възможност за реализация на техните постижения и увереност при участието им в състезателни прояви;
- дава възможност на профилираните гимназии и СУ в страната да сравнят постиженията си в областта на обучението по математика.

Темите за състезанието се съставят от национална комисия, определена със заповед на Министъра на образованието и науката. С по-голямата част от задачите се проверява до каква степен учениците са усвоили знанията и уменията по основните теми от учебното съдържание. Не е малък и броят на задачите, при решаването на които състезателите трябва да вложат остроумие, находчивост и логическо мислене.

Учениците, класирани на първо, второ и трето място на състезанието, съгласно раздел II на Програмата с мерки за закрила на деца с изявени дарби за съответната календарна година, придобиват право на стипендия. Те получават медали, предметни награди и грамоти от Министерство на образованието и науката. Тези, класирани на 4., 5. и 6. място получават диплом за отлично представяне и предметни награди. Всички участници получават свидетелство за участие.

Тази година състезанието се проведе от 16 до 18 март. В продължение на три дни 200 млади математици от 21 училища в страната участваха в оспорваната надпревара. При старта на събитието в петък вечерта състезателите наблюдаваха концерт на възпитаниците на домакините – ПЕГ „Екзарх Йосиф I“ в Ловеч, след което се насладиха на спектакъла на крепостта „Хисаря“ – „Звук и светлина“.

Резултатите и награждаването на първенците бяха обявени в неделя след упорита работа на Националната комисия с председател проф. д-р Емил Колев. „Пожелавам Ви да се реализирате по начина, по който мечтаете, да работите успешно за усъвършенстването си и да помните преживяното в Ловеч“ – с тези думи се обърна към участниците при награждаването кмета на община Ловеч Корнелия Маринова. В награждаването се включиха и Маня Манева – главен експерт по математика в МОН, Еленко Начев – началник на РУО – Ловеч и проф. Емил Колев – председател на Националната комисия.

Класираните на призовите места по класове са следните:

Осми клас

Първо място: **Валентина Маринова** (АК) и **Александра Димитрова** (АК); *Второ място:* **Иво Йорданов** (АК); *Трето място*: **Виктория Танева** (Първа АЕГ, София), **Александра Димитрова** (ЕГ „П.Яворов“, Силистра), **Драгомир Ганев** (АК).

Девети клас

Първо място: **Иван Николов** (АК);

Второ място: **Николай Митев** (АК); **Гергана Пейкова** (АК);

Трето място: **Мирослав Димитров** (ЕГ „Пловдив“), **Иван Григоров** (АК).

Десети клас

Първо място: **Златомир Папазов** (АК); *Второ място:* **Давид Петров** (ГПЧЕ „Ромен Ролан“, Стара Загора); **Йоана Николова** (АК); *Трето място:* **Ясен Шопов** (Първа АЕГ, София), **Павел Сарлов** (ПГПЧЕ „Христо Ботев“, Кърджали).

Единадесети клас

Първо място: **Иван Иванов** (АК); *Второ място:* **Георги Арнаудов** (ГПЧЕ „Ромен Ролан“); *Трето място:* **Кристиан Сотиров** (Първа АЕГ, София).

Дванадесети клас

Първо място: **Христо Папазов** (АК), **Иван Ганев** (АК); *Второ място:* **Лора Урумова** (АК); *Трето място:* **Васил Алистаров** (Първа ЕГ, Варна).

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ
ОСМИ КЛАС

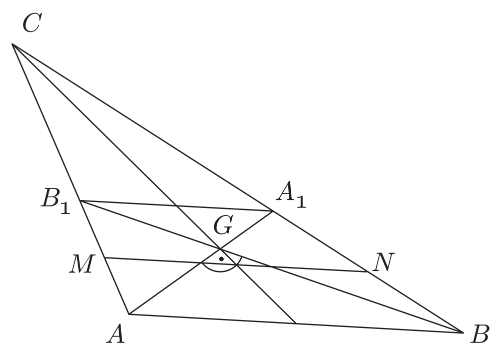
1. Намерете стойността на израза $A = \sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{|40\sqrt{2} + 57|}$.

Отговор. $A = -10$

2. Намерете всички цели стойности на параметъра a за които уравнението $(a-3)x^2 + 2x + 3a - 11 = 0$ има два равни реални корена.

Отговор. $a = 4$

3. Медианите през върховете A и B на $\triangle ABC$ се пресичат в точка G и са перпендикулярни. Точките M и N съответно от страните AC и BC ги делят в отношение $3:1$, считано от C. Ако $CG = 12$ cm, намерете дължината на отсечката MN.



Решение. Точка G е медицентър на триъгълника ABC. Тогава, ако $CG \cap AB = P$, то CP е медиана и $GP = \dfrac{1}{2}CG = 6$ cm. Но $GP = \dfrac{1}{2}AB$ е медиана в правоъгълния $\triangle ABG$, следователно $AB = 12$ cm. Четириъгълникът ABA_1B_1 е трапец, тъй като $A_1B_1 = 6$ cm е средна отсечка в $\triangle ABC$. От условието $CM : MA = CN : NA = 3 : 1$ и $CB_1 = B_1A$, $CA_1 = A_1B$ следва, че M и N са среди на бедрата на този трапец, т.е. MN е негова средна отсечка. Тогава $MN = \dfrac{AB + A_1B_1}{2} = 9$ cm.

4. За кои стойности на параметъра a системата $\left| \begin{array}{l} 2x + ay = a + 2 \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{array} \right.$ има безброй решения?

Отговор. Ако извадим от второто уравнение удвоеното първо уравнение, получаваме $(a-3)x = 0$. Това уравнение има безброй решения при $a = 3$.

5. Пресечните точки на графиките на функциите $y = 2x + 5$, $y = 2x - 1$, $y = 4x + 1$ и $y = 4x + 7$ са върхове на четириъгълник. Намерете координатите на пресечната точка на диагоналите му.

Решение. Графиките на функциите са прави, които са две по две успоредни. Полученият четириъгълник е успоредник с върхове $A(-4;-9)$, $B(-1;-3)$, $C(2;9)$, $D(-1;3)$. Тъй като диагоналите се разполовяват от пресечната си точка, търсената точка е средата на отсечката BD с координати $E(-1;0)$.

6. На рождения ден на Стефан последна пристигнала Ина и му подарила книга, а предпоследен дошъл Павел и му подарил калкулатор. Докато използвал калкулатора, Стефан забелязал, че произведението на общия брой подаръци и на броя им преди идването на Павел е с 16 по-голямо от произведението на възрастта му и на броя подаръци, които е получил до идването на Ина. На колко години става Стефан?

Решение. Равенството $x(x-2) = 16 + a(x-1)$ записваме във вида

$$a = \frac{x^2 - 2x - 16}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - 17}{x-1} = x - 1 - \frac{17}{x-1}$$

Тъй като a и x са естествени числа, то $x-1$ е делител на 17, т.е. е 1 или 17. При $x-1=1$ получаваме $a=-16$, абсурд. При $x-1=17$ получаваме $x=18$, $a=16$, т.е. Стефан става на 16 години.

ДЕВЕТИ КЛАС

1. Ако x и y са решения на системата $\left|\begin{array}{l}(x-4y)(x+4y)=-13\\(4x-y)(4x+y)=47\end{array}\right.$, пресметнете стойността на израза $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение. Дадената система е еквивалентна на $\left|\begin{array}{l}16x^2-y^2=47\\x^2-16y^2=-13\end{array}\right.$ и след почленно събиране и изваждане на двете уравнения, получаваме

$$17(x^2-y^2)=34 \iff x^2-y^2=2 \text{ и } 15(x^2+y^2)=60 \iff x^2+y^2=4.$$

Тогава $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$.

2. В равнобедрения трапец $ABCD$ бедрото BC и малката основа CD са равни на 2 cm и $AC \perp BC$. Намерете лицето на трапеца.

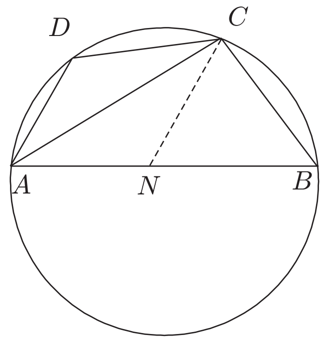
Решение. Тъй като трапецът е равнобедрен и $AC \perp BC$, то и $BD \perp AD$. Тогава точките A, B, C и D лежат на една окръжност с диаметър AB. Нека O е средата на AB. Тъй като $BC = CD = AD = 2$ cm, то

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle AOD = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$$

и триъгълниците BOC, COD, AOD са равностранни. Тогава

$$S_{ABCD} = 3S_{BOC} = 3\frac{4\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

3. В четириъгълника $ABCD$ ъгъл ABC има мярка 60°, $BC = CD$ и $AD + DC = 10$ cm. Да се намери дължината на AB, ако около $ABCD$ може да се опише окръжност.



Решение. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, следователно $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 120^\circ$. Оттук за $\triangle ADC$ имаме $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 60^\circ$ и следователно $\sphericalangle DAC < 60^\circ$. От $BC = CD$ следва $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC$. Сега от $\triangle ABC$ получаваме

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC) = 120^\circ - \sphericalangle DAC > 60^\circ > \sphericalangle BAC$$

и следователно $AB > BC$. Нека точка N върху страната AB е такава, че $BN = BC$. Тогава $\triangle NBC$ е равностранен и следователно $\sphericalangle ANC = 120^\circ$. Оттук $\triangle ANC \cong \triangle ADC$ и значи $AN = AD$. Следователно $AB = AN + NB = AD + DC = 10$ cm.

4. Да се реши уравнението $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.

Решение. Имаме $x^2+2+\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12$. Полагаме $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = t \geq 0$, откъдето $t^2 - 8 = x^2 + 2x$. Тогава

$$t^2 - 8 + t = 12 \ \Rightarrow\ t^2 + t - 20 = 0 \ \Rightarrow\ t_1 = -5,\ t_2 = 4$$

Но $t \geq 0 \Rightarrow t = 4$, откъдето $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4 \Rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

5. Намерете всички двойки реални числа (a, b), за които уравнението

$$\left(3x - a^2 + ab - b^2\right)^2 + \left(2x^2 - a^2 - ab\right)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

има решение.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение:

$$\left(3x - a^2 + ab - b^2\right)^2 + \left(2x^2 - a^2 - ab\right)^2 + (x - 3)^2 = 0.$$

То е равносилно на системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x - a^2 + ab - b^2 = 0 \\ 2x^2 - a^2 - ab = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 9 - a^2 + ab - b^2 = 0 \\ 18 - a^2 - ab = 0 \end{array}\right. .$$

След като умножим първото уравнение с 2 и от него извадим второто, получаваме $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, което е еквивалентно на $(a-b)(a-2b) = 0$, т.е. $a = b$, $a = 2b$.

При $a = b$ получаваме $a = b = \pm 3$, а при $a = 2b$ получаваме $a = \pm 2\sqrt{3}$, $b = \pm\sqrt{3}$. Наредените двойки числа са $(3,3)$; $(-3,-3)$; $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$; $(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

6. Два областни града A и B са свързани с път. В първата област има 7 села, общото разстояние от които до A е равно на 41 километра. Във втората област има 6 села, общото разстояние от които до B е равно на 37 километра. От всяко село от първата област до всяко село от втората област се придвижил по един автомобил. Общото изминато разстояние от всички автомобили е 2017 километра. Да се намери разстоянието между градовете A и B.

Решение. Да означим търсеното разстояние с x. Общо автомобилите са 42, като от всяко село от първия окръг са тръгнали 6 автомобила, а във всяко село от втория окръг са пристигнали по 7 автомобила. Това означава, че всяко разстояние от село от първия окръг до A е изминато 6 пъти, а всяко разстояния от B до село от втория окръг е изминато по 7 пъти. По пътя между A и B са минали всички 42 автомобила. Следователно изминатото разстояние от всички автомобили е

$$6.41 + 7.37 + 42.x = 505 + 42.x = 2017,$$

откъдето намираме $x = 36$ километра.

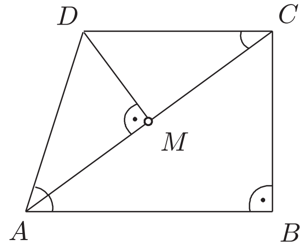
ДЕСЕТИ КЛАС

1. Намерете броя на целите числа, които са решения на неравенството

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{8}{x^2-1}$$

Решение. Имаме $x \neq \pm 1$ и след преобразуване на неравенството, получаваме $\dfrac{x^2-x-6}{(x-1)(x+1)} \leqq 0$. Следователно решенията на неравенството са $x \in [-2;-1) \cup (1;3]$. Броят на целите числа, които са решенията на неравенството, е 3.

2. В правоъгълния трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ диагоналът AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$, а M е средата на AC. Намерете периметъра на трапеца, ако $AC = 12$ cm и $DM : AD = 3 : 5$.



Решение. От $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$ следва, че $\triangle ACD$ е равнобедрен. Тогава DM е медиана и височина, $\triangle AMD$ е правоъгълен, $\sin\alpha = \dfrac{DM}{AD} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $AD = \dfrac{AM}{\cos\alpha} = \dfrac{15}{2}$.

В $\triangle ABC$ имаме

$$AB = AC.\cos\alpha = \frac{48}{5} \quad \text{и} \quad BC = AC.\sin\alpha = \frac{36}{5}.$$

Следователно $P_{ABCD} = \dfrac{48}{5} + \dfrac{36}{5} + \dfrac{15}{2} + \dfrac{15}{2} = 31{,}8$ cm.

3. Да се намери стойността на израза $\left(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}.\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}} - \sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}\right)^{-3}$.

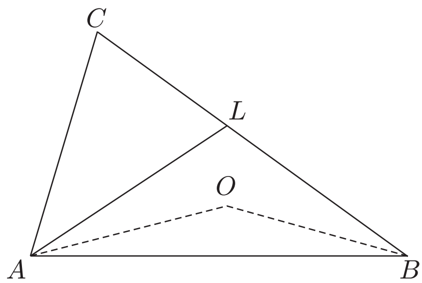
Отговор. $-\dfrac{1}{3}$

4. Дадени са три купчинки с бонбони, като във всяка купчинка има по 2017 бонбона. За един ход можем да вземем два бонбона от произволна купчинка и да поставим по един бонбон в другите две купчинки. След няколко хода в първата купчинка останали два бонбона, а във втората – x бонбона. Колко различни стойности може да приема x?

Решение. Ще докажем, че ако в даден момент в трите купчинки има съответно a, b и c бонбона, то числата $a-b$, $a-c$ и $b-c$ се делят на три. За началния момент това твърдение е вярно. След един ход в трите купчинки ще има съответно $a-2$, $b+1$ и $c+1$ бонбона и директно се вижда, че числата $a-b-3$, $a-c-3$ и $b-c$ се делят на три. Това означава, че ако в първата купчинка има два бонбона, то във втората купчинка ще има $3k+2$ бонбона. Тъй като прилагането на ход за първата купчинка и след това два хода за втората води до a, $b-3$ и $c+3$, то можем да намаляваме или увеличаваме броя на бонбоните в произволна купчинка с 3. Това означава, че във втората купчинка можем да имаме произволно число бонбони от вида $3k+2$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, 2015$. Това са 2016 различни стойности.

5. В триъгълник ABC вътрешната ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ пресича страната BC в точка L. Намерете ъглите на триъгълника ABC, ако центърът на вписаната в триъгълника ABL окръжност съвпада с центъра на окръжността, описана около триъгълник ABC.

Решение. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO$, а $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$. Тъй като O е център на вписана в $\triangle ABL$ окръжност, $\sphericalangle ABO = \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BAO = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAL = \dfrac{1}{4}\sphericalangle BAC$. Следователно $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$ и



$\sphericalangle ACB = \dfrac{1}{2}\sphericalangle AOB = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle ABO) = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC$. От $\triangle ABC$ получаваме $180^\circ = 90^\circ + \dfrac{5}{2}\sphericalangle ABC$. Оттук получаваме: $\sphericalangle ABC = 36^\circ$, $\sphericalangle BAC = 72^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 72^\circ$.

6. Решете уравнението $2 + \sqrt[3]{3x^2 - 2x} = \sqrt{3x^2 - 2x + 8}$.

Решение. Полагаме $u = \sqrt[3]{3x^2 - 2x}$, $v = \sqrt{3x^2 - 2x + 8}$ и уравнението приема вида $2+u = v$. Имаме $u^3 - v^2 = -8$. Заместваме $v = 2+u$ и решаваме уравнението: $u^3 - (2+u)^2 = -8 \Leftrightarrow (u-1)(u^2-4) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1$, $u_{2,3} = \pm 2$.

При $u = 1$ получаваме $1^3 = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$; при $u = 2$ получаваме $2^3 = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x_3 = 2$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$; при $u = -2$ уравнението $(-2)^3 = 3x^2 - 2x$ няма решение. Следователно ирационалното уравнение има четири решения: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Намерете всички реални стойности на параметъра y, за които числата $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$, $\dfrac{y^2 + 3y - 1}{3}$, $y - 1$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия.

Решение. От свойствата на аритметичната прогресия получаваме

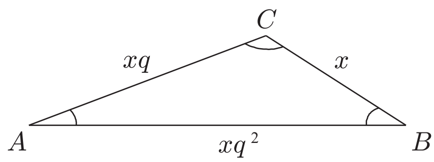
$$\frac{2\left(y^2 + 3y - 1\right)}{3} = (y-1) + \sqrt{(y+1)^2},$$

т.е. $2y^2 + 3y - 3\,|y+1| + 1 = 0$. Това уравнение е еквивалентно на системите

$$\left|\begin{array}{l} y + 1 \geq 0 \\ 2y^2 + 3y - 3\,(y+1) + 1 = 0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} y + 1 < 0 \\ 2y^2 + 3y + 3\,(y+1) + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Решенията са $y \in \{-2; -1; 1\}$.

2. Периметърът на триъгълник е 38 cm, а дължините на страните му са последователни членове на геометрична прогресия. Отношението на синусите на най-малкия и на средния по големина ъгъл е $\frac{2}{3}$. Намерете лицето на триъгълника.



Решение. Нека в $\triangle ABC$ страните $BC = x$, $AC = xq$ и $AB = xq^2$ са последователни членове на геометрична прогресия с частно $q > 1$, а α, β и γ са съответните им срещулежащи ъгли.

Тогава $\alpha < \beta < \gamma$ и от синусовата теорема следва, че $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{xq}$ и $q = \frac{3}{2}$. Страните на $\triangle ABC$ са $BC = x$, $AC = \frac{3x}{2}$, $AB = \frac{9x}{4}$ и намираме

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{9x}{4} = 38 \;\Leftrightarrow\; x = 8.$$

Следователно $BC = 8$ cm, $AC = 12$ cm и $AB = 18$ cm. Лицето на $\triangle ABC$ пресмятаме по хероновата формула:

$$p = 19, \quad S_{ABC} = \sqrt{19\,(19-8)\,(19-12)\,(19-18)} = \sqrt{1463}\ \mathrm{cm}^2.$$

3. Пресметнете стойността на израза

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{cotg}(\alpha + \pi)\,.\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha.\operatorname{cotg}\alpha,$$

ако $5\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\operatorname{tg}(5\pi + 5\alpha) = \left(-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Отговор. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. Намерете броя на равните членове на прогресиите 5, 8, 11, ... и 3, 7, 11, ..., ако всяка от тях се състои от 2017 члена. Кой е последният общ член на двете редици?

Решение. Нека $\{c_p\}$ е редицата от еднаквите членове на редиците $\{a_n\}$ и $\{b_m\}$. Тогава $\{c_p\}$ е аритметична прогресия с първи член $c_1 = 11$, разлика $d = \text{НОК}(3, 4)$ и последен член $c_p \leq \min\{a_{2017}, b_{2017}\}$.

Като вземем предвид, че $a_{2017} < b_{2017}$ и $a_{2017} = 5 + 2017.3 = 6056$, от $c_p \leq a_{2017}$ намираме $11 + (p-1)\,12 \leq 6056 \Leftrightarrow p \leqq 504{,}75$.

От последното неравенство следва, че $p = 504$.

Последният общ член на двете редици е $c_{504} = 11 + 503.12 = 6047$.

5. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с център на описаната окръжност точка O. Правите AO и BO пресичат страните BC и AC съответно в точките P и Q. Ако около четириъгълника $CQOP$ може да се опише окръжност и $CP = 2CQ$, да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

Решение. Тъй като около четириъгълника $CQOP$ може да се опише окръжност, то $\sphericalangle QOP + \sphericalangle QCP = 180^\circ$. От това равенство и от $\sphericalangle AOB = 2\gamma$ следва, че $3\gamma = 180^\circ$, т.е. $\gamma = 60^\circ$. От друга страна, $\sphericalangle QPC = \sphericalangle QOC = 180^\circ - \sphericalangle BOC = 180^\circ - 2\alpha$ и аналогично $\sphericalangle PQC = \sphericalangle POC = 180^\circ - \sphericalangle AOC = 180^\circ - 2\beta$. От синусовата теорема за триъгълник QPC получаваме:

$$2 = \frac{CP}{CQ} = \frac{\sin(180^\circ - 2\beta)}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{\sin(2\beta)}{\sin(2\alpha)}$$

Като използваме, че $2\alpha + 2\beta = 240^\circ$ получаваме $2\sin(240^\circ - 2\alpha) = \sin(2\beta)$, откъдето $-\sqrt{3}\cos(2\beta) + \sin(2\beta) = \sin(2\beta)$. Това означава, че $\cos(2\beta) = 0$, т.е. $\beta = 45^\circ$. Тогава $\alpha = 75^\circ$.

6. Нека $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е такава, че $f(n+1) > f(n)$ и $f(f(n)) = 3n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

а) Намерете $f(1)$, $f(2)$ и $f(3)$.

б) Намерете $f(9)$ и $f(10)$.

в) Намерете $f(756)$.

Решение. Нека първо забележим, че $f(n) \neq n$ (в противен случай бихме имали $n = f(f(n)) = 3n$) и следователно $n < f(n)$ за всяко естествено n. Освен това в сила е

$$f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n).$$

Тогава $1 < f(1) < f(f(1)) = 3$ и следователно $f(1) = 2$, откъдето $f(2) = f(f(1)) = 3$ и $f(3) = 3f(1) = 6$. Оттук

$$6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 3f(2) = 9$$

и значи $f(4) = 7$, $f(5) = 8$. Следователно

$$f(9) = 3f(3) = 18 < f(10) < f(11) < f(12) = 3f(4) = 21,$$

откъдето $f(10) = 19$.

За да пресметнем $f(756)$, нека първо забележим, че $756 = 27.28$ и следователно $f(756) = 27f(28)$. В сила е

$$f(27) = 3f(9) = 54 < f(28) < f(29) < f(30) = 3f(10) = 57,$$

откъдето $f(28) = 55$ и следователно $f(756) = 27.55 = 1485$.

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Пет различни числа са последователни членове на аритметична прогресия. Ако отстраним третия и четвъртия член, то останалите три са последователни членове на геометрична прогресия. Намерете частното на тази геометрична прогресия.

Решение. Нека от петте числа, които образуват аритметична прогресия $a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d$ отстраним третия и четвъртия член. Тъй като останалите три образуват геометрична прогресия a_1, a_1+d, a_1+4d, получаваме

$$(a_1+d)^2 = a_1(a_1+4d).$$

Понеже всички числа са различни от $d^2 = 2a_1 d$ следва, че $d = 2a_1$. Тогава за втората прогресия получаваме $a_1, 3a_1, 9a_1$, което означава, че частното е 3.

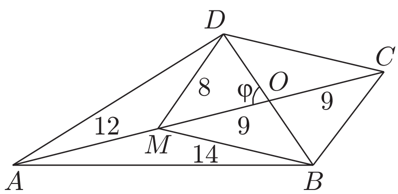
2. За кои стойности на x функцията

$$f(x) = 3^{|x|\log_{\sqrt{2}} 0.5} - \frac{1}{3^{|x|}} + 4$$

достига най-голямата си стойност?

Решение. След опростяване получаваме $f(x) = 3^{-2|x|} - 3^{-|x|} + 4$. Полагаме $3^{-|x|} = t > 0$. Тъй като $-|x| \leqq 0$ за всяко реално число x, то $3^{-|x|} \leq 3^0$, откъдето получаваме $t \in (0;1]$. Следователно трябва да намерим стойностите на $t \in (0;1]$, за които квадратната функция $g(t) = t^2 - t + 4$ достига най-голямата си стойност. Върхът на графиката ѝ има абсциса $t = \dfrac{1}{2} \in (0;1]$ и в тази точка g достига своя минимум. Тъй като $g(0) = g(1) = 4$, то най-голямата стойност на g в $(0;1]$ се достига $t = 1$. Следователно най-голямата стойност на f се достига, когато $3^{|x|} = 1$, т.е. при $x = 0$.

3. Точка лежи на диагонала на четириъгълника $ABCD$ така, че $MB \parallel CD$ и $MD \parallel BC$. Намерете лицето на четириъгълника, ако е известно, че $MA = 12$, $MB = 14$, $MC = 18$, $MD = 8$.



Решение. От $MB \parallel CD$ и $MD \parallel BC$ следва, че $MBCD$ е успоредник. От равенството $BD^2 + MC^2 = 2MB^2 + 2MD^2$ намираме $BD^2 = 196$ и $BD = 14$. Нека $MC \cap BD = O$ и $\sphericalangle MOD = \varphi$. Тогава $MO = 9$, $DO = 7$,

$$\cos\varphi = \frac{MO^2 + DO^2 - MD^2}{2MO.DO} = \frac{81+49-64}{2.9.7} = \frac{11}{21}, \sin\varphi = \frac{8\sqrt{5}}{21}.$$

Лицето на четириъгълника $ABCD$ е

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\varphi = \frac{1}{2}.30.14.\frac{8\sqrt{5}}{21} = 80\sqrt{5}.$$

4. За геометричната прогресия $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ е известно, че

$$a_k = 1 - \cos 2x,\ \ a_{k+1} = \cos x - \frac{1}{2},\ \ \ a_{k+2} = \frac{1}{2}(\sin x)^{-2}.$$

Намерете стойността на k, ако $a_{15} = \dfrac{27}{8}$.

Решение. От свойствата на геометричната прогресия и тригонометричните функции имаме

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = (1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}(\sin x)^{-2} = \frac{1 - \cos 2x}{2\sin^2 x} = 1.$$

Оттук и $\cos x \in [-1; 1]$ получаваме $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, откъдето $a_k = \dfrac{3}{2}$, $a_{k+1} = -1$ и $a_{k+2} = \dfrac{1}{2}(\sin x)^{-2} = \dfrac{1}{2\,(1 - \cos^2 x)} = \dfrac{2}{3}$. Следователно частното q на прогресията е $q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = -\dfrac{2}{3}$. Тогава $a_{15} = \dfrac{27}{8} = a_1 q^{14}$ и $a_1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{17}$. Следователно $a_{k+1} = a_1 q^k = (-1)^k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-17} = -1$ и значи $k = 17$.

5. През средата A_1 на ръба AD на триъгълната пирамида $ABCD$ е построена равнина γ, перпендикулярна на AD. Намерете отношението на обемите на двете тела, на които равнината разделя пирамидата, ако е известно, че γ минава през медицентъра M на $\triangle BCD$ и $AB = AC$, $BD = CD$.

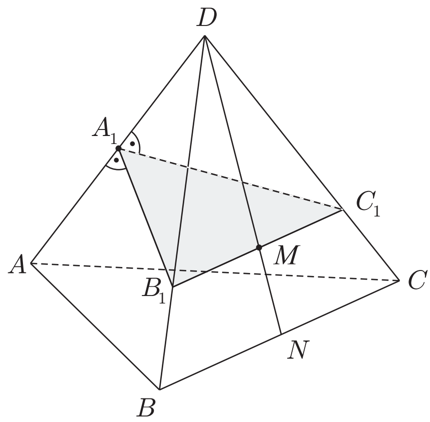
Решение. В околните стени (ABD) и (ACD) построяваме $A_1B_1 \perp AD$ $(B_1 \in BD)$ и $A_1C_1 \perp AD$ $(C_1 \in CD)$. Тогава $AD \perp (A_1B_1C_1)$ и $A_1B_1C_1$ е сечението на γ и пирамидата.

От $ABD \cong ACD$ и $A_1B_1 \perp AD$, $A_1C_1 \perp AD$ следва, че $A_1B_1D \cong A_1C_1D$ и $DB_1 = DC_1$.

В равнобедрения триъгълник BCD от $DB_1 = DC_1$ следва,че $B_1C_1 \parallel BC$. Тогава
$\triangle B_1C_1D \sim \triangle BCD$ и

$$\frac{S_{B_1C_1D}}{S_{BCD}} = \left(\frac{DM}{DN}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(M е медицентърът на BCD, а DM и DN са съответни медиани).



Обемът на пирамидата $A_1B_1C_1D$ е $V_1 = \dfrac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}.h_{A_1}$, а този на дадената пирамида е $V = \dfrac{1}{3}.S_{BCD}.h_A$, където h_{A_1} и h_A са разстоянията от точките A_1 и A до равнината (BCD). Като вземем предвид, че $\dfrac{h_{A_1}}{h_A} = \dfrac{A_1D}{AD} = \dfrac{1}{2}$, за отношението на двата обема получаваме:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{S_{B_1C_1D_1}}{S_{BCD}}.\frac{h_{A_1}}{h_A} = \frac{4}{9}.\frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

Ако V_2 е тялото „под сечението“, то $V_2 = V - V_1$ и $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{7}$.

6. За естествено число n с $S(n)$ означаваме сбора от цифрите на n. Да се намерят броят на двойките (a, b) от трицифрени естествени числа, за които:

$$S(S(b)) = 1,\ 2S(a) = S(b) \text{ и } a + S(a) = b.$$

Решение. От $S(S(b)) = 1$ следва, че $S(b) = 10^k$. Тъй като b е трицифрено число, то $S(b) < 28 < 100$ и следователно $S(b) = 10$. Сега от $2S(a) = S(b)$ намираме $S(a) = 5$. За всяко трицифрено число a, за което $S(a) = 5$, е изпълнено

$$a + 5 = a + S(a) = b \text{ и } S(b) = S(a + 5) = 10.$$

Следователно всяко трицифрено число a, за което $S(a) = 5$ и $b = a + 5$, е решение. Търсените числа са 500, 410, 401, 104, 140, 320, 302, 230, 203, 311, 131, 113, 221, 212, 122; общо 15 числа.

МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ В УЧИЛИЩЕ

Генчо Тодоров

Същност на математическата индукция

За пръв път Блез Паскал през 17 век прави разсъждения по схемата на метода на математическата индукция. Той обаче не е осъзнавал, че този метод се основава на аксиома, която днес наричаме „Аксиома на Пеано за индукцията“. Тя е част от „Аксиоматичната теория на естествените числа“ на Джузепе Пеано (1858–1932 г.)

За да разгледаме по-достъпно и същевременно достатъчно пълно същността на пълната математическата индукция, нека си представим следната ситуация. *Вървим из планината и виждаме, че трябва да пресечем една рекичка, в която са поставени камъни на които можем да стъпим. Можем ли да прекосим реката без да се намокрим?* За да си отговорим на този въпрос, трябва да си отговорим на други два:

1. Можем ли да стъпим на първия камък?

2. Можем ли от всеки камък да стъпим на следващия в посока пресичане на реката?

Отговорът на първия въпрос е много съществен, защото ако брегът на реката е мочурлив или е прекалено стръмен, ние не можем да стигнем до първия камък. Ако първият камък е недостижим, то какъв ще е смисълът да мислим за следващия? Отговаряйки положително на първия въпрос, ние изграждаме основата за решението на нашата задача.

Нека първият камък е достижим. Тогава трябва да отговорим на втория: *Можем ли от всеки камък да стъпим на следващия в посока пресичането на реката?* Разглеждайки ситуацията, трябва да отговорим на въпроса аналитично, т.е. без да стъпваме по камъните и в същото време да сме сигурни, че отговорът ни е верен. Ако отговорът е положителен, може да заключим: *Да, можем да пресечем реката, без да се намокрим.*

С този пример от живота илюстрирахме разсъждения, които са много близки до *метода на математическата индукция*. Методът на математическата индукция се използва за доказване на твърдения, които зависят от естествен параметър и се означават така: $(\forall n \in \mathbb{N}), P(n)$. Методът на математическата индукция се базира на аксиомата на Пеано за индукция, която гласи:

Ако M е подмножество на естествените числа $\mathbb{N}$ и са в сила условията $1 \in M$ и ако $n \in M$, то $(n+1) \in M$, то следва, че множеството M съвпада с $\mathbb{N}$.

На базата на тази аксиома се формулира и принципът на математическата индукция:

$$(P(1) \cap P(n) \to P(n+1)) \to (\forall n \in \mathbb{N}), P(n)$$

При прилагането на метода на математическата индукция трябва да се докажат и двете твърдения: 1. $P(1)$ се нарича проверка на базата (в нашия пример – може ли да се стъпи на първия камък). 2. $P(n) \to P(n+1)$ се нарича индуктивна стъпка (може ли от всеки камък да се стъпи на следващия в посока пресичането на реката).

Доказателствата, използващи метода на математическата индукция, преминават през два етапа: проверка на базата на индукцията и проверка на индуктивната стъпка. Пропускането на който и да е от етапите може да доведе до грешни заключения.

Кога да започне изучаването на метода на математическата индукция и какви грешки могат да се допуснат?

Доказателствата чрез метода на математическата индукция са едни от най-трудните не само за учениците, а и за студентите. Понякога може да конструират такива доказателства, базирайки се формално на познатата схема, но без да разбират същността им. Не без основание един от най-големите математици на 20 век, акад. А. Колмогоров твърди, че умението да се използва самостоятелно този метод може да се използва като критерий за проверяването на математическото развитие на една личност.

Трудността на метода се дължи на това, че е твърде сложна неговата същност. При нас той се изучава в 11.–12. клас. Защо толкова късно? Методът на математическата индукция се използва за решаването на различни типове задачи от алгебрата, аритметиката, геометрията, комбинаториката и др. Проблемът е, че в училище този метод се използва основно в алгебрата. Там задачите са по-абстрактни, а и в етапа на проверка на индукционната стъпка се използват по-сложни аритметични действия, които трябва да са изучени предварително. Ако методът на математическата индукция се използва и в другите области на математиката, то и учениците от по-ранна възраст могат да се запознаят с този метод. Например ситуацията, която беше описана по-горе, е един добър пример, с който може да се въведе самият метод. Да разгледаме и още един пример за по-малките.

Задача 1. Докажете, че всяка целочислена сума, по-голяма или равна на 2 лв., може да се плати в цели банкноти, както с четен брой купюри, така и нечетен. В обръщение са банкноти от 1 лв., 2 лв., 5 лв., 10 лв., 20 лв., 50 лв. и 100 лв.

Решение. Нека сумата означим с n. При $n = 2$ имаме 1×2 лв. и 2×1 лв.

Допускаме че сумата $k, k \geq 2$ може да се плати както с четен, така и с нечетен брой купюри. Може да си представим, че имаме две различни купчинки, едната е с четен брой купюри, а другата с нечетен, но и в двете има еднаква сума k. Ако към всяка купчинка добавим по 1 лв. (една банкнота), то ще получим сумата $(k+1)$ лв. и там, където са били четен брой купюри, са станали нечетен, а в другата купчинка от нечетен брой са станали четен.

По метода на математическата индукция доказахме, че всяка целочислена сума, равна или по-голяма от 2 лв., може да се плати както с четен, така и с нечетен брой купюри от банкноти.

Много често в семейни сбирки във връзка с въпроса *Дали шестицата по математика е заслужена?* се поставят на децата задачи от тъй наречения *народен фолклор.* Едни от тях са: *Съберете първите 20 числа, Съберете числата от 30 до 80* и т.н. Затова на всички ученици им е много интересна следната задача.

Задача 2. Докажете, че $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Решение. При $n = 1$ имаме $\dfrac{1.2}{2} = 1$. При $n = 2$ имаме $1 + 2 = \dfrac{2.3}{2} = 3$.

Допускаме, че за $(k-1)$ имаме $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \dfrac{(k-1)k}{2}$ и разглеждаме

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Доказахме равенството по метода на математическата индукция.

Трябва да отбележим, че при работа с по-малки ученици е необходимо да правим повече проверки на базата на индукцията.

Какви грешки можем да допуснем?

Какво се случва при пропусната проверка на базата? Нека се върнем към нашата ситуация с камъните в реката. Още тогава констатирахме, че ако брегът е стръмен или има друга причина и не може да достигнем до първия камък, то разглеждането на пътя за пресичане на реката е безсмислен. Ще разгледаме още един, дори куриозен пример. *Да се докаже, че всяко естествено число е равно на следващото.* Всички знаем, че това не е вярно, но пропускайки първия етап, ние правим индукционно предположение, че твърдението е вярно за естественото число k, т.е. $k = k+1$. Тогава ако към k и $k+1$ прибавим 1, ще получим $k + 1 = (k+1) + 1$, което ще рече, че твърдението е „вярно“.

В някои случаи е недостатъчно да проверим базата при $n = 1$, а е необходимо да направим проверка и за $n = 2$, $n = 3$ и т.н.

Проверка само на индуктивната база е заблуждавала и световноизвестни математици, че задачата е решена. Например, Ойлер се е заблудил, че изразът $n^2 + n + 41$ е просто число. Оказва се, че това е вярно за $n = 1, 2, \ldots, 39$, но при $n = 40$ полученото число $40^2 + 40 + 41 = 40.41 + 41 = 41^2$ е съставно.

Ще разгледаме някои разновидности в постройката на метода на математическата индукция и там ще отбележим и възможностите за грешки.

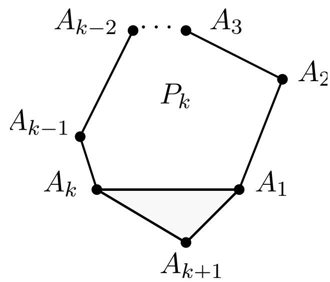
Някои разновидности в постройката на метода на математическата индукция

1. Базата на индукцията е при $n > 1$. В този случай правим проверка на базата за първото n, което е разрешено.

Задача 3. Да се докаже, че сборът от вътрешните ъгли на изпъкнал n- ъгълник, е $(n-2).180^\circ$, където $n \geq 3$.

Решение. При $n = 3$ многоъгълникът е триъгълник и сборът от ъглите му е 180°.

Нека с P_k означим многоъгълника $A_1A_2\ldots A_k$. Допускаме, че за $n = k$ сборът от ъглите на P_k е $(k-2).180^\circ$. Добавяме още една външна точка A_{k+1} за P_k (вж. чертежа) и получаваме нова фигура P_{k+1}. Тя е съставена от P_k и триъгълника $A_kA_{k+1}A_1$. Следователно сборът от ъглите на P_{k+1} е



$$(k-2).180^\circ + 180^\circ = (k-2+1).180^\circ = ((k+1)-2).180^\circ.$$

Тази задача също е подходяща за демонстрация на метода на математическата индукция за по-малки ученици.

2. Когато се получава функция от вида $P(k+1) = F(k, k-1)$. В този случай доказателството за $k+1$ е свързано с k и $k-1$. Тогава е необходимо да се направи проверка на базата на две нива $n = 1$ и $n = 2$ или първите две разрешени нива.

Задача 4. Известно е, че $x + \dfrac{1}{x}$ е цяло число. Докажете, че $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ е цяло число за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. При $n = 1$ имаме $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ по условие.

Допускаме, че $x^k + \dfrac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$. Разглеждаме равенството

$$(1) \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Виждаме, че в равенството участва както k, така и $k-1$. Следователно, за да сме коректни, трябва да добавим и проверка при $n = 2$. От равенството $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2$ следва, че че $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \in \mathbb{Z}$. Сега ако $x^k + \dfrac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$ и $x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}} \in \mathbb{Z}$, от (1) следва, че $x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Z}$.

При тази задача виждаме, че ако не проверим верността на твърдението при $n = 2$, коректността на доказателството ни е под въпрос или може да изпаднем в ситуация да сме свършили основната работа по решаването на задачата, а да не получим отлична оценка.

3. Стъпката на индукцията е еднаква и по-голяма от едно. Нека да осъвременим задачата за банкнотите, като имаме предвид, че в момента няма банкноти по 1 лв.

Задача 5. Намерете най-голямата цяла сума, която не може да се плати както с четен брой купюри от банкноти, така и с нечетен. В обръщение са банкноти от 2 лв., 5 лв., 10 лв., 20 лв., 50 лв. и 100 лв.

Решение. След непосредствена проверка установяваме , че при $n = 13$ единственият начин на плащане е $13 = 5 + 2.4$. Чрез метода на математическата индукция ще докажем, че при $n \geq 14$ всяка сума може да се плати както с четен, така и с нечетен брой купюри.

Най-малката банкнота, която може да се добавя, е 2 лв. Ако направим проверка за четна сума, при стъпка 2 лв. ще докажем, че всяка четна сума, по-голяма от проверената, изпълнява условието. Ако направим проверка за нечетна сума, при стъпка 2 лв. ще докажем, че всяка нечетна сума, по-голяма от проверената, изпълнява условието. За да сме сигурни, че твърдението е вярно за всяко $n \geq 14$, проверяваме за $n = 14$ и $n = 15$:

$$14 \text{ лв.} = 10 \text{ лв.} + 2\times 2 \text{ лв.} = 2\times 5 \text{ лв.} + 2\times 2 \text{ лв.}; \quad 15 \text{ лв.} = 10 \text{ лв.} + 5 \text{ лв.} = 3\times 5 \text{ лв.}$$

и разсъждаваме както в задача 1, добавяйки 2 лв. Получаваме, че при $n \geq 14$ всяка сума може да се плати както с четен, така и с нечетен брой купюри. Следователно най-голямата цяла сума, която не може да се плати както в четен брой купюри от банкноти, така и в нечетен, е 13лв.

Каква грешка можеше да допуснем? Ако бяхме направили проверка само на едно ниво, щяхме да получим, че още 10 лв. $= 2 \times 5$ лв. $= 5 \times 2$ лв. удовлетворява условието и да стигнем до грешния извод, че търсената сума е 9 лв.

4. Ретроградна индукция. При този метод е интересен подходът при индуктивната стъпка. Не се стремим да стъпваме последователно с някаква постоянна стъпка. Тук идеята е да докажем твърдението за достатъчно голямо n, после да се върнем към $(n-1)$ и да докажем твърдението за него. По този начин ние *запълваме дупките*, които сме прескочили при първото доказателство за n. Този метод ще илюстрираме с доказателството на известното неравенство на Коши.

Задача 6. За всяко $n \in \mathbb{N}$ и неотрицателни числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ докажете, че

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A_n.$$

Решение. При $n = 1$ неравенството е $a_1 \le a_1$ и е изпълнено; при $n = 2$ имаме

$$\sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2} \iff 4a_1 a_2 \le a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \iff 0 \le (a_1 - a_2)^2,$$

което е изпълнено. Нека в горното неравенство заместим $a_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $a_2 = \dfrac{a_3 + a_4}{2}$. Прилагаме два пъти горното неравенство и получаваме

$$\sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \le \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}} \le \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

По този начин по индукция следва, че неравенството е вярно за $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Сравнявайки с предишната задача виждаме, че стъпката не е еднаква и увеличаването на броя на проверките на базата не върши работа. Затова трябва да направим индуктивно предположение в обратна посока към намаляване на n, т.е. ако неравенството е вярно за n, ще докажем , че е вярно за $(n-1)$, впоследствие за $(n-2)$, $(n-3), \dots, 2, 1$. Нека $G_n \le A_n$. Ако изберем $a_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$, имаме

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}{n-1}}{n},$$

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right)^n \iff$$

$$\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1},$$

с което доказахме, че $G_{n-1} \le A_{n-1}$. Следователно $G_n \le A_n$ за всяко n.

5. Двойна индукция. В някои задачи имаме и параметър. Много често се налага да извършим две индукции, като първата е спрямо параметъра, а втората спрямо n.

Задача 7. Ако $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n > a^2$, докажете, че $a^n > n^a$.

Решение. Първо ще приложим метода на математическата индукция спрямо n. Ще докажем, че

$$2^n > n^2 \ \text{ при } \ n > 4,\ n \in \mathbb{N}.$$

При $n = 5$ имаме $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Допускаме че при $n = k$, $k > 5$ е изпълнено $2^n > k^2$. Тогава

$$2^{k+1} = 2.2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

т.е. $2^{k+1} > (k+1)^2$. Първата част е доказана.

Връщаме се към основната задача. При $a = 2$ получаваме $2^n > n^2$ при $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$, което вече доказахме. Допускаме, че при $n = k$ е вярно неравенството $a^k > k^a$. Имаме

$$a^{k+1} = a^k.\,a > k^a.\,a.$$

и остава да докажем, че $k^a.\,a > (k+1)^a \iff \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^a.\,a > 1$. Но

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^a.\,a = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^a.\,a > \left(1 - \frac{a}{k+1}\right).\,a =$$

$$= a - \frac{a^2}{k+1} \geq a - \frac{a^2}{a^2+1} > a - 1 > 1.$$

Следователно $a^{k+1} > (k+1)^a$, което трябваше да докажем.

Някои приложения на метода на математическата индукция

За да покажем силата на метода на математическата индукция, ще разгледаме още няколко разнообразни задачи.

Задача 8. Докажете, че за ъглите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, където $0 < x_i < 180^\circ$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ е изпълнено неравенството

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n.$$

Решение. Ще използваме някои известни свойства за абсолютна стойност $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a.b| = |a|.|b|$ и тригонометричните неравенства $|\sin x| = \sin x > 0$ и $|\cos x| < 1$ при $0 < x < 180^\circ$.

При $n = 2$ за $0 < x_i < 180^\circ$ имаме

$$\begin{aligned} |\sin(x_1 + x_2)| &= |\sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2| \\ &\le |\sin x_1| \cdot |\cos x_2| + |\cos x_1| \cdot |\sin x_2| < \sin x_1 + \sin x_2. \end{aligned}$$

Допускаме, че за $k \geq 2$ и $0 < x_i < 180^\circ$ е изпълнено неравенството

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_k.$$

При $n = k + 1$ разглеждаме

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1})| \leq |\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)| \cdot |\cos x_{k+1}| +$$

$$+ |\cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)| \cdot |\sin x_{k+1}| < \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_k.$$

С това твърдението е доказано.

Задача 9. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $m \in \mathbb{N}$, за което

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m - 1}.$$

Решение. Първо ще докажем, че за за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществуват такива $a, b \in \mathbb{N}$, за които

$$\left| \begin{array}{l} (1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2} \\ a^2 - 2b^2 = (-1)^n. \end{array} \right.$$

При $n = 1$ твърдението е изпълнено за $a = b = 1$. Ако е вярно за дадено n, разглеждаме

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2})^{n+1} &= (1 - \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2}) = (\sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2})(1 - \sqrt{2}) \\ &= (a - b\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = (a + 2b) - (a + b)\sqrt{2} \\ &= \sqrt{(a + 2b)^2} - \sqrt{2(a + b)^2} = \sqrt{a_1^2} - \sqrt{2b_1^2}, \end{aligned}$$

като a_1 и b_1 са естествени числа и

$$a_1^2 - 2b_1^2 = (a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = -(a^2 - 2b^2) = (-1)^{n+1}.$$

Доказахме твърдението за $(n+1)$ и по индукция то е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

От него непосредствено следва решението на задачата.

Ако n е четно, то $2b^2 = a^2 - 1$ и $(\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{a^2 - 1}$, т.е. $m = a^2$.

Ако n е нечетно, то $a^2 = 2b^2 - 1$ и $(\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{2b^2 - 1} + \sqrt{2b^2}$, т.е. $m = 2b^2$.

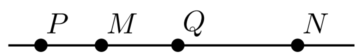
Задача 10. В равнината се намират $n \geq 3$ отсечки така, че всеки три произволно избрани от тях имат обща точка. Да се докаже, че съществува точка, която принадлежи на всички отсечки.

Решение. Допускаме, че две от дадените отсечки $a_1, a_2, \dots, a_n$, например a_1 и a_2, не лежат на една права и затова имат една обща точка A_1. Ако a_k е произволно избрана от останалите отсечки, то според условието на задачата тройката отсечки a_1, a_2, a_k имат обща точка. Следователно отсечките $a_3, \dots, a_k$ съдържат точката A, т.е. A е обща за всички отсечки.

Ако разгледаното от нас предположение не се изпълнява, то всички дадени отсечки лежат на една права. Ще докажем, че *ако отсечките $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$ лежат на една права и всеки две от тях имат обща точка, то съществува точка, която принадлежи на всяка от отсечките.*

Прилагаме метода на математическата индукция. При $n = 2$ твърдението е вярно. Предполагаме, че същото е вярно при $n = k \geq 2$, $n \geq 2$ и да разгледаме отсечките $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$, които лежат на една права и всеки две от тях имат обща точка. Според предположението, отсечките $a_1, a_2, \dots, a_k$ имат обща точка P. Нека M и N са краищата на отсечката a_{k+1}. Разглеждаме възможните положения на P относно M и N.

Ако P се намира между M и N или съвпада с някоя от тях, то P е обща точка за отсечките $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.



Ако M се намира между P и N, то M е обща точка за отсечките $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Действително, всяка от отсечките $a_1, a_2, \dots, a_k$ съдържа точка P и така също някоя точка Q от отсечката MN и следователно трябва да съдържа цялата отсечка PQ, а точката M е от отсечката PQ.

Аналогично, ако N се намира между M и P, точката N е общата точка за отсечките $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Така индукцията е завършена.

Описаните по-горе твърдения са частен случаи на важна теорема за изпъкнали фигури:

Обобщение. Ако изпъкнали фигури $F_1, F_2, \dots, F_n$, $n \geq k+1$ се намират в k-мерното пространство и всеки $(k+1)$ от тях имат най-малко една обща точка, то съществува най-малко една обща точка, принадлежаща на всички фигури.

Това общо твърдение е известно като теорема на Хели–Радон.

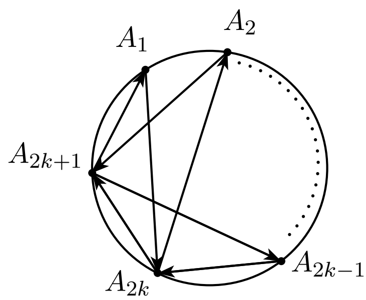
Задача 11. Върху окръжност са избрани $n > 2$ точки. Всяка от тях е свързана с отсечка с всяка от останалите точки. Може ли да бъдат начертани всички тези отсечки така, че краят на първата отсечка да съвпада с началото на втората, краят на втората с началото на третата, и т.н., краят на последната с началото на първата?

Решение. Нека Z е крайното множество от точки върху окръжността. Затворена начупена линия с върхове в множеството Z, която изпълнява условието на задачата, означаваме $L(Z)$.

Нека за множеството Z с $n \geq 3$ точки съществува начупена $L(Z)$. Всяка точка X от Z е край на $(n-1)$ отсечки и начертавайки $L(Z)$, ние *влизаме* в точката X толкова пъти, колкото пъти *излизаме* от нея. Затова числото $(n-1)$ е четно, т.е. n е нечетно.

Следователно начупената $L(Z)$ не съществува, ако n е четно. По индукция ще докажем, че $L(Z)$ съществува за всяко нечетно n.

Нека $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. При $m = 1$ множеството Z съдържа три точки и за триъгълник условието е изпълнено. Предполагаме, че твърдението е вярно при $m = k-1$, т.е. за множество Z с $2k-1$ точки. При $m = k$ разглеждаме множество $Z = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2k+1}\}$ с $2k+1$ точки.



За неговото подмножество с $2k-1$ точки $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2k-1}\}$ според индукционното предположение съществува начупената $L(V)$.

Построяваме затворена начупена K, чиито звена свързват всяка от точките $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-1}$ с точките A_{2k} и A_{2k+1} , както и A_{2k} с A_{2k+1}, като всяка отсечка се среща само веднъж:

$$K = A_1A_{2k}A_2A_{2k+1}A_3A_{2k}A_4A_{2k+1}\ldots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}A_1.$$

От $L(V)$ и K образуваме една начупена по следния начин: за начало на $L(V)$ избираме A_1 и след като начертаем цялата начупена $L(V)$, се връщаме пак в A_1. След това тръгваме от A_1, чертаем начупената K и се връщаме в A_1. Получената начупена линия е $L(Z)$. Твърдението на задачата е доказано.

Методът на математическата индукция е универсален и има приложение в различните области на математиката. С него могат да се решават както чисто логически задачи, в които не се изисква големи познания по математика, така и много тежки задачи от международни математически олимпиади. Подбраните по-горе задачи доказват, че с метода на математическата индукция могат да се справят и по-малките ученици. Достатъчно е методът да бъде поднесен с разбираеми задачи от действителността, със задачи, в които няма сложни преобразувания. Задачи, които се решават с метода на математическата индукция, могат да бъдат подбрани за всеки клас от 5. до 12., и то в различни области на математиката.

Засега изборът остава единствено в ръцете на учителите по математика.

КАК СЕ ГОТВЯТ ЗАДАЧИ? – ЗАПОВЯДАЙТЕ В КУХНЯТА

Борислав Михайлов

Какво означава да си учител по математика? За някои ученици това означава да знаеш по едно решение на всички задачи от съответните сборници. И именно те остават с впечатлението, че математиката е сбор от факти (теореми и задачи), отдавна измислени от някои математически гении. От учениците се очаква само да се научат да възпроизвеждат доказателства и решения, а от учителите им – да ги научат на това. А всъщност голяма част от математиката като наука се състои във откриването и поставянето на задачи, чиито решения понякога се търсят с векове. Именно този процес остава забулен в тайна и може би това е причината математиката да се възприема традиционно като суха и скучна.

Кое може да стане катализатор на идеи за раждането на нови задачи? Как да се отърсим от излишните условия в да дена задача? Какво да променим от началните условия, така че да получим друга или дори цял клас от задачи? На тези и подобни въпроси ще се опитаме да отговорим с помощта на един пример от геометрията.

Теорема на Менелай. *Даден е $\triangle ABC$. Ако права пресича правите AB, BC, CA съответно в точките Z, Y, X, то* $\dfrac{CX}{XA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} \cdot \dfrac{BY}{YC} = 1$.

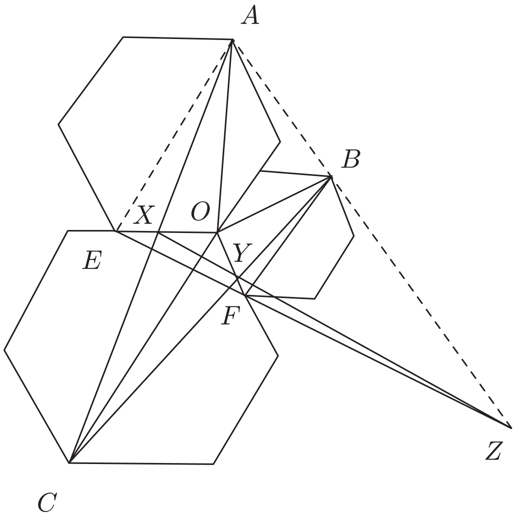
Проследявайки равенството забелязваме, че можем да тълкуваме X, Z и Y като центрове на хомотетии, при които C се изобразява в A, A – в B и накрая B – в C. Това тълкуване позволява към C да се прикрепи фигура, която след последователното прилагане на тези хомотетии се възстановява.

Така например, можем да считаме C за център на окръжност γ, която чрез X се изобразява в окръжност α, после α чрез Z – в окръжност β и накрая β чрез Y се изобразява в γ:

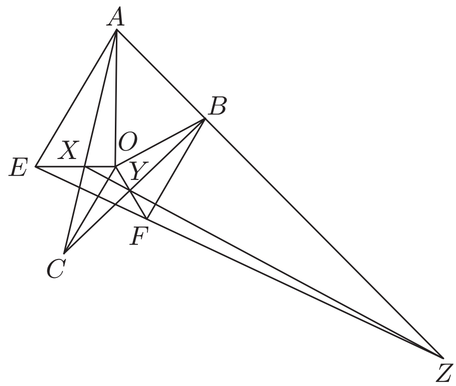
Теорема. *Окръжностите α, β, γ са вън една от друга. Нека X е пресечната точка на вътрешните общи допирателни на α и γ, Y – на β*

и γ и Z – пресечната точка на общите външни допирателни на α и β. Тогава X, Y, Z лежат на една права.

Друг пример – три правилни шестоъгълника с общ връх O (черт. 1). Като откроим някои елементи на чертежа, получаваме черт. 2, който отразява следното: $\triangle AOE$ и $\triangle BOF$ са с ъгли $30°$, $60°$, $90°$, OC разполовява $\sphericalangle EOF$, $X = AC \cap OE$, $Y = BC \cap OF$. Тогава правите AB, EF, XY минават през една и съща точка Z.



Черт. 1



Черт. 2

Тук вече трите подобни фигури липсват. Обаче тяхната роля се изпълнява от отсечките CO, AE, BF. Оттук незабавно следва, че ъглите $30°$, $60°$, $90°$ са несъществени (правилните шестоъгълници окончателно се изгубиха).

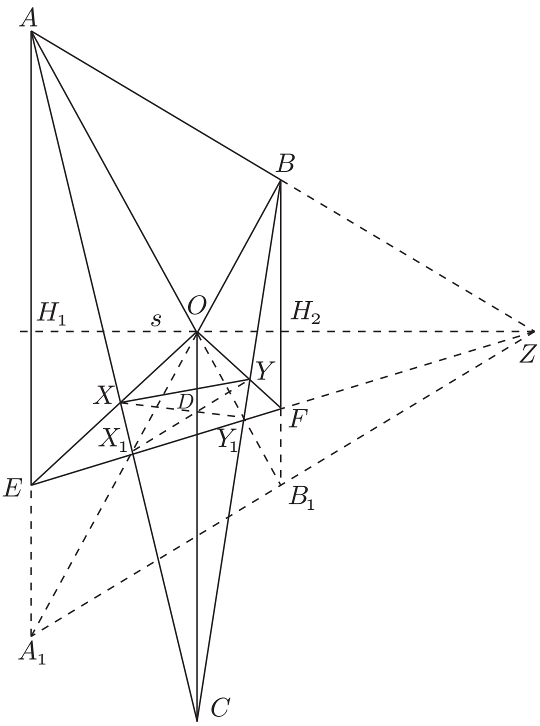
Забелязваме, че $AEFB$ е трапец и че $\triangle AEO$ и BFO са подобни и противоположно ориентирани. Ето защо възниква следният въпрос:

Как да се намери в един трапец $ABCD$ такава точка O, че $\triangle AEO$ и $\triangle BFO$ да са подобни и противоположно ориентирани?

Решение. (черт. 3): През точка $Z = AB \cap EF$ построяваме права $s \perp AE$. Нека A_1 и B_1 са симетрични с A и B спрямо s. Тогава $O = AB_1 \cap A_1B$ с търсената точка. Наистина, $\sphericalangle EAO = \sphericalangle FBO$ поради равнобедрения трапец AA_1B_1B. Още $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{AE}{BF}$ и това е достатъчно.

(Единственост: Нека OH_1 и OH_2 са височини в $\triangle AEO$ и $\triangle BFO$. Тогава $\dfrac{AH_1}{BH_2} = \dfrac{AE}{BF}$ и следователно $Z \in H_1H_2$, т.е. $O \in s$. Равенството $\dfrac{OH_1}{OH_2} = \dfrac{AE}{BF}$ определя мястото на O върху H_1H_2).

Нека сега $X_1 = EF \cap A_1O$,



Черт. 3

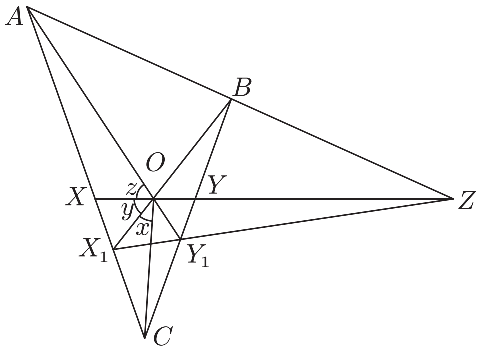
$Y_1 = EF \cap B_1O$ и $C = AX_1 \cap BY_1$. Доказва се, че $OC || AA_1$. Нека $X = AC \cap EO$ и $Y = BC \cap FO$ (всъщност поставихме черт. 2 върху черт. 3). Получихме следната

Задача. *Четириъгълникът AX_1Y_1B е такъв, че ако $O = AY_1 \cap BX_1$ и $C = AX_1 \cap BY_1$, то OC разполовява $\sphericalangle X_1OY_1$. Права през точка $Z = AB \cap X_1Y_1$ пресича AX_1 и BY_1 съответно в точките X и Y. Да се докаже, че $\sphericalangle XOX_1 = \sphericalangle YOY_1$.*

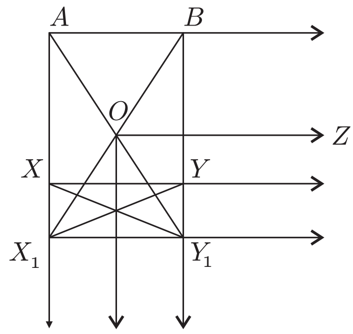
Сега забелязваме, че OC и OZ са ъглополовящи на ъглите между диагоналите на AX_1Y_1B. Поставяме

Обратна задача. *Нека AX_1Y_1B е четириъгълник и $O = AY_1 \cap BX_1$, $C = AX_1 \cap BY_1$, $Z = AB \cap X_1Y_1$. Ако $\sphericalangle COZ = 90^\circ$, да се докаже, че OC е ъглополовяща на $\sphericalangle X_1OY_1$.*

Решение (черт. 4). Нека OZ пресича AX_1 и BY_1 съответно в точките X и Y и нека $\sphericalangle COX_1 = x$,
$\sphericalangle X_1OX = y$, $\sphericalangle XOA = z$. Известно е, че C, X_1, X, A образуват хармонична четворка. Затова



Черт. 4



Черт. 5

$$1 = \frac{CX_1}{X_1X} : \frac{CA}{AX} = \frac{\sin x}{\sin y} : \frac{\sin(x+y+z)}{\sin z} =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - y)}{\sin y} : \frac{\sin(90^\circ + z)}{\sin z} = \operatorname{cotg} y : \operatorname{cotg} z \Rightarrow y = z.$$

Следователно OX разполовява $\sphericalangle AOX_1$ и задачата е решена.

Да се върнем на черт. 3. Въпросът дали точка $D = XY_1 \cap X_1Y$ лежи на OC има положителен отговор. За целта нека устремим Z и C към безкрайност, като спазим $\sphericalangle COZ = 90^\circ$. Получаваме черт. 5, който дава отговора на въпроса.

Така се появи следната

Задача. *На раменете на ъгъл с връх O са взети точките X_1 и Y_1, а на ъглополовящата му – точките C и D. Нека $X = CX_1 \cap DY_1$ и $Y = CY_1 \cap DX_1$. Да се докаже, че $\sphericalangle XOX_1 = \sphericalangle YOY_1$.*

Решението на задачата предоставяме на читателите.

Целия материал може да прочетете в тома на Двадесет и деветата пролетна конференция на СМБ, проведена от 3. до 6. април 2000 г., на която Борислав Михайлов изнесе пленарен доклад. Надяваме се, че както и през далечната 2000 година – година на математиката, така и сега, задачите на Борислав Михайлов ще бъдат вдъхновение за всички любители на математиката.

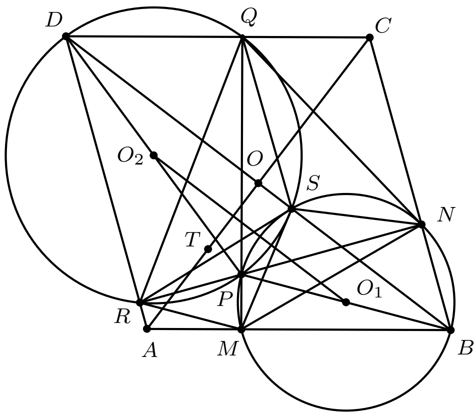
ПОДГОТОВКА ЗА EGMO 2017

От 20 до 24 март 2017 г. е Института по математика и информатика се проведе подготовка на отбора, който тази година ще представи страната ни на Европейската олимпиада за момичета. Както обикновено, подготовката беше отворена за всички желаещи да се включат.

Към лекторите чл. кор. Олег Мушкаров, проф. Петър Бойваленков, проф. Емил Колев, проф. Николай Николов, проф. Иван Ланджев тази година се присъединиха студентите **Павлена Ненова, Теофил Тодоров, Мирослав Маринов** и **Станислав Димитров**, които познаваме от техните успешни представяния на математически състезания през последните години. Те предложиха и задачи за тренировъчните контролни, някои от които предлагаме на Вашето внимание.

Задача 1. Нека $ABCD$ е ромб с център O. Дадена е точка P вътре в ромба, нележаща на диагоналите му и нека M, N, Q и R са проекциите на P върху страните AB, BC, CD и DA съответно. Симетралите на отсечките MN и QR се пресичат в точка S, а симетралите на отсечките NQ и MR – в точка T. Докажете, че P, S, T и O са върхове на правоъгълник.

Решение. Триъгълниците RSN и QSM са еднакви, следователно $\sphericalangle PMS = \sphericalangle PNS$ и $\sphericalangle PQS = \sphericalangle PRS$, т.е четириъгълниците $PSMN$ и $PSQR$ са вписани. От друга страна, $BNPM$ и $DRPQ$ също са вписани, следователно P, S, N, B и M лежат на една окръжност с център O_1, а P, S, Q, D и R - на окръжност с център O_2.



Общата хорда на двете окръжности PS е перпендикулярна на O_1O_2. Но O_1O_2 е средна отсечка в $\triangle PBD$, от което следва, че $O_1O_2 \| BD \Rightarrow PS \perp BD$ и $PS \| AC$. По сходен начин получаваме, че $PT \| BD$, т.е $PS \perp PT$. Тъй като S лежи на BD и T лежи на AC, получаваме че $PSOT$ е правоъгълник.

Задача 2. Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са положителни реални числа, за които

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Докажете, че за всяко $m = 1, 2, \ldots, n$ съществуват m числа сред дадените, със сбор не по-малък от m.

Решение. Да допуснем, че $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n$ и нека g е средното геометрично на $a_1, a_2, \ldots, a_n$. От $AM - GM$ имаме, че

$$g \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} < 1, \quad \text{т.е.} \quad g < 1.$$

От друга страна,

$$1 > \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}{n} \geq \frac{1}{g^2},$$

което противоречи на $g < 1$. Следователно $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

Сега за дадено $m = 1, 2, ...n$, нека допуснем, че всяко множество от m числа има сума, по-малка от m. Тогава

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_m < m, \\
&a_2 + a_3 + \cdots + a_{m+1} < m, \\
&\ldots \\
&a_n + a_1 + \cdots + a_{m-1} < m.
\end{aligned}$$

Събирайки горните неравенства, получаваме, че $m(a_1 + a_2 + ... + a_n) < mn$, противоречие. С това получаваме търсеното.

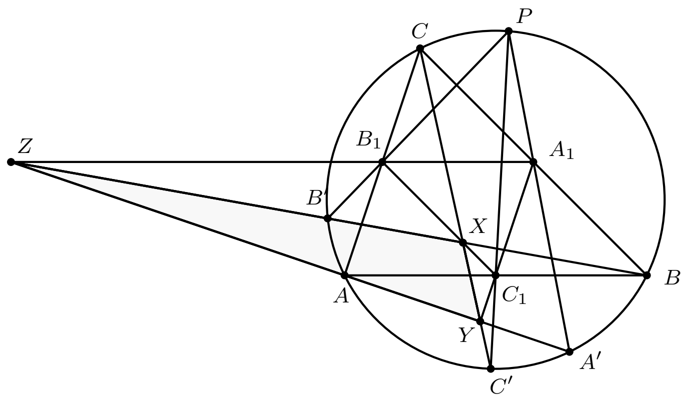
Задача 3. На маса има карти с номера $0, 1, 2, \ldots, 1024$. A и B се редуват да махат карти от масата. Първо B маха 2^9 карти. След това A маха 2^8 карти, B маха 2^7 и т.н., докато не останат точно 2 карти на масата с номера a и b. Тогава A трябва да плати $\mid a$ - $b \mid$ лева на B. Най-много колко лева може да си гарантира B?

Решение. Първо ще съставим стратегия за B. На първия си ход той ще махне нечетните числа и така минималната разлика между всеки две от останалите числа е поне 2. На втория му ход ще има само числа от типа $4k$ и $4k + 2$. Тъй като B трябва да махне половината числа, той може със сигурност да махне всички числа от един от двата типа и така минималната разлика между всеки две от останалите числа ще е поне 4. B може да продължи да прави това и така на всеки ще удвоява минималната разлика. Следователно в края на играта B може да си гарантира поне 32 лева.

Стратегията на A е сходна. Ако двете числа с максимална разлика в даден момент са x и y, то между x и $\frac{x+y}{2}$ или между $\frac{x+y}{2}$ и y ще има половината или по-малко от числата на масата. Тоест A може да махне всички тях и тогава максималната разлика между две числа на масата ще бъде двойно по-малка отколкото на предния ход. Началната максимална разлика е 1023, следователно в края на играта A може да си гарантира, че ще загуби най-много 32 лева. Това означава, че B може да си гарантира най-много 32 лева.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ и нека A_1, B_1, C_1 са средите на страните BC, CA, AB съответно. Точката P се движи по описаната окръжност и правите PA_1, PB_1, PC_1 пресичат описаната окръжност за втори път в точките A', B', C' съответно. Ако допуснем, че A, B, C, A', B', C' са различни и правите AA', BB', CC' образуват триъгълник, да се докаже, че лицето на този триъгълник не зависи от P.

Решение. Нека $X = BB' \cap CC', Y = CC' \cap AA', Z = AA' \cap BB'$. От Теоремата на Паскал за $BB'PC'CA$ получаваме $X \in B_1C_1$. По подобен начин виждаме, че $Y \in C_1A_1$ и $Z \in A_1B_1$.



От Теоремата на Пап за правите $(B - A_1 - C)$ и $(Z - A - Y)$ получаваме, че $BY || CZ$ и аналогично $CZ || AX$ и $AX || BY$.

Това означава, че

$$[XYZ] = [XYA] + [XAZ] = [XBA] + [XAC] = \frac{1}{2}[ABC] = \text{const}.$$

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Боянка Савова

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $3.2\frac{1}{3} - 4.7\frac{1}{2}$ е:

А) -23 **Б)** -12 **В)** -39 **Г)** -5

2. Числената стойност на израза $8a - a(3-5a)$ при $a = -0{,}4$ е:

А) $-1{,}2$ **Б)** $-2{,}8$ **В)** -3 **Г)** 6

3. Коренът на уравнението $3{,}5(2x-6) = 8x - 2(3-x)$ е:

А) 0 **Б)** 15 **В)** -5 **Г)** $-\frac{13}{2}$

4. Нормалният вид на многочлена $x(3x-1)(1+3x) - (2-4x)^2$ е:

А) $9x^3 + 16x^2 - 17x + 4$ **Б)** $9x^3 - 16x^2 + 15x - 4$

В) $9x^3 + 16x^2 - 5$ **Г)** $25x^2 + 16x - 4$

5. Уравнението $x^2 = 2x$ е еквивалентно на уравнението:

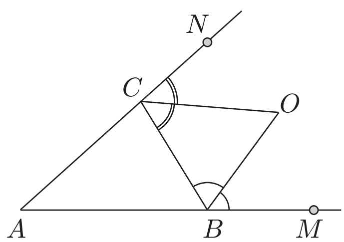
А) $x(x+2) = 0$ **Б)** $|x-1| = 1$

В) $x(2x-x) = x$ **Г)** $|x|^2 = 2\,|x|$

6. Корените на уравнението $|2x-1| + 6 = 6\,|x-0,5|$ са:

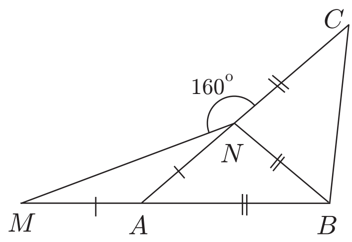
А) -1 и 2 **Б)** 1 и 2 **В)** 1 и $0{,}5$ **Г)** $\pm\frac{1}{2}$

7. На чертежа ъглополовящите на $\sphericalangle CBM$ и $\sphericalangle BCN$ се пресичат в точката O. Ако $\sphericalangle BAC = 70^\circ$, то $\sphericalangle BOC$ е:



А) 35° **Б)** 125° **В)** 110° **Г)** 55°

8. На чертежа $N \in AC$, $AM = AN$ и $AB = NB = NC$. Ако $\sphericalangle MNC = 160^\circ$, то $\sphericalangle ABC$ е:



А) 120° **Б)** 100° **В)** 90° **Г)** 80°

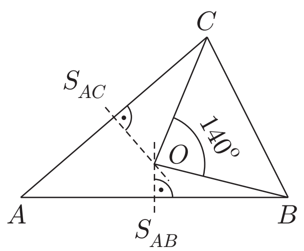
9. За три седмици Ади получила общо 56 съобщения на мобилния си телефон. Ако е известно, че през първата седмица те са били с 20% повече от втората и два пъти повече от третата, то броят на съобщенията през втората седмица е бил:

А) 24 **Б)** 20 **В)** 12 **Г)** 28

10. Неравенството $3 < x - \dfrac{6-2x}{3}$ е еквивалентно на неравенството:

А) $15 < x$ **Б)** $x > \dfrac{9}{5}$ **В)** $0 < x$ **Г)** $x > 3$

11. На чертежа симетралите на страните AB и AC на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O, която е вътрешна за $\triangle ABC$. Ако $\sphericalangle BOC = 140^\circ$, то $\sphericalangle BAC$ е равен на:

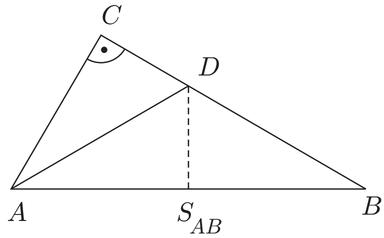


А) 90° **Б)** 100° **В)** 70° **Г)** 40°

12. Малка строителна фирма приела поръчка за ремонт на паркинг. Тя разполага с две машини за асфалтиране. С едната може да се извърши асфалтирането на паркинга за 6 чàса, а с другата – за 7,5 чàса. Ако двете машини работят едновременно, паркингът ще бъде асфалтиран за:

А) 3 h 20 min **Б)** 6 h 45 min **В)** 4 h **Г)** 3 h 30 min

13. На чертежа симетралата на хипотенузата AB на $\triangle ABC$ пресича катета BC в точката D. Ако $\sphericalangle CAD = 56^\circ$, то $\sphericalangle ABC$ е:



А) 28° **Б)** 17°

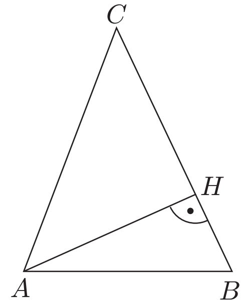
В) 22° **Г)** 34°

14. Ако в $\triangle ABC$ ъглите при върховете B и C са съответно 66° и 57°, то:

А) $AB < BC < AC$ **Б)** $AB = BC < AC$

В) $AC = BC < AB$ **Г)** $AC < BC < AB$

15. На чертежа AH е височина в $\triangle ABC$. Ако $AC = BC$ и $2AH = BC$, то $\sphericalangle ABC$ е:



А) 30° **Б)** 60°

В) 45° **Г)** 75°

16. Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$\frac{(1+2x)(2x-1)}{4} \leq x^2 - \frac{x+6}{6} \quad \text{е:}$$

А) 7 **Б)** -4 **В)** -5 **Г)** 2

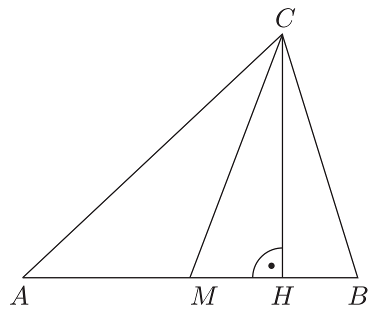
ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Намерете сбора на всички корени на уравнението $\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=0$, които са решения и на неравенството $(1-x)^2 < 5 - x(5-x)$.

18. На чертежа отсечките CH и CM са съответно височина и медиана в $\triangle ABC$. Ако

$$\sphericalangle CAB : \sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 1 : 5 : 6,$$

намерете отношението $CH : CM$.

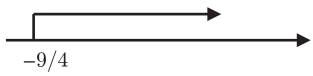


Попълнете пропуснатия текст в решението на задачата на местата от (1) до (6).

Решение. Нека $\sphericalangle CAB = x$. Тогава $\sphericalangle ABC = 5x$ и $\sphericalangle ACB = (1)$ .... От теоремата за сбора на ъглите в триъгълник, приложена за $\triangle ABC$, следва, че $x+5x+6x = 180^\circ \Leftrightarrow x = (2)$ ....$^\circ$. Получаваме, че $\sphericalangle ACB = (3)$ ....$^\circ$ и тъй като CM е медиана в $\triangle ABC$, то $CM = AM = \dfrac{AB}{2}$, т.е. $\triangle ACM$ е (4) .... Следователно $\sphericalangle CAM = \sphericalangle ACM = (5)$ ....$^\circ$ и $\sphericalangle HMC = 2.15^\circ = 30^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle CMH$). В правоъгълния триъгълник CMH с $\sphericalangle HMC = 30^\circ$ намираме, че $CH : CM = (6)$ ...... : ....

19. Намерете всички цели отрицателни решения на неравенството (В).

В първата колона последователно са изпълнени указанията за намиране на целите отрицателни решения на неравенството (А). Попълнете празната колона, като следвате същите действия за неравенството (В).

№	Указания	(A): $(x-2)(x+2)-x(x-4)+13 \geqq 0$	(B): $(x+2)^2-(x-1)(x+1)+8 \geqq 0$
1.	Разкрийте скобите	$x^2 - 4 - x^2 + 4x + 13 \geq 0$	
2.	Извършете приведение	$4x + 9 \geq 0$	
3.	Решете неравенството	$x \geq -\dfrac{9}{4}$	
4.	Изобразете графично решенията		
5.	Запишете отговора	-2 и -1	

20. Попълнете местата, означени с (1), (2) и (3), в таблицата за резултатите от контролно по математика.

Паралелки	7А	7Б	7В	7Г	Общо
Брой ученици	25	20	(1)..........	25	100
Среден успех	5,20	5,00	5,00	(2).........	4,80
% слаби оценки	16%	(3).......%	10%	8%	12%

ВТОРИ МОДУЛ

21. Пред вилното място на г-н Иванов има с жив плет, дълъг 180 метра. Той засадил храсти в редица по един през 45 cm. В началото и в края на редицата също имало по един храст. При засаждането, надземната част на храстите била с височина 12 cm и всяка следваща година височината им се увеличавала с по 30 cm.
а) Колко лева е платил г-н Иванов за разсада, ако цената на един храст е била 3,5 лева?
б) Най-малко колко години след засаждането са необходими, за да е височината на живия плет поне 2 метра?

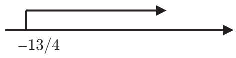
22. а) Начертайте равнобедрен правоъгълен триъгълник ABO с хипотенуза OB. След това последователно допълнете чертежа с равнобедрени правоъгълни триъгълници BCO, CDO и EDO с хипотенузи съответно OC, OD и OE така, че точките A и C да са в различни полуравнини относно OB, B и D да са в различни полуравнини относно OC, C и E да са в различни полуравнини относно OD.
б) За получения чертеж („ветрило“) в а) намерете колко градуса са $\sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle LOL_1$, където OL и OL_1 са ъглополовящите съответно в $\triangle AOB$ и $\triangle EOD$.

ЗАДАЧИ, ЗА КОИТО ТРЯБВА ДА СЕ ПРЕДСТАВЯТ ОБОСНОВАНИ РЕШЕНИЯ

23. Разстоянието между градовете A и B е a km. Всеки ден от автогарата на A тръгват едновременно автобус и микробус. Те се движат по един и същ път към B, като средната скорост на микробуса е 75 km/h и е с 25% по-голяма от скоростта на автобуса. Микробусът има по разписание 20 минути престой в B, след което тръгва обратно към A. Двете превозни средства се срещат на $\dfrac{a}{12}$ km от B. Намерете стойността на a.

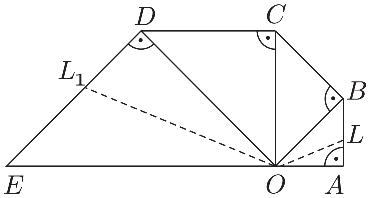
24. В равнобедрения триъгълник ABC симетралата на бедрото AB пресича основата AC в точката D, като $CD = CB$, а ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича AB в точка P.
а) Намерете $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ADP$.
б) Докажете, че $AP = BD < \dfrac{2}{5}AC$.

ОТГОВОРИ. 1. А; **2.** А; **3.** В; **4.** Б; **5.** Б; **6.** А; **7.** Г; **8.** А; **9.** Б; **10.** Г; **11.** В; **12.** А; **13.** Б; **14.** Б; **15.** Г; **16.** В; **17.** -2; **18.** (1) $6x$; (2) 15; (3) 90

(4) равнобедрен; (5) 15; (6) 1 : 2; **19.** (1) $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 1 + 8 \geqq 0$; (2) $4x + 13 \geqq 0$; (3) $x \geqq -\dfrac{13}{4}$; (4) 

; (5) -3; -2; -1; **20.** (1) 30; (2) 4,00; (3) 15%; **21.** а) 1403,5 лв.; б) 7 години.

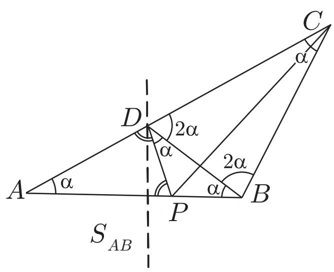
22. а)



б) $BOD = 90°$; $LOL_1 = 135°$.

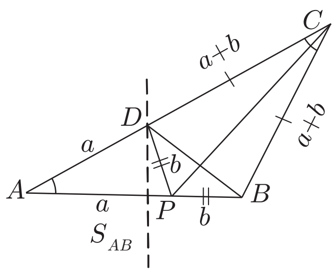
23. Ако скоростта на автобуса е v km/h, то $v + \dfrac{25}{100}v = 75 \Leftrightarrow v = 75 : \dfrac{5}{4} = 60$ km/h. Микробусът пътува от до $\dfrac{a}{75}h$. Когато микробусът тръгва от B към A, автобусът се намира на $\left(a - \left(\dfrac{a}{75} + \dfrac{1}{3}\right) \cdot 60\right)$ km от A. Микробусът пътува от до срещата $\dfrac{a}{12} : 75 = \dfrac{a}{12.75}$ h, т.е. двете превозни средства изминават заедно разстоянието за $\dfrac{a}{12.75}$ h. Следователно

$$a - \left(\frac{a}{75} + \frac{1}{3}\right) \cdot 60 = 60 \cdot \frac{a}{12.75} + 75 \cdot \frac{a}{12.75} \Leftrightarrow a = 400 \text{ km}.$$



24. а) Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$. Тогава и $\sphericalangle ACB = \alpha$. От $DA = DB$ ($D \in S_{AB}$) следва, че $\sphericalangle ABD = \alpha$, а $\sphericalangle BDC = 2\alpha$, защото $\sphericalangle BDC$ е външен за $\triangle ABD$. От $CD = CB$ следва, че $\sphericalangle CBD = 2\alpha$. За сбора на ъглите в $\triangle BCD$ получаваме $5\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36° = \sphericalangle BAC$, откъдето $\sphericalangle ABC = 3.36° = 108°$.

б) В равнобедрения триъгълник BCD ъглополовящата $CP^{\rightarrow}$ е и симетрала на страната BD, от което следва, че $PD = PB$ и $\sphericalangle PDB = \alpha$. Тъй като $5\alpha = 180°$, то $\sphericalangle ADP = 5\alpha - 3\alpha = 2\alpha$. Освен това, $\sphericalangle APD = 2\alpha$ като външен ъгъл за $\triangle BDP$. Следователно $\triangle ADP$ е равнобедрен и $AP = AD = BD$. Нека $AD = a$ и $BP = b$. От неравенството за страните в $\triangle BDP$ следва, че $a < b + b \iff \dfrac{a}{2} < b$.



Тогава $AC = 2a + b > 2a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{5}{2}a \Leftrightarrow a < \dfrac{2}{5}AC \Leftrightarrow BD < \dfrac{2}{5}AC$.

ТЕСТ за подготовка за държавен зрелостен изпит

Алексина Кичева

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Кои от посочените числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; $\sqrt{2^{-1}}$; $\log_5 4$ и $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ са по-малки от 1?

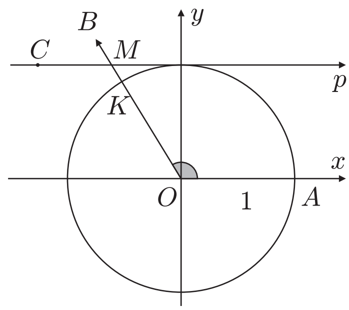
А) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ и $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ **Б)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ и $\sqrt{2^{-1}}$

В) $\sqrt{2^{-1}}$ и $\log_5 4$ **Г)** $\sqrt{2^{-1}}$ и $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$

2. Стойността на израза $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ при $a=3-\sqrt{15}$ и $b=3+\sqrt{15}$ е равна на:

А) $2\sqrt{15}$ **Б)** $\frac{8}{31}$ **В)** $-\frac{8}{13}$ **Г)** 8

3. Окръжността на чертежа е с радиус 1. Лъчите $\overrightarrow{Ox}$ и $\overrightarrow{Cp}$ са еднопосочни. Лъчът $\overrightarrow{OB}$ пресича лъча $\overrightarrow{Cp}$ и окръжността съответно в точки M и K. Ако $MK = \frac{1}{4}$, то котангенсът на $\sphericalangle AOB$ е равен на:



А) $-\frac{3}{4}$ **Б)** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

В) $-\frac{1}{2}$ **Г)** $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

4. ВЯРНОТО твърдение за функцията $y=-2x^2+6x-5$ е:

А) Функцията е нечетна.

Б) Разстоянието от върха на параболата $y=-2x^2+6x-5$ до остта Ox е равно на $\frac{1}{2}$.

В) Графиката на функцията е симетрична относно оста Ox.

Г) Функцията има най-малка стойност при $x=\frac{3}{2}$.

5. Кое от посочените неравенства е изпълнено за всяко положително число?

А) $25x^2 - 10x + 1 > 0$ **Б)** $-x^2 - 13x - 2 < 0$

В) $8x^2 - 3x - 4 > 0$ **Г)** $-x^2 + 15x - 2 < 0$

6. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $-2x^2 + 5x + 9 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{1 - x_1}{x_2} + \dfrac{1 - x_2}{x_1}$ е равна на:

А) $-\dfrac{17}{6}$ **Б)** $\dfrac{17}{6}$ **В)** $-\dfrac{11}{18}$ **Г)** $\dfrac{11}{18}$

7. Стойността на израза $4^{\log_{\frac{1}{2}} 3} + \log_3 \left(\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{9}\right)$ е равна на:

А) $-\dfrac{2}{9}$ **Б)** $\dfrac{2}{9}$ **В)** $\dfrac{2}{3}$ **Г)** $-\dfrac{2}{3}$

8. Коя от посочените системи е равносилна на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$?

А) $\left| \begin{array}{l} (x+y)^2 - 3xy = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$ **Б)** $\left| \begin{array}{l} (x+y)^2 + xy = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$

В) $\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$ **Г)** $\left| \begin{array}{l} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$

9. За аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ е известно, че $a_1 = -2$ и $a_7 - a_5 = -6$. Деветият член на прогресията е равен на:

А) 22 **Б)** 25 **В)** -26 **Г)** -29

10. Броят на различните решения на уравнението $(1-x^2)\sqrt{-x^3 - x^2 + 2x} = 0$ е:

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

11. Стойността на израза $\operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{tg}^2 75^\circ$ е равна на:

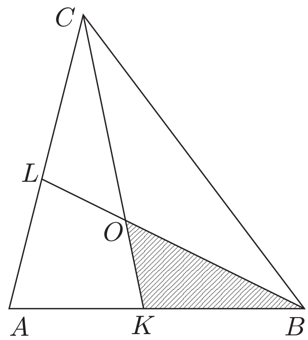
А) $-8\sqrt{3}$ **Б)** $-4\sqrt{3}$ **В)** -2 **Г)** -4

12. Решенията на неравенството $\dfrac{4x+9}{-x^2+2x+8} \leq 1$ са:

А) $x \in (-2; 4)$ **Б)** $x \in (-2; -1) \cup (-1; 4)$

В) $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$ **Г)** $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty) \cup \{-1\}$

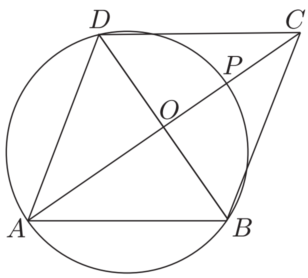
13. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AC = 6$ см, $BC = 8$ см и $AB = 7$ см. Ъглополовящите BL и CK на триъгълника се пресичат в точка O. Лицето на $\triangle KBO$ е равно на:



А) $\sqrt{15}$ кв.см **Б)** $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$ кв.см

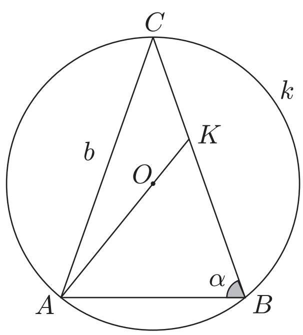
В) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ кв.см **Г)** $3\sqrt{15}$ кв.см

14. В ромба $ABCD$ описаната около $\triangle ABD$ окръжност пресича диагонала AC в точка P. Ако $AP = 8$ см, а $CP = 2$ см, то лицето на ромба е:



А) $10\sqrt{15}$ кв.см **Б)** $20\sqrt{15}$ кв.см **В)** 50 кв.см **Г)** 25 кв.см

15. През върха A на равнобедрен $\triangle ABC$ и центъра на описаната му окръжност е построена права, пресичаща страната BC в точка K. Ако $AC = BC = b$ и $\sphericalangle ABC = \alpha$, то отсечката AK е равна на:

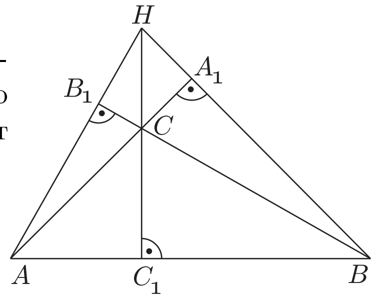


А) $\dfrac{b.\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ **Б)** $-\dfrac{b.\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ **В)** $\dfrac{b.\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}$ **Г)** $-\dfrac{b.\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}$

16. В $\triangle ABC$ сборът от ъглите при върховете A и B е 60°, а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е 12. Разстоянието от ортоцентъра H до върха C е равно на:

А) 6 **Б)** $2\sqrt{6}$

В) $6\sqrt{3}$ **Г)** 12



17. Произведението на два последователни члена на редицата с общ член $a_n = (-1)^{n-1}.2^{n+1}$ е -128. Сборът на тези членове е равен на:

А) -8 **Б)** 8 **В)** -16 **Г)** 16

18. Допустимите стойности на израза $A(x) = \sqrt{2 - \log_5 x}$ са:

А) $x \in (-\infty; 25)$ **Б)** $x \in (-\infty; 25]$

В) $(0; 25]$ **Г)** $x \in [0; 25]$

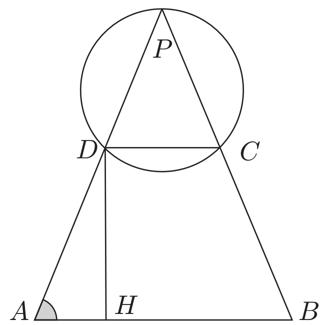
19. Върху всяка от страните на четириъгълник са отбелязани по четири точки. Броят на триъгълниците с върхове измежду тези точки, една от страните на които лежи върху страна на четириъгълника, е равен на:

А) 144 **Б)** 288 **В)** 196 **Г)** 576

20. Бедрата на равнобедрения трапец $ABCD$, описан около окръжност, се пресичат в точка P. Височината DH на трапеца е $12\sqrt{2}$, а $\operatorname{tg} \sphericalangle BAD = 2\sqrt{2}$. Радиусът на описаната окръжност около $\triangle DCP$ е равен на:

А) $27\sqrt{2}$ **Б)** $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$

В) $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$ **Г)** $6\sqrt{2}$

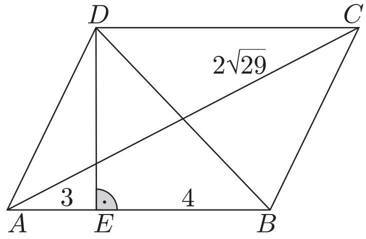


На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете решението на системата $\left| \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{27x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{3(x+y)}{x}} = 6 \\ xy - 54 = x + y \end{array} \right.$.

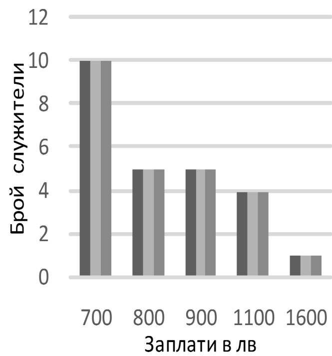
22. Сумата от първите единадесет члена на аритметична прогресия е 132. Третият, петият и единадесетият членове на тази прогресия в посочения ред образуват геометрична прогресия. Намерете разликата на аритметичната прогресия.

23. В успоредника $ABCD$ е построена височината DE. Ако $AE = 3$ см, $BE = 4$ см и $AC = 2\sqrt{29}$ см, намерете косинуса на острия ъгъл между диагоналите на успоредника.



24. Даден е $\triangle ABC$, за който$BC = 14\sqrt{3}$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, а радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е 6. Наметере лицето на триъгълника.

25. На диаграмата е показано разпределението на месечните заплати във фирма. След напускането на един от служителите, средната заплата във фирмата станала 850 лева. С каква заплата е бил напусналият служител?



На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Намерете неизвестното число x от равенството $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x+1} + \dfrac{80}{27} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{1-x}$.

27. С помощтта на цифрите 1, 3 и 5 са образувани всички трицифрени числа, в записа на които няма две еднакви съседни цифри. След това с помощтта на цифрите 0, 2, 4 и 6 също са образувани всички трицифрени числа, в записа на които няма две еднакви съседни цифри. Всички числа са записани на отделни картончета. Каква е вероятността, числото на произволно избрано картонче да се дели на 5?

28. Даден е триъгълник $\triangle ABC$. Окръжност минава през върха C на триъгълника и се допира до правата AB в точка B. Центърът на окръжността лежи върху страната AC и я дели в отношение $7 : 9$, считано от C. Ако $AB = 4$ см, намерете лицето на $\triangle ABC$.

ОТГОВОРИ

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
В	Г	А	Б	Б	Б	А	А	В	Б
11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
А	Г	А	А	Г	Г	Б	В	Б	В

21. $(6;12)$ $(-4,5;-9)$; **22.** $d=0$; $d=3$; **23.** $\dfrac{3\sqrt{58}}{58}$; **24.** $120\sqrt{3}$; **25.** 1100 лв.;

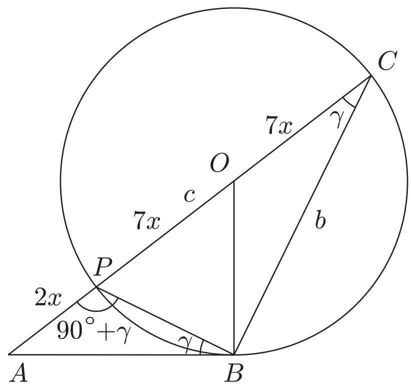
26. След опростяване стигаме до $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-x-1}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow x=-2$.

27. С цифрите 1, 3, 5 могат да се запишат $P_3=3!=6$ трицифрени с различни цифри и $V_3^2=6$ трицифрени с две еднакви цифри; общо 12 числа.

С цифрите 0, 2, 4, 6 могат да се запишат V_4^3 числа с различни цифри, от които V_3^2 започват с 0; т.е. $V_4^3-V_3^2=18$ числа, и $V_4^2-3=9$ трицифрени с две еднакви цифри; общо 27 числа.

Общият брой на числата е 39, от тях завършващите на 5 са 4 числа, завършващите на 0 са 6 числа, благоприятните възможности са 10. Следователно $P(A)=\dfrac{10}{39}$.

28. От $AB^2=AP.AC$ следва $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $AP=\sqrt{2}$. Означаваме $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ABP=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}=\gamma$; в $\triangle PCB$ с $\sphericalangle PBC=90^\circ$ имаме $\sphericalangle BPC=90^\circ-\gamma$; следователно $\sphericalangle BPA=90^\circ+\gamma$. От синусовата теорема



$$\frac{AP}{\sin\gamma}=\frac{AB}{\sin\left(90^\circ+\gamma\right)}\Rightarrow\frac{AP}{AB}=\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Следователно $\cos\gamma=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\sin\gamma=\dfrac{1}{3}$. Тогава

$$BC=PC\cos\gamma=14x\cos\gamma=\frac{28}{3},$$

$AC=16x=8\sqrt{2}$ и намираме

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BC.\sin\gamma=\frac{112\sqrt{2}}{9}.$$

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2015/16 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. В остроъгълния триъгълник ABC ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича BC в точката D. Точките P и Q са ортогоналните проекции на D върху правите AB и AC. Докажете, че лицата на APQ и $BCQP$ са равни тогава и само тогава, когато центърът на описаната около триъгълника ABC окръжност лежи на PQ.

Задача 2. Реалните числа $0 < a,\ b,\ c < \dfrac{1}{2}$ са такива, че $a+b+c=1$. Докажете, че за произволни $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ е в сила неравенството

$$abc(x+y+z)^2 \geq ayz(1-2a) + bxz(1-2b) + cxy(1-2c).$$

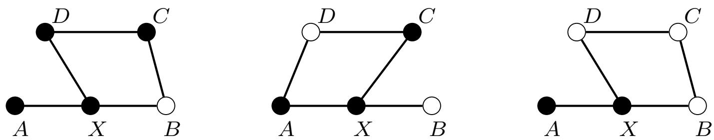
Задача 3. За произволно просто число n докажете, че съществува пермутация $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на $1, 2, \ldots, n$, за която числата $a_1,\ a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2\ldots a_n$ дават различни остатъци при деление на n.

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2017 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 1/2017 г.

Задача 1. Всички точки в равнината са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществува трапец, три от върховете на който са в единия цвят, а четвъртият връх – в другия.

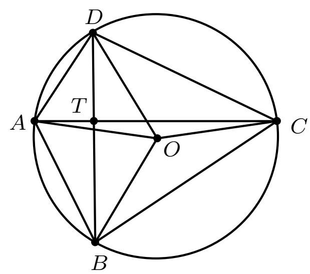
Решение. Нека A и B са две разноцветни точки. Без ограничение средата на отсечката AB (точка X) е в цвета на точка A. Да изберем точки C, D така, че $AB||CD$. Ако C и D са разноцветни, трапецът $AXCD$) изпълнява условието, а ако C и D са едноцветни, $XBCD$ е търсеният трапец.



Задача 2. Даден е четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали. Симетралите на AD и BC се пресичат в точка O. Да се докаже, че $S_{OAD} = S_{OBC}$ тогава и само тогава, когато четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Решение. Нека T е пресечната точка на диагоналите AC и BD. Ако $ABCD$ е вписан в окръжност k, то O е центърът на k. Тогава

$$S_{OAD} = \frac{OA.OD \sin \sphericalangle AOD}{2} = \frac{R^2 \sin \sphericalangle AOD}{2}$$



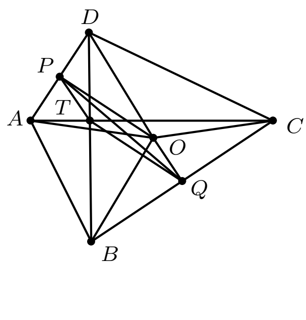
и аналогично $S_{OCB} = \dfrac{R^2 \sin \sphericalangle COB}{2}$. Понеже

$$\sphericalangle AOD + \sphericalangle COB = 2\sphericalangle ATD = 180^\circ,$$

то двата ъгъла имат равни синуси, следователно $S_{OAD} = S_{OCB}$.

Обратно, нека $S_{OAD} = S_{OBC}$ и нека P и Q са средите на AD и BC. Тогава $TP = \dfrac{1}{2}AD$, $TQ = \dfrac{1}{2}BC$ и от равенството на лицата следва, че

$$OP.PT = OQ.QT.$$



Ако $\sphericalangle TAD = \alpha$ и $\sphericalangle TBC = \beta$, от петоъгълника $POQCD$ изразяваме $\sphericalangle POQ = 90^\circ - \alpha - \beta$. Тъй като и $\sphericalangle PTQ = 90^\circ - \alpha - \beta$, то $\triangle POQ \sim \triangle QTP$. Оттук $OP \parallel QT$, т.е. $QT \perp AB$. Тогава $\alpha = \beta$, т.е. $ABCD$ е вписан в окръжност.

Задача 3. Дадени са естествени числа a, b и c, за които $b > 2a$ и $c > 2b$. Да се докаже, че съществува реално число α, за което дробните части на числата αa, αb и αc са в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Решение. Ако дробната част на αa е в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, то съществува естествено число m, за което $m + \frac{1}{3} < \alpha a \leq m + \frac{2}{3}$. Това означава, че

$$\alpha \in \left(\frac{3m+1}{3a}, \frac{3m+2}{3a}\right].$$

Следователно трябва да докажем, че съществуват естествени числа m, n и p, за които интервалите

$$I_m = \left(\frac{3m+1}{3a}, \frac{3m+2}{3a}\right], \quad J_n = \left(\frac{3n+1}{3b}, \frac{3n+2}{3b}\right]$$

и

$$K_p = \left(\frac{3p+1}{3c}, \frac{3p+2}{3c}\right]$$

имат обща точка.

Дължината на интервала J_n е $\frac{1}{3b}$, а разстоянието между два последователни интервала от K_p е $\frac{2}{3c}$. Тъй като $\frac{1}{3b} > \frac{2}{3c}$, то всеки интервал J_n пресича интервал K_p.

Ще докажем, че някой интервал J_n се съдържа изцяло в интервал I_m, с което задачата ще бъде решена.

Ако $J_n \subset I_m$, то

$$\frac{3m+1}{3a} \leq \frac{3n+1}{3b} \quad \text{и} \quad \frac{3n+2}{3b} \leq \frac{3m+2}{3a}.$$

Тези неравенства са еквивалентни на

$$\frac{3n+1}{3m+1} \leq ab \leq \frac{3n+2}{3m+2}.$$

Тъй като $m > n$ (иначе $a \geq b$), то след полагането $m = n + t$ и преобразувания, намираме

$$h(3m+1) \leq 3t \leq h(3m+2), \tag{1}$$

за $h = 1 - \frac{a}{b} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Трябва да покажем, че за всяко h съществуват естествени числа m и t, за които е изпълнено (1).

Нека q е минималното естествено число, за което $qh \leq 3 \leq (q+1)h$. От $h \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ следва, че $q = 3, 4, 5$, т.е. възможни са случаите

$$3h \leq 3 \leq 4h, \quad 4h \leq 3 \leq 5h \ \text{ и } \ h \leq 3 \leq 6h.$$

Да разгледаме съответните интервали за h.

Първи случай. $3h \leq 3 \leq 4h$, т.е. $h \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. В този случай между $3t$ и $3(t+1)$ има точно един интервал от I_m. Ако x е разстоянието от $3t$ до левия край на най-близкия интервал от I_m, а y е съответното разстояние от $3t+3$, то $y = x + 3h - 3 < x$, като $x - y = 3 - 3h \leq h$ (от $h \geq \frac{3}{4}$). Следователно разглежданото разстояние намалява с постоянна стойност $3 - 3h$, не надвишаваща h, което означава, че след краен брой прибавяния на 3, ще попаднем в интервал от I_m.

Втори случай. $4h \leq 3 \leq 5h$, т.е. $h \in \left[\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right]$. В този случай $m = 1$ и $t = 1$ са търсените.

Трети случай. $5h \leq 3 \leq 6h$, т.е. $h \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$. Разсъждаваме аналогично на първия разгледан случай, само, че сега между $3t$ и $3(t+1)$ има точно два интервала от I_m. Съответното разстояние е $y = x + 6h - 3 > x$, като $y - x = 6h - 3 \leq h$ и както в първия случай следва, че ще попаднем в интервал от I_m.

ИЗБОРНА МАТЕМАТИКА

Задача. За избор на 100-местен парламент се борят 12 партии. В парламента влизат партиите, събрали повече от 5% от гласовете. Представените в парламента партии си разпределят местата пропорционално на събраните гласове. След изборите се оказало, че няма недействителни бюлетини и всяка партия получава цяло число места. За партията на любителите на математиката гласували 25% от избирателите. Най-много колко места може да има тя в парламента?

конкурсни задачи

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 1/2017 г.

Задача 1. Зайо подскачал по пътя от дома си към дома на Пух. Три четвърти от пътя той изминал на подскоци с дължина, равна на две обикновени негови крачки, а останалата четвърт от пътя – на подскоци с дължина, равна на три обикновени негови крачки. Оказало се, че подскоците по две крачки били с 350 повече от подскоците по три крачки. Колко обикновени крачки е пътят между домовете на Зайо и Пух?

Решение. С x подскока от три крачки Зайо изминал последната четвърт от пътя. Значи първите три четвърти от пътя се изминават с $3x$ подскока от 3 крачки, а Зайо ги е изминал с $x + 350$ подскока от 2 крачки. Следоватвелно

$$3.3x = 2(x + 350),$$

откъдето намираме $x = 100$. Пътят между домовете на Зайо и Мечо Пух е $4.3.100 = 1200$ крачки.

Задача 2. Всеки от 28-те ученици в един клас участвал в една или две от олимпиадите по математика, информатика и лингвистика. Броят на учениците, участвали в по две олимпиади, е с 60% по-малък от броя на учениците, участвали в само една. На олимпиадата по информатика се явили 2 пъти повече ученици, отколкото на олимпиадата по лингвистика и k пъти по-малко, отколкото на олимпиадата по математика (k е естествено число). Колко ученици се явили на олимпиадата по математика?

Решение. Ако в само една олимпиада са участвали x ученици, на две олимпиади са участвали $40\%x$ ученици. Следователно $x + 0,4x = 28$, откъдето намираме $x = 20$. На две олимпиади са участвали $0,4.20 = 8$ ученици.

Нека броят на участниците в олимпиадата по лингвистика е y. Тогава в олимпиадата по информатика са участвали $2y$ ученици, а в олимпиадата по математика – $2ky$ ученици. Общият брой на учениците в класа е

$$y + 2y + 2ky - 8 = 28.$$

Оттук получаваме равенството

$$y(3 + 2k) = 36.$$

Множителят $3+2k \geqq 5$ е нечетно число и е делител на $36 = 2^2.3^2$. Следователно $3+2k = 9$, т.е. $k = 3$. Тогава $y = 4$. На олимпиадата по математика са се явили $2.3.4 = 24$ ученици.

Задача 3. Мими намислила десетцифрено число и му приложила следната операция: изтрила последната цифра, утроила останалото число и към резултата прибавила удвоена изтритата цифра. С полученото число постъпила по същия начин и т.н. Мими стигнала до число, от което получила същото число и спряла да смята.

а) Кое число е получила Мими накрая?

б) Най-малко на колко е равно първото число на Мими?

Решение. а) Нека последното число е $\overline{Ab} = 10A+b$. След прилагането на дадената операция, от това число се получава $3A+2b$. Мими е получила същото число, т.е.

$$10A + b = 3A + 2b.$$

Оттук получаваме $7A = b$ и намираме цифрата $b = 7$, а $A = 1$. Последното число е 17.

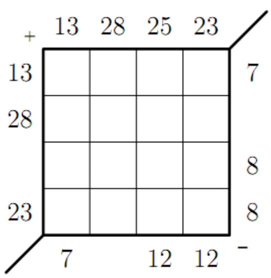
б) Забелязваме, че

$$3A + 2b = 2(10A + b) - 17A.$$

Следователно ако $3A + 2b$ се дели на 17, то и $10A + b = \overline{Ab}$ се дели на 17. Тъй като последното число от редицата е 17, получаваме, че всички числа в редицата са кратни на 17. Първото число на Мими е най-малко равно на 1000000010 (най-малкото десетцифрено крано на 17). От него след 15 операции се получава числото 17.

ЗА ЛЮБИТЕЛИТЕ НА ГЛАВОБЛЪСКАНИЦИ

Попълнете в таблицата числата от 1 до 16 така, че числата горе и вляво да са равни на най-големият сбор на две числа в съответния стълб и ред, а числата долу и вдясно да са най-голямата разлика на две числа от съответния стълб и ред.



МАЙСТОРСКИ КЛАС „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“ 2017

Ивайло Кортезов

В периода 3–8 януари 2017 в гр. Хисаря се проведе Майсторският клас „Черноризец Храбър“. В него взеха участие 75 ученици, постигнали най-високи резултати в Националния математически турнир „Черноризец Храбър“, проведен на 1 ноември 2016. Освен че прекараха щастливи и незабравими дни в много удобен, топъл и гостоприемен хотел или в разходки в един от най-хубавите и слънчеви градове на България, в рамките на Майсторския клас учениците взеха участие в поредица от лекции и състезания, сред които „От 1 до 100“, „Математическа Търсачка“ и „Математическа Рулетка“. Ето задачите, включени в последното от тези състезания. Опитайте се да ги решите; когато приключите, може да си сравните отговорите с дадените в края на тази статия.

1. Ако a, b, c, d са естествени числа, $a \leq b \leq c \leq d$ и $a.b + c.d = 2017$, коя е най-малката възможна стойност на d?

2. Пресметнете $W + R$, ако:

2А. За точно 2017 ст. купих W вафли по 37 ст. и още няколко по 38 ст.
2Б. Остатъкът от делението на 2017^{2017} с 11 е R.

3. Пресметнете $A + a.b$, ако:
3А. Директорът на училище с 2017 ученици им наредил да събуват външните си обувки на влизане в училището, а вътре да ползват пантофи. На тръгване всяко излизащо дете обувало чифт обувки, в които кракът му можел да влезе (т.е. не по-малки от тези, с които е дошло). По някое време се оказало, че за никое останало дете няма подходящи обувки. Останалите деца може да са най-много A на брой.
3Б. Пресметнете произведението $a.b$, ако a, b са естествени числа и
$$a^2 + b^3 = 2017.$$

4. Пресметнете $b + N$, ако:
4А. От едно четирицифрено число изтрили втората цифра и то намаляло

7 пъти. Изтритата цифра била равна на b.

4Б. Иванчо накъсал контролното си на пет части. Това му се сторило недостатъчно, така че накъсал някои (поне 1) от получените парчета на пет части. Накрая се ожесточил и накъсал някои (поне 1) от получените парчета на осем части. Най-голямото двуцифрено число, което не може да е равно на общия брой получени парчета, е N.

5. Пресметнете $A+B$, ако:

5А. Има точно A четирицифрени числа със свойството: ако изтрием втората цифра на числото, то намалява 13 пъти.

5Б. Уравнението $m^2 = 24 + n!$ има точно B решения в естествени числа.

6. Пресметнете $n+R$, ако:

6А. Има точно n дати в една година, такива, че сборът от числата на деня и месеца се дели на 7.

6Б. Остатъкът от делението на 2017^{2017} със 17 е R.

7. Пресметнете $M+N$, ако:

7А. Две момичета и три момчета трябва да се наредят в редица за снимка, така че всяко момиче да е между две момчета. Всеки може да е с бяла, жълта или синя блуза. Снимката може да изглежда по M различни начина.

7Б. Има N четворки естествени числа $(x;\ y;\ z;\ t)$, за които

$$x + y = z.t \text{ и } z + t = x.y.$$

8. На колко най-много части може да се разреже равнината с 9 окръжности?

9. Най-много на колко части може да се разреже равнината, ако в нея се начертаят 32 ъгъла?

10. От точно 2017 еднакви клечки в равнината е построен правоъгълник $m \times n$, разделен на квадратчета със страна по една клечка. Ако $m < n$, намерете най-малката възможна стойност на n.

Решения

1. Отговор 33. За да получим нечетен сбор, от двете събираеми едното е нечетно, т.е. е произведение на два нечетни множителя. Ако $d \leq 32$, то $a.b + c.d \leq 31^2 + 32^2 = 1985$. При $a.b + c.d = 31.31 + 32.33 = 2017$ имаме $d{=}33$.

2А. Отговор 35. Имаме $2017 : 37 < 55$ и $2016 : 38 > 53$, така че купените вафли са 54. Имаме $2017 = 37.54 + 19$, така са купени 19 вафли по 38 ст. и 35 по 37 ст.

2Б. Отговор 5. Числото 2017 дава остатък 4 при деление на 11. Понеже $4^5 = 1024$ дава остатък 1 при деление на 11, същото важи и за 4^{2015}, така че 2017^{2017} дава същия остатък като $4^2 = 16$, а именно 5.

3А. Отговор 1008. Нека номерираме обувките в нарастващ ред: 1, 2, $\ldots$, 2017. Ако останат 1009 деца, най-големите останали обувки са с номер поне 1009, а номерът на детето с най-малкия крак е не повече от 1009, така че за него има подходящ чифт. Ако обаче децата с номера 1, 2, $\ldots$, 1009 си заминат с обувките с номера 1009, 1010, $\ldots$, 2017, то остават деца с номера 1010, ..., 2017 и обувки с номера 1, 2, $\ldots$, 1008, т.е. никой повече не може да се обуе.

3Б. Отговор 204. От $b^3 \leq 2017$ следва $b \leq 12$. Проверяваме тези b; успех имаме само при $b = 12$, когато $a = 17$. Получаваме $a.b = 204$.

4А. Отговор 0. Ако числото е $\overline{abcd}$, имаме

$$\begin{aligned}&1000a + 100b + 10c + d = 700a + 70c + 7d.\\&300a + 100b = 60c + 6d\\&150a + 50b = 30c + 3d\end{aligned}$$

Цифрата d е четна и се дели на 5, така че $d = 0$. Делим на 10: $15 + 5b = 3c$. Сега c се дели на 5 и не е 0, така че $c = 5$. Получаваме $3 + b = 3$, $a = 1$, $b = 0$. Числото е $1050 = 7.150$.

4Б. Отговор 33. Всяко от първите скъсвания (които са поне 2) дава по 4 допълнителни парчета, а от вторите (които са поне 1) – по 7. Общият брой парчета е $1 + 2.4 + 7 + 4a + 7b = 16 + 4a + 7b$. От този вид са:

остатък при дел. на 4	числа от указания вид
0	16, 20, 24, 28, $\ldots$
3	23, 27, 31, 35, $\ldots$
2	30, 34, 38, 42, $\ldots$
1	37, 41, 45, 49, $\ldots$

Най-голямото естествено число, което не е в горния списък, е 33.

5А. Отговор 6. Ако числото е $\overline{abcd}$, имаме

$$\begin{aligned}&1000a + 100b + 10c + d = 1300a + 130c + 13d.\\&100b = 300a + 120c + 12d\\&25b = 75a + 30c + 3d\end{aligned}$$

Сега b се дели на 3 и не е 0, така че $b = 3$, $b = 6$ или $b = 9$.

Ако $b = 3$, получаваме $25 = 25a + 10c + d$ и числото 1300.

Ако $b = 6$, получаваме $50 = 25a + 10c + d$ и числата 1625 и 2600.

Ако $b = 9$, получаваме $75 = 25a + 10c + d$ и числата 1950, 2925 и 3900.

5Б. Отговор 2. Ако $n \geqq 6$, то $n!$ се дели на 9, така че дясната страна се дели на 3, без да се дели на 9, т.е. не може да е точен квадрат. Проверката за $n < 6$ дава две решения: $n = 1$, $m = 5$ и $n = 5$, $m = 12$.

6А. Отговор 51. Имаме $7 = 6+1 = \cdots = 1+6$ (6 дати); $14 = 13+1 = \cdots = 2+12$ (12 дати); $21 = 20+1 = \cdots = 9+12$ (12 дати); $28 = 27+1 = \cdots = 16+12$ (12 дати); $35 = 30 + 5 = \cdots = 23 + 12$ (8 дати); $42 = 30 + 12$ (1 дата). Така $n = 6 + 3.12 + 8 + 1 = 51$.

6Б. Отговор 11. Числото 2017 дава остатък 11 при деление на 17. Понеже $11^2 = 121$ дава остатък 2 при деление на 17, 11^8 дава остатък 16 (т.е. -1) и 11^{16} дава остатък 1. Тогава същото важи и за 11^{2016}, така че 2017^{2017} дава остатък 11.

7А. Отговор 2916. Има $3! = 6$ наредби за момчетата, 2 за момичетата и $3.3.3.3.3 = 243$ избора за блузите, така че $n = 6.2.243 = 2916$.

7Б. Отговор 9. Ако сред числата x, y, z, t няма единица, то $(x-1)(y-1) \geqq 1$, откъдето $xy \geqq x + y$. Аналогично $zt \geqq z + t$. Събирайки, получаваме $xy + zt \geqq x + y + z + t = zt + xy$, така че трябва да има равенство, а то се достига само при $x = y = z = t = 2$.

Нека сега сред числата има единица (4 избора), например $x = 1$. Имаме $z + t = y = zt - 1$, откъдето $(z - 1)(t - 1) = 2$, т.е. $\{z; t\} = \{2; 3\}$ (2 избора) и $y = 5$.

Общо получаваме $1 + 4.2 = 9$ решения.

8. Отговор 74. Една окръжност разделя равнината на 2 части. Ако вече са начертани n окръжности, следващата се разпада на най-много $2n$ дъги от пресечните си точки с тях, така че добавя най-много $2n$ нови области. Така частите са най-много $2 + 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 16 = 74$.

9. Отговор 2017. Един ъгъл разделя равнината на 2 части. Ако са начертани n ъгъла, раменете на следващия се разпадат на най-много $4n+1$ части от пресечните точки с тези на предишните, така че се добавят най-много $4n + 1$ нови области. Така частите са най-много $2 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 125 = 1 + (1 + 125).16 = 2017$.

10. Отговор 134. Има $m + 1$ реда по n хоризонтални клечки и $n + 1$ стълба по m вертикални клечки, така че $(m + 1)n + (n + 1)m = 2017$ и $2mn + m + n = 2017$. Умножаваме по 2 и добавяме 1, за да разложим $4mn+2m+2n+1 = 4035$ до $(2m+1)(2n+1) = 3.5.269$. Най-малка стойност за n имаме при $2n + 1 = 269$, $n = 134$.

КЛУБ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ ИЗЛЪЧИ СВОИТЕ ШАМПИОНИ ЗА 2017

Любомир Любенов

На 26 февруари 2017 г. в Стара Загора се проведе финалното състезание на клуб *Математически таланти* за учебната 2016 - 2017 г.

Клубът съществува от 2014 г. и вече има три издания. Организатор е Педагогическа асоциация *Образование без граници*. В клуба участват ученици от 2. до 6. клас, които са печелили призови места в състезания по математика.

В третото издание – от септември 2016 г. до януари 2017 г., ученици от цялата страна проведоха тематично дистанционно обучение и решаваха самостоятелно задачи, изпращаха решения и решенията бяха проверявани и оценявани. От общия сбор от точки се формира и състава на старозагорския финал.

Първите победители на клуба се излъчиха измежду 28 ученици от 2. до 6. клас от София, Пловдив, Стара Загора, Варна, Смолян, Първомай, Карнобат, Сливен, Русе и Добрич в състезание, продължило 60 минути. Участниците трябваше да решат и запишат решения на 10 задачи.

Ето и имената на победителите: **Камен Събев** (2 клас; София), **Огнян Огнянов** (3 клас, София), **Иван Данев** (3 клас; Смолян), **Петър Узунов** (4 клас, Пловдив), **Ясен Пенчев** (5 клас, Габрово), **Мирослав Минчев** (6 клас; Стара Загора).

Наградите на победителите връчи доц. Васил Хаджииванов – председател на Съюза на учените в Стара Загора, а книга с автограф за учителите на победителите връчи Мариана Богданова, автор на много учебни помагала и учебници по математика за 1.–4. клас. Ето и задачите от финала.

ЧЕТВЪРТИ КЛАС

1. Колко са различните числа, които могат да се получат от числото 1234 след разместването на цифрите му по произволен начин?

2. На една полица има 5 книги, като между тях са и три тома от събрани съчинения на един автор. Колко са подредбите на книгите, при които трите тома са след друг (първи, втори и трети)?

3. За номериране на страниците на една книга са необходими 1390 цифри. От колко страници е книгата, ако първите две страници не са номерирани, а третата е номерирана с 3?

4. Колко числа от 1 до 40 трябва да се изберат на случаен принцип така, че сред тях да има поне една двойка числа със сбор 50?

5. Подредете цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, така че цифрата 1 да е вляво от цифрата 2; цифрата 2 да е вляво от 3; цифрата 4 да е вляво от 2, а 5 да е вдясно от 1 и вляво от 4.

6. При събиране на няколко числа ученик допуснал от небрежност следните грешки: цифрата на единиците 9 на едно от числата той приел за 7, цифрата на стотиците 2 на друго от числата той приел за 4. Събрал числата и получил 2017. Кой е верният сбор?

7. По колко начина от 5 точки можем да изберем 3 точки, без да отчитаме реда на избора?

8. Във всяка от 10 торбички има по 10 еднакви монети, но в едната те са фалшиви, като всяка е с 1 г по-лека от истинските. Как с едно претегляне може да се открие торбата с фалшивите монети?

9. Сборът на пет различни естествени числа е 100. Най-голямото от тях е 22. Да се намери най-малкото сред тях.

10. Намерете стойността на израза
$$2+4+6+8-10+12+14+16+18-20+\cdots+42+44+46+48-50.$$

ПЕТИ КЛАС

1. Номерирах тетрадка от 100 листа с числата от 1 до 200. Откъснах 10 листа и събрах всичките 20 числа, с които те са номерирани. Възможно ли да получа сбор 210?

2. За различните цифри x и y е изпълнено $7 \times \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y$. Намерете най-малката възможна стойност на $x + y$.

3. Разглеждаме четирицифрените числа, съставени и с трите цифри 1, 2 и 3, като някои от тях се повтарят. Колко от тези числа се делят на 9?

4. Колко са естествените числа, ненадвишаващи 100, които са едновременно сбор на 2 последователни естествени числа И сбор на 3 последователни естествени числа?

5. Вж. задача 5 за 4. клас.

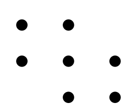
6. Коя е най-малката стойност на сбора $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$, където на различните букви отговорят различни цифри, никоя от които не е нула?

7. Четири тежести са подредени една до друга, при това всеки две съседни се различават с 1 грам и най-голямата тежест е 3 грама. Възможно ли е да поставим всичките тези тежести на везна и тя да е в равновесие?

8. Да се пресметне израза

$$\left(1+\frac{1}{4}\right) \times \left(1-\frac{1}{5}\right) \times \left(1+\frac{1}{6}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{18}\right) \times \left(1-\frac{1}{19}\right) \times \left(1+\frac{1}{20}\right).$$

9. За простите числа a и b е изпълнено равенството $a + 16 = b + 33$. Кое е числото a?



10. Колко са триъгълниците с върхове измежду изобразените точки на чертежа?

ШЕСТИ КЛАС

1. Намерете различните цифри x и y, за които $3 \times \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y$.

2. Числителя на една дроб увеличили с 20%, а знаменателя намалили с 20%. Получили нова дроб. Да се намери частното на двете дроби.

3. Да се пресметне израза

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{20}\right)\times\left(1-\frac{1}{21}\right).$$

4. Вж. задача 4 за 5. клас.

5. Да се намери най-големият общ делител на числата 540 и 450.

6. Да се намери цифрата на десетиците на числото 3^{2017}.

7. За простите числа a, b и c е изпълнено равенството $a+16=b+33=c+6$. Пресметнете $a+b+c$.

8. Да се намери най-малкото естествено число, произведението на цифрите на което е $2^9.3^5.25$.

9. Колко са четирицифрените числа, записани само с цифрите 2 и 5, в записа на всяко от които има поне една цифра 2, но няма две цифри 2 една до друга?

10. Призма и пирамида имат един и същ брой ръбове. Ако пирамидата има 7 върха, пресметнете броя на върховете на призмата.

ОТГОВОРИ

ЧЕТВЪРТИ КЛАС

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отговор	23	6	500	26	15423	1819	10	–	18	350

8. Нека истинските монети тежат по 10 грама, а фалшивите - по 9 грама. Да номерираме торбичките с числата от 1 до 10. От всяка от торбичките вземаме толкова монети, колкото е номерът ѝ. Измерваме теглото на тези $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ монети. Ако всичките бяха истински, щяха да тежат общо 550 грама. Но не всички са истински. От 550 изваждаме теглото на взетите монети. Полученото число дава номера на торбичката, в която монетите са фалшиви.

ПЕТИ КЛАС

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отговор	Да	5	12	16	15423	25/72	Да	1,05	19	32

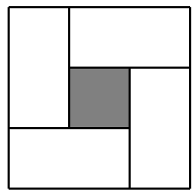
ШЕСТИ КЛАС

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отговор	9 и 2	3/2	2/3	16	90	2	50	35588899	7	8

ПРАВОЪГЪЛНИЦИ – ЛИЦА И ОБИКОЛКИ

Задачите за намиране на лица и обиколки са сред най-приятните състезателни задачи. Повечето от тях могат да се решат *наум* – само с подходящо *разместване и групиране на отсечки.* Ще разгледаме няколко класически примера по темата.

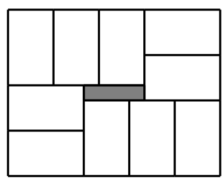
Задача 1. а) От четири еднакви правоъгълни плочки с обиколка 40 см и черна квадратна плочка сглобили квадрат. Колко е страната на големия квадрат?
б) Квадратът на чертежа се състои от четири еднакви правоъгълника и квадрат. Ако страната на малкия квадрат е 3 см, а страната на големия квадрат е 17 см, да се намерят страните на един правоъгълник.



Решение. а) Страната на големия квадрат е сбор от дължината и широчината на един правоъгълник. Това означава, че страната на големия квадрат е равна на половината от обиколката на правоъгълника, т.е. на 20 см.

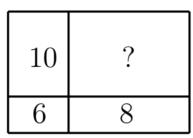
б) Разликата на страните на правоъгълника е равна на страната на малкия квадрат и е 3 см. Сборът на страните на правоъгълника е равен на страната на големия квадрат и е 17 см. Оттук страните на правоъгълника са $(17-3):2=7$ см и $7+3=10$ см.

Задача 2. Да се намери обиколката на оцветения правоъгълник, ако всеки от останалите десет правоъгълника има страни 13 см и 19 см.

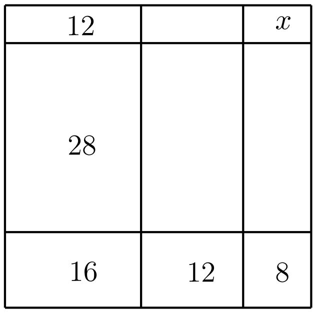


Решение. Забелязваме, че малката страна на оцветения правоъгълник е равна на разликата $2.13-19=7$ см, а голямата му страна е равна на $3.13-19=20$ см. Оттук обиколката му е $2.(20+7)=54$ см.

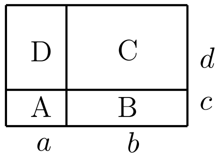
Задача 3. а) Правоъгълникът на чертежа е разделен на четири правоъгълника. Обиколките на три от тях са 6 см, 8 см и 10 см. Да се намери обиколката на четвъртия правоъгълник.



б) Правоъгълникът на чертежа е разделен на девет правоъгълника. В някои от правоъгълниците са записани техните обиколки. Да се намери обиколката, означена с x.



Решение. а) Ще използваме означенията на правоъгълниците и страните им, показани на чертежа.



Сборът на обиколките на правоъгълниците A и C е

$$(2.a + 2.c) + (2.b + 2.d) = 2.a + 2.b + 2.c + 2.d.$$

Сборът на обиколките на правоъгълниците B и D е

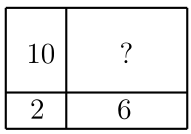
$$(2.b + 2.c) + (2.a + 2.d) = 2.a + 2.b + 2.c + 2.d.$$

Следователно *сборът на обиколките на правоъгълниците A и C е равен на сбора на обиколките на B и D.*

Ако обиколката на правоъгълника C означим с x, получаваме равенството $6 + x = 8 + 10$ и намираме $x = 12$ см.

б) Последователно прилагаме правилото, което получихме в а). Централният правоъгълник има обиколка $28 + 12 - 16 = 24$ см, оттук правоъгълникът в края на втория ред има обиколка $24 + 8 - 12 = 20$ см. Правоъгълникът в центъра на горния ред е с обиколка $12 + 24 - 28 = 8$ см и накрая $x = 8 + 20 - 24 = 4$ см.

Задача 4. а) Правоъгълникът на чертежа е разделен на четири правоъгълника. Лицата на три от тях са 2 кв.см, 6 кв.см и 10 кв.см. Да се намери обиколката на четвъртия правоъгълник.

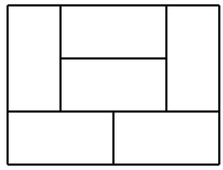


Решение. Ще използваме означенията от задача 2 а). Произведението на лицата на правоъгълниците A и C е $(a.c).(b.d) = a.b.c.d$. Като умножим лицата на правоъгълниците B и D, получаваме $(b.c).(a.d) = a.b.c.d$.

Следователно *произведението на лицата на правоъгълниците A и C е равно на произведението на лицата на B и D.*

Ако търсеното лице означим с x, получаваме равенството $2.x = 6.10$ и намираме $x = 30$ кв.см.

Задача 5. Правоъгълник с обиколка 28 см е сглобен от шест еднакви правоъгълни плочки, както е показано на чертежа. Да се намери лицето на правоъгълника.

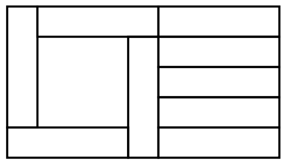


Решение. Да означим малката страна на плочката с x. От чертежа виждаме, че x се съдържа два пъти в голямата страна на плочката. Тогава дължината на големия правоъгълник съдържа 3 пъти отсечката x, а широчината на големия правоъгълник съдържа 4 пъти отсечката x.

Сборът от широчината и дължината на големия правоъгълник е равен на половината от обиколката му, т.е. на 14 см. От друга страна, този сбор съдържа $3 + 4 = 7$ пъти отсечката x. Следователно $x = 14 : 7 = 2$ см.

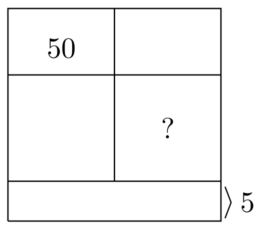
Оттук намираме страните на правоъгълника, $3.2 = 6$ см и $4.2 = 8$ см и лицето му е $6.8 = 48$ кв.см.

Задача 6. Правоъгълникът на чертежа е конструиран от 9 еднакви правоъгълни плочки и квадрат. Ако лицето на квадрата е 81 кв.см, намерете лицето на големия правоъгълник.



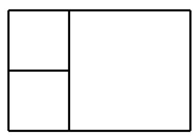
Упътване. Страната на квадрата е 3 пъти по-голяма от малката страна на правоъгълната плочка, а голямата страна на плочката е 4 пъти по-голяма от малката ѝ страна.

Задача 7. От квадратен лист изрязали два правоъгълника и два квадрата. Останала ивица с широчина 5 см, както е показано на чертежа. Обиколката на един от изрязаните правоъгълници е 50см. Колко сантиметра е обиколката на един изрязан квадрат?



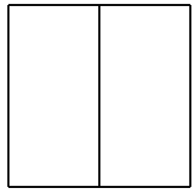
Решение. Страната на квадратния лист е с 5 см по-голяма от сбора на дължината и широчината на изрязания правоъгълник, следователно е равна на $50 : 2 + 5 = 30$ см. Оттук страната на квадрата е $30 : 2 = 15$ см и обиколката му е 60 см.

Задача 8. Колко е лицето на правоъгълника на чертежа, който е сглобен от три квадрата и обиколката му е 6 дм?



Отговор. 216 кв.см

Задача 9. Квадрат е разрязан на два еднакви правоъгълника.

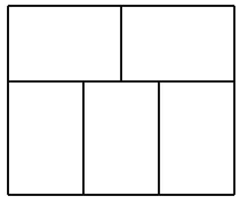


а) Ако обиколката на квадрата е 72 см, колко сантиметра е обиколката на един правоъгълник?

б) Ако обиколката на един правоъгълник е 120 см, да се намери лицето на квадрата.

Отговор. а) 54 см; б) 16 кв.дм.

Задача 10. Правоъгълникът на чертежа е сглобен от еднакви правоъгълни плочки. Да се намери лицето на една плочка, ако:



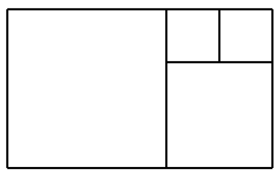
а) по-голямата страна на правоъгълника е 24 см;

б) по-малката страна на правоъгълника е 60 см.

Решение. а) Голямата страна на плочката е $24 : 2 = 12$ см, а малката е $24 : 3 = 8$ см и лицето на плачката е $12.8 = 96$ кв.см.

б) Ако означим малката страна на плочката с a, а голямата с b, имаме $3.a = 2.b$ и $a + b = 60$. Като удвоим последното равенство, получаваме $2.a + 2.b = 120$. Събираемото $2.b$ може да заместим с равното на него $3.a$ и тогава $2.a+3.a = 120$, т.е. $5.a = 120$. Намираме a=24 см, $b = 60-24 = 36$ см. Лицето на плочката е $24.36 = 864$ кв.см.

Задача 11. Правоъгълникът на чертежа е сглобен от квадрати.

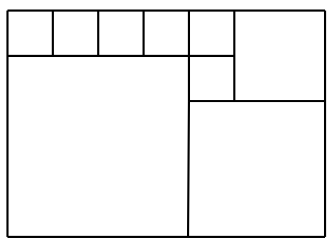


а) Ако два от квадратите имат страна 1 см, да се намери обиколката на правоъгълника.

б) Ако обиколката на правоъгълника е 160 см, колко е лицето на най-големия квадрат?

Отговор. а) 16 см; б) 9 кв.дм.

Задача 12. Правоъгълникът на чертежа е сглобен от от квадрати.



а) Ако най-големият квадрат има страна 12 см, да се намери лицето на правоъгълника.

б) Ако обиколката на правоъгълника е 48 см, да се намери лицето на най-големия квадрат.

Отговор. а) 315 кв.см; б) 64 кв. см.

за по-малките задачи

4. клас

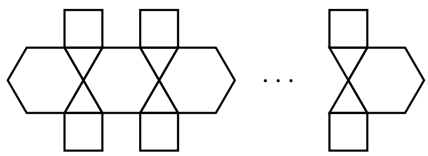
31. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

7	·		=	1001
		+		
1001	–		=	777
		=		
333	+		=	?

32. Правоъгълник е сглобен от четири квадрата, три от които са еднакви, а четвъртият има страна 33 см. Колко сантиметра е обиколката на целия правоъгълник?

33. В планината джуджетата изкопали 2 пъти повече диаманти, отколкото изумруди, както и много рубини. Половината от всички диаманти и още 7 диаманта те подарили на Снежанка, а останалите 71 диаманта задържали за себе си. Снежанка получила и половината от изумрудите, а също и част от рубините. Тя забелязала, че нейните рубини са с толкова повече от нейните изумруди, с колкото са по-малко от диамантите ѝ. Общо колко диаманти, изумруди и рубини е получила Снежанка?

34. Фигурата на чертежа е сглобена от шестоъгълни, триъгълни и квадратни плочки със страна 1 см. Всички плочки – шестоъгълни, триъгълни и квадратни, са общо 1001. Колко сантиметра е обиколката на цялата фигура?



5. клас

35. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

6	:		=	1, 2
		+		
3, 2	–		=	2, 3
		=		
10	·		=	?

36. Коко, Чоко и Боко си купили кашон с бонбони и си ги разпределили, като Коко взел 30% от бонбоните. Бонбоните на Чоко били с 30% повече от бонбоните на Коко и с 32 повече от бонбоните на Боко. Колко бонбона е взел Чоко?

37. Коко получил плик с бонбони, от които $\frac{2}{3}$ били ягодови, а останалите

– ментови. Той изял $\frac{1}{4}$ от ягодовите и $\frac{3}{4}$ от ментовите бонбони и останали 35 бонбони. Колко бонбони е получил Коко?

38. В пещерата на планинския цар има съкровище от скъпоценни камъни. Известно е, че $\frac{7}{20}$ от скъпоценните камъни са рубини, $\frac{7}{16}$ от скъпоценните камъни са изумруди, а останалите са диаманти. Ако общият брой на скъпоценните камъни е двуцифрено число, колко диаманти има в съкровището на планинския цар?

6. клас

39. Попълнете празните квадратчета в схемата така, че да са изпълнени четирите равенства. Кое е числото в оцветеното квадратче?

6	:		=	-3
		+		
-7	$-$		=	2
		=		
-5	$\cdot$		=	?

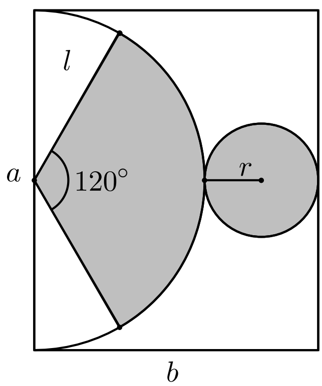
40. За кое положително число a е вярно равенството

$$\frac{a^{n-1}\cdot a^{n+2}}{a^{n+1}\cdot a^{n-2}}=\frac{(-2)^{12}\cdot 6^{16}+\ 12^{15}}{12^{11}\cdot 2^{7}+(-48)^{5}\cdot 6^{6}}?$$

41. На правоъгълен лист с размери a cm и b cm е начертана развивка на конус с образуващата l и радиус r, както е показано на чертежа. Развивката на околната повърхнина на конуса е сектор с ъгъл 120°.

а) Ако $a = 12$ cm, намерете l, r и b.

б) Намерете отношението $a : b$ при произволна стойност на a.



42. В пещерата на планинския цар имало съкровище от 2017 скъпоценни камъни – рубини, изумруди и диаманти. Докато разглеждал съкровището, царят установил, че броят на рубините е с 20% повече от броя на изумрудите и с 25% по-малко от броя на диамантите и веднага заповядал на да се намерят изгубените камъни. Най-малко колко скъпоценни камъни са изгубени?

43. Числата са такива, че $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2ab + 4b + 6c - 13$. На колко е равен сборът $a + b + c$?

44. Ефективността на автомобилните двигатели най-често се измерва с количеството гориво, необходимо за изминаване на 100 km. Разходът на гориво се различва съществено при шофиране в града и извън града. В табицата са предствени показателите за разход на гориво на един автомобил.

Разход (в града)	8,0 l / 100 km
Разход (извън града)	5,6 l / 100 km
Разход (комбиниран)	6,4 l / 100 km

А) С колко процента разходът на гориво при пътуване извън града е по-малък от разхода на гориво при движение в града при дадения автомобил?

Б) Комбинираният разход на гориво се пресмята по формулата

$$c = (1 - k)c_{град} + kc_{магистрала}$$

където $c_{град}$ е разходът в града, а $c_{магистрала}$ е разходът извън града. Да се определи коефициентът k.

В) Шофьор разполага с 40 лв. на седмица за закупуване на гориво. Той зарежда дизелово гориво с цена 2,60 лв. за литър. През всеки от петте работни дни шофьорът изминава средно 15 km в града, а в почивните дни планира пътуване извън града. На какво най-голямо разстояние от града може да се отдалечи той, като се върне отново в града, без да надхвърли планираната сума за гориво? Отговорете с точност до цяло число километри.

Г) В някои страни ефективността на двигателите на автомобилите се измерва чрез разстоянието, което може да се измине с 1 l гориво. Колко километра изминава с 1 l гориво даденият автомобил при комбиниран разход на гориво?

45. В пещерата на планинския цар има съкровище от скъпоценни камъни. Както и да избере 77 скъпоценни камъни от съкровището, сред тях има поне 19 рубини, поне 18 изумруди и поне 17 диаманти. Най-много колко са скъпоценните камъни в съкровището?

за по-малките решения

на задачите от бр. 2/2017

16. В редица са подредени общо 2017 триъгълника, като се редуват по следния начин.

$$\blacktriangle \bigtriangledown \bigtriangledown \blacktriangle \bigtriangledown \bigtriangledown \blacktriangle \bigtriangledown \bigtriangledown \blacktriangle \bigtriangledown \cdots$$

Колко са черните триъгълници в редицата?

Решение. В редицата се повтаря последователността от три триъгълника $\blacktriangle \bigtriangledown \bigtriangledown$. Тъй като $2017 : 3 = 672$ (ост. 1), то последният триъгълник е черен и общият брой черни триъгълници е $672 + 1 = 673$.

17. Кое число е с толкова по-голямо от 17, с колкото е по-малко от 2017?

Решение. Търсеното число е $17 + (2017 - 17) : 2 = 1017$.

18. Колко е разликата на числата, означени с $\triangle$ и с $\heartsuit$, ако сборът от числата на първия ред на таблицата е 1001, а сборът от числата в първия стълб е 707?

$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\triangle$	$\heartsuit$

Решение. С $\triangle$ е означено числото $1001 - 707 = 294$, а с $\heartsuit$ е означено числото $707 - 294 = 413$. Търсената разлика е $413 - 294 = 119$.

19. Разстоянието между два локомотива е 875 км. Първият от тях изминава 5 км за същото време, за което вторият изминава 2 км. Ако локомотивите пътуват един срещу друг (разбира се, в различни коловози), колко километра ще измине всеки от тях до момента на срещата?

Решение. За времето, за което първият локомотив изминава 5 км, вторият изминава 2 км, т.е. дистанцията помежду им намалява със 7 км. Тъй като $875 : 7 = 125$, те ще се срещнат след 125 такива интервала от време, като първият ще измине $125.5 = 625$ км, а вторият $125.2 = 250$ км.

20. Да се намери произведението на числата x и y, ако $2,4 - x = 2.0,8$ и $y - 1,4 = 2 : 5$.

Решение. Имаме $x = 2,4 - 2.0,8 = 0,8$ и $y = 1,4 + 2 : 5 = 1,8$, следователно $x.y = 1,44$.

21. Лицето на квадрат с обиколка 1 cm е равно на $\dfrac{1}{4}$ от лицето на правоъгълник с дължина 2,5 cm. Да се намери широчината на правоъгълника.

Решение. Страната на квадрата е $1 : 4 = 0,25$ cm и лицето му е $0,25^2 = 0,0625$ cm^2. Ако означим широчината на правоъгълника с x, за лицето на правоъгълника получаваме $0,0625 = 0,25\ .\ x\ .\ 2,5$. Оттук намираме $x = 0,1$ cm.

22. Иво решил $\dfrac{1}{3}$ от задачите за домашно и останали още 12 задачи. Ако $\dfrac{3}{4}$ от оставащите задачи са трудни, а измежду решените задачи само $\dfrac{1}{3}$ са трудни, колко трудни задачи е имало в домашното на Иво?

Решение. Нерешените 12 задачи са $\dfrac{2}{3}$ от задачите за домашно. Следователно задачите за домашно са $12 : \dfrac{2}{3} = 18$ и 6 от тях са решени. Трудните задачи са $\dfrac{1}{3} \cdot 6 + \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 11$.

23. Волейболен отбор има 50 мача за сезон. До момента отборът е изиграл 20 мача и е спечелил 60% от тях. Ако спечели и 80% от предстоящите мачове, колко победи ще има отборът за сезона?

Решение. Броят на победите е равен на $60\%.20+80\%.30 = 12+24 = 36$.

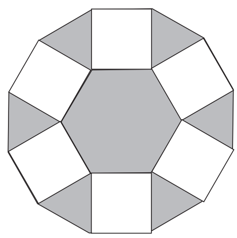
24. Да се пресметне y^x, ако $2^{-3}.4^x = 8^5$ и $x^y = 81$.

Решение. Записваме първото равенство във вида

$$2^{-3}.(2^2)^x = (2^3)^5 \iff 2^{-3}.2^{2x} = 2^{15} \iff 2^{2x-3} = 2^{15},$$

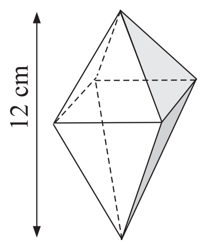
откъдето следва $2x - 3 = 15$ и намираме $x = 9$. Тогава второто равенство е $9^y = 81$, следователно $y = 2$. Накрая $y^x = 2^9 = 512$.

25. Правилният дванадесетоъгълник на чертежа е съставен от квадрати, равностранни триъгълници и един шестоъгълник. Шестоъгълникът има страна 20 cm и апотема, приблизително равна на 17 cm. Приблизително колко процента от лицето на дванадесетоъгълника е лицето на оцветената част?



Решение. Страните на всички правилни многоъгълници на чертежа са равни. От шестте равностранни триъгълника може да се сглоби правилен шестоъгълник с лице $6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17 = 1020$ cm^2 и лицето на оцветената част е $2.1020 = 2040$ cm^2. Лицето на един квадрат е $20^2 = 400$ cm^2 и лицето на дванадесетоъгълника е $2040 + 6.400 = 4440$ cm^2. Лицето на оцветената част е равно на $\dfrac{2040}{4440} = 0,459\cdots \approx 46\%$ от лицето на дванадесетоъгълника.

26. Минерал е шлифован, както е показано на чертежа. Двете правилни четириъгълни пирамиди имат една и съща основа и сборът от височините им е 12 cm. Основният ръб на пирамидите е 4 cm. Да се намери теглото на минерала, ако плътността му е 9 g/cm^3.



Решение. Лицето на основата на пирамидите е $B = 4^2 = 16$ cm^2, а сборът от височините им е $h_1 + h_2 = 12$ cm. Обемът на тялото е

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot h_2 = \frac{16}{3} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{16}{3} \cdot 12 = 64.$$

Теглото на минерала е $m = \rho \cdot V = 9.64 = 576$ g.

27. Цилиндър с околна повърхнина 6π cm^2 и височина 3 cm има обем, равен на обема на конус с радиус на основата 2 cm. Да се намери височината на конуса.

Решение. Ако радиусът на цилиндъра е r, за лицето на околната повърхнина получаваме равенството $2\pi.r.3 = 6\pi$, откъдето $r = 1$ cm и $V = \pi.1^2.3 = 3\pi$ cm^3.

Ако височината на конуса е h, за обема му получаваме $\frac{1}{3}.\pi.2^2.h = 3\pi$, откъдето намираме $h = 2,25$ cm.

28. Да се намери сборът от коефициентите в нормалния вид на многочлена $(2x-3)^3 + (3x-2)^2$.

Решение. Сборът от коефициентите в нормалния вид на многочлена е равен на стойността му при $x = 1$ и е $(2-3)^3 + (3-2)^2 = -1 + 1 = 0$.

29. В правоъгълния триъгълник ABC, $\sphericalangle C = 90^\circ$, са построени височината CH и ъглополовящите AL и CN съответно на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle BCH$. Да се докаже, че $AL \perp CN$.

Решение. Ако $\sphericalangle BAL = \sphericalangle LAC = \alpha$, от правоъгълния $\triangle AHC$ изразяваме $\sphericalangle ACH = 90^\circ - 2\alpha$, следователно $\sphericalangle BCH = 90^\circ - \sphericalangle ACH = 90^\circ - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ и $\sphericalangle HCN = \sphericalangle NCB = \alpha$. Оттук намираме $\sphericalangle ACN = (90^\circ - 2\alpha) + \alpha = 90^\circ - \alpha$. Ако означим $AL \cap CN = P$, то в $\triangle APC$ имаме $\sphericalangle APC = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ$.

30. Автомобил тръгнал от А, като се движил 2 часа с постоянна скорост, след което увеличил скоростта си с 10 km/h и пътувал още 3 часа до В. Автомобилът изминал разстоянието от А до В със средна скорост 96 km/h. Да се намери разстоянието, което е изминал автомобилът за последните 3 часа от движението си.

Решение. Да означим скоростта, с която автомобилът се движил през първите 2 часа, с x km/h. Тогава през последните 3 часа е пътувал със скорост $x + 10$ km/h. Изминатият път е равен на

$$2x + 3(x + 10) = 5.96$$

и намираме $x = 90$ km/h. През последните 3 часа автомобилът е изминал $3.100 = 300$ km.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 3/2017 г.

ТЕМА 1

1. В); **2.** Г); **3.** А); **4.** Б); **5.** Б); **6.** Г); **7.** В); **8.** А); **9.** Б); **10.** Г); **11.** В); **12.** А); **13.** $x \in (-\infty; -2] \cup (0; 2]$; **14.** $x = -1$; **15.** $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$; **16.** 4; **17.** 7.

18. При $a > 1$ получаваме $\log_a(x^2+4) > \log_a a \Longrightarrow x^2 > a-4$. Неравенството е вярно за всяко x при $a < 4$; т.е. $a \in (1; 4)$.

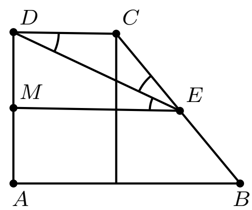
При $0 < a < 1$ получаваме $x^2 < a - 4$, което не може да е вярно за всяко x.

Търсените стойности са $a \in (1; 4)$.

19. Като умножим второто уравнение по 3 и го извадим от второто, намираме общия корен $x = \dfrac{17-a}{6a-4}$. Като заместим във второто уравнение, получаваме $(a-3)^2(12a+41) = 0$. Целочисленият корен на уравнението е $a = 3$ и оттук $x = 1$.

20. Имаме $\sphericalangle EDC = \sphericalangle CED = \sphericalangle MED = \alpha$ и изразяваме $DE = 6\cos\alpha\sin\alpha = 3\sin 2\alpha$, $AD = 6\sin 2\alpha$ и $AB = 3 + 6\cos 2\alpha$. Оттук

$$S = 18(1 + \cos 2\alpha)\sin 2\alpha.$$



ТЕМА 2

1. Г; **2.** Г; **3.** Б; **4.** В; **5.** Б.

6. а) При $x = 16$ получаваме $k = -3$.

б) След полагането $\log_2 x = y$ получаваме уравнението

$$(k+4)y^2 + ky + k - 1 = 0. \tag{2}$$

Изискването даденото уравнение да има единствено решение води до това уравнението (2) или да има един двоен корен, или да е линейно относно y. Така имаме $k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{21}}{3}$ и $k_3 = -4$.

в) Еквивалентното изискване за y е $y \in [-2, -1]$. Ако означим с $f(y)$ лявата част на (2), това уравнение има единствен корен от $(-2, -1)$ само ако $f(-2)f(-1) < 0$ или $k \in (-5, -3)$. За $k = -5$ и $k = -3$ от съответните корени на (2) само единият влиза в интервала $[-2,-1]$. За $k_{1,2}$ от б) единственият корен не влиза в искания интервал, а за k_3 влиза. Окончателно $k \in [-5,-3]$.

7. а) Да означим центъра на k_1 с O_1 ($O_1 \in OA$), а търсения радиус с x. Тогава $\sphericalangle OO_1B = 2\alpha$, а $\sphericalangle OBO_1 = 90^\circ$ и от $\triangle OO_1B$ имаме $\dfrac{x}{R-x} = \cos 2\alpha$ или $x = \dfrac{R\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

б) Намираме $OB = (R-x)\sin 2\alpha = R\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = R\operatorname{tg}\alpha$.

в) Ако P е проекцията на B върху OA, ни интересува кога

$$BP = OB\cos 2\alpha = R\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha$$

е най-голямо. Производната на функцията $y(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha$ е

$$y' = \frac{\cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

откъдето следва исканото твърдение. За стойността на $\cos 2\alpha$ се получава $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. а) Лесно се вижда, че височината на пирамидата е $m\operatorname{tg}\beta$ и обемът е равен на $\dfrac{4}{3}m^3\operatorname{tg}\beta$.

б) Нека пирамидата е с основа $ABCD$ и връх M. Ако $BP \perp CM$ ($p \in CM$), то и $DP \perp CM$ и двустенният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle BPD$. Ако k е апотемата на пирамидата, то

$$BP = 2m\sin\sphericalangle C = \frac{2mk}{\sqrt{m^2+k^2}} = \frac{2m}{\sqrt{1+\cos^2\beta}}.$$

Исканото равенство се получава с косинусова теорема за $\triangle BDP$.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви най-утвърдените от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Математика“

Подготвя специалисти с фундаментални знания в класическите и съвременни математически направления. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като преподаватели и научни работници във висшите училища и научни институти. Същевременно тяхната солидна математическа подготовка им дава възможност за специализация в икономиката, банковото и застрахователно дело, физиката, биологията, философията и др.

Бакалавърска програма „Информатика“

Подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и ком-пании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 29.03.2017 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.