

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

4

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн ПЕТЪР Бойваленов – главен редактор

НЕВЕНА СЪБЕВА – зам. главен редактор

Чл.-кор. проф. дмн Генчо Скордев

Чл.-кор. проф. дмн Николай Николов

Проф. дмн Емил Колев

Проф. д-р Иван Тонов

Проф. д-р Станислав Харизанов

Доц. д-р Евгения Сендова

Доц. д-р Ивайло Кортезов

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

ЕМИЛ КАРЛОВ

ТАТЯНА ПАРХОМЕНКО – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Стартира абонаментната кампания на списание „Математика“ за 2025 година. И през следващата година списанието ще се стреми да запази своята актуалност, събирайки на страниците си всичко в областта на училищната математика, което представлява съществен интерес за ученици, преподаватели, родители и любители.

Списанието се фокусира върху:

- подготовката на учениците от 4. – 12. клас за участие в математически състезания;
- подготовката на учениците от 4. клас за приемни изпити;
- подготовката на учениците от 7. и 10. клас за Национално външно оценяване;
- подготовката на учениците от 12. клас за матура и кандидат-студентски изпити.

Списанието публикува информация (задачи, решения, победители) за най-важните национални и международни математически състезания.

Цената на годишния абонамент е 36,00 лв. Възможни са следните отстъпки при групов абонамент:

- За 15 абонамента цената е $15 \times 28 = 420$ лв.
- За $15 + N$ абонамента цената е $420 + N \times 24$ лв., т.е. за всеки абонамент над 15-ия плащате по 24 лв.
- Извън горните бройки можете да абонирате членове на Съюза на математиците в България на цена 25 лв. за абонамент. При използване на тази опция молим да ни пращате списък с имената на съответните абонати и секцията на СМБ, в която членуват.

Събраната сума за абонамента можете да преведете на:

ТБ Алианц България АД, София,

IBAN BG36BUIN95611000003610

BICBUINBGSF – „Списание Математика“ ЕООД.

Молим на вноската бележка да е ясно записано колко бройки и на какъв адрес (добавете и телефон) да се изпраща списанието.

Срокът за груповите абонаменти е 17 февруари 2025 г.

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024

ДРАГОМИР ГРОЗЕВ, СТАНИСЛАВ ХАРИЗАНОВ*, СТОЯН БОЕВ

За олимпиадата и представянето

От 11 до 22 юли 2024 г. се проведе 65-тата Международна олимпиада по математика (ИМО 2024) с домакин град Бат (Bath), Великобритания. В състезанието участваха 609 ученици от 108 държави. Състезателните дни бяха 16 и 17 юли, като се решаваха по 3 задачи в рамките на 4 часа и половина. Максималната оценка за всяка задача е 7 точки, а максималният възможен резултат на състезател е $6 \times 7 = 42$ точки. Координациите по решенията се проведоха на 18 и 19 юли, а церемонията по закриването — на 21 юли. На нея присъстваха трима Филдсови медалисти – Тимъти Гаурс (1998), Терънс Тао (2006) и Марина Вязовска (2022).

България беше представена от
Марин Христов (12. клас, СМГ, София),
Ангел Христов (11. клас, ППМГ „Акад. Н. Обрешков“, Бургас),
Биляна Димитрова (12. клас, СМГ, София),
Веселин Маркович (11. клас, МГ „Д-р. Петър Берон“, Варна),
Борис Гачевски (12. клас, СМГ, София) и
Виктор Костадинов (12. клас, ПЧМГ, София).

Ръководители на отбора бяха проф. д-р Станислав Харизанов (ИИКТ и ИМИ–БАН) и гл. ас. д-р Стоян Боев (АУБ и ЧСУНД).

Подготовката на отбора се осъществи в НЦПКС, град Банкя от 23 юни до 7 юли. Наред с авторите на статията, тематични лекции изнесоха Александър Иванов, Борислав Кирилов, Константин Гаров, Кристиан Василев, Станислав Чобанов, Илияс Номан, Ангел Райчев и Любен Личев. Подготовката и участието в МОМ бяха подпомогнати от Министерството на образованието и науката, Съюза на математиките в България, Американска Фондация за България и Сдружението на олимпийските отбори по природни науки.

Явно лагер-сборът в Банкя се отрази добре на отбора. Бяха екип. Математиката е почти индивидуално занимание, особено самото със-

* ИИКТ и ИМИ–БАН

тезание – имаш $4\frac{1}{2}$ часа сам със себе си и предаваш резултата от труда си. Хареса ни, че след като състезанието приключи, отборът ни обсъждаше задачите, проверяваха си един на друг решенията, коментираха възможни подходи, което ни помогна при координацията.

Резултатите на българския отбор в MOM по участници и медали са следните:

	1	2	3	4	5	6	Общо	
Марин Христов	7	7	2	7	1	1	25	сребърен медал
Ангел Христов	7	2	0	7	7	1	24	сребърен медал
Билиана Димитрова	7	2	1	7	7	0	24	сребърен медал
Веселин Маркович	7	2	1	7	3	0	20	бронзов медал
Борис Гачевски	7	2	0	7	1	1	18	бронзов медал
Виктор Костадинов	7	0	0	7	1	0	15	почетна грамота
Общо	42	15	4	42	20	3	126	

Браво на учениците за този успех! Заслуга имат и всички помогнали при подготовката им през изминалите години! Такива успехи не се постигат за година-две. В отборното класиране България зае 27-мо място в света и 11-то в Европа със 126 точки. Победител е отборът на САЩ със 192 точки, следван от Китай (190 точки) и Южна Корея (168 точки). Нашето 27-мо място е приличен резултат, като се има предвид големината на страната ни. Можеше разбира се и по-добре, били сме и на по-предни позиции. Надяваме се следващата година състезателите да вдигнат летвата по-високо. За това обаче трябва и златни медали. Разликата между сребро и злато е няколко точки повече. Например, вместо половин решена задача – една пълна. Имаме потенциал – Ангел и Веско са в 11. клас и имат още една година, а има и други отлични техни връстници. Имаме също и изключително обещаващи деветокласници, които не можаха да се класират тази година. Има и осмокласници с отлични успехи. Пожелаваме им мотивация, защото за златен медал ще им трябва. Трябва да продължат да работят и то още от сега!

Има мнение, че задачите на тази олимпиада не са били добре балансирани. Само една геометрична! Да, биха могли да са две, но тогава нямаше да се появи тази хубава задача 3. Журито (лидерите на отборите) се запозна с предложените в шортлиста задачи и направи избора си чрез гласуване. Демокрацията понякога не е добра, но

по-добър начин няма измислен. Всъщност на косъм беше да се избере вариант с втора геометрия – но внимавайте какво си пожелавате! За щастие това не стана, така че още сега ще имаме възможност да коментираме задача 3.

Относно трудността на задачите, първа и четвърта традиционно са сравнително лесни. Нашият отбор има пълен брой точки и по двете! Други страни нямаха този късмет. На втора задача имаме общо 15 точки и само едно пълно решение на Марин Христов. Тук можеше повече – точно тази задача беше ключът за по-добро представяне. Традиционно сме добри в теория на числата, но тук се искаше малко повече техника. Задача пета е нещо, за което ще се говори. Отлични отбори като Китай и Южна Корея се сринаха на нея – Корея има пет нули. Всъщност, задачата е тип *пъзел* и може да се реши от петокласник, ако... знае отговора. По време на обсъждането сред журито възникна спор дали тази задача е удачна за МОМ или не. Лидерът на Китай, както и други, не искаха тази весела задачка, предполагаме защото тя не изисква никакви знания. Имаме две пълни решения на нея – на Биляна Димитрова и на Ангел Христов. Биляна е с четвърти резултат сред участващите 81 момичета. Веселин Маркович почти реши задача 5, но с един досаден пропуск. Идваме до задача 3 – смятаме, че тя беше най-трудната и същевременно най-красивата. Всеки интуитивно разбира какво се случва, но е трудно това да докаже строго. Само 8 пълни решения. По нея имаме общо 4 точки. Можехме повече – ако не пълни решения, поне допълнителни частични точки. Следва задача 6: едно нестандартно функционално уравнение, но все пак функционално. Тази тематика изисква специфична техника, за която има много теория, но няма приложение никъде извън олимпиадната математика. Ръководителите си я харесват, защото са инвестирали в подготовка. Няма да я коментираме повече – имаме общо 3 точки. Да преминем към същинската част.

Задачите

Тук ще коментираме само първите три задачи. Другите очаквайте в следващия брой на списанието.

Задача 1. Да се намерят всички реални числа α такива, че за всяко цяло положително число n , числото

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

е цяло и се дели на n .

(Колумбия)

Разпространено е мнението че първа и четвърта задачи трябва да се решават по възможно най-лесния начин, без да се използват по-сложни методи. Това е добро пожелание. От друга страна, най-важното нещо на едно състезание е да решиш задачите. Часовникът тиктака. И ако ти хрумне идея, която използва нещо по-сложно, няма време да търсиш по-просто. Никой няма да ти отнеме точка за това, при условие че решението е коректно. Отборът ни, независимо от по-обикновените решения, се справи перфектно. Решението, което следва, всъщност доказва, че само четните числа удовлетворяват даже и по слабо условие, а именно, даденият израз да е кратен на n за **всички** **достатъчно големи** n .

Отговор. Всички цели четни числа α .

Решение. Да означим даденият израз с $S_n(\alpha)$. Нека първо да припомним $S_n(\alpha)$ с $\alpha + 2\alpha + \dots + n\alpha$. Т.е. да напишем

$$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n i\alpha - r_n,$$

където

$$(1) \quad r_n := \sum_{i=1}^n (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor) = \sum_{i=1}^n \{i\alpha\}.$$

Условието на задачата дава, че $S_n(\alpha)/n$ е цяло, следователно,

$$(2) \quad (n+1)\frac{\alpha}{2} - \frac{r_n}{n} \text{ е цяло за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Ето основната идея. Нека първо α е рационално, но не е цяло, т.е., $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $q > 1$. Избираме подходящо n така, че r_n/n е нещо близко до $1/2 - 1/2q$, а в същото време $(n+1)\frac{\alpha}{2}$ да е цяло число, което противоречи на (2).

В случай, че α е ирационално, първо приближаваме *добре* α с рационално число p/q , $(p, q) = 1$, така че ако работим с p/q вместо α да нямаме голямо отклонение. След това, аналогично на първия случай, избираме n така, че да направим r_n/n много близо до $1/2$. Основната причина за това е, че редицата $\{i\alpha\}, i \in \mathbb{N}$, е равномерно разпределена в $(0, 1)$. В същото време се оказва, че $(n+1)\frac{\alpha}{2}$ е близко до цяло число и отново получаваме противоречие. Този случай изисква малко повече сметки, но те директно следват идеята.

В случая, когато α е цяло, $r_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, което означава, че $(n+1)\frac{\alpha}{2}$ трябва да е цяло за всяко n , следователно α трябва да е четно число. Наистина, тогава $S_n(\alpha)/n$ е цяло за всяко n . По-долу следват детайлите. Първо да разгледаме най-трудния случай.

Първи случай: α е ирационално. Добре известно е, че за всяко $N \in \mathbb{N}$ можем да намерим $p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, 1 < q \leq N$ такива, че

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Това е известно като теорема на Дирихле. Доказателството е кратко и се основава на принципа на Дирихле. Ясно е, че когато N расте, q става толкова голямо, колкото си искаме. По-нататък,

$$(3) \quad \left| i\alpha - \frac{ip}{q} \right| < \frac{i}{q^2}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Прилагаме (3) за $i = 1, 2, \dots, n := 2q-1$. Забележете, че ако $ip \not\equiv 0, \pm 1 \pmod{q}$ то от (3) следва

$$(4) \quad [i\alpha] = \left[\frac{ip}{q} \right].$$

И така, (4) е в сила за всички стойности на $i = 1, 2, \dots, 2q-1$, с изключение на най-много 6 от тях. Като сумираме равенствата (4) за $i = 1, 2, \dots, 2q-1$, получаваме:

$$\left| \frac{r_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{ip}{q} \right\} \right| < \frac{n(n+1)}{2nq^2} + \frac{6}{n} = \frac{1}{q} + \frac{6}{2q-1} < \frac{7}{q}.$$

По-нататък,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{ip}{q} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{i}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2q-1)},$$

тъй като $ip, i = 0, 1, \dots, q-1$ е пълна система остатъци по модул q . Имаме,

$$(5) \quad \left| \frac{r_n}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{8}{q}.$$

Сега, като използваме (3), се получава

$$\left| (n+1)\frac{\alpha}{2} - (n+1)\frac{p}{2q} \right| < \frac{n+1}{2q^2}.$$

Като сложим $n = 2q - 1$, става

$$(6) \quad \left| (n+1)\frac{\alpha}{2} - p \right| < \frac{1}{q}.$$

Когато q е достатъчно голямо, (5) заедно със (6) показват, че изразът в (2) не може да е цяло число, противоречие.

Втори случай: α е рационално число, но не е цяло. Този случай е по-прост, тъй като $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $q \geq 2$ и нямаме нужда от оценки като (3) в първия случай. Полагаме $n = kq - 1$ където k е достатъчно голямо четно число, и по същия начин получаваме, че r_n е близко до $1/2 - 1/2q$, а $(n+1)\alpha/2$ е цяло число. По този начин, изразът в (2) не е цяло число.

Трети случай: Нека α е цяло число. Тогава $r_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ако α е нечетно, то за четно n , изразът в (2) не е цяло число. Единственият възможен оставащ случай е когато α е четно цяло число. Тогава е очевидно, че (2) е цяло число за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Да се намерят всички двойки цели положителни числа (a, b) , за които съществуват цели положителни числа g и N такива, че равенството

$$(a^n + b, b^n + a) = g$$

е изпълнено за всички цели числа $n \geq N$. (Индонезия)

Въпреки, че не се използва нищо повече освен теоремата на Ойлер (Ферма), трудността в задачата е да се намери подходящо естествено число n , за което двете числа имат по-голям общ делител от g .

Решение. Нека $d := \gcd(a, b)$; $a = da_1$, $b = db_1$ и $(a_1, b_1) = 1$. Заместваме

$$\gcd(d^n a_1^n + db_1, d^n b_1^n + da_1) = g, \forall n \geq N.$$

Значи $d \mid g$ и нека $g = dg_1$. Имаме,

$$\gcd(d^{n-1} a_1^n + b_1, d^{n-1} b_1^n + a_1) = g_1, \forall n \geq N \quad (1).$$

Ако p е просто число, което дели g_1 (в случай, че $g_1 > 1$) имаме $p \nmid a_1$ и $p \nmid b_1$ (иначе и двете a_1, b_1 биха били кратни на p). Следователно $(g_1, a_1) = 1, (g_1, b_1) = 1$ и $(g_1, d) = 1$. Имаме

$$g_1 \mid a_1(d^{n-1}a_1^n + b_1) - b_1(d^{n-1}b_1^n + a_1) = d^{n-1}(a_1^{n+1} - b_1^{n+1}).$$

От $(g_1, d) = 1$ следва, $g_1 \mid (a_1^{n+1} - b_1^{n+1})$, $\forall n \geq N$.

Понеже $(a_1, g_1) = (b_1, g_1) = 1$, можем да вземем достатъчно голямо n такова, че $a_1^n \equiv b_1^n \equiv 1 \pmod{g_1}$; например $n = k\varphi(g_1)$, където k е достатъчно голямо. Следователно $g_1 \mid (a_1 - b_1)$, т.е. $a_1 \equiv b_1 \pmod{g_1}$. От (1) получаваме: $g_1 \mid (d^{n-1}a_1^n + a_1)$, и от тук

$$g_1 \mid a_1d(a_1^{n-1}d^{n-1} + 1).$$

От своя страна $(g_1, a_1, d) = 1$ дава

$$g_1 \mid (a_1^{n-1}d^{n-1} + 1), \forall n \geq N.$$

По същия начин като по-горе избираме $n \geq N$ така, че $a_1^{n-1}d^{n-1} \equiv 1 \pmod{g_1}$ и получаваме $g_1 \mid 2$, т.е. $g_1 = 1$ или $g_1 = 2$. До тук добре. Имаме само два кандидата за g . Или $g = d$ или $g = 2d$.

Да тръгнем пак от (1), но сега вече знаем, че $g_1 \in \{1, 2\}$. Ще докажем, че не е възможно $a_1 + b_1 > 1$. Да допуснем, че това е така. Искаме да намерим число $p > 2$, което дели и двата члена в лявата страна на (1) за някое достатъчно голямо n . Да анализираме как може да стане това. Да предположим, че $(p, a_1) = (p, a_2) = (p, d) = 1$. Тогава,

$$\begin{aligned} d^{n-1}a_1^n &\equiv -b_1 \pmod{p} \iff d^{n-1} \equiv -b_1(a_1^{-1})^n \pmod{p} \\ &\iff d^{n-1} \equiv -b_1a_1(a_1^{-1})^{n+1} \pmod{p} \\ &\iff d^{n+1} \equiv -d^2a_1b_1(a_1^{-1})^{n+1} \pmod{p}. \end{aligned}$$

По същия начин,

$$d^{n-1}b_1^n \equiv -a_1 \pmod{p} \iff d^{n+1} \equiv -d^2a_1b_1(b_1^{-1})^{n+1} \pmod{p}.$$

Предвид допуснатите условия за p, d, a_1, b_1 , можем да изберем достатъчно голямо n , такова че

$$d^{n+1} \equiv (a_1^{-1})^{n+1} \equiv (b_1^{-1})^{n+1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Да вземем например $n + 1 := k\varphi(p)$ за достатъчно голямо k . Този анализ показва, че за да стигнем до противоречие е достатъчно да намерим $p > 2$ така, че $(p, d) = (p, a_1) = (p, b_1) = 1$ и освен това,

$$1 \equiv -d^2 a_1 b_1 \pmod{p} \iff d^2 a_1 b_1 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2).$$

Така че, ние просто вземаме $p := d^2 a_1 b_1 + 1$. Очевидно в този случай $(p, d) = (p, a_1) = (p, b_1) = 1$ и (2) е в сила. Освен това $p > 2$, което противоречи на (1).

И така, единствено възможния сценарий е $d = a_1 = b_1 = 1$, което удовлетворява условието с $g = 2$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \dots$ е безкрайна редица от цели положителни числа и нека N е цяло положително число. Известно е, че за всяко $n > N$, числото a_n е равно на броя срещания на числото a_{n-1} в редицата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Да се докаже, че поне една от редиците $a_1, a_3, a_5, \dots$ и $a_2, a_4, a_6, \dots$ е периодична от известно място нататък.

(Забележка: една безкрайна редица $b_1, b_2, \dots$ е периодична от известно място нататък, ако съществуват цели положителни числа p и M такива, че $b_{m+p} = b_m$ за всяко $m \geq M$.) (Австралия)

Задачата е коварна, защото след няколко експеримента се вижда каква е ситуацията, но за да се докаже това строго са необходими няколко неочевидни стъпки. Освен това, ако разгледате редицата като обект, то развитието на този обект отразява състоянието на същия този обект, а такива препратки към себе си не могат да се моделират добре. Следва една вариация на второто официално решение.

Решение. След малко експериментиране забелязваме, че числото 1 се повтаря безкрайно много пъти, или по-общо, числата от 1 до някакво число ℓ се срещат безкрайно много пъти в дадената редица, като след всяко от тях следват все по-големи и по-големи числа. Да забележим първо, че редицата не може да е ограничена. Наистина, ако това е така, то някое число ще се повтаря безкрайно много пъти и след всяко негово срещане ще следва все по-голямо число. Нека $M := \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$.

Твърдение 1. Всяко число, по-голямо от M , може да се повтаря не повече от M пъти в редицата.

Доказателство. Нека числата, строго по-големи от M , наречем **големи**, а тези, по-малки или равни на M , – **малки**. Ще докажем, по индукция, че след всяко голямо число следва малко число. Ясно е, че числата $a_1, a_2, \dots, a_N$ са малки. Нека a_i , $i > N$, е първото голямо

число в редицата. Тогава, a_i , ще се среща само един път в редицата $a_1, a_2, \dots, a_i$, защото всички числа преди a_i са по-малки от него, т.е. $a_{i+1} = 1$ е малко. И така, базата на индукцията е проверена. Нека сега сме доказали Твърдение 1 за всички големи числа, които са на позиции до j -тата включително. Нека a_m , $m > j$, е първото голямо число измежду $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_m$. Числото преди него не може да бъде голямо, защото индукционното предположение и избора му го забранява. Наистина, ако a_{m-1} е голямо, то $m = j + 1$ и a_j е голямо число, което се среща $a_{j+1} > M$ пъти. Това не е вярно, съгласно индукционното допускане. И така, a_{m-1} е малко. Аналогично, числото преди всяко срещане на a_m в редицата $a_1, a_2, \dots, a_m$ е малко. Забележете, че всички тези числа са две по две различни, защото ако две еднакви числа се срещат някъде в редицата, то числата след тях са различни. Ако r е броят на срещанията на a_m в $a_1, a_2, \dots, a_m$ то има r две по две различни малки числа. Но всички малки числа са най-много M , което показва че a_m се среща $r \leq M$ пъти. $\square$

Споменахме, че редицата е неограничена и числото 1 се среща безкрайно много пъти (всеки път като се появи число, което е по-голямо от всички предходни, след него ще следва числото 1.)

Твърдение 2. Съществува число $\ell \in \mathbb{N}$, такова че всички числа от 1 до ℓ се срещат безброй много пъти, а числата по-големи от ℓ се срещат само краен брой пъти. Нещо повече, от някое място нататък алтернативно ще се редуват числа по-малки или равни от ℓ и числа по-големи от M . (според Твърдение 1, $\ell \leq M$.)

Доказателство. Тъй като 1 се среща безкраен брой пъти, нека ℓ е най-голямото число с това свойство. Такова има, тъй като според Твърдение 1, числата, по-големи от M , се срещат най-много M пъти. Да забележим, че ако $j \leq \ell$ се среща безкраен брой пъти, то числото $j - 1$ има същото свойство. Наистина, да се фокусираме на числата, които стоят непосредствено преди j . Всички те са различни и са безброй много. Значи има числа $k_1 < k_2 < \dots$ всяко от които в определен момент се е срещало j пъти. Това означава, че в някакъв предишен момент всяко от тях се е срещало $j - 1$ пъти, т.е. $j - 1$ също се среща безброй много пъти. С това първата част на твърдението е доказана.

По нататък, числата $1, 2, \dots, \ell$ са краен брой, следователно от някое място нататък след число $1 \leq a_i \leq \ell$ ще следва число $a_{i+1} > M$. От друга страна, след число, по-голямо от M , следва число, по-малко или равно на M . Тъй като числата между $\ell + 1$ и M се срещат само краен брой пъти, то от някое място нататък, след число по-голямо

от M ще следва число по-малко или равно на ℓ , с което твърдението е доказано. $\square$

И така, от индекс T_0 нататък, в редицата се редуват: *малко*, *голямо*, *малко*, $\dots$, като под *малко* разбираме число, по-малко или равно на ℓ , а под *голямо* – по-голямо от M . Ще докажем, че подредицата, съставена само от малките числа, е периодична от дадено място нататък. За по голяма нагледност ще ни трябва следната интерпретация на редицата.

Да си представим пулове, номерирани с числата от 1 до ℓ , всеки стъпил върху естествено число на оста Ox . Числото, върху което е стъпил i -тият пул, $1 \leq i \leq \ell$, интерпретираме, като броя на срещанията на i в редицата $a_1, a_2, \dots, a_T$ до някакъв момент (индекс) $T \geq T_0$. Във всеки следващ момент някой от пуловете, например i -тият, разположен върху числото b_i се премества с една единица надясно върху числото $b_i + 1$, което означава, че броят на срещанията му се увеличава от b_i на $b_i + 1$. В редицата се появяват два нови члена: $i, b_i + 1$. И така, ако пуловете $1, 2, \dots, \ell$ са съответно на позиции: $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ и е ред на i -тия пул да се мести, ние знаем на коя позиция отива (на $b_i + 1$ -ва). Как да разберем обаче кой пул трябва да се премести след това, т.е. кое малко число ще следва след $b_i + 1$? Да видим колко пъти до този момент се е повторило числото $b := b_i + 1$. Числото b се появява за пръв път, когато пул стъпи на тази позиция за пръв път и се повтаря при всяко поредно стъпване на пул там. Пуловете, които са били в някой момент преди дадения на позиция върху b са точно тези пулове, които се намират на b -та позиция и след нея. Т.е. след като i -тия пул се премести върху b , след него ще се придвижи точно този пул, чийто номер е равен на броят на пуловете намиращи се на позиции по-големи или равни на b .

Това е правилото за движение на пуловете след момента T_0 , което съответства на развитието на редицата. Тази интерпретация е по-лесна за осмисляне от попълването на редицата. Сега ще докажем, че пуловете вървят в пакет, т.е. не могат да се раздалечават твърде много един от друг. Това ще ни позволи да заключим, че две конфигурации ще се повторят.

Твърдение 3. Съществува константа C така, че разстоянието между първия и последния пул винаги е не-повече от C .

Доказателство. момента T_0 , пуловете се намират в интервала $[x_0, x_0 + \Delta]$. Да допуснем, че след определен брой стъпки възниква конфигурация и пул с номер k_1 се придвижва на първо място на

позиция x (възможно е да има няколко пула на тази позиция), като е изминал път с дължина поне $x - x_0 - \Delta$. Това означава, че поне толкова на брой пъти този пул е бутан напред. Т.е., преди него е местен пул, като се е оказвало че на позицията, на която е отишъл и последващите позиции след нея, е имало точно k_1 на брой пулове - това води до местене на k_1 -вия пул. Забележете, че за всяка позиция има точно един момент, в който пул стъпва на нея и се оказва, че пуловете на нея и след нея са точно k_1 на брой. Това означава, че има поне $x - x_0 - \Delta$ позиции в интервала $[x_0, x]$, на които е възниквало такова събитие. Следователно, в текущия момент има поне k_1 пулове на позиции от $x - \Delta$ до x (защото има такава позиция с номер в този интервал). Ако техните номера са от 1 до k_1 , то само тези пулове от сега нататък ще се движат напред. Значи, в случай, че $k_1 < \ell$ ще има пул с номер $k_2 > k_1$, който също е в интервала $[x - \Delta, x]$. За него прилагаме същия аргумент и получаваме, че има поне k_2 пула в интервала $[x - 2\Delta, x]$. Продължавайки по този начин заключаваме, че всички пулове са в интервала $[x - \ell\Delta, x]$. Тъй като Δ е разстоянието от първия до последния пул в началния момент, т.е. константа, то твърдението е доказано. $\square$

Възможните относителни положения между пуловете след момента T_0 , заедно с разстоянията между тях, както и номерът на последно придвижения пул, образуват конфигурации с краен брой възможности. Значи, ще имаме две едни и същи конфигурации на пуловете в два момента $T_1 < T_2$. Тъй като във всеки следващ момент новата конфигурация на пуловете се определя еднозначно от предходната, то движението на пуловете след момента T_2 ще повтаря периодично движението им в интервала $[T_1, T_2 - 1]$, което искахме да докажем.

БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024

ДРАГОМИР ГРОЗЕВ, АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

За балканиадата и представянето

Тази година домакин на 41-вата балканска олимпиада по математика беше България. Състезанието се проведе от 27 април до 2 май 2024 г. в курорта „Св. св. Константин и Елена“, Варна.

Официалните страни са 11-те балкански държави – Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Молдова, Република Северна Македония, Черна гора, Румъния, Сърбия и Турция. Тази година ни гостуваха състезатели и от други 11 държави, сред които Великобритания, Италия, Франция, Саудитска Арабия, Швейцария и други. Участваха 137 ученици от 22 държави. Регламентът предвижда 4 задачи в рамките на 4 часа и половина, което включва по една задача от темите Алгебра, Комбинаторика, Геометрия и Теория на числата. България, като домакин, имаше право на 2 отбора от по 6 ученици.

Организатори на Балканската олимпиада по математика в България бяха Министерството на образованието и науката (МОН) и Съюзът на математиците в България (СМБ). Председател на организационния комитет беше чл.-кор. Николай Николов, а секретари – проф. Станислав Харизанов и Александър Велинов.

Учениците, които представят страната ни на балканиадата, се избират сред най-добре представилите се от Есенния математически турнир, Националното зимно математическо състезание и Пролетното математическо състезание. След това се прави допълнителен подбор с контролни състезания, където най-добрите 6 влизат в националния отбор, който участва в надпреварата. Следващите 6 класирани от IX до XI клас стават част от втория български отбор (ако страната ни е домакин, какъвто беше случая.)

Първият български отбор се представи отлично, като спечели два златни, два сребърни, един бронзов медал и почетна грамота. В отборното класиране това е трето място за България, след отборите на Турция и Румъния.

Златото спечелиха **Марин Христов** (XII клас, Софийска математическа гимназия) и **Деян Хаджи-Манич** (XII клас, МГ, Варна). Сребърни отличия взеха **Веселин Маркович** (XI клас, МГ, Варна) и **Андрей Стефанов** (IX клас, Първа частна математическа гимназия, София). Бронзов медал получи **Александър Бангачев** (IX клас, ПЧМГ). Почетната грамота е за **Виктор Костадинов** (XII клас, ПЧМГ). Ръководители на този отбор бяха Драгомир Грозев и Александър Иванов.

В таблицата са резултатите на първия ни отбор по задачи.

	1	2	3	4	Общо	
Марин Христов	10	10	10	5	35	златен медал
Деян Хаджи-Манич	10	10	10	3	33	златен медал
Веселин Маркович	10	10	10	0	30	сребърен медал
Андрей Стефанов	10	0	10	3	23	сребърен медал
Александър Бангачев	10	0	10	0	20	бронзов медал
Виктор Костадинов	10	0	1	0	11	почетна грамота
Общо	60	30	51	11	152	

Във втория отбор бронзови отличия заслужиха **Ангел Христов** (XI клас, ППМГ, Бургас), **Георги Николов** (X клас, СМГ) и **Лазар Тодоров** (XI клас, СМГ). Почетни грамоти взеха **Милен Шуманов**, (XI клас, ПЧМГ), **Теодор Златанов** (X клас, ПМГ, Велико Търново) и **Виктор Аврамски** (X клас, СМГ). Ръководители на втория отбор бяха Ивайло Кортезов (ИМИ–БАН) и Мирослав Маринов (ИМИ–БАН).

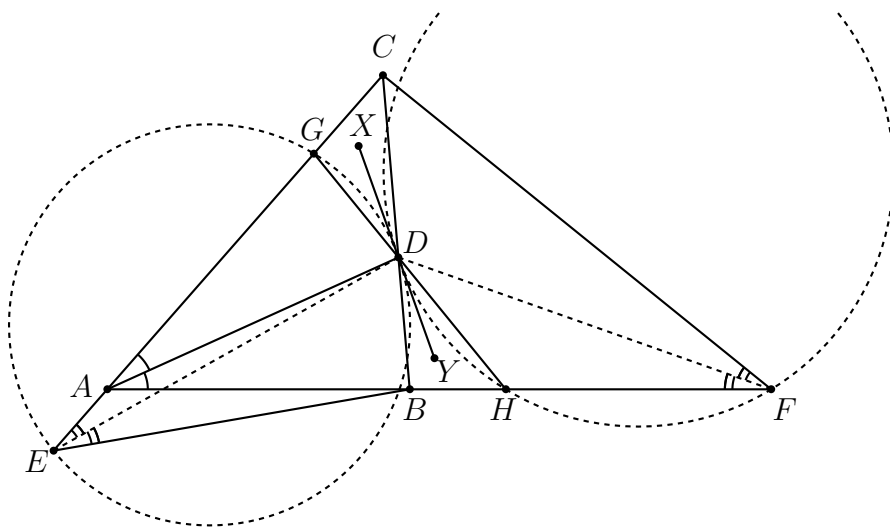
Браво на състезателите и от двата отбора и на всички онези, допринесли през годините за техния успех!

Лошото време и дъждът не попречи за приятната атмосфера и приятните разговори по време на състезанието.

Задачите

Задача 1. Нека $\triangle ABC$ е остроъгълен с $AC > AB$ и ъглополовяща $AD, D \in BC$. Правите, симетрични на правите AB и AC при осева симетрия относно правата BC , пресичат правите AC и AB съответно в точки E и F . Права през D пресича правите AC и AB съответно в точки G и H , които са вътрешни съответно за отсечките AC и BF . Докажете че окръжностите, описани около $\triangle EDG$ и $\triangle FDH$, се допират.

Решение. Нека точки X и Y лежат на допирателната в т. D към окръжността, описана около $\triangle EDG$, като са от различни страни на D , така както е показано на фиг. 1. Според изискванията на условието (остроъгълен триъгълник и $AC > AB$), E лежи на продължението на CA от след точка A и F лежи на продължението на AB след точка B . Освен това, подредбата на точките е съответно E, A, G, C и A, B, H, F .



Фигура 1

Фактът, че окръжностите, описани около триъгълниците EDG и FDH , се допират в D , може да бъде записан като

$$\sphericalangle HFD = \sphericalangle YDH.$$

Така получаваме $\sphericalangle YDH = \sphericalangle XDG = \sphericalangle DEG$. Това означава, че можем да махнем от чертежа G и H и е достатъчно да докажем, че $\sphericalangle DEA = \sphericalangle DFB$.

Съгласно условието (осевата симетрия), AD и BD са външни ъглополовящи в $\triangle EAB$, следователно D е център на външно вписаната окръжност (срещу E) на този триъгълник. Значи DE е ъглополовяща на $\sphericalangle BEA$, което ни дава

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DEB.$$

Да забележим, че осевата симетрия относно правата BC праща правите BE и CE съответно в BF и CF . Точка D остава неподвижна при тази осева симетрия. От тук получаваме $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DFB$ и следователно

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DEB = \sphericalangle DFB,$$

каквато беше и целта ни.

Коментар. Една приятна геометрия. И двата ни отбора получи-ха пълен брой точки на тази задача, което показва, че сме стабилни на лесни до средно лесни геометрични задачи.

Задача 2. Нека $n \geq k \geq 3$ са цели числа. Докажете, че за всяка редица от цели числа $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ можем да изберем неотрицателни цели числа $b_1, b_2, \dots, b_k$, които удовлетворяват следните условия:

- (i) $0 \leq b_i \leq n$ за всяко $1 \leq i \leq k$,
- (ii) положителните числа измежду $b_i, 1 \leq i \leq k$, са две по две различни,
- (iii) Сумите $a_i + b_i, 1 \leq i \leq k$, са пермутация на първите k члена на някаква неконстантна аритметична прогресия.

Решение. Ще докажем, че можем да конструираме аритметичната прогресия с разлика 1. Да интерпретираме задачата по следния начин.

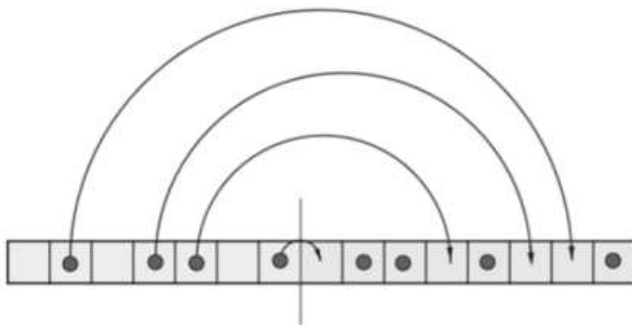
Имаме таблица $1 \times n$. В някои от клетките ѝ са поставени $k \leq n$ пулове – всеки пул в различна клетка. Може ли да напишем върху **някои** от пуловете различни положителни цели числа така, че ако придвижим всеки номериран пул толкова позиции напред, колкото е числото написано върху него, то пуловете ще се наредят в непрекъснатата редица (без дупки).

Заменихме числата $a_i, 1 \leq i \leq k$, с k пулове, като a_i е позицията на i -тия пул в таблицата. Числата, написани върху някои от пуловете, съответстват на положителните числа измежду $b_i, i = 1, 2, \dots, k$

(нулите нямат значение). Искаме множеството от числата $a_i + b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ да бъде аритметична прогресия с разлика 1.

Смятаме, че ако това беше формулировката, задачата щеше да бъде решена от почти всички ученици.

И така, да маркираме последните k позиции от таблицата (маркираните позиции са надясно от вертикалната линия на фиг. 2.) Ще покажем, че всички пулове могат да отидат върху маркираните клетки. Върху пуловете, които са на маркираната област не пишем нищо – те ще си останат на мястото. Нека техният брой е $m \leq k$. Има точно $k - m$ клетки без пулове в маркираната област и има точно $k - m$ пулове извън маркираната област. Ние ги местим по начина, показан на фиг. 2 – първият пул отляво на вертикалната линия отива в първата празна клетка, надясно от нея, след това вторият, броен отляво наляво от вертикалната линия, отива във втората празна клетка надясно от нея, и т.н.



Фигура 2

Коментар. В шортлиста задачата беше формулирана по следния начин.

Нека $n \geq 4$. Алис и Боб играят на следната игра: Алис избира $k \in \{3, 4, \dots, n\}$ и начертава таблица с размер $3 \times k$, като след това попълва в клетките на първия ред k различни числа измежду $\{1, 2, \dots, n\}$. След това Боб записва в някои от клетките на втория ред (може и да не попълни никоя) различни числа измежду $\{1, 2, \dots, n\}$, а в останалите пише 0. Накрая, на всяка клетка от третия ред записваме сумата от числата в двете клетки над нея. Докажете, че без значение как играе Алис, Боб може да направи така, че на третия ред да има числа, които в някакъв ред образуват неконстантна аритметична прогресия.

Така се случва, че журито смени условието. Разбира се, новата формулировка е абсолютно еквивалентна. Първият ни отбор има три

пълни решения на тази задача (общо 30 точки) и три нули. Според нас някои от нулите можеха да са доста повече, ако тези състезатели бяха интерпретирали коректно изречението „*положителните числа измежду $b_i, 1 \leq i \leq k$, са две по две различни*“. Останали са с впечатление, че всички числа са две по две различни, т.е., че има най-много една нула измежду $b_i, i = 1, 2, \dots, n$. Във формулировката с играта това сякаш се подчертава много по-добре. Задачата се оказа трудна, защото гадаем колко е разликата на аритметичната прогресия. Ако някой ви подсказе, че разликата трябва да е 1, нещата се улесняват. Забележете, че стъпката на прогресията не може да е по-голяма от 2. Наистина, ако тя е например 3, да вземем $k = n$. Последният член на n -членна прогресия от положителни цели числа и разлика 3 (или повече) е не е по-малък от $3n - 2$. Обаче няма как пул да достигне до $3n - 2$ -вата позиция, защото той може да скочи не повече от n позиции.

Добре, но дали не може някак да получим прогресия с разлика 2? Най-вероятно това също е възможно, но е много трудно да бъде доказано или пък опровергано. Човек трябва да пробва първо простите неща – т.е. прогресия с разлика 1 – и ако това се окаже невъзможно или пък трудно, да опита със стъпка 2. Първо простите неща! Все пак, нашият отбор се представи добре на задачата, спрямо много други отбори.

Автор на задачата е Кристи Савеску от Румъния. В следващия брой на списанието ще поместим негова статия относно тази задача. Задача 4 от миналогодишната балканиада също беше негова. Той сподели, че първоначално е възнамерявал условието да изисква прогресия с разлика 2. Тъй като в посочения краен срок за предложения не е могъл да намери доказателство, оставил задачата в по-лесния вариант. Ние също сме опитвали да докажем или опровергаем твърдението, че е възможно да направим числата $a_i + b_i, i = 1, 2, \dots, n$ да бъдат аритметична прогресия с разлика 2, без успех засега. Ако твърдението не е вярно, то в евентуален контрапример n няма да е малко число.

Задача 3. Нека a и b са различни положителни цели числа такива, че $3^a + 2$ се дели на $3^b + 2$. Докажете, че $a > b^2$.

Решение. Идеята е да започнем да делим $3^a + 2$ на $3^b + 2$ с частно и остатък, нещо подобно на алгоритъма на Евклид. Имаме

$$3^a + 2 = 3^{a-b} (3^b + 2) - 2 \cdot 3^{a-b} + 2.$$

Тъй като $(2, 3^b + 2) = 1$, значи $3^b + 2 \mid 3^{a-b} - 1$. Отново прилагаме

същия трик.

$$3^{a-b} - 1 = 3^{a-2b}(3^b + 2) - 2 \cdot 3^{a-2b} - 1.$$

Това означава, че $3^b + 2 \mid 2 \cdot 3^{a-2b} + 1$. Продължаваме,

$$2 \cdot 3^{a-2b} + 1 = 2 \cdot 3^{a-3b}(3^b + 2) - 4 \cdot 3^{a-3b} + 1.$$

Забележете какво открихме до тук:

$$3^b + 2 \mid 2^0 \cdot 3^{a-b} - 1$$

$$3^b + 2 \mid 2^1 \cdot 3^{a-2b} - 1$$

$$3^b + 2 \mid 2^2 \cdot 3^{a-3b} - 1$$

По същия начин, лесно може да докажем по индукция, че

$$3^b + 2 \mid 2^{\ell-1} \cdot 3^{a-\ell b} - 1$$

при условие че $a - \ell b \geq 0$. Да запишем $a = kb + r$ където $k \geq 0$, а $0 \leq r \leq b - 1$. Ясно е, че е достатъчно да докажем, че $k > b$. Тогава

$$(1) \quad 3^b + 2 \mid 2^{k-1} \cdot 3^r - 1$$

Идеята е да докажем, че k не може да е твърде малко. Да допуснем първо, че $r = 0$. Тогава, $3^b + 2 \mid 2^{k-1} - 1$. Ако дясната страна е 0 това води до $k = 1$ и понеже $r = 0$, следва $a = b$, което е невъзможно по условие. И така $2^{k-1} - 1 \geq 3^b + 2$ откъдето $k > b$. Да допуснем сега, че $r \geq 1$. От (1) имаме

$$(2) \quad 2^{k-1} \cdot 3^r - 1 = s(3^b + 2)$$

за някое цяло $s \geq 0$. От тук $3^r \mid 2s + 1$ и значи $s \geq (3^r - 1)/2$. От (2) сега следва

$$\begin{aligned} 2^{k-1} \cdot 3^r - 1 &\geq \frac{(3^r - 1)(3^b + 2)}{2} \\ 2^k 3^r &> 3^{r+b} - 3^b \\ 2^k &> 3^b - 3^{b-r} \geq 3^b - 3^{b-1} \\ 2^{k-1} &> 3^{b-1}. \end{aligned}$$

И така, и в двата случая имаме $k > b$, което дава $a = kb + r > b^2$.

Коментар. Използваната идея е от решенията на някои от учениците. Хубава задача, която съчетава теория на числата с елементи на

неравенства. Тенденцията да се дават задачи, използващи техники от различни области, прави математическите състезания по-интересни. Много добро представяне на първия български отбор на тази задача – пет пълни решения. Ангел Христов и Георги Николов от втория отбор също я решиха.

Задача 4. Нека $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ е множеството на положителните реални числа. Намерете всички функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и полиноми $P(x)$ с неотрицателни реални коефициенти, удовлетворяващи $P(0) = 0$, за които равенството

$$(1) \quad f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y$$

е изпълнено за всички реални числа $x > y > 0$.

Решение. Стъпка 1. Ще докажем, че $f(x) \geq x$. Да допуснем, че за някое $x \in \mathbb{R}^+$ е изпълнено $f(x) < x$. Ще докажем, че може да намерим $0 < y < x$ така че $f(x) + P(y) = x - y$. Това е еквивалентно на $P(y) + y = x - f(x)$. Да забележим, че когато $y \in (0, x)$ функцията $P(y) + y$ е непрекъсната и взема стойности от 0 до $P(x) + x \geq x$. От друга страна $0 < x - f(x) < x$, което означава че $\exists y \in (0, x)$ такава, че $P(y) + y = x - f(x)$. Като заместим тези стойности в (1) получаваме

$$f(x - y) + 2y = f(f(x) + P(y)) = f(x - y)$$

което е противоречие. И така $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Стъпка 2. Ще докажем, че $P(x) = ax$ за някое $a \in [0, 1]$. От (1) и стъпка 1 имаме

$$f(x - y) + 2y = f(f(x) + P(y)) \geq f(x) + P(y) \geq x + P(y)$$

Да положим в горното $z = x - y > 0$.

$$(2) \quad f(z) + 2y \geq z + y + P(y).$$

Ако допуснем, че P има ненулеви квадратни или от по-висок порядък членове, ще получим противоречие с (2), като фиксираме $z > 0$ и пуснем $x, y \rightarrow \infty$. Т.е. $P(y) = ay, a \geq 0$. Но $a > 1$ е невъзможно по същите съображения. И така $P(x) = ax, 0 \leq a \leq 1$.

Забележка. За разсъжденията по-долу е достатъчен факта, че $P(y)$ е полином, $P(y) \geq 0, \forall y > 0$ и $P(0) = 0$. Оставяме Стъпка 2 единствено с оглед да опростим записа и разсъжденията по-нататък.

Нека сега в (1) направим полагането $g(x) := f(x) - x$, където $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Имаме

$$g(g(x) + x + ay) + g(x) = g(x - y) + (1 - a)y.$$

След това полагаме $z = x - y$ и получаваме

$$(3) \quad g(g(z + y) + z + (1 + a)y) + g(z + y) = g(z) + (1 - a)y,$$

което е изпълнено за всеки две $y, z > 0$.

Стъпка 3. $g(x) = 0$. От тук нататък използваме само (3). Идеята на едро е следната. Първо доказваме, че $g(z)$ приема произволно близки до нула стойности. После вземаме някое z_1 така, че $0 \leq g(z_1) < \varepsilon$, където $\varepsilon > 0$ е малко и избираме някакво малко число $y > 0$. Забележете, че дясната страна на (3) е малка. Значи и двата члена отляво на (3) са малки, като поне единият е по-малък от половинката на дясната страна на (3), и значи по-малък от ε . Така може да построим редица от числа $0 < z_1 < z_2 < \dots$, близки едно до друго, но не прекалено близки, в които стойността на g е малка. Пак според (3), ако $g(z)$ е малко и y е малко, то $g(z + y)$ също е малко. От тук ще следва, че за $z \geq z_1$, $g(z)$ ще е по-малко от някакво малко число (зависещо само от ε). От това лесно следва същото и за $g(z), z > 0$. От тук правим извода, че няма друг вариант, освен $g(z) \equiv 0$. Детайлите следват.

Нека $g(z_1) = c$. Да вземем $y > 0$, така че $(1 - a)y < c/2$. Тогава, един от двата члена в лявата страна на (3) е по-малък или равен на $3c/4$. Т.е. намираме стойност на аргумента z_2 , така че $g(z_2) \leq \frac{3}{4}c$. Можем да продължим тази итерация и да намерим последователни стойности $z_1, z_2, \dots$, така че $g(z_k) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} c, k \in \mathbb{N}$.

И така, $g(z)$ приема произволно близки до 0 стойности. Нека сега да фиксираме $\varepsilon > 0$ и вземем $z_1 > 0$ такава, че $g(z_1) \leq \varepsilon$. Да вземем $y = \varepsilon$. Ясно е, че $(1 - a)y \leq \varepsilon$. И така, $g(z_1) + (1 - a)y \leq 2\varepsilon$. От (3) следва, че $g(z_1 + y) \leq 2\varepsilon$. Ако $g(z_1 + y) \leq \varepsilon$, ние полагаме $z_2 = z_1 + y$. В противен случай $g(g(z_1 + y) + z_1 + (1 + a)y) \leq \varepsilon$ и полагаме $z_2 := g(z_1 + y) + z_1 + (1 + a)y$. И в двата случая, $c_1\varepsilon \leq z_2 - z_1 \leq c_2\varepsilon$, където c_1 и c_2 са константи, зависещи само от a . Продължавайки итерацията, намираме редица $0 < z_1 < z_2 < \dots$, която удовлетворява

$$(4) \quad 0 \leq g(z_k) \leq \varepsilon \text{ и } c_1\varepsilon \leq z_{k+1} - z_k \leq c_2\varepsilon, k \in \mathbb{N}.$$

За всяко $y \in (0, z_{k+1} - z_k)$, от (3) и (4) имаме

$$g(z_k + y) \leq g(z_k) + (1 - a)y \leq \varepsilon + (1 - a)c_2\varepsilon.$$

Тъй като $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$ (пак от (4)), правим извода, че

$$0 \leq g(z) \leq (1 + c_2)\varepsilon, \forall z \geq z_1.$$

Сега ще видим, че $g(z)$ е малка и за останалите стойности на z . Нека вземем произволно $z \in (0, z_1)$. Да изберем достатъчно голямо y така, че $z + y > z_1$. Тогава от (3) следва, $g(z) + (1 - a)y \leq 2(1 + c_2)\varepsilon$, откъдето $g(z) \leq 2(1 + c_2)\varepsilon$. Окончателно получаваме

$$0 \leq g(z) \leq c_3\varepsilon, \forall z \in (0, \infty),$$

където c_3 е константа, зависеща само от a . Тъй като $\varepsilon > 0$ беше произволно (малко) число, следва $g(z) \equiv 0$, и пак от (3) следва $a = 1$. Значи $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$ и $P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Очевидно тази двойка (функция, полином) удовлетворява (1).

Коментар. Тази задача затрудни всички, включително и нашите състезатели. Първият отбор има общо 11 точки по нея, вторият – 3 точки. Най-близо до пълно решение беше Марин, може би времето е било недостатъчно. Единият от авторите на тази статия не е фен на функционалните уравнения. Техниката, използвана в повечето от тях, се състои да се вкарват различни стойности като аргументи и малко по малко да се разплита възелът. В много такива задачи няма ясна идея какво се прави и нямат приложение в други области на математиката. Разгледаното функционално уравнение обаче е едно приятно изключение. Използваната техника има много приложения и е фундаментална за математическия анализ.

Условието на задачата може да се отслаби. Вместо полином $P(x)$, отговарящ на изискванията, нека $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ е функция, която има само някои от свойствата на този полином. Искаме $0 \leq p(x) \leq cx$ за достатъчно малки стойности на x , където $c > 0$ е константа. Освен това искаме p да е непрекъсната (заради стъпка 1). Стъпка 2 на практика не ни трябва, може да направим стъпка 3 и без това твърдение.

ДВАДЕСЕТ И ОСМА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ, МИРОСЛАВ МАРИНОВ, ИМИ – БАН

Двадесет и осмата Младежка балканска олимпиада по математика (МлБОМ) за ученици до 15,5 години се проведе в Анталия, Турция в периода 25-30.06.2024. В олимпиадата взеха участие ученици от 23 отбора от 22 държави: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Грузия (гост), Казахстан (гост), Кипър, Киргизстан (гост), Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Северна Македония, Сърбия, Таджикистан (гост), Туркменистан (гост), Турция (два отбора), Узбекистан (гост), Украйна (гост), Франция (гост), Черна Гора и Хърватска (гост).

Отборът на България за МлБОМ, избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Зимните математически състезания (за 8 и 9 клас), Пролетните математически състезания (за 7, 8 и 9 клас), Националния кръг на олимпиадата по математика (за 7 и 8 клас) и две контролни работи, беше в състав:

1. Божидар Сакарев, 8 клас, ПЧМГ, София
2. Александър Пендов, 8 клас, МГ „Акад. Кирил Попов“, Пловдив
3. Борис Марков, 9 клас, СМГ „Паисий Хилендарски“, София
4. Йоана Младенова, 8 клас, СМГ „Паисий Хилендарски“, София
5. Стоян Балтов, 7 клас, ППМГ „Акад. Никола Обрешков“, Бургас
6. Христо Баларев, 8 клас, СМГ „Паисий Хилендарски“, София

Ръководството на отбора беше поверено на авторите на тази статия. Беше проведена еднодневна дистанционна подготовка (01.06.2024) и 12-дневна присъствена подготовка (12 – 23.06.2024) с общо 11 състезания (математически бой или контролна работа) и 66 учебни часа лекции в ИМИ–БАН. Състезателният ден на МлБОМ беше 27.06.2024.

Резултатите на отбора са както следва:

- Борис Марков, 31 точки ($10 + 10 + 10 + 1$), златен медал
- Александър Пендов, 30 точки ($10 + 10 + 10 + 0$), сребърен медал

- Божидар Сакарев, 30 точки (10 + 10 + 10 + 0), сребърен медал
- Йоана Младенова, 30 точки (10 + 10 + 10 + 0), сребърен медал
- Христо Баларев, 30 точки (10 + 10 + 10 + 0), сребърен медал
- Стоян Балтов, 20 точки (10 + 0 + 10 + 0), бронзов медал

В отборното класиране сред 11-те официални участници България зае второ място, а сред всички 23 участници – четвърто. Въпреки все по-високото ниво на подготовка на конкуренцията, успяхме да се представим по стандарт и даже да победим традиционно силния ни противник Румъния.

Следва състезателната тема заедно с решения и коментари по задачите и представянето.

Задача 1 (Северна Македония). Положителните реални числа a, b, c са такива че $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}$. Да се докаже, че

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Решение. Понеже $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$ (поради $(x - y)^2 \geq 0$ или от неравенството между средноквадратично и средноаритметично), т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{x + y}, \text{ то свеждаме до това да докажем неравенството}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \text{ еквивалентно на}$$

$$(a+b)(a+c) + (a+b)(b+c) + (a+c)(b+c) \leq 1 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

След разкриване на скобите и опростяване, искаме $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, което е еквивалентно на вярното $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. (Отбелязваме и че равенство се достига само при $a = b = c$ с $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}$, т.е. $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{6}$.)

Коментар. Има много възможни подходи за решение, но няма такъв, който да може да се измисли без състезателят да е решавал много други подобни задачи. Българският отбор очаквано представи шест пълни решения, заедно с още четири отбора, което потвърждава усилената ни подготовка по неравенства. Редно е да се отбележи, че

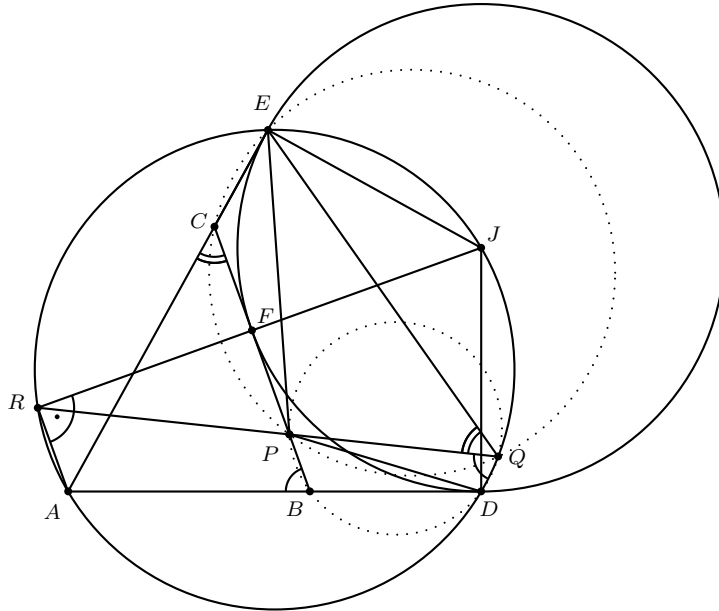
някои от решенията бяха от тип *сглоби си сам* – частите са налични, но сглобяването – не съвсем. По-точно, имаше моменти на липса на думи, които да покажат логическата последователност – различаване на кое сме доказали до момента и кое е достатъчно да докажем; все пак проверяващите се бяха ориентирали лесно и дискусия не бе необходима.

Задача 2 (България, Божидар Димитров). Нека ABC е триъгълник с $AB < AC$. Външновписаната окръжност срещу върха A се допира до правите AB , AC и BC в точките D , E и F , съответно, а J е нейният център. Нека P е произволна точка от страната BC . Описаните окръжности около триъгълниците BDP и CEP се пресичат за втори път в Q . Нека R е петата на перпендикуляра от A към правата FJ . Да се докаже, че точките P , Q и R лежат на една права.

Решение. Понеже $\angle ADJ = \angle AEJ = \angle ARJ = 90^\circ$, явно $ADJER$ е вписан с диаметър AJ . От друга страна, вписаният $BDQP$ дава $\angle DQP = 180^\circ - \angle DBP = \angle ABC$ и аналогично от вписания $CEQP$ следва $\angle EQP = \angle ACB$. Така

$$\begin{aligned}\angle DQE &= \angle DQP + \angle EQP = \angle ABC + \angle ACB \\ &= 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle DAE\end{aligned}$$

и значи Q също лежи на окръжността около $ADJER$.



За да докажем желаната колинеарност е достатъчно да получим $\sphericalangle DQP = \sphericalangle DQR$. От по-горе вече имаме $\sphericalangle DQP = \sphericalangle ABC$. От друга страна, вписаният $ADQJER$ и четириъгълникът $BDJF$ дават

$$\sphericalangle DQR = \sphericalangle DJR = \sphericalangle DJF = 180^\circ - \sphericalangle DBF = \sphericalangle ABC.$$

С това задачата е решена.

Коментар. Българският отбор представи пет пълни решения на тази изключително лесна, но и красива, задача. Всъщност отначало с автора бяхме предложили две версии на задачата – тази на състезанието, както и тази, в които се иска да се докаже, че PQ минава през постоянна точка (а именно R , като R не е упомената в условието) – но, разбира се, такива формулировки все още не са подходящи за младежки състезания. Цялостно бяхме подготвени за по-тежки задачи по геометрия – до толкова, че четирима от състезателите ни недоволстваха за трудността на тази преди да излязат резултатите и да разберем, че всички без България, Турция и Грузия имат ниски резултати – някои заради слаба подготовка на конкретни ученици, но повечето в психологически аспект при прочитането на *външно-вписана окръжност* в условието или изобщо това, че геометрията е с номер 2 в темата. Извод: лесното препятствие може да е сериозна спънка за психологически неподготвен състезател.

Впрочем, никъде в решението не сме използвали явно, че J е център – може да е произволна точка вътре в $\sphericalangle BAC$ и под BC , съответно D, E, F да са петите на перпендикулярите към страните на триъгълника ABC . Така че всъщност все още очакваме времето, в което на МлБОМ ще се появи реална задача около *външно-вписана окръжност*.

Задача 3 (Сърбия). Да се реши в естествени числа уравнението $2020^x + 2^y = 2024^z$.

Отговор. $(x, y, z) = (1, 2, 1)$

Решение. *Първи начин.* Ако $z = 1$, то от съображения за големина следва $x = 1$ с $y = 2$. Оттук нататък считаме $z \geq 2$ и ще покажем, че други решения няма. Стратегията ни е следната: степените на 2 в някои два от трите члена трябва да са равни – иначе, ако са различни и 2^A е най-малката измежду тях, то равенството е невъзможно по модул 2^{A+1} . Нека имаме предвид $2020^x = 2^{2x} \cdot 505^x$ и $2024^z = 2^{3z} \cdot 253^z$.

Нека $y = 3z$. Тогава

$$2^{2x} \cdot 505^x = 8^z (253^z - 1).$$

Оттук 505^x дели $253^z - 1$, значи $x \leq z - 1$. Но тогава

$$2024^z = 2020^x + 8^z \leq 2020^{z-1} + 8^z < 2024^{z-1} + 2024^{z-1} = 2 \cdot 2024^{z-1} < 2024^z$$

(тъй като $253^z > 2024$ за $z \geq 2$), невъзможно.

Нека $2x = 3z$, т.е. $x = 3t$ и $z = 2t$ за някое естествено t . Тогава

$$2020^{3t} + 2^y = 2024^{2t}.$$

В частност, $2020^{3t} < 2024^{2t}$, т.е. $505^3 < 253^2$, което е невярно.

Следователно $y = 2x$. Оттук

$$505^x + 1 = 253^z \cdot 2^{3z-2x}.$$

Тъй като $505^x + 1$ е четно, но не се дели на 4 (остатъкът на 505 при деление на 4 е 1), трябва $2x - 3z = 1$. Оттук z е нечетно, т.е. $z = 2t + 1$ и $x = 3t + 1$ за някое $t \geq 1$ (поради $z \geq 2$). Получаваме

$$2020^{3t+1} + 4^{3t+1} = 2024^{2t+1},$$

така

$$2020^{3t+1} < 2020^{3t+1} + 4^{3t+1} = 2024^{2t+1},$$

съответно $\left(\frac{2024^2}{2020^3}\right)^t > \frac{2020}{2024}$. Това е невъзможно за $t \geq 1$ поради

$\frac{2024^2}{2020^3} < \frac{2020}{2024}$, еквивалентно на $2024^3 < 2020^4$, като тук лявата страна е под $3000^3 = 27 \cdot 10^9$, а дясната е поне $2000^4 = 16 \cdot 10^{12} = 16000 \cdot 10^9$.

Забележка. Първите два случая могат да се отхвърлят и с чрез съображението, че y е четно и z е нечетно поради модул 3.

Втори начин. Нека първо $x = 1$. Тогава ако $y \geq 3$, то уравнението е невъзможно по модул 8. Значи $y = 1$, което не дава решение, или $y = 2$, което дава $z = 1$.

Оттук нататък считаме $x \geq 2$ и ще покажем, че други решения няма. Нека имаме предвид $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ и $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Правим следните пресмятания.

Модул 25: $2^y \equiv (-1)^z \pmod{25}$ и пресмятания до $2^{10} \equiv 1$ дават, че y се дели на 10. (Въпреки че не е нужно за решението, отбелязваме, че y – четно следва от модул 3, а и от модул 5.) Да запишем $y = 10b$ за някакво естествено число b .

Модул 11: $7^x + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ (използвахме $2^y = (2^{10})^b \equiv 1 \pmod{11}$) поради малката теорема на Ферма или директно пресмятане на $2^{10} =$

$1024 \equiv 1$), откъдето чрез пресмятания до 7^{10} виждаме, че x трябва да се дели на 5.

Модул 101: $1024^b \equiv 2024^z \pmod{101}$, значи $2^{10b} \equiv 4^z \pmod{101}$. С вдигане на 10-та степен и прилагане на малката теорема на Ферма получаваме $(-6)^z \equiv 1 \pmod{101}$. Пресмятания до $(-6)^5 \equiv 1 \pmod{101}$ сега дават, че z трябва да се дели на 5.

Следователно всяко от x , y , z трябва да се дели на 5, което противоречи на голямата теорема на Ферма с пети степени.

Забележка. Подобен подход (по-труден за измисляне, но с по-лесни пресмятания) е чрез модулите 8, 25, 31 и 7 в този ред (мотивирани от $1024 \equiv 1 \pmod{31}$ и после от $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$), довършвайки чрез голямата теорема на Ферма с трети степени.

Коментар. Още една стандартна за подготовката ни задача. Радостно е, че България представи шест пълни решения (всички по същество като първото официално), въпреки че по време на подготовката в задачите по теория на числата имаше моменти на неувереност или недостатъчна упоритост, тъй като задачите в тази област са типично с най-много технически детайли. Така казано, в много от работите ни имаше тромави доказателства по индукция на лесни неравенства от рода на $2020^{3t+1} > 2024^{2t+1}$ (от показаното решение се вижда защо това въобще не е нужно), като в две от тях базата бе пропусната – за щастие, проверяващите решиха да не отнемат точка за това, без да се налага дискусия с тях.

Задача 4 (Северна Македония). Трима приятели A , B , C играят игра. В началото на играта всеки от тях има по една купчина от 2024 камъчета. A прави първия ход, B прави втория, C прави третия и след това продължават да правят ходове, редувайки се в същия ред. Във всеки ход играчът трябва да избере естествено число n , по-голямо от всяко избрано число от който и да е играч на предишен ход, да вземе $2n$ камъчета от купчината си и да ги раздаде поравно на другите двама играчи, по n за всеки. Ако някой играч не може да направи ход, играта приключва и този играч губи.

Определете всички играчи, които имат стратегия, с която няма как да загубят без значение как играят другите двама играчи.

Отговор. C

Решение. Първо ще покажем, че C гарантирано няма да загуби със стратегията винаги да избира n , с 1 по-голямо от току-що избраното при последния ход на B . След първия ход на A броят камъни

на C е поне 2025. Ще докажем, че това остава вярно след всеки ход на A и B . Освен това, ще покажем, че C може да направи желания ход. Ако предположим, че B играе n , тогава $2n \leq 3 \cdot 2024 - 2025$, т.е. $n \leq 2023$. Следователно C има поне $2025 + n \geq 2n + 2$ камъчета и може да направи своя ход с $n + 1$. Освен това, A трябва да добави поне $n + 2$ към купчината на C , така че C общо не губи камъни в тези три хода, защото $n + (n + 2) = 2(n + 1)$. Следователно C не може да загуби.

Сега ще покажем, че C може да играе по такъв начин, че да избира кой от A и B да губи. Предполагаме, че както A , така и B играят така, че гарантират, че другите двама не могат да ги принудят да загубят с всеки техен ход. С това предвид, ще покажем, че A трябва играе $n = 1$, след това B играе $n = 2$ и така нататък.

Обозначаваме с p_k позицията, в която A има $2024 + 3k$ камъчета, B има 2024 камъчета, а C има останалите $2024 - 3k$ камъчета. В частност, началната позиция в играта е p_0 . Ще покажем, че в p_k , независимо какво играе A , играчите B и C могат да направят ходове по такъв начин, че след тези три хода да стигнем до p_{k+1} при $k \leq 673$. Наистина, ако A избере n , B и C могат да изиграят $n + 1$ и $n + 2$. Да забележим, че $2024 - 3k \geq 5$, т.е. $2024 + 3k \leq 4043$. Това означава, че $n \leq 2021$. Оттук $2(n + 1) < 2024 + n$ и B може да играе $n + 1$. След това C има $n + (n + 1) + (2024 - 3k) \geq 2n + 6 > 2(n + 2)$ камъчета и може да играе $n + 2$. Следователно, ако $k \leq 673$, B и C могат да играят така, че от p_k да се отиде в p_{k+1} . Въпреки това, A не би искал да загуби. Това е възможно само в позиция p_{674} и само ако A може да играе 2023 в тази позиция. Връщайки се назад, A не може да играе $n > 3k + 1$ в позиция p_k , защото тогава B и C могат да го принудят да играе $n > 2023$ в p_{674} или да загуби по-рано, което е противоречие. Това означава, че A трябва да играе $n = 1$ в p_0 .

Сега, за първия ход на B , да предположим че не е $n = 2$. Тогава с подобна стратегия (тук ролите се разменят циклично: C играе като B , A играе като C и B играе като A), ще покажем, че B губи, ако C и A се съюзят. Също така, B има първоначално 2025 камъчета, така че изискваните неравенства се изпълняват. Влизаме в $(2025 + 3k, 2025, 2022 - 3k)$ за (B, C, A) , съответно, и ако B реши да увеличи n с повече от три между всеки три хода, тогава стратегията $n \rightarrow n + 1 \rightarrow n + 2$ ще му се провали. Следователно, B трябва да играе 3, след това 6 и така нататък. В крайна сметка имаме:

$$(4044, 2025, 3) \rightarrow (0, 4047, 2025) \rightarrow (2023, 1, 4048) \rightarrow (4047, 2025, 0)$$

и B губи.

В заключение, за да избегне загуба, A трябва да играе $n = 1$, а след това B трябва да играе $n = 2$. След това C може да играе $n = 3$, и стъпките продължават последователно по същата логика. Сега ще разгледаме какво се случва и как C може да избира кой да загуби. В последната серия ходове имаме:

$$(4043, 2024, 5) \rightarrow (3, 4044, 2025) \rightarrow (2024, 2, 4046)$$

Сега, ако C играе $n = 2023$ то A губи, а ако C играе $n = 2022$, то B губи. Исканото следва.

Коментар. Няма защо да отговаряме на въпроса какво прави тази задача трудна. По-притеснителното е защо много повече от половината ръководители гласуваха тя да е в темата, предвид че (по мнение на авторите и на други ръководители) е с трудност като на задача 5 на Международната олимпиада по математика. Никой от шестимата ни състезатели нямаше правилен отговор (не че за такъв се присъждаше точка, но все пак състезател по-добре би се ориентирал какво да прави). Един от състезателите ни се опита да свърже задачата с друга игра с трима играчи (където там има сериозен елемент на инвариант по модул 3) от финала за 8 – 9 клас на Фестивала на младите математици в Созопол през 2022 г., но за съжаление двете задачи нямат нищо общо. Четирима от състезателите ни имаха по поне 2 часа за тази задача, но за съжаление никой от тях не написа много идеи на беловата. Все пак малкото редове на Борис завоюваха точка, ключова за златния медал, дължаща се на това, че A губи, ако B и C играят с алчно, т.е. винаги с най-малкото възможно число, заедно с допълнителни детайли (но не пълно доказателство) около това.

Задачата получи едва едно решение – Нина Шушич от Сърбия е сребърен медалист като шестокласничка и седмокласничка в МлБОМ 2022, бронзов медалист от EGMO 2023, сребърен медалист от EGMO 2024 и участник в Romanian Masters in Mathematics. Всеки друг състезател имаше не повече от 4 т., а повечето имаха 0; като 17 състезатели, сред които четирима от България, имаха пълни решения на другите три задачи и 0 на тази. Личи си опитът от изяви в най-престижните международни състезания, въпреки че и Нина, като другите участници, е на възраст под 15,5 г.

Със задоволство отбелязваме, че основните цели на МлБОМ от нейното създаване през 1997 г. вече са далеч надхвърлени, дотолкова че понякога трябва контрол върху това дали задачите в темата

са подходящи за ученици на съответната възраст. Балканиадата вече не просто подготвя състезателите за бъдещи битки, а е сама по себе си сериозно състезание с все по-високи собствени стандарти и международно признание – повод за гордост на всички, допринесли за нейната поява и развитие – и все по-важен фактор за повишаване стандарта на обучението по състезателна математика в региона. Предвид нивото и необходимия материал, от 2023 г. в България са засилени задачите по неравенства в националните състезания и олимпиади, а в контролните традиционно присъства и геометрия, изискваща владение на подобни триъгълници. Имаме подобрене и в работата в психологически аспект и в частност състезателят да умее върху всяка задача бързо да премисля всички основни идеи, които е виждал при съответния тип задачи, за да прецени за кои от тях си заслужава по-задълбочено разглеждане, както и при нерешена задача да пише на бела всички важни свои идеи. Това изглежда по-лесно, отколкото е всъщност. Продължаваме да отделяме време за дискусии в тази насока по време на подготовката. Нивото на България се издига, но много колеги приятели от Балканския регион (по цялото му протежение от Франция понякога чак до Индонезия :-)) работят здраво и отборите им стават все по-силни; това задължително трябва да ни амбицира. То ще доведе до още по-впечатляващи постижения и още по-завидна международна репутация на Младежката Балканиада по математика, които само могат да ни радват.

ВЪРХУ ЕДНА ГЕОМЕТРИЧНА ЗАДАЧА

ВИКТОР КОСТАДИНОВ, АЛЕКСАНДЪР БАНГАЧЕВ

Въведение

В края на май в онлайн форума за олимпийска математика Art of problem solving беше публикувана обява за геометрично състезание, състоящо се от една задача с период на провеждане 24 часа. Задачата е била предложена за Международната олимпиада по математика през 2023, но е върната от комитета за избор на задачите, тъй като била определена като твърде трудна за олимпиадата. Това породило нашия интерес в състезанието и заедно успяхме да намерим решение във времеви интервал. По-долу представяме условието, чертеж и нашето решение.

Условие

Даден е остроъгълен и разностранен $\triangle ABC$ с вписана окръжност ω , която допира BC в D . Допирателната в A към описаната около $\triangle ABC$ окръжност пресича BC в T . Две окръжности през A и T допират ω пресичат AD в X, Y . Да се докаже, че $BXCY$ е трапец.

Решение

Нека без ограничение на общността $AB < AC$ и двете окръжности пресичат BC в S, R , така че $DS < DR$, както е показано на чертежа. Използвайки теоремата на Талес и степен на точка, трябва да докажем, че

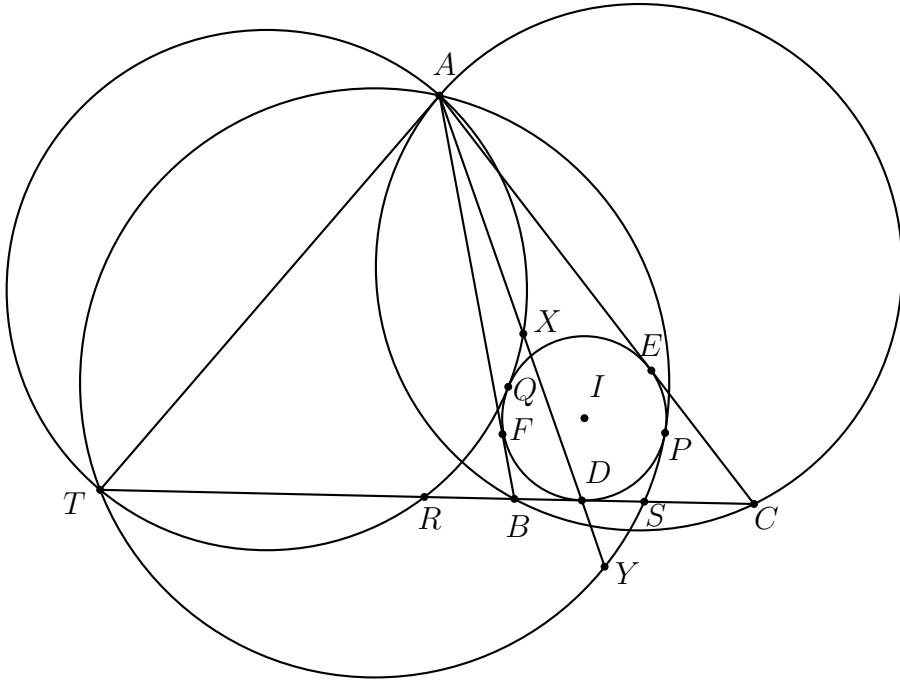
$$BY \parallel CX \iff \frac{DB}{DC} = \frac{DY}{DX} = \frac{DY \cdot DA}{DX \cdot DA} = \frac{DT \cdot DS}{DT \cdot DR} = \frac{DS}{DR}.$$

За целта ще изразим DS и DR чрез полупериметъра и страните на триъгълника p, a, b, c . Нека $DS = x, DR = y$; прилагайки теоремата на Кейси за трите точки-окръжности A, T, S и вписаната окръжност

(като и четирите окръжности допират описаната около $\triangle ATS$ окръжност), получаваме $AT \cdot SD + TS \cdot AE = AS \cdot TD$, което се презаписва като

$$AT \cdot x + (p - a) \cdot (TD + x) = AS \cdot TD \implies$$

$$(1) \quad \left(\frac{AT \cdot x + (p - a)(TD + x)}{TD} \right)^2 = AS^2.$$



Прилагайки теоремата на Стюарт за $\triangle ABC$ и точката $S \in BC$, получаваме

$$AS^2 \cdot a + (p - b + x)(p - c - x)a = b^2(p - b + x) + c^2(p - c - x).$$

Изразяваме AS^2 , заместяваме в (1) и получаваме

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(AT + p - a) + (p - a)TD}{TD} \right)^2 = \\ & = \frac{b^2(p - b - x) + c^2(p - c - x)}{a} - (p - b + x)(p - c - x). \end{aligned}$$

Да забележим, че $x = -DT$ е корен на полученото квадратно уравнение за x (защото когато $x = -DT$, $S \equiv T$ и $AS = AT$ и като заместим в (1) двете страни стават равни), което се записва във вида

$$\left(\left(\frac{AT + p - a}{TD} \right)^2 - 1 \right) x^2 + (\dots)x + \frac{a(p - a)^2 - b^2(p - b) - c^2(p - c) + a(p - b)(p - c)}{a} = 0.$$

Прилагайки формулите на Виет, получаваме

$$-DT \cdot DS = \frac{a(p - a)^2 - b^2(p - b) - c^2(p - c) + a(p - b)(p - c)}{a \left(\frac{(AT + p - a)^2}{TD^2} - 1 \right)}.$$

Така вече можем да изчислим

$$DS = -\frac{a(p - a)^2 - b^2(p - b) - c^2(p - c) + a(p - b)(p - c)}{TD \cdot a \left(\frac{(AT + p - a)^2}{TD^2} - 1 \right)}.$$

По същия начин получаваме

$$DR = \frac{a(p - a)^2 - b^2(p - b) - c^2(p - c) + a(p - b)(p - c)}{TD \cdot a \left(\frac{(AT - p + a)^2}{TD^2} - 1 \right)}.$$

Остава ни само да покажем, че

$$-\frac{DR}{DS} = \frac{(AT + p - a)^2 - TD^2}{(AT - p + a)^2 - TD^2} = -\frac{p - c}{p - b}.$$

Използвайки известния факт, че

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

(който следва от приложение на две синусови теореми за $\triangle ATB$ и $\triangle ATC$) и $AT^2 = TB \cdot TC$, лесно изчисляваме

$$AT = \frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad TB = \frac{ac^2}{b^2 - c^2},$$

тоест

$$TD = TB + BD = \frac{ac^2}{b^2 - c^2} + p - b.$$

Замествайки тези две равенства, получаваме

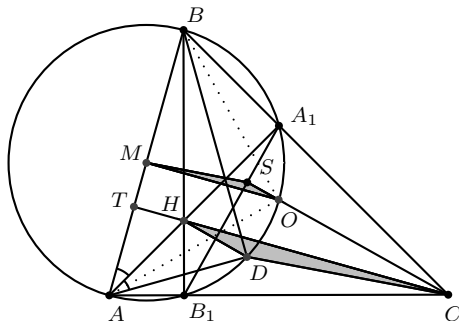
$$\begin{aligned} \frac{(AT + p - a)^2 - TD^2}{(AT - p + a)^2 - TD^2} &= \frac{\left(\frac{abc}{b^2 - c^2} + p - a\right)^2 - \left(\frac{c^2 a}{b^2 - c^2} + p - b\right)^2}{\left(\frac{abc}{b^2 - c^2} - p + a\right)^2 - \left(\frac{c^2 a}{b^2 - c^2} + p - b\right)^2} = \\ &= \frac{bc(p - a)(p - c)}{b^2 - c^2} = -\frac{p - c}{p - b}, \end{aligned}$$

както искахме, което завършва решението.

Едно свойство на триъгълника с ъгъл 45°

Разглеждайки едно решение на следната задача, ще отбележим някои полезни свойства на триъгълника с ъгъл 45° .

Даден е $\triangle ABC$ с $\angle C = 45^\circ$ и център на описаната окръжност O . Построени са височините AA_1 и BB_1 , а пресечната им точка, ортоцентърът H , е център на вписаната окръжност в $\triangle ABD$. Ако $CO \cap A_1B_1 = S$ и M е средата на AB , то $CD = 2SM$.



Триъгълниците ABC и A_1B_1C са подобни с коефициент на подобие $k = CA_1/CA = \sqrt{2}/2$.

Намираме $\angle AOB = 2\angle C = 90^\circ$ и $\angle ADB = 2(\angle AHB - 90^\circ) = 90^\circ$, откъдето следва, че точките A_1, B_1, O и D лежат на окръжност с диаметър AB и център M .

Тъй като $CO \perp A_1B_1$, а $\angle OB_1B = \angle OAB = 45^\circ$, откъдето $OB_1 \perp BC$, то O е ортоцентър в $\triangle A_1B_1C$ и $OS \perp A_1B_1$. От подобие то следва, че $CO : CH = OS : HT = \sqrt{2}/2$.

В правоъгълния $\triangle ABD$ с център на вписаната окръжност H имаме $DH = \sqrt{2}HT = 2OS$.

Тъй като A_1B_1 е ъглополовяща на $\angle AA_1D$ и $\angle BB_1D$, точките H и D са симетрични спрямо A_1B_1 , т.е. $DH \perp A_1B_1 \parallel OS$.

Тъй като DH и CH са успоредни и два пъти по-големи съответно от OS и OM , то триъгълниците OSM и CHD са подобни, следователно DC е успоредна и 2 пъти по-голяма от SM .

АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 5 ОТ КОНТРОЛНОТО ЗА МОМ'2024

МАРИЯ ДРЕНЧЕВА, ФМИ – СУ

На контролното за определяне на националния отбор за МОМ'24, проведени в ИМИ–БАН, бе предложена следната задача.

Условие

Нека k е естествено число. Намерете всички редици $\{a_n\}_{n \geq 1}$ от естествени числа, такива че

$$a_{n+2}(a_{n+1} - k) = a_n(a_{n+1} + k)$$

за всяко $n \geq 1$.

Решение

Първо ще отбележим, че тъй като за всяко $n \in \mathbb{N}$ дясната страна е естествено число, то и лявата е естествено число, следователно $a_{n+1} \geq k + 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, тоест $a_n \geq k + 1 \ \forall \ n \geq 2$. Също така $a_{n+1} - k < a_{n+1} + 1 \Rightarrow a_{n+2} > a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_n + 1$.

Даденото условие се свежда до

$$a_{n+1} = k \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+2} - a_n}.$$

Сега имаме

$$a_n = k \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_{n+1} - a_{n-1}} = k \frac{k \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+2} - a_n} + k \frac{a_n + a_{n-2}}{a_n - a_{n-2}}}{k \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+2} - a_n} - k \frac{a_n + a_{n-2}}{a_n - a_{n-2}}} = k \frac{a_n(a_{n+2} - a_{n-2})}{a_n^2 - a_{n-2}a_{n+2}}.$$

Така това ни дава

$$1 = \frac{k(a_{n+2} - a_{n-2})}{a_n^2 - a_{n-2}a_{n+2}} \iff$$

$$a_n^2 = k(a_{n+2} - a_{n-2}) + a_{n-2}a_{n+2}.$$

Сега само за краткост ще дефинираме нови редици

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n}.$$

Така и двете редици са строго нарастващи, тъй като $a_{n+2} > a_n$ и също така

$$b_n^2 = k(b_{n+1} - b_{n-1}) + b_{n-1}b_{n+1} \iff$$

$$(*) \quad \frac{b_n - k}{b_{n+1} - k} = \frac{b_{n-1} + k}{b_n + k},$$

$$c_n^2 = k(c_{n+1} - c_{n-1}) + c_{n-1}c_{n+1} \iff$$

$$\frac{c_n - k}{c_{n+1} - k} = \frac{c_{n-1} + k}{c_n + k}.$$

Сега умножавайки уравненията $(*)$ за $n = 1, 2, \dots, m$, получаваме

$$\frac{b_2 - k}{b_3 - k} \cdot \frac{b_3 - k}{b_4 - k} \cdots \frac{b_m - k}{b_{m+1} - k} = \frac{b_1 + k}{b_2 + k} \cdot \frac{b_2 + k}{b_3 + k} \cdots \frac{b_{m-1} + k}{b_m + k} \iff$$

$$\frac{b_2 - k}{b_{m+1} - k} = \frac{b_1 + k}{b_m + k} \iff$$

$$b_{m+1}(b_1 + k) = b_m(b_2 - k) + k(b_2 - k + b_1 + k) \iff$$

$$b_{m+1} = b_m \frac{b_2 - k}{b_1 + k} + \frac{k(b_2 - k + b_1 + k)}{b_1 + k} \quad \forall m \geq 2.$$

Тъй като $\frac{b_2 - k}{b_1 + k}$ и $\frac{k(b_2 - k + b_1 + k)}{b_1 + k}$ са рационални константи, неза-

висещи от m , полагайки $p = \frac{b_2 - k}{b_1 + k}$ и $q = \frac{k(b_2 - k + b_1 + k)}{b_1 + k}$ получаваме, че $b_{m+1} = pb_m + q$ за рационални константи p и q . Следователно докажахме, че $\{b_n\}$ е линейно-рекурентна редица за $n \geq 2$!

Сега остава само да намерим коефициентите p и q . Тъй като $b_1, b_2, k \in \mathbb{N}$, те са рационални числа. Ще разгледаме два случая.

1. случай. $p = 1$. Тогава $\{b_n\}$ е аритметична прогресия за $n \geq 2$ и като заместим $b_{n+1} = b_n + q$ и $b_{n-1} = b_n - q$ в $(*)$ за произволно $n \geq 3$, получаваме $b_n^2 - k^2 = b_n^2 - (q - k)^2$. Това ни дава $q - k = \pm k$, тоест или $q = 0$, или $q = 2k$. Ако $q = 0$, получаваме противоречие с нарастването на $\{b_n\} \Rightarrow q = 2k$.

Сега е моментът да отбележим, че всички разсъждения дотук за редицата $\{b_n\}$ важат еквивалентно за $\{c_n\}$, тъй като и двете са редици от естествени числа, изпълняващи $(*)$. Не можем обаче директно да приемем, че $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ изпълняват едно и също линейно-рекурентно уравнение, тъй като коефициентите зависят от първите членове на

двете редици, които могат и да не съвпадат. В случая обаче можем да намерим $q = 2k$ независимо за двете подредици на $\{a_n\}$, както направихме по-горе. Сега това ни дава $a_{n+2} = a_n + 2k$ за $n \geq 3$ и замествайки с това в условието получаваме $a_{n+1} = a_n + k$ за $n \geq 3$, а с директно заместване се вижда, че това означава и $a_2 = a_1 + k$ и $a_3 = a_2 + k$. Директно заместване ни дава и че всяка аритметична прогресия $\{a_n\}_{n \geq 1}$ с $a_1 \in \mathbb{N}$ и $a_{n+1} = a_n + k \forall n \in \mathbb{N}$ е решение.

2. случай. $p \neq 1$. Отново ще заместим $b_{n+1} = pb_n + q = p(pb_{n-1} + q) + q$, $b_n = pb_{n-1} + q$ в (*) и след разписване получаваме

$$b_n(pq - q + k - p^2k) = pqk + qk - k^2.$$

От нарастването на $\{b_n\}$ следва, че редицата не може да е константна, следователно единствената възможност е

$$pq - q + k - p^2k = pqk + qk - k^2 = 0.$$

Равенството $pq - q + k - p^2k = 0$ ни дава $(p-1)(q - (p+1)k) = 0$. Тъй като $p \neq 1$, следва $q = (p+1)k$. Сега $a_{2n+1} = a_{2n-1}p + k(p+1)$. Отново да забележим, че всички разсъждения дотук за $\{b_n\}$ важат еквивалентно за $\{c_n\}$ с единствената разлика, че не можем да твърдим, че двете изпълняват едно и също линейно-рекурентно уравнение. Въпреки това, аналогично можем да запишем $c_{n+1} = p'c_n + k(p'+1)$ за някое $p' \in \mathbb{Q}$. Значи $a_{2n+2} = a_{2n}p' + k(p'+1)$.

Сега да се върнем на условието и да забележим, че замествайки n с $2n-1$ получаваме

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n} + k}{a_{2n} - k}.$$

Да си припомним, че $a_{n+2} > a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_n + 1$. Това означава, че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. В частност,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} + k}{a_{2n} - k} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = p + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(p+1)}{a_n} = p.$$

От $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} + k}{a_{2n} - k}$ директно следва $p = 1$ и сме в предишния случай.

Така доказахме, че всички решения са аритметичните прогресии $\{a_n\}_{n \geq 1}$ с първи член $a_1 \in \mathbb{N}$ и разлика k .

ЗАДАЧА № 255

ЕМИЛ КАРЛОВ

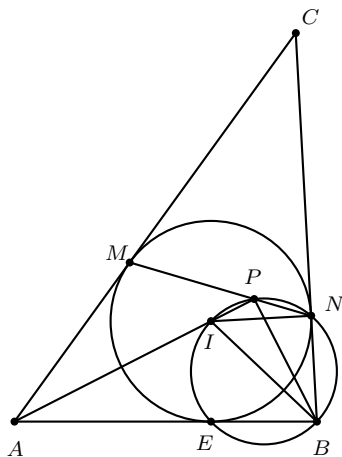
На Иван Симеонов

Ще разгледаме една задача на Игор Шаригин, която се появи във второто издание на сборника му „Задачи по геометрия – планиметрия“ от 1986 година и стана популярна като задача № 255. Когато за първи път я видях, помислих, че е сгрешена. Толкова невероятно ми се стори твърдението в нея!

Задача № 255. Точките M и N са допирните точки на страните CA и CB на триъгълника ABC с вписаната в него окръжност. Ако точката P е пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл A с правата MN , да се докаже, че $\sphericalangle APB$ е прав.

Решение. Да означим центъра на вписаната в триъгълника окръжност с точка I и A , B и C съответно с α , β и γ .

Триъгълникът MNC е равнобедрен и $\sphericalangle CNM = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Ъгълът AIB между двете ъглополовящи в $\triangle ABC$ е равен на $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$, защото другите два ъгъла в $\triangle ABI$ са съответно $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$. Това е достатъчно, за да твърдим, че около четириъгълника $BMPI$ може да се опише окръжност с диаметър BI и тъй като $\sphericalangle IMB = 90^\circ$. Следователно $\sphericalangle APB$ е прав.

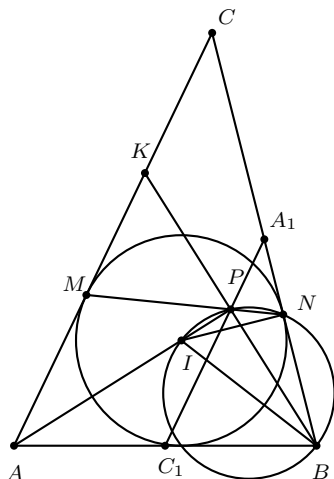


Сега да покажем приложения на задача № 255.

Задача 1. Точките M и N са допирни точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, с център I . Да се докаже, че ъглополовящата AI , правата MN и средната отсечка A_1C_1 , която е успоредна на AC се пресичат в една точка P .

Решение. От задача № 255 знаем, че $\angle APB = 90^\circ$. Удължаваме отсечка BP докато пресече правата AC в точка K . Очевидно ъглополовящата AI е и височина в $\triangle ABK$.

Следователно ъглополовящата AP е и медиана в триъгълника, т.е. точка P е среда на отсечката BK . Всички среди на отсечки с връх B и произволна точка от правата AC лежат на средната отсечка A_1C_1 . С други думи точката P лежи и на средната отсечка A_1C_1 на триъгълника ABC .



Следващата задача е от списанието „American Mathematical Monthly“.

Задача 2. В остроъгълен $\triangle ABC$ е вписан правоъгълник $MNPQ$, с център I , като върховете на M и N правоъгълника лежат на страната AB , а върховете – P и Q са съответно върху страните BC и CA . В триъгълниците $\triangle AMQ$ и $\triangle BNP$ са вписани съответно окръжности w_A и w_B . Окръжността w_A допира страната AM на триъгълника в точка E , а страната AQ – в точка F . Окръжността w_B допира страната BN на триъгълника в точка T , а страната BP – в точка U .

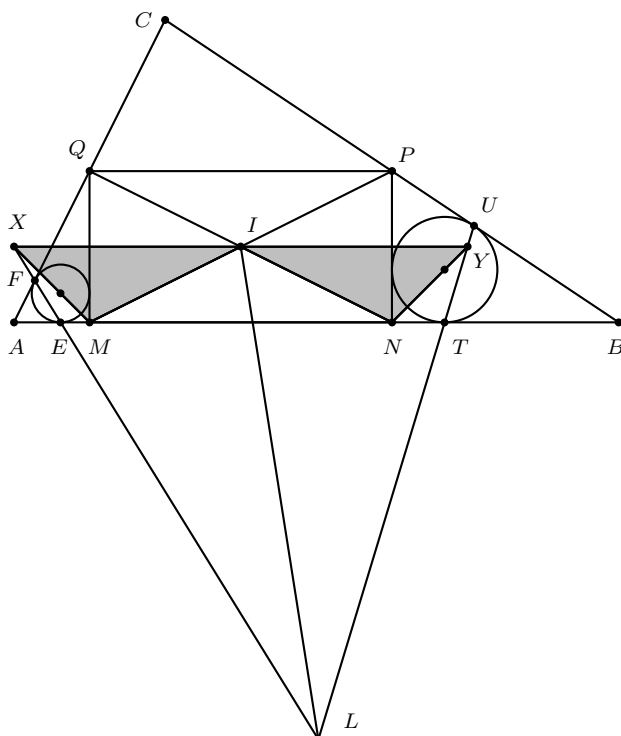
Ако правите EF и TU се пресичат в точка L , да се докаже, че правата IL разполюва отсечката ET .

Решение. През центъра I построяваме права l , успоредна на AB , която пресича EF и TU съответно в точки X и Y . Тъй като l съдържа средните отсечки на триъгълниците AMQ и BNP , от задача 1 следва, че в $\triangle AMQ$ отсечката MX е ъглополовяща и в $\triangle PNB$ – отсечката NU е ъглополовяща.

Ще докажем, че $\triangle MIX \cong \triangle NIY$:

- 1) $\angle MXI = \angle NYI = 45^\circ$ – (ъглополовящите MX и NY);
- 2) $MI = NI = \frac{1}{2}MP$;
- 3) $\angle MIX = \angle NIY = (\angle IMN = \angle INM)$

Следователно $IX = IY$, а оттук отсечката LI е медиана в $\triangle XYL$ и разполюва $ET \parallel XY$.



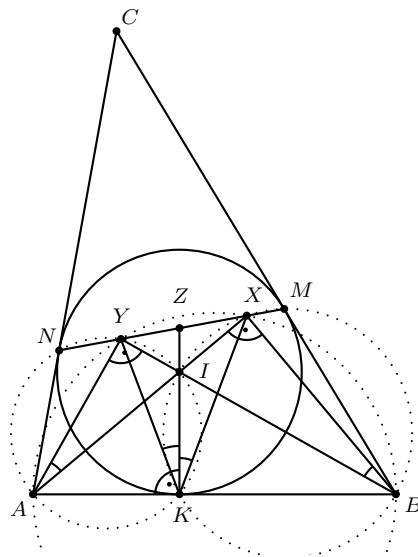
Задача 3. Окръжност с център I допира страните AB , BC и CA на триъгълника ABC съответно в точки K , M , N . Ъглополовящите AI , BI и правата KI пресичат правата MN съответно в точки X , Y и Z . Да се докаже, че $\angle XKZ = \angle YKZ$.

Решение. От задача № 255 знаем, че $\angle AYB = \angle AMB = 90^\circ$; също $\angle IKA = 90^\circ$. Следователно около четириъгълниците $AKIY$, $KBMI$ и $ABXY$ може да се опише окръжност (отсечките AI , BI и AB се „гледат“ под прав ъгъл от точките K и Y , K и X и X и Y).

От описаните около $AKIY$ и $KBMI$ окръжности следва, че

$$\angle YAI = \angle YKI \text{ и } \angle MBI = \angle IKM,$$

а от описаната около $ABXY$ окръжност имаме $\angle YAM = \angle YBM$.



Задача 3 беше предложена от Дмитрий Швецов на олимпиадата по геометрия „Игор Шаригин“ през 2012 година – може да се каже, че така задача № 255 се върна при Шаригин. Ще разгледаме и една задача от олимпиадата в Петербург през 1999 година, която ще ви се стори елементарна, ако използвате задача № 255.

Задача 4. В неравнобедрен $\triangle ABC$ са построени ъглополовящите AA_1 и BB_1 и са отбелязани средите B_0 и A_0 съответно на страните AC и BC . Точката Q е петата на перпендикуляра от A към BB_1 , а P е петата на перпендикуляра от B към AA_1 . Да се докаже, че правите B_0Q и A_0P се пресичат върху страната AB .

Решение. Ако точката C_0 е среда на страната AB , ще покажем, че правите B_0Q и A_0P минават през точка C_0 . От задача № 255 знаем, че точката P лежи на правата, определена средната отсечка A_0C_0 , т.е. A_0P минава през средата C_0 на AB . Аналогично за правата B_0Q .

Накрая ще покажем най-трудната задача от матурата за 2024 година в Русия.

Задача 5. Точките M и N са допирни точки на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ съответно със страните CB и CA на триъгълника. Ако $\angle A = 60^\circ$ и страната $AB = 20$ см, а средната отсечка A_0C_0 , успоредна на страната AC пресича правата MN в точка P . Намерете лицето на $\triangle APC_0$.

Решение. Да покажем решение без задача № 255. Означаваме $C_0X = x$ и $CN = y$ и изразяваме страните на триъгълника и C_0A_0 и C_0P . Да отбележим, че $\triangle MA_0P$ и $\triangle MNC$ са подобни и следователно $A_0M = A_0P$. Трябва да пресметнем чрез x и y отсечката

$$C_0P = C_0A_0 + A_0P = C_0A_0 + A_0M = \frac{10 + x + y}{2} + \frac{10 - x + y}{2} - y = 10.$$

Следователно $S_{AC_0P} = 10 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ / 2 = 25\sqrt{3}$.

Тези, които знаят задача № 255, се досещат как е измислена задачата за матурата: Знаем, че AP е ъглополовяща, следователно $\triangle APC_0$ е равнобедрен с ъгъл 120° и $S_{AC_0P} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 25\sqrt{3}$.

Опитайте сами да решите последната задача.

Задача 6. Точките M и N са допирни точки на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ с център I , съответно със страните CB и CA на триъгълника. Около $\triangle BIM$ е описана окръжност w . Ъглополовящата AI пресича повторно окръжността w в точка P . Да се намери лицето на $\triangle ACP$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 24 cm^2 .



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2023 г. и бр. 1, 2, 3 и 4 от 2024 г. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпращайте на e-mail: nevenasybeva@gmail.com.

* * *

Задача 1. В началото на седмицата Коко имал няколко кутии с различен ненулев брой стъклени топчета. В понеделник добавил по едно топче във всяка кутия. Във вторник той проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 2 и добавил по едно топче само в тях. В сряда проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 3 и добавил по едно топче само в тях. Коко продължил по същия начин, като в неделя проверил в кои кутии броят на топчетата се дели на 7 и добавил по едно топче само в тях. След това се оказало, че има няколко кутии с точно 50 топчета в тях.

Най-много колко кутии с точно 50 топчета може да има Коко?

Задача 2. Сашо взел един дървен куб и го потопил изцяло в синя боя. Когато кубът изсъхнал, Сашо го разрязал на 27 еднакви кубчета и подредил тези 27 кубчета в кула $27 \times 1 \times 1$. Най-много колко от 110-те външни стени на кубчетата от кулата са сини?

Задача 3. Миро записал 88 четворки в един ред:

4444 4444

Той изписвал четворките като знак плюс с наклонена черта в горния ляв ъгъл. Ако се изтрие тази черта, четворката се превръща в плюс.

4+44444+44+ 4+4+444

Миро превърнал някои четворки в плюс и получил израз със стойност 4444, който не започва и не завършва с плюс и няма два плюса един до друг. Колко четворки Миро е превърнал в плюсове?

Срокът за представяне на решенията е 31.10.2024 г.

**РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 2/2024 Г.**

Задача 1. Децата в летен лагер говорят немски или английски и никой не говори и двата езика. Известно е, че 33% от децата говорят немски, а 76% от момичетата говорят английски. В немскоговорящата група момичетата са с 20% повече от момчетата. Колко процента от децата на лагера са момчета? Колко процента от момчетата говорят английски?

Решение. Да означим с n броя на децата на лагера.

Нека немскоговорящите момчета са x ; немскоговорящите момичета са $120\%x$. Тогава

$$x + 120\%x = 33\%n,$$

откъдето $220\%x = 33\%n$ и $x = 15\%n$.

Така получихме, че немскоговорящите момчета са $15\%n$; немскоговорящите момичета са $33\%n - 15\%n = 18\%n$.

Тъй като 76% от момичетата говорят английски, то 24% от момичетата говорят немски. Това означава, че 24% от момичетата са $18\%n$. Следователно момичетата са $18\%n : 24\% = 75\%n$.

Момчетата са $n - 75\%n = 25\%n$.

	момчета	момичета	общо
Английски	$10\%n$	$57\%n$	$67\%n$
Немски	$15\%n$	$18\%n$	$33\%n$
общо	$25\%n$	$75\%n$	$100\%n$

Момчетата, които говорят английски, са $25\%n - 15\%n = 10\%n$. Те са

$$\frac{10\%n}{25\%n} = 40\% \text{ от всички момчета.}$$

Задача 2. В джоба си Пипи имала три ментови, два шоколадови и един ягодов бонбон. Без да гледа, тя извадила три бонбона от джоба си. Каква е вероятността да е извадила по един бонбон от всеки вид?

Решение. Да означим бонбоните в джоба на Пипи: ягодовият бонбон е Я, шоколадовите са Ш₁ и Ш₂, ментовите са М₁, М₂ и М₃.

Всички възможности за избор на 3 от тези 6 бонбона са 20:

ЯШ ₁ Ш ₂	ЯШ ₁ М ₁	ЯШ ₁ М ₂	ЯШ ₁ М ₃
	ЯШ ₂ М ₁	ЯШ ₂ М ₂	ЯШ ₂ М ₃
	ЯМ ₁ М ₂	ЯМ ₁ М ₃	ЯМ ₂ М ₃
	Ш ₁ Ш ₂ М ₁	Ш ₁ Ш ₂ М ₂	Ш ₁ Ш ₂ М ₃
	Ш ₁ М ₁ М ₂	Ш ₁ М ₂ М ₃	Ш ₁ М ₃ М ₁
Ш ₂ М ₁ М ₂	Ш ₂ М ₂ М ₃	Ш ₂ М ₃ М ₁	М ₁ М ₂ М ₃

Измежду тях има 6 случая (те са оцветени в таблицата), в които избраните бонбони са от три различни вида. Следователно търсената вероятност е $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Задачата е решена от **Ирина Янакиева** (6 клас, СМГ).

Задача 3. Дадено е множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

а) *Разредено* подмножество на множеството M наричаме такова множество, което не съдържа последователни естествени числа. Например, $\{1\}$, $\{1, 3, 5\}$ и $\{1, 7, 10\}$ са разредени подмножества, а $\{1, 3, 4\}$ не е. Колко са разредените подмножества на M ?

б) *Хубаво* подмножество на множеството M наричаме такова множество, което съдържа точно две последователни естествени числа. Например, $1, 2, 5$ и $1, 3, 6, 7, 10$ са хубави подмножества, а $1, 3, 5$ и $1, 3, 6, 7, 8$ не са. Колко са хубавите подмножества на M ?

Решение. Нека S_n е броят на разредените подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$, включително празното подмножество.

Имаме $S_1 = 2$ (празното подмножество $\emptyset$ и $\{1\}$), $S_2 = 3$ ($\emptyset$, $\{1\}$ и $\{2\}$), а $S_3 = 5$ ($\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ и $\{1, 3\}$).

Разредените подмножества на $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ са от два вида: които включват числото $n+1$ и които не го включват.

Разредените подмножества на $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, които не включват числото $n+1$, са точно разредените подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$; те са S_n на брой.

Разредените подмножества на $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, които включват числото $n+1$, не включват n . Те са множеството $\{n+1\}$ и разредените подмножества на $\{1, 2, \dots, n-1\}$, обединени с $\{n+1\}$, и са S_{n-1} на брой.

Следователно

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1}.$$

По това правило продължаваме редицата (която е част от редицата на Фибоначи): $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 5$, $S_4 = 8$, $S_5 = 13$, $S_6 = 21$, $S_7 = 34$, $S_8 = 55$, $S_9 = 89$, $S_{10} = 144$. Броят на търсените множества (като не броим празното) е $S_{10} - 1 = 143$.

б) Да разгледаме *хубавите* подмножества на множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, които съдържат числата 1 и 2. Всяко от тях е обединение на $\{1, 2\}$ и разредено подмножество на множеството $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ със 7 елемента. Следователно броят им е $S_7 = 34$.

Ясно е, че толкова са и хубавите подмножества, съдържащи 9 и 10.

По същия начин, *хубавите* подмножества на M , които съдържат числата 2 и 3, са обединение на $\{2, 3\}$ и разредено подмножество на множеството $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ с 6 елемента. Следователно броят им е $S_6 = 21$.

Ясно е, че толкова са и хубавите подмножества, съдържащи 8 и 9.

Как ще се променят разсъжденията, ако разгледаме *хубавите* подмножества на M , които съдържат числата 3 и 4? Те се получават като обединение на разредено подмножество на $\{1\}$ с множеството $\{3, 4\}$ и разредено подмножество на $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Следователно броят им е $S_1 \cdot S_5 = 2 \cdot 13 = 26$.

Ясно е, че толкова са и хубавите подмножества, съдържащи 7 и 8.

По същия начин, *хубавите* подмножества на M , които съдържат числата 4 и 5, се получават като обединение на разредено подмножество на $\{1, 2\}$ с множеството $\{4, 5\}$ и разредено подмножество на $\{7, 8, 9, 10\}$. Следователно броят им е $S_2 \cdot S_4 = 3 \cdot 8 = 24$.

Ясно е, че толкова са и хубавите подмножества, съдържащи 6 и 7.

Хубавите подмножества на M , които съдържат числата 5 и 6, се получават като обединение на разредено подмножество на $\{1, 2, 3\}$ с множеството $\{5, 6\}$ и разредено подмножество на $\{8, 9, 10\}$. Следователно броят им е $S_3 \cdot S_3 = 5 \cdot 5 = 25$.

Общо получаваме $2 \cdot (34 + 21 + 26 + 24) + 25 = 235$ хубави множества.

Забележка. Свойствата на редицата на Фибоначи ще откриете в най-разнообразни задачи за рекурсивно броене. Предлагаме ви една забавна формулировка.

По еднопосочен път с две ленти се движат сини и червени коли. Лявата лента съдържа само сини коли, дясната лента само червени. В определен момент колите трябва да минат в една лента. При това сините коли са малко по-смели от червените, което понякога води до ситуация няколко сини коли да се наредят една след друга, но никога не се случва две червени коли да се наредят една след друга. Малко по-нататък колите трябва да чакат на светофар. Ако погледнете първите десет коли на светофара, колко възможни цветови комбинации може да видите? (Например CCCCCCCCCC или ЧСЧСЧСЧСЧС.)

XXVI МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„АКАД. КИРИЛ ПОПОВ“

ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ,
ИМИ – БАН

За двадесет и шести пореден път Съюзът на математиците в България – секция Шумен организира математическия турнир на името на известния шуменец академик Кирил Попов. Състезанието се проведе от 10 до 12 май 2024 г. В него се включиха ученици от 2. до 7. клас. Домакини на състезанието бяха ППМГ „Нанчо Попович“ и III ОУ „Димитър Благоев“.

Турнирът се провежда в два етапа – индивидуален и отборен. В индивидуалния етап всеки ученик решава 10 задачи – 6 с избираем отговор, 4 с кратък свободен отговор. Времето за работа е 75 минути. Верен отговор на задачи 1 и 2 носи по 2 точки, на задачи от 3 до 6 – по 3 точки, а на задачи от 7 до 10 – по толкова точки, колкото е номерът на задачата.

В отборния етап участват отбори от 3 или 4 ученици. Те решават общо 4 задачи: 2 задачи със свободен отговор, които носят по 10 точки, и 2 задачи за подробно описание на решенията, които носят по 15 точки. Времето за работа е 120 минути.

Предлагаме Ви условията на задачите за 4. – 7. клас.

ИНДИВИДУАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ

Тема за 4. КЛАС

1. Ако a е най-малкото четирицифрено число с четири различни четни цифри, а b е най-малкото четирицифрено число с четири различни нечетни цифри, то $a - b$ е равно на:

А) 89 Б) 689 В) 798 Г) 1111

2. Ако $a?2024 = b : 5 = c + 124 = d.8 = 2024$, то $a + b + c + d = ?$

А) 6256 Б) 16321 В) 16445 Г) 17432

3. Шуми и Мени тръгнали заедно от дома си към езерото, отстоящо на 2 км. След като изминали 300 м, Шуми решил да се върне да вземе въдицата, докато Мени продължила към езерото сама с 1 м/с. Шуми се върнал до дома с 2 м/с, взел веднага въдицата и тръгнал отново по същия път пак с 2 м/с. На колко метра от езерото Шуми е настигнал Мени?

А) 600 Б) 900 В) 1100 Г) 1400

4. Колко години навърши баба през 2024, ако тези години са три пъти повече от сбора на цифрите на годината на раждането ѝ, която е през XX век?

- А) 51 Б) 54 В) 57 Г) 60

5. Правоъгълник има обиколка 246 см и една от страните му е с 27 см по-дълга от друга. Колко сантиметра е обиколката на равностранен триъгълник със страна, равна на по-дългата от страните на правоъгълника?

- А) 144 Б) 192 В) 215 Г) друг отговор

6. В ребуса $ГР : АД - ШУ : МЕ = Н$ заменете различните букви с различни ненулеви цифри. Намерете най-голямата възможна стойност на $Н$.

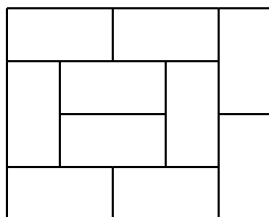
- А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8

7. Девет числа са записани в редица. Сборът на първите 6 числа в редицата е равен на 1000, а на последните 6 е 1024. Сборът на трите числа в средата на редицата е 6 пъти по-малък от сбора на останалите 6 числа. Намерете сбора на деветте числа в редицата.

8. В един клас всеки носи молив, химикалка или флумастер. При това молив носят 19 деца, а химикалка – 18 деца, като 13 от тях носят и молив. Освен това флумастер носят 9 деца, от които 3 носят и химикалка, а 5 – и молив. Само едно дете носи и трите пособия. Колко деца има в този клас?

9. Иво, Яна и Ева трябва да си разделят 4 ябълки: червена, зелена и две еднакви жълти. Иво трябва да получи две ябълки, а останалите – по една. По колко начина може да стане това?

10. Във всяко поле на таблицата трябва да се запише 1, 2, 3 или 4 така, че числата в съседните полета да са различни (съседни се наричат полетата, имащи обща страна или част от страна). Намерете най-малкия възможен сбор на числата в таблицата.



Тема за 5. клас

1. В магазин цената на 1 кг сирене е a лв., а цената на 1 кг кашкавал е с 35% по-висока. Колко лева струват общо 400 г сирене и 200 г кашкавал?

- А) $0,47.a$ Б) $0,6.a$ В) $0,65.a$ Г) $0,67.a$

2. В ребуса

$$0,A : 0,0B = A,C$$

буквите А, В, С са различни ненулеви цифри. Тогава $A + B + C$ е:

- А) 12 Б) 15 В) 17 Г) 18

3. Сто диви лебеди са групирани в четири ята. Броят лебеди във всяко ято е различен и е просто число. Най-големият възможен брой лебеди в най-малкото ято е:

- А) 13 Б) 17 В) 19 Г) 23

4. В 8:00 от град А за град В тръгнал автобус, а от В за А тръгнал камион по същия път. В 9:00 на автобуса му оставали до В с 200 км повече, отколкото бил изминал, а на камиона му оставали до А с 320 км повече, отколкото бил изминал. Колко километра е разстоянието между автобуса и камиона в 9:00?

- А) 60 Б) 120 В) 260 Г) 520

5. Колко от трицифрените числа са 24 пъти по-големи от сбора на цифрите си?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) друг отговор

6. В ребуса

$$\text{ШУМ} \cdot \text{УМ} = \text{УМ} \cdot \text{Е} \cdot \text{Н} + 2024$$

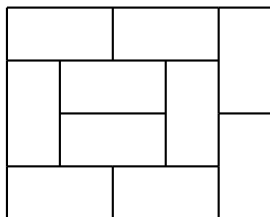
различните букви представят различни цифри, а еднаквите – еднакви. Пресметнете сбора $\text{Ш} + \text{У} + \text{М} + \text{Е} + \text{Н}$.

- А) 15 Б) 16 В) 17 Г) 18

7. Върху отсечката AB има 6 зелени точки, които я разделят на 7 равни части, а също и 11 сини точки, които я разделят на 12 равни части. Най-малкото разстояние между зелена и синя точка е 15 мм. Колко сантиметра е дългата AB ?

8. Колко от шестцифрените числа се увеличават 4 пъти при преместване на последната им цифра на първо място?

9. Във всяко поле на таблицата трябва да се запише 1, 2, 3 или 4 така, че числата в съседните полета да са различни (съседни се наричат полетата, имащи обща страна или част от страна). Намерете най-големия възможен сбор на числата в таблицата.



10. В купа има три еднакви яйца. Всяко от тях трябва да се оцвети в един цвят – червен или син – и да му се залепи една картинка – на зайче или на пате. По колко начина може да стане това, така че всеки от цветовете и всяка от картинките да се среща поне веднъж?

Тема за 6. клас

1. Стойността на израза

$$\frac{24^{-23} \cdot (0,24)^{24}}{(-10^{-16})^3} : (3^0 - 3^{-2}) - 3 \text{ е:}$$

- A) -30 B) -27 B) 24 Г) 213

2. Ако n е трицифрено число, то винаги стойността на израза

$$|24 - |24 - |24 - n|||$$

е равна на:

- A) $24 - n$ B) $48 + n$ B) $n - 48$ Г) $n - 72$

3. В координатна система са дадени точките $A(-a; 0)$, $B(4a; 3a)$ и $C(2a; 5a)$, като $a < 0$. Лицето на триъгълник ABC е:

- A) 6^2 B) 8^2 B) 13^2 Г) 15^2

4. Двеста диви лебеди са групирани в четири ята. Броят лебеди във всяко ято е различен и е просто число. Намерете най-малкия възможен брой лебеди в най-голямото ято.

- A) 53 B) 57 B) 59 Г) 61

5. Първите 10000 естествени числа са записани последователно в таблица, от която тук са показани първите 4 реда: всеки нов ред има с 2 числа повече от предходния.

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

Кое е първото число от реда, в който е записано числото 2024?

- А) 1937 Б) 1981 В) 1989 Г) 2000

6. Колко от трицифрените числа са 23 пъти по-големи от сбора на цифрите си?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) друг отговор

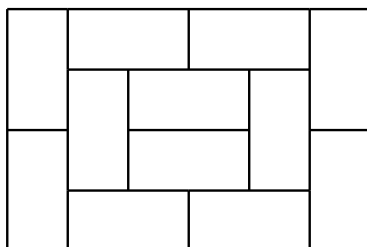
7. От селата А и Б едновременно тръгнали един към друг двама велосипедисти с постоянни скорости. Те се разминали на 15 км от Б. Стигайки до другото село, всеки от тях веднага тръгнал обратно; този път те се разминали на 19 км от Б. Колко километра е разстоянието от А до Б?

8. За положителните числа a, b, c, d, e, f, g е известно, че:

- a е 12,5% от b ,
- $d : e = 2 : 3$,
- $c : b = 5 : 8$,
- f е 25% от g ,
- d е 40% от c ,
- $f = 2e$.

Намерете с колко процента най-голямото от числата $a + b + d + e$, $c + b + f + e$ и $g + d + f + e$ е по-голямо от най-малкото от тях.

9. Във всяко поле на таблицата трябва да се запише 1, 2, 3 или 4 така, че числата в съседните полета да са различни (съседни се наричат полетата, имащи обща страна или част от страна). Намерете най-малкия възможен сбор на числата в таблицата.



10. В купа има 4 еднакви яйца. Всяко от тях трябва да се оцвети в един цвят – червен, син или жълт, така че всеки от цветовете да се среща поне веднъж. Освен това на три от яйцата трябва да се залепи лепенка: има две еднакви лепенки с пиле и една със зайче. По колко начина може да стане това?

Тема за 7. клас

1. Автобус изминава определено разстояние за 47 минути. С колко процента трябва да увеличи скоростта си автобусът, за да измине това разстояние за 40 минути?

- А) 7 Б) 7,5 В) 12,5 Г) 17,5

2. Числото $2^k 3^n$ има точно 2024 естествени делителя. Определете най-малката възможна стойност на $k + n$.

- А) 87 Б) 88 В) 89 Г) 90

3. Числото m се избира по случаен начин сред числата 7, 8, 9, 10, 11. Каква е вероятността да съществува рационално число x , за което

$$x^2 - mx + 24 = 0 ?$$

- А) 0% Б) 20% В) 40% Г) 60%

4. Периметърът на правоъгълник с лице 1260 cm^2 и сбор от диагоналите 106 cm е:

- А) 130 cm Б) 146 cm В) 154 cm Г) 164 cm

5. Колко едночлена има в нормалния вид на многочлена

$$(n^4 - 1)(n^4 + 1)(n^4 - n^2 + 1)(n^4 + n^2 + 1)(n^8 - n^4 + 1) ?$$

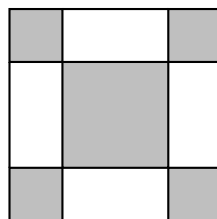
- А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8

6. В равнобедрен триъгълник ABC , чиято основа не е BC , външната ъглополовяща при върха C пресича лъча $AB^{\rightarrow}$ в точка D . Ако $AC = CD$, то $\sphericalangle BCD$ е равен на:

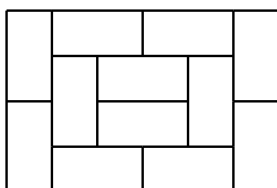
- А) 36° Б) 54° В) 72° Г) 108°

7. Колко от трицифрените числа са 25 пъти по-големи от сбора на цифрите си?

8. На чертежа квадрат е разрязан на пет квадрата (четири в ъглите и един в средата) и четири бели правоъгълника. Сборът от периметрите на четирите бели правоъгълника е t см, а сборът от лицата им е s кв.см и е равен на сбора от лицата на петте квадрата. Изразете s чрез t .



9. Във всяко поле на таблицата трябва да се запише 1, 2, 3 или 4 така, че числата в съседните полета да са различни (съседни се наричат полетата, имащи обща страна или част от страна). Намерете най-големия възможен сбор на числата в таблицата.



10. В купа има 4 еднакви яйца. Всяко от тях трябва да се оцвети в един цвят – червен, син или жълт – и да му се залепи една картинка – на зайче, на пиле или на коте. По колко начина може да стане това, така че всеки от цветовете и всяка от картинките да се среща поне веднъж?

Отборно състезание

Тема за 4. клас

Задача 1. В един морски залив тази година има 1000 медузи. Ако броят медузи в залива е четирицифрен, то на следващата година той нараства с 1000, а ако е петцифрен, то на следващата година той намалява наполовина. Колко ще са медузите в залива след:

- а) 11 години; б) 22 години; в) 44 години; г) 99 години?

Задача 2. Магаре, коза, куче, котка, прасе, заек, петел, мишка и врабче седнали около кръгла маса, за да отпразнуват рождения ден на магарето. Кучето, котката и магарето не били до заека. Съседите на мишката били птици. Козата била между петела и котката. Прасето не било до магарето. Кой са съседите на:

- а) прасето; б) магарето?

Задача 3. В цветарски магазин направили букети от по 3 лалета, използвайки 80 червени, 78 жълти, 47 бели и 41 розови лалета. Във всеки букет цветовете на трите лалета били различни.

- а) Колко от букетите са съставени от червено, бяло и розово лале?
- б) По колко букета има от всеки вид?

Задача 4. Възможно ли е квадрат да бъде разрязан на n квадрата, чиито страни в сантиметри са естествени числа, сред които най-голямото е 7, а най-малкото е 1, при n равно на:

- а) 16; б) 14; в) 12; г) 11?

Ако за дадена подточка считате, че отговорът е *да*, то начертайте подходящ пример, като във всяко квадратче запишете дължината на страната му в сантиметри.

Тема за 5. клас

Задача 1. Ако a е двуцифрено число с цифри (в този ред) a и b , то с A^* ще бележим числото $a^b \cdot (b^a + a) \cdot A$.

Например, $23^* = 2^3 \cdot (3^2 + 2) \cdot 23 = 2024$.

Намерете A , за които A^* е най-малкото възможно четирицифрено число.

Задача 2. За цифрите A , P , R , T е известно, че $A \neq 0$ и

$$T = P + 1 = P + 2.$$

Намерете всички шестцифрени числа от вида АПАРАТ, които се делят на 43.

Задача 3. Един петокласник решил всичките 2024 задачи от сборник по математика. Той започнал да решава в петък. Имало дни, в които решавал по 16 задачи, а във всички останали дни решавал по 23.

а) Колко дни е продължило решаването? Открийте всички възможности!

б) В кой ден от седмицата е решил последната задача?

Задача 4. Възможно ли е квадрат да бъде разрязан на n квадрата, чиито страни в сантиметри са естествени числа, сред които най-голямото е 11, а най-малкото е 1, при n равно на:

- а) 16; б) 14; в) 13?

Ако за дадена подточка считате, че отговорът е *да*, то начертайте подходящ пример, като във всяко квадратче запишете дължината на страната му в сантиметри.

Тема за 6. клас

Задача 1. Катер изминал по река разстоянието от пристанище А до пристанище В и обратно общо за 4 часа и 12 минути. Скоростта от А до В била с 25% по-голяма от тази по обратния път.

- а) Колко минути е пътувал катерът от А до В?
- б) За колко часа и колко минути би стигнал сал от А до В?

Задача 2. Ако A е двуцифрено число с цифри (в този ред) a и b , то с A^* ще бележим числото $a^b \cdot (b^a + a) \cdot A$.

Например, $23^* = 2^3 \cdot (3^2 + 2) \cdot 23 = 2024$. Колко са всички A , за които A^* е четирицифрено?

Задача 3. Имаме купчина от 2024 жълтици. Разделянето на купчина жълтици на две неравни купчини струва 1 лев; в противен случай не струва нищо. Колко лева най-малко ще ни струва да получим 2024 купчини от по 1 жълтица?

Задача 4. Правоъгълник $ABCD$ е разрязан на квадрати, чиито дължини на страните в сантиметри, които ще наричаме размери, са естествени числа. Кой от следните твърдения са верни?

а) Ако разрязваме квадрат $ABCD$, то размерът на най-малкия квадрат ще е делител на размера на всеки друг.

б) Следният метод винаги дава разрязване с най-малък брой квадрати: режем от $ABCD$ най-големия възможен квадрат, така че една от страните на този квадрат да е сред късите страни на правоъгълника. Ако остане остатък, то той е правоъгълник и с него постъпваме по същия начин. Продължаваме така, докато не остане никакъв остатък.

в) Съществува правоъгълник $ABCD$, който може да се разреже така, че един от квадратите да е с размер 1, а всички останали – с размери 2 и 3.

г) Съществува квадрат $ABCD$, който може да се разреже така, че един от квадратите да е с размер 1, а всички останали – с размери 2 и 3.

Ако някой от отговорите Ви изисква пример, то при начертаването във всяко квадратче запишете дължината на страната му в сантиметри.

Тема за 7. клас

Задача 1. а) Разложете на множители израза

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc.$$

б) Намерете сбора на всички прости делители на

$$k = 80.53^2 + 47.79^2 + 59.67^2 - 80.47.59.$$

Задача 2. В стъклен съд с форма на правоъгълен паралелепипед, затворен от всички страни, има 4,5 л вода. Ако съдът бъде поставен на хоризонтална повърхност, височината на водата ще е 5 см, 7,5 см или 30 см в зависимост от това на коя от стените си е поставен. Дебелината на стъклото навсякъде е 1 см.

а) Колко литра е вместимостта на съда?

б) Колко кв.см е повърхнината на съда (външно)?

в) Ако 1 cm^3 стъкло тежи 3 г, колко грама тежи съдът без водата?

Задача 3. На страните AB, BC, CD, DA на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с лице 25 cm^2 са избрани съответно точки M, N, P, Q . Ако

$$AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = x$$

и лицето на $MNPQ$ е 17 cm^2 , то намерете x .

Задача 4. Квадрат е разрязан на 2024 квадрата, чиито страни в сантиметри са естествени числа, сред които най-малкото е 1, а най-голямото е M . Възможно ли е M да е по-голямо от:

а) 10200; б) 10^{200} ?

Отговори

4. клас, индивидуално състезание. 1. Б; 2. Б; 3. В; 4. Г; 5. Г; 6. А; 7. 1771; 8. 26; 9. 7; 10. 22.

5. клас, индивидуално състезание. 1. Г; 2. Б; 3. Б; 4. В; 5. А; 6. Г; 7. 126; 8. 6; 9. 28; 10. 8.

6. клас, индивидуално състезание. 1. А; 2. Г; 3. Б; 4. В; 5. А; 6. Б; 7. 32; 8. 150; 9. 25; 10. 21.

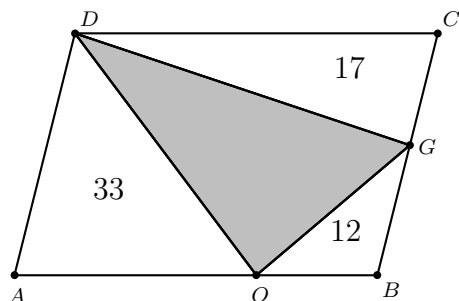
7. клас, индивидуално състезание. 1. Г; 2. Б; 3. В; 4. Б; 5. А; 6. В; 7. 3; 8. $t^2/72$; 9. 35; 10. 63.

ОКОЛО ЕДНА КОНФИГУРАЦИЯ С УСПОРЕДНИК

ДИМИТЪР ГЕОРГИЕВ, Добрич

Задача 1. Даден е успоредник $ABCD$ и точки $O \in AB$, $G \in BC$. Известно е, че лицето на триъгълника AOD е 33 cm^2 , лицето на OBG е 12 cm^2 , а лицето на GDC е 17 cm^2 .

Да се намери лицето на триъгълника DOG .



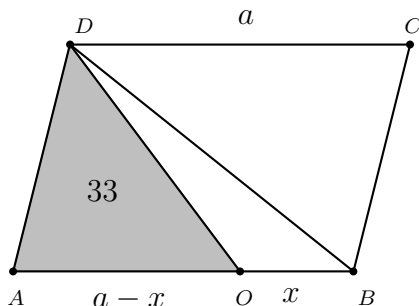
Да означим $AB = a$, $BC = b$, $BO = x$, $BG = y$, а лицето на $ABCD$ с S . Тогава търсеното лице е $S_{DOG} = S = (33 + 17 + 12) = S - 62$.

Да изразим лицето на $\triangle AOD$:

$$S_{AOD} = \frac{AO}{AB} \cdot S_{ABD} = \frac{a-x}{a} \cdot \frac{S}{2}.$$

Следователно

$$(1) \quad 33 = \frac{a-x}{a} \cdot \frac{S}{2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{S}{2}.$$

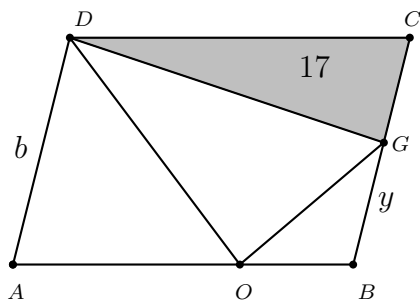


По същия начин, да изразим лицето на триъгълника GDC :

$$S_{GDC} = \frac{CG}{CB} \cdot S_{DBC} = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{S}{2}.$$

Следователно

$$(2) \quad 17 = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{S}{2} = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{S}{2}.$$



И накрая да изразим лицето на триъгълника OBG :

$$S_{OBG} = \frac{x}{a} \cdot S_{ABG} = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot S_{ABC} = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{S}{2}.$$

Следователно

$$(3) \quad 12 = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{S}{2}.$$

От (1) и (2) изразяваме

$$\frac{x}{a} = \frac{S - 66}{S}, \quad \frac{y}{b} = \frac{S - 34}{S}$$

и като заместим в (3), получаваме

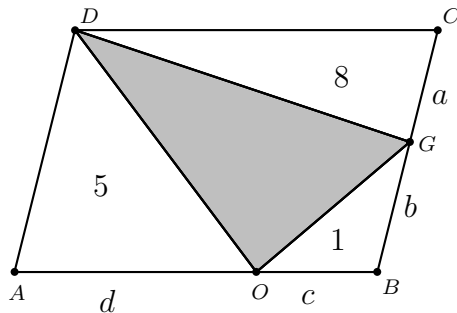
$$\frac{S - 66}{S} \cdot \frac{S - 34}{S} \cdot \frac{S}{2} = 12,$$

откъдето получаваме

$$(S - 66)(S - 34) = 24S \iff S^2 - 124S + 34 \cdot 66 = 0.$$

Полученото квадратно уравнение има корени $S_1 = 22$ и $S_2 = 102$. Тъй като $S > 62$, намираме $S = 102$ $S_{DOG} = 40 \text{ cm}^2$.

Задача 2. Даден е успоредник $ABCD$ и точки $O \in AB$, $G \in BC$. Известно е, че лицето на триъгълника AOD е 5 cm^2 , лицето на OBG е 1 cm^2 , а лицето на GDC е 8 cm^2 . Ако $CG = a$, $GB = b$, $BO = c$ и $OA = d$, да се намери стойността на израза $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.



Да означим $\frac{a}{b} = k$ и $\frac{c}{d} = p$.

Както в задача 1, получаваме

$$5 = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{S}{2} = \frac{1}{1+p} \cdot \frac{S}{2}, \quad 8 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{S}{2} = \frac{k}{1+k} \cdot \frac{S}{2},$$

$$1 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot \frac{S}{2} = \frac{p}{(1+k)(1+p)} \cdot \frac{S}{2}.$$

Ако от последното равенство изразим $\frac{S}{2} = \frac{(1+k)(1+p)}{p}$ и заместим в първите две, стигаме до системата уравнения

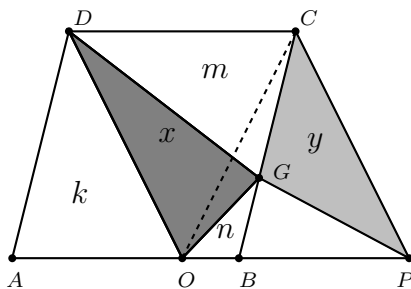
$$\begin{cases} 5p = 1 + k \\ 8p = k(p+1) \end{cases} \iff \begin{cases} k = 5p - 1 \\ 8p = (5p - 1)(p+1) \end{cases}$$

Последното квадратно уравнение $5p^2 - 4p - 1 = 0$ има единствен положителен корен $p = 1$; тогава $k = 4$ и стойността на търсения израз е 5.

Задачи 1. и 2. се отнасят за една и съща конфигурация. Да потърсим ключовото за нея **общо свойство**.

Нека в условието на задача 1. лицето на триъгълника AOD е $k \text{ cm}^2$, лицето на OBG е $n \text{ cm}^2$, а лицето на GDC е $m \text{ cm}^2$. Ще изразим лицето x на триъгълника DOG чрез k , n и m . Да отбележим, че лицето на $ABCD$ е $S = k + n + m + x$.

Построяваме успоредника $DOPC$. Тъй като $AB = CD = OP$, получаваме, че $AO = BP$. Следователно $S_{BPC} = \frac{BP \cdot h}{2} = \frac{AO \cdot h}{2} = S_{AOD} = k$, където h е разстоянието между успоредните прави AB и CD . Тогава лицето на успоредника $DOPC$ е равно на лицето S на $ABCD$. Нека лицето на триъгълника PGC е y .



От известното свойство $S_{DOG} + S_{CGP} = \frac{1}{2}S_{DOPC}$ (виж *правило на пясъчния часовник* в края на статията) получаваме, че

$$x + y = \frac{1}{2}S = \frac{k + n + m + x}{2} \iff y = \frac{k + n + m - x}{2}.$$

Тъй като

$$S_{OBC} = S_{OPC} - S_{BPC} = \frac{S}{2} - k = \frac{n + m + x - k}{2}$$

и

$$S_{BPG} = S_{BPC} - S_{CPG} = k - \frac{k + n + m - x}{2} = \frac{k + x - n - m}{2},$$

от

$$S_{OBG} : S_{BPG} = OB : BP = S_{OBC} : S_{BPC}$$

получаваме

$$n : \frac{k + x - n - m}{2} = \frac{n + m + x - k}{2} : k \iff$$

$$x^2 - (n + m - k)^2 = 4nk \iff x^2 = (n + m + k)^2 - 4mk.$$

И накрая, да видим как това общо свойство помага да решим **задача 2**. Според условието на задача 2, $k = 5$, $m = 8$, $n = 1$ и получаваме $x^2 = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 36$, т.е. $x = 6$ и $S = 20$.

Тогава $S_{CGD} = \frac{S}{2} - 8 = 2$, $S_{OBD} = \frac{S}{2} - 5 = 5$ и намираме

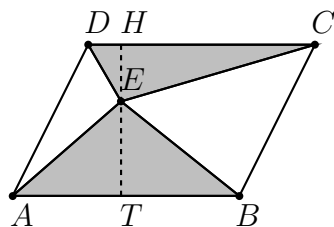
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{S_{DCG}}{S_{CGD}} + \frac{S_{OBD}}{S_{AOD}} = \frac{8}{2} + \frac{5}{5} = 4 + 1 = 5.$$

При доказателството на общото свойство използвахме *правилото на пясъчния часовник*, което гласи, че ако E е произволна точка във вътрешността на успоредника $ABCD$, то

$$S_{ABE} + S_{DCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Наистина, ако означим $AB = CD = a$ и построим през точка E перпендикуляри ET и EH към основите AB и CD , то $ET + EH = TH = h$ е височината на успоредника и получаваме

$$S_{ABE} + S_{DCE} = \frac{1}{2} AB \cdot ET + \frac{1}{2} CD \cdot EH = \frac{1}{2} a(ET + EH) = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$



ЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„НАУКА ЗА ДЕЦА“

НЕВЕНА СЪБЕВА, ИМИ – БАН

Традиционният Летен математически турнир *Наука за деца*, организиран от *IZZ I Science for Kids*, се проведе на 18 май 2024 г. В турнира участваха ученици от 3. до 7. клас.

Състезателните теми за 3. – 6. клас включват 8 задачи. Регламентът уважава вкуса и предпочитанията на участниците – не е необходимо да решават всички задачи, защото резултатът се определя само от трите, по които ученикът е събрал най-много точки. Посланието на турнира е децата да се занимават с математика за удоволствие, с творческа свобода, а не принудени от състезателната амбиция и конкурентния дух.

За седмокласниците, Летен математически турнир *Наука за деца* е първи кръг от конкурса за прием в гимназия Science-Smart School of Sofia. Състезателната тема за 7. клас включва задачи от учебната програма за общообразователна и за допълнителна подготовка.

Предлагаме Ви състезателните теми за 3. – 6. клас.

Тема за 3. – 4. клас

Задача 1. Тони има девет карти:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Той раздал по три карти на баща си, на майка си и на себе си. Оказало се, че и трите числа на картите на Тони са по-малки от 5, а и трите числа на баща му са по-големи от 5. Точно две от числата на майка му се делят на 3.

Кои числа са записани на картите на Тони?

5 точки

Задача 2. На Далечен остров живеят рицари и лъжци. Рицарите говорят само истината, а лъжците винаги лъжат.

Веднъж се срещнали петима жители на този остров: Ани, Бони, Вени, Гани и Дани.

Ани казала: *Измежду нас петимата лъжците са повече от рицарите.*

Бони казала: *Вени е рицар!*

Вени отговорила: *Бони е рицар!*

Ако Гани и Дани са лъжци, кои са рицарите?

(Обяснете подробно своя отговор!)

5 точки

Задача 3. Резервоарът на колата на г-н Колев има вместимост 40 литра. Един пълен резервоар с гориво стига за точно 440 km.

Един ден г-н Колев напълнил резервоара догоре и потеглил към Бургас. След като пропътувал 374 km, спрял на една бензиностанция и заредил още 30 литра гориво. Когато пристигнал в Бургас, се оказало, че резервоарът му е пълен до половината. Колко километра е изминал г-н Колев от бензиностанцията до Бургас? **7 точки**

Задача 4. Принцеса Жасмин сложила сто изумруда в шест кутийки. Във всяка кутийка имало поне един изумруд.

В първата, втората, четвъртата и шестата кутийки имало общо 64 изумруда. В третата имало с 34 изумруда повече, отколкото в първата. В шестата имало повече изумруди, отколкото в петата, и 25 пъти по-малко, отколкото в четвъртата.

Колко изумруда е сложила принцесата във втората кутийка?

7 точки

Задача 5. Коко и Бобо пресметнали, че сборът от годините им е 13. След 12 години Коко ще е на 4 пъти повече години, отколкото сега. На колко години ще е Бобо тогава? **9 точки**

Задача 6. Пинокио и Котарака намерили 20 монети и го разделили по следния начин. Пинокио взема поредната неподелена монета и я подхвърля. Ако се падне ези, я слага в джоба си – негова е. Ако се падне тура, Котарака взема за себе си тази монета и още три от неподделените до този момент монети (или всичките, ако са останали по-малко от три).

Пинокио подхвърлил само седем монети. Колко монети е взел Пинокио? **9 точки**

Задача 7. Запишете числата от 1 до 9 в квадратчета на таблицата 3×3 така, че:

– във всеки ред сборът на някои две от числата в този ред да е равен на числото вдясно от реда;

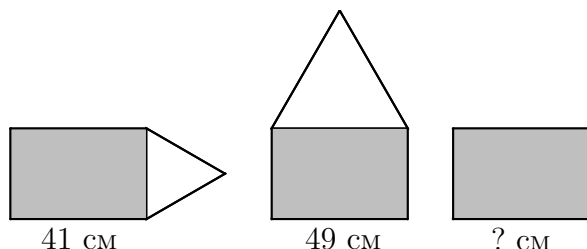
– във всеки стълб сборът на някои две от числата в този стълб да е равен на числото под стълба.

			→ 16
			→ 13
			→ 9
↓	↓	↓	
11	7	4	

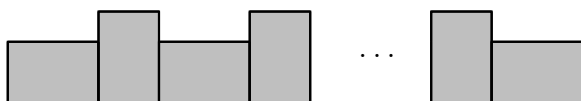
11 точки

Кое число е записано в централното квадратче? По колко начина може да се попълни таблицата?

Задача 8. Да се намери обиколката на сивия правоъгълник на чертежа, ако е известно, че обиколките на показаните фигури, които се получават, като се залепи равноностранен триъгълник на една от страните на правоъгълника, са 41 см и 49 см.



На колко е равна обиколката на фигурата, която се получава, ако 101 правоъгълника със същите размери се залепят по показания начин?



11 точки

Тема за 5. – 6. клас

Задача 1. Главата на крокодила е дълга 30 см. Дължината на тялото му е равна на сбора от дължината на главата и на опашката. Дължината на опашката е равна на сбора от дължината на главата на крокодила и на третината от тялото му. Колко сантиметра е дълъг крокодилът, от главата до края на опашката? **5 точки**

Задача 2. Фермерите Бил, Джон и Том провели следния разговор.

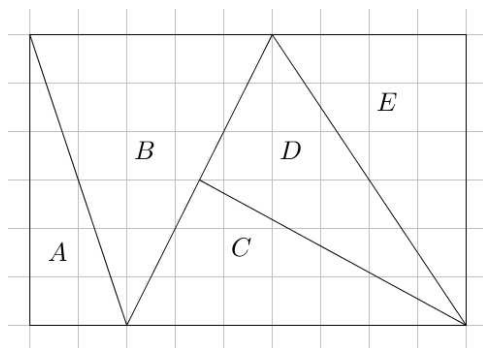
Бил казал: Аз имам с 20% повече коне от Джон.

Том: Но ти, Бил, имаш с 20% по-малко коне от мен.

С колко процента повече коне има Том в сравнение с Джон?

5 точки

Задача 3. На чертежа е показано правоъгълно парче шоколад, разделено на пет парчета A , B , C , D и E .



Мими, Лили, Коко, Диди и Бобо взели по едно парче, като парчето на Мими е 70% от парчето на Коко; парчето на Коко е с 25% по-голямо от парчето на Лили; Коко и Диди имат общо толкова шоколад, колкото Бобо и Мими.

Кои двама са взели еднакви парчета? Определете кое парче е взел всеки от останалите трима.

7 точки

Задача 4. Двама мотоциклетисти тръгнали едновременно от град A и от град B един срещу друг. Те се разминали след 12 минути.

Единият мотоциклетист изминал разстоянието от A до B за 30 минути. За колко минути другият е изминал разстоянието от B до A ?

7 точки

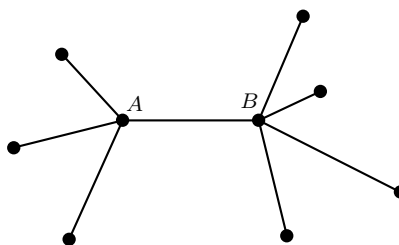
Задача 5. Иво има девет карти, които са номерирани с числата от 1 до 9: $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{8} \boxed{9}$. По колко начина той може да си избере три карти така, че да е избрал повече нечетни, отколкото четни карти?

9 точки

Задача 6. Два областни града A и B са свързани с път. В първата област има 3 села, сборът на разстоянията от които до A е 41 км. Във втората област има 4 села, сборът на разстоянията от които до B е 47 км.

От всяко село от първата област до всяко село от втората област се придвижил по един автомобил. Общото изминато разстояние от всички автомобили е 905 км.

Намерете разстоянието между градовете A и B .

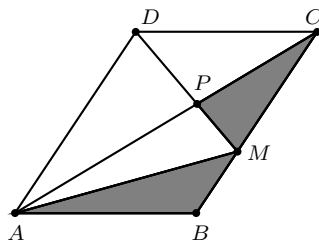


9 точки

Задача 7. Даден е успоредник $ABCD$. Точка M лежи на страната BC , а пресечната точка на отсечките DM и AC е P . Лицето на $\triangle ABM$ е 5 cm^2 , а лицето на $\triangle PMC$ е 4 cm^2 .

- Намерете лицето на $\triangle APD$.
- Докажете, че $S_{APM} = S_{DPC}$.
- Намерете лицето на $ABCD$.

11 точки



Задача 8. Баба Цоцолана купила много праскови, круши и ябълки за своите внуци. Тя сложила на масата 21 ябълки, 31 круши и 40 праскови. Внуците се редували, като всеки си избирал два плода от различен вид и ги изяждал, след което баба му добавяла на масата един плод от третия вид (който той не е избрал).

Угощението продължило до момента, в който се оказало, че всички плодове на масата са от един и същ вид. Какви плодове може да са останали на масата накрая?

11 точки

Двете най-интересни задачи

След състезанието участниците избраха двете най-интересни задачи – задача 7. за 3. – 4. клас и задача 8. за 5.–6. клас. Ето и техните решения.

Решение на задача 7. за 3. – 4. клас. Сбор 4 се получава само от 1 и 3 (те са в десния стълб); сбор 16 – от 9 и 7 (те са в първия ред). Тъй като 1 и 3 не са в средния стълб, сбор 7 се получава от 2 и 5. В левия стълб няма 1, 2, 3 и 5 и сбор 11 се получава от 4 и 7. Тогава 7 е в горния ляв ъгъл на таблицата. Щом 9 и 7 са в първия ред, сбор 13 на втория ред се получава от 8 и 5. Тогава 9 на третия ред се получава от 6 и 3.

Следователно 5 е в средния стълб и втория ред, т.е. в централното квадратче. По същия начин, в долния десен ъгъл е 3. Сигурните числа са показани на таблицата вдясно.

7		
	5	
		3

Мястото на 4 в първия стълб може да се избере по два начина. При всеки от тях таблицата нататък се попълва еднозначно, т.е. получаваме две попълвания.

7	9	1
4	5	8
6	2	3

7	2	9
8	5	1
4	6	3

Решение на задача 8. за 5. – 6. клас. Достатъчно е да забележим, че след всеки ход броят на ябълките и крушите на масата е с еднаква четност, а броят на прасковите е с различна от тяхната четност. Следователно накрая може да останат само праскови. *Пример:* първо 5 пъти вземат круша и праскова, след което остават 26 ябълки, 26 круши и 35 праскови; после вземат 26 пъти круша и ябълка и остават само 61 праскови.

ДВЕ ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ЗА ШКОЛАТА ПО МАТЕМАТИКА

Хари Потър и задачи за четност

Задача 1. Върховният съд на магьосниците включва 50 магьосници. На изслушването по случая Хари Потър министър Фъдж казва, че след гласуване с разлика от 7 гласа е решено Хари да бъде признат за виновен за незаконно използване на магия. Но Дъмбълдор забелязва, че всичките 50 магьосници са гласували с *да* или *не* и твърди, че Фъдж греши. Прав ли е Дъмбълдор?

Задача 2. Докато се разхождали из Хогсмийд, Хари, Рон и Хърмаяни попаднали на алея с ябълкови дървета. Рон забелязал, че има 20 ябълкови дървета на алеята, Хърмаяни добавила, че броят на ябълките на всеки две съседни ябълкови дървета се различава точно с 1, а Хари преброил, че общо на всички дървета има точно 2023 ябълки. Докажете, че един от тях греши.

Задача 3. Професор Вектор дал на Хърмаяни задача: да запише между всеки две поредни естествени числа от 1 до 50 знак + или – така, че стойността на получения израз да е равна на нула. Ще успее ли Хърмаяни да се справи с тази задача?

Задача 4. В Ордена на Феникса има 40 магьосници. Всяка вечер трима са дежурни и пазят. Възможно ли е да се организират така, че след известно време всеки да е дежурил с всеки точно по веднъж?

Задача 5. В оранжерията на професор Спраут имало дърво с 35 ананаса и 50 круши. Всеки ден близнаците Уизли се промъквали в оранжерията и откъсвали точно два плода от дървото. Ако са откъснали плодове от един и същ вид, тогава на дървото пораствал нов ананас*, а ако са откъснали различни, пораствала нова круша. Един ден близнаците открили, че на дървото е останал само един плод. Какъв е бил той?

Задача 6. На среща на армията на Дъмбълдор дошли 27 магьосници. Може ли да се случи всяко момиче сред тях да познава точно трима от присъстващите, а всяко момче да познава точно петима от присъстващите?

* Ананасите не растат по дърветата. Те са от род Тревисти, но във вълшебния свят всичко е възможно. (бел. ред.)

Задача 7. Долорес Ъмбридж публикувала на стената Указ за образованието. Близнаците Уизли го свалили и го разкъсали на парчета, като Фред разкъсвал всяко парче на 5 парчета, а Джордж – на 9. Когато се опитали да съберат Указа отново, те намерили 2024 парчета. Докажете, че не са намерили всички парчета.

Решения и упътвания

1. Дъмбълдор е прав, тъй като сборът и разликата на две естествени числа са с една и съща четност. Ако общият брой магьосници, гласували с *да* и *не* е 50, разликата между броя на гласувалите с *да* и броя на гласувалите с *не* трябва също да е четен; не може да е 7.
2. Ако Рон и Хърмаяни са прави, има 20 ябълкови дървета, измежду които се редуват дървета с четен и нечетен брой ябълки. Тъй като сборът на 10 нечетни и 10 четни числа е четен, общо не може да има 2023 ябълки, както твърди Хари.
3. Ако всички знаци са $+$, сборът на числата е $50 \cdot 51 : 2$, което е нечетно число. При промяна на знака на дадено число a от $+$ на $-$, сборът намалява с $2a$ и остава нечетен. Следователно Хърмаяни не може да получи четното число 0.
4. Нека A е един магьосник от Ордена на Феникса. Той иска да пази по веднъж с всеки от останалите 39. Това не е възможно, защото 39 е нечетно число, а когато е дежурен, A пази с двама други магьосници.
5. Забелязваме, че броят на крушите или не се променя, или намалява с 2. Тъй като в началото има 50 круши, четен брой, броят на крушите на дървото е винаги четен и накрая не може да остане една круша. Остава един ананас.
6. Общият брой познанства е $\underbrace{(3 + \dots + 3 + 5 + \dots + 5)}_{27 \text{ събираеми}} : 2$. Това е невъзможно, защото сборът на нечетен брой нечетни събираеми е нечетен.
7. В началото има 1 парче, а с всяко свое действие Фред увеличава броя на парчетата с 4, а Джордж – с 8. Следователно броят на парчетата е нечетен и не може да е 2024.

Кое число съм намислил?

Задача 1. Намислих трицифрено число $A = \overline{xyz}$. Когато записах цифрите му в обратен ред, получих трицифрено число $B = \overline{zyx}$, което се дели на 5. Числата A и B имат разлика 99. Кое число съм намислил? Намерете всички възможности.

Задача 2. От четири цифри, различни от нула, съставих две четирицифрени числа: възможно най-голямото и най-малкото. Сборът на получените числа се оказа 11 990. Кои цифри съм намислил? Намерете всички възможности.

Задача 3. Намислих трицифрено число A с последна цифра 3. Ако преместя тази цифра 3 в началото на числото, ще получа число, което е с 1 по-голямо от $3 \cdot A$. Кое число съм намислил? Намерете всички възможности.

Задача 4. Намислих три различни ненулеви цифри a , b и c . Сборът на всички двуцифрени числа, в чийто запис участват само цифрите a , b и c , е 231. Кои цифри съм намислил?

Задача 5. Намислих трицифрено число $\overline{xyz}$, което се дели на 37. Докажете, че числата $\overline{yzx}$ и $\overline{zxy}$ също се делят на 37.

Задача 6. Разликата между числата $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ се дели на 271. Докажете, че $b = d$ и $c = e$.

Задача 7. Съществуват ли четири различни цифри a, b, c, d , за които числото $M = \overline{cdcdcdcd}$ се дели на $N = \overline{aabb}$?

Допълнителна задача

Към един замислен пешеходец, който случайно бил математик, се приближил полицаи и попитал:

– Обърнахте ли внимание на номера на камиона, който мина край вас току-що?

– Да, рабира се! – отговорил математикът. – Номерът се състоеше от две двуцифрени числа, като второто се получава като се разместят цифрите на първото, а разликата на тези числа е равна на сбора на цифрите на всяко от числата!

Помогнете на полицаия да узнае номера на камиона.

Решения и упътвания

1. Ясно е, че $x = 5$. От

$$|A - B| = |\overline{5yz} - \overline{zy5}| = 99|5 - z| = 99$$

следва, че $z = 4$ или 6 . Следователно A е от вида $5y4$ или $5y6$, където y е произволна цифра.

2. Нека са намислени цифрите $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. Тогава

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 11990 \iff 1001(a + d) + 110(b + c) = 11900.$$

От тук следва, че $a + d$ се дели на 10 , т.е. $a + d = 10$. Тогава $b + c = 18$, т.е. $b = c = 9$ и следователно $d = 9$, а значи $a = 1$.

3. Нека $A = \overline{ab3}$. Тъй като $\overline{3ab} = 3 \cdot \overline{ab3} + 1$, то $b = 0$, $a = 1$. Намисленото число е 103 .

4. От $\overline{aa} + \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bb} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cc} + \overline{ca} + \overline{cb} = 231$ следва, че $33(a + b + c) = 231$, т.е. $a + b + c = 7$. Намислените цифри са 1 , 2 и 4 .

5. Тъй като $\overline{xyz}$ се дели на 37 и

$$300 \cdot \overline{xyz} + 7 \cdot \overline{yzx} = 30007x + 3700y + 370z = 37(811x + 100y + 10z)$$

се дели на 37 , то $7 \cdot \overline{yzx}$ се дели на 37 , т.е. $\overline{yzx}$ се дели на 37 . Оттук по същия начин следва, че $\overline{zxy}$ се дели на 37 .

6. Разликата е

$$\overline{abcdef} - \overline{fdebca} = 99999(a - f) + 9900(b - d) + 990(c - e)$$

и понеже тя се дели на 271 и 99999 се дели на 271 , то

$$9900(b - d) + 990(c - e) = 990(10(b - d) + (c - e)) = 990(\overline{bc} - \overline{de})$$

се дели на 271 . Тъй като 990 е взаимнопросто с 271 , то разликата на двуцифрените числа $\overline{bc} - \overline{de}$ се дели на трицифреното просто число 271 . Следователно $\overline{bc} = \overline{de}$, т.е. $b = d$ и $c = e$.

7. Тъй като

$$M = \overline{cdcdcdcd} = 1010101 \cdot \overline{cd} = 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot \overline{cd},$$

а $N = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$, то M се дели на N , ако 11 дели $\overline{cd}$, което е невъзможно, тъй като цифрите c и d са различни.

Ученическо творчество

ЛЯТНА МАТЕМАТИКА

КРИСТИНА НЕДЯЛКОВА, ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

На спортен лагер ходят 105 деца, всяко от които тренира поне един от спортовете гимнастика, плуване, баскетбол и тенис.

Тенисистите не тренират други спортове и са 2 пъти по-малко от останалите.

Баскетбол тренират 30 деца. Третината от тях ходят и на гимнастика, но не на плуване.

Гимнастика и плуване тренират 12 деца, а само гимнастика – 8 деца.

Децата, които тренират и плуване, и гимнастика, и баскетбол, са 3 пъти по-малко от тези, които тренират само плуване.



ИЗБРАНИ СЪСТЕЗАТЕЛНИ ЗАДАЧИ

ЗА 8.–12. КЛАС

8. клас

Задача 1. Всеки от два влака с дължини 150 м и 100 м преминава през тунел с дължина 100 м за 12 секунди. За колко време двата влака ще се разминат?

Задача 2. Да се намерят всички двойки естествени числа, чието произведение е с единица по-голямо от сумата им, умножена по 5.

Задача 3. Да се докаже, че клетките на таблица 4×4 могат да бъдат оцветени в два цвята така, че да няма едноцветна подтаблица 2×2 . Вярно ли е твърдението за таблица 5×5 ? (Подтаблица 2×2 се наричат четирите клетки, получени при пресичане на кои да са два реда и два стълба.)

Задача 4. В клетките на правоъгълна таблица с размери 17×19 са записани две по две различни нечетни естествени числа. Да се докаже, че съществуват две клетки с обща страна, в които са записани числа с разлика, по-голяма или равна на 20.

9. клас

Задача 1. Да се реши в естествени числа системата

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 6 \end{cases}$$

Задача 2. Нека $f(x) = 6x^3 - 23x^2 + 29x - 12$.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 0$.

б) Да се намери най-малката стойност на $A = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, където x_1 , x_2 и x_3 са корените на уравнението $f(x) = 0$.

в) Ако m е най-малката възможна стойност на израза A от подусловие б), да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които $\frac{m}{a} > a$.

Задача 3. Нека k е естествено число. В клетките на правоъгълна таблица с размери $(2k+1) \times (2k+3)$ са записани две по две различни нечетни естествени числа. Да се докаже, че съществуват две клетки с обща страна, в които са записани числа с разлика, по-голяма или равна на $2k+4$.

Задача 4. Върху страната AB на квадрат $ABCD$ е избрана произволна точка E . Пресечната точка на AC и DE е означена с P , а F е точка върху страната BC , за която $PF \perp DE$. Да се докаже, че $EF = AE + CF$.

10. клас

Задача 1. Даден е равнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, с катети 1. Външно за $\triangle ABC$ са построени квадрати $ABLK$, $BCNM$ и $CAQP$. Да се намерят лицето и периметъра на шестоъгълника $KLMNPQ$.

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$. Върху дъгата $\widehat{CD}$ от описаната около квадрата окръжност, не съдържаща точките A и B е взета точка M . Да означим пресечните точки на отсечките AC и BM и на отсечките BD и AM съответно с X и Y . Да се докаже, че $\frac{AX}{CX} + \frac{BY}{DY} = \frac{S_{ABCD}}{2S_{CMD}}$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n , за които съществува просто число p , за което

$$n^8 - 2p^3 = n^4 - 2p.$$

Задача 4. Да се реши в естествени числа уравнението

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x = 7 \cdot 3^y + 1.$$

11. клас

Задача 1. Да се докаже, че ако за ъглите на триъгълник α , β и γ е изпълнено равенството $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$, то един от тези ъгли е равен на 60° .

Задача 2. Ъглополовящите AA_1 и BB_1 в равнобедрения $\triangle ABC$, ($AC = BC$) се пресичат в точка I . Ако $IA_1 = 1$ и радиусът на описаната окръжност около $\triangle ABB_1$ е равен на $\sqrt{3}$, да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

Задача 3. Да се реши в естествени числа уравнението

$$7^x = 2^y \cdot 3^z + 1.$$

Задача 4. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че

$$f(1-x) + 2f(1+x) = x^3 + x - 3$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ е множеството от реалните числа).

12. клас

Задача 1. Точките I и O са съответно център на вписаната и описаната окръжност за триъгълник ABC . Ако $\sphericalangle AIO = 90^\circ$ и $\sphericalangle CIO = 45^\circ$, да се намери отношението $AB : BC : CA$.

Задача 2. Дадена е редицата $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, дефинирана с равенствата: $x_1 = 1$, $x_2 = a$, и $x_{n+2} = ax_{n+1} - x_n$ при $n \geq 1$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a , за които:

- а) $x_{n+3} = x_n$ за всяко $n \geq 1$;
- б) $x_n \geq n$ за всяко $n \geq 1$.

Задача 3. Нека $ABCD$ е квадрат с център O . Върху отсечката BO е избрана точка M . Върху продължението на диагонала AC е взета точка N (A е между N и C), за която $\sphericalangle ABN = \sphericalangle BCM$. Да се намери $\sphericalangle BCM$, ако описаните окръжности около триъгълниците DCM и ABN се допират.

Задача 4. Иван си намислил две различни цели числа в интервала $[1, 2008]$. За един въпрос Петър може да разбере колко от числата на Иван са в интервала $[1, t]$, където t е някакво избрано от него число. Да се докаже, че с 21 въпроса Петър може да познае числата на Иван.

Отговори и решения

8.1. Отговор. $\frac{1}{9}$ минути или $\frac{20}{3}$ секунди.

8.2. Нека търсените числа са m и n . Тогава от условието следва, че $mn = 5(m+n) + 1$. Това уравнение се записва във вида $(m-5)(n-5) = 26$. При $m < n$ имаме две възможности.

Случай 1. $m-5 = 1$, $n-5 = 26$, т.е. $m = 6$, $n = 31$.

Случай 2. $m-5 = 2$, $n-5 = 13$, т.е. $m = 7$, $n = 18$.

8.3. Директно се проверява, че следното оцветяване има исканото свойство (със $\star$ е означен единият цвят, а празните квадратчета са оцветени в другия цвят).

$\star$	$\star$		
$\star$			$\star$
	$\star$		$\star$
$\star$		$\star$	

Да допуснем, че такова оцветяване е възможно за таблица 5×5 . Тогава в първия ред ще има три едноцветни квадратчета, нека те са сини. Без ограничение това са квадратчетата в първите три стълба. В първите три клетки на всеки от втория, третия, четвъртия и петия ред не може да има две сини клетки, защото тогава ще имаме син правоъгълник. Следователно там има поне по две червени клетки. Но тъй като две червени клетки могат да се разположат в три клетки по три начина, а имаме четири реда, то в някои два реда двете червени клетки ще бъдат разположени по един и същи начин. Следователно ще имаме червен правоъгълник, т.е. отговорът за таблица 5×5 е отрицателен.

8.4. Виж решението на задача 9.3 при $k = 8$.

9.1. Отговор. $(x, y, z) = (7, 21, 22), (21, 7, 22), (9, 11, 14)$ и $(11, 9, 14)$.

9.2. Отговор. а) $1, \frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$; б) 11; в) $a \in (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (0, \sqrt{11})$.

9.3. Ще наричаме две клетки с обща страна *съседни*. Да отбележим, че разликата на кои да е две от числата в съседни клетки е четно число. Да допуснем, че най-голямата възможна разлика е $2k + 2$.

Без ограничение на общността можем да считаме, че най-малкото число в таблицата е 1. Нека най-голямото е M . Тъй като числата са различни и нечетни, имаме $M \geq 2(2k+1)(2k+3) - 1$. Да разгледаме клетките, които съдържат числата 1 и M и най-късата верига от съседни клетки, която свързва тези две клетки. Тази верига има най-много $(2k+1-1) + (2k+3-1) = 4k+2$ клетки (без първата) и разликите между числата във всеки две съседни не надминават $2k+2$. Тогава $M \leq 1 + (4k+2)(2k+2) = 1 + 2(2k+1)(2k+2)$, което противоречи на полученото по-горе неравенство за M .

9.4. Нека Q е точка върху BC , за която $CQ = AE$ и C е между Q и B . Тъй като $\triangle DAE \cong \triangle DCQ$, то

$$\sphericalangle EDQ = \sphericalangle EDC + \sphericalangle CDQ = \sphericalangle EDC + \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC = 90^\circ.$$

От друга от $\sphericalangle DPF = \sphericalangle DCF = 90^\circ$ следва, че четириъгълникът $DPFC$ е вписан в окръжност и следователно $\sphericalangle EDF = \sphericalangle PDF = \sphericalangle PCF = 45^\circ$. Сега $\sphericalangle QDF = 45^\circ$ и $\triangle EDF \cong \triangle CDF$. Оттук $EF = FQ = CQ + CF = AE + CF$, което трябваше да се докаже.

10.1. Отговор. $2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.

10.2. От $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = 45^\circ$ следва, че MX е ъглополовяща в $\triangle ACM$. Следователно $\frac{AX}{CX} = \frac{AM}{CM}$. Аналогично $\frac{BY}{DY} = \frac{BM}{DM}$. Оттук

$$\frac{AX}{CX} + \frac{BY}{DY} = \frac{AM \cdot DM + BM \cdot CM}{CM \cdot DM} = \frac{S_{AMD} + S_{BMC}}{S_{CMD}} = \frac{S_{ABCD}}{2S_{CMD}}.$$

10.3. Да запишем даденото равенство във вида

$$2p(p^2 - 1) = n^4(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

и да разгледаме два случая.

Случай 1. Ако $x \geq p$, то $2p(p^2 - 1) = n^4(n^2 - 1)(n^2 + 1) \geq p^4(p^2 - 1)(p^2 + 1)$, откъдето $2 > p^3(p^2 + 1) \geq 2^3(2^2 + 1)$, противоречие.

Случай 2. Ако $n < p$, то $(p, n) = 1$ (да напомним, че p е просто число) и тогава от даденото равенство следва, че p дели $(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Тъй като p е просто число, то дели поне един от множителите $n^2 - 1$ и $n^2 + 1$. Ако p дели $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$, то $p = n + 1$ и следователно $2(p^2 - 1) = (p - 1)^4(p - 2)(p^2 - 2p + 2)$, което е невъзможно (Проверете!).

Нека p дели $n^2 + 1$ и $n^2 + 1 = kp$, където k е естествено число. Тогава имаме $2(p^2 - 1) = k(kp - 2)(kp - 1)^2$. Ако $k \geq 2$, то дясната страна е поне $4(2p - 1)^2 > 2(p^2 - 1)$. При $k = 1$ получаваме $2(p^2 - 1) = (p - 2)(p - 1)^2$ с единствено просто решение $p = 5$, откъдето намираме $n = 2$.

10.4. Да представим уравнението във вида $(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x - 1) = 7 \cdot 3^y$. Да означим с d най-големият общ делител на $x^2 + x + 1$ и $x^2 + 3x - 1$. Тогава последователно имаме $d|(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + x + 1) = 2x - 2$, $d|2(x^2 + x + 1) - x(2x - 2) = 4x + 2$ и $d|(4x + 2) - 2(2x - 2) = 6$. От $d^2|x + 1 = x(x + 1) + 1$ се вижда, че d е нечетно число и следователно $d = 1$ или $d = 3$.

Случай 1. Ако $d = 1$, то единият от множителите $x^2 + 3x - 1$ и $x^2 + x + 1$ е равен на 1 или 7. Първото е невъзможно, а от второто $x = y = 2$.

Случай 2. Ако $d = 3$, то единият от множителите $x^2 + 3x - 1$ и $x^2 + x + 1$ е равен на 3 или 21. Първото е невъзможно, а от второто $x = y = 4$.

11.1. Даденото равенство е еквивалентно на $4 \cos \frac{3\gamma}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\beta}{2} = 0$, откъдето следва твърдението.

11.2. Да означим $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 2\varphi$. От синусовата теорема за $\triangle ABB_1$ имаме $BB_1 = 2\sqrt{3} \sin \varphi$, $AB = 2\sqrt{3} \sin(3\varphi)$ и $AB_1 = 2\sqrt{3} \sin(2\varphi)$. Тъй като $IA_1 = IB_1$ и $\frac{IB_1}{IB} = \frac{AB_1}{AB}$, то $\frac{1}{2\sqrt{3} \sin(2\varphi) - 1} = \frac{\sin \varphi}{\sin(3\varphi)} \iff \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $\varphi = 30^\circ$ и значи $\triangle ABC$ е равностранен.

11.3. Ще решим уравнението в цели неотрицателни числа. Ясно е, че $x \neq 0$. Ако $y \geq 2$, то $7^x - 1$ се дели на 4, което е възможно само при четно

x , т.е. $x = 2x_1$. Тогава $(7^{x_1} - 1)(7^{x_1} + 1) = 2^y \cdot 3^z$, откъдето $7^{x_1} - 1 = 2^p \cdot 3^q$, т.е. получихме решение с $x_1 = \frac{x}{2} < x$.

Ако $z \geq 2$, то $7^x - 1$ се дели на 9, което е възможно само когато x се дели на 3. При $x = 3x_1$ имаме $(7^{x_1} - 1)(7^{2x_1} + 7^{x_1} + 1) = 2^y \cdot 3^z$, откъдето $7^{x_1} - 1 = 2^p \cdot 3^q$, т.е. получихме решение с $x_1 = \frac{x}{3} < x$.

Следователно, ако (x, y, z) е решение на уравнението в цели неотрицателни числа, за което x е най-малко, то $y = 0$ или 1 и $z = 0$ или 1. С директна проверка получаваме решението $x = 1, y = 1, z = 1$. Ако има други решения, то $x = 2$ или $x = 3$ трябва да е решение. При $x = 2$ намираме $y = 4, z = 1$, а $x = 3$ не дава решение. Тъй като $x = 2 \cdot 2 = 4$ също не дава решения, то решенията са $x = 1, y = 1, z = 1$ и $x = 2, y = 4, z = 1$.

11.4. След замяна на x с $-x$ в даденото равенство получаваме, че $f(1+x) + 2f(1-x) = -x^3 - x - 3$ за всяко реално x . Това и даденото равенство образуват система относно $f(1-x)$ и $f(1+x)$, от която $f(1+x) = x^3 + x - 1$. Тъй като $f(x+1) = x^3 + x - 1 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) - 3$, получаваме $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$.

12.1. Отговор. 3 : 4 : 5.

12.2. Отговор. а) $a = -1$; б) $a \geq 2$.

12.3. Нека O_1 и R_1 са центърът и радиусът на описаната окръжност на $\triangle DMC$, а O_2 и R_2 - тези на $\triangle ABN$. Тъй като $\triangle DMC$ е остроъгълен, то O_1 е негова вътрешна точка; O_2 е външна точка за $\triangle ABN$. Тези две точки лежат на симетралата на отсечките AB и CD , чиито среди означаваме с P и Q . Нека $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ABN = \varphi$ и $AB = 1$. Тогава $R_1 = \frac{1}{2 \sin(45^\circ + \varphi)}$,

$R_2 = \frac{1}{2 \sin(45^\circ - \varphi)}$, $O_1Q = R_1 \cos(45^\circ + \varphi) = \frac{1}{2} \cotg(45^\circ + \varphi)$, $O_2P = R_2 \cos(45^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} \cotg(45^\circ - \varphi)$. Тъй като $R_1 + R_2 = O_1O_2 = O_2P + 1 - O_1Q$,

$$1 + \frac{1}{2} (\cotg(45^\circ - \varphi) - \cotg(45^\circ + \varphi)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin(45^\circ + \varphi)} + \frac{1}{\sin(45^\circ - \varphi)} \right)$$

и получаваме $\cos(45^\circ - 2\varphi) = \cos \varphi$. Тъй като $\varphi \in (0, 45^\circ)$ следва, че $\varphi = 15^\circ$.

12.4. Петър може да приложи следната (добре известна) стратегия за търсене на число. С всеки въпрос той разделя на две равни части интервала, в който знае че има число от избраните. Поради неравенството $2008 < 2048 = 2^{11}$, той ще намери едното число с най-много 11 въпроса. При това другото число ще бъде локализирано в интервал с дължина най-много 1004 (ако още на първия въпрос числата се окажат в различни половини). Понеже $1004 < 1024 = 2^{10}$, то още 10 въпроса ще бъдат достатъчни.



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Новоразкритата бакалавърска програма „**Анализ на данни**“, която стартира за първи път през учебната 2022/2023 година, е първа по рода си в България и ще се осъществява съвместно между Софийския университет и Техническия университет – София. Цел на обучението в тази специалност е придобиването на умения и знания свързани с обработка и анализ на големи масиви от данни, с акцент върху познаването и разработката на необходимия за целта софтуер. Нуждата от такъв вид специалисти в съвременния бизнес и индустрия са големи, което е и предпоставка за наличието на много добри перспективи за реализация на завършилите специалността.

2. Бакалавърската програма „**Информационни системи**“ подготвя специалисти, които познават добре всички аспекти на проектирането, разработването, поддържането и използването на различните видове информационни системи. Завършилите успешно тази програма могат да работят като системни и бизнес аналитици; администратори и проектанти на бази от данни; да разработват, тестват и внедряват информационни системи и други приложения; те могат да намерят реализация във всички дейности, свързани с разработката и използването на приложен софтуер.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цвятзнание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024, <i>Д. Грозев, С. Харизанов, С. Боев</i>	3
БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, 2024, <i>Д. Грозев, А. Иванов</i>	14
ДВАДЕСЕТ И ОСМА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА, <i>И. Кортезов, М. Маринов</i>	24
ВЪРХУ ЕДНА ГЕОМЕТРИЧНА ЗАДАЧА, <i>В. Костадинов, А. Бангачев</i>	33
АЛТЕРНАТИВНО РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА 5 ОТ КОНТРОЛНОТО ЗА МОМ'2024, <i>М. Дренчева</i>	37
ЗАДАЧА № 255, <i>Е. Карлов</i>	40
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	44
XXVI МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АКАД. КИРИЛ ПОПОВ“, <i>И. Кортезов</i>	48
ОКОЛО ЕДНА КОНФИГУРАЦИЯ С УСПОРЕДНИК, <i>Д. Георгиев</i>	58
ЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „НАУКА ЗА ДЕЦА“, <i>Н. Събева</i>	62
ДВЕ ПРИМЕРНИ ТЕМИ за школата по математика	67
ЛЯТНА МАТЕМАТИКА, <i>К. Недялкова</i>	71
ИЗБРАНИ СЪСТЕЗАТЕЛНИ ЗАДАЧИ	72

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 28.08.2024 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.