МАТЕМАТИКА

БРОЙ 4
2016 г.
ГОДИНА LV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

Проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи – 0 точки.

1. Стойността на параметъра a от уравнението $x^2 - \sqrt{a-1}x + 4 = 0$, за която сборът от квадратите на реалните корени е 3, е:

А) 11 **Б)** 1

В) 3 **Г)** няма такава стойност

2. Решенията на неравенството $\dfrac{3}{x-1} > -x$ са:

А) $x > 0$ **Б)** $x > 1$ **В)** $x < 1$ **Г)** няма решения

3. Коренът на уравнението $\lg^2(1 + x - |x|) = \lg x$ е:

А) 10 **Б)** 0,1 **В)** 1 **Г)** 0

4. Решенията на системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{array} \right.$$

са:

А) $(3; 2)$, $(-2; -3)$ **Б)** $(2; 3)$, $(-2; -3)$

В) $(3; 2)$, $(-3; -2)$ **Г)** $(3; -2)$, $(-2; 3)$

5. Четири числа образуват геометрична прогресия и сборът на крайните членове е -49, а сборът на средните е 14. Числата са:

А) $-7,\ 14,\ -28,\ 56$ **Б)** $7,\ -14,\ 28,\ -56$

В) $-7,\ 14,\ 28,\ -56$ **Г)** $7,\ 14,\ 28,\ -56$

6. Решенията на уравнението $\dfrac{3x-1}{x+2} = x-1$ са:

А) $2 \pm \sqrt{2}$ **Б)** $3;\ -1$

В) $-1 \pm \sqrt{2}$ **Г)** $1 \pm \sqrt{2}$

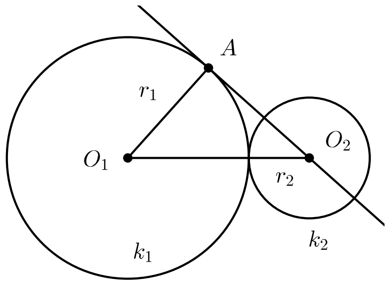
7. Границата $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-4x+3}$ е:

А) $-0,5$ **Б)** $0,5$ **В)** 1 **Г)** 0

8. Дадени са функциите $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + 5x$ и $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 7x$. Коренът на уравнението $f'(x) = g'(x)$ е:

А) 2 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** -1

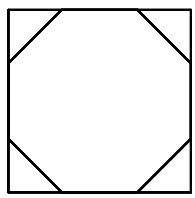
9. Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допират външно. През точката O_2 е построена допирателна към k_1, която я допира в точката A. Ако $O_2A = 3r_2$, то $\dfrac{r_1}{r_2}$ е равно на:



А) 2 **Б)** 4

В) 3 **Г)** 8

10. От квадрат със страна a са изрязани четири равнобедрени правоъгълни триъгълника така, че полученият осмоъгълник е правилен. Неговото лице е:



А) $2a^2(\sqrt{2}-1)$ **Б)** $a^2(\sqrt{2}-1)$

В) $4a^2(\sqrt{2}-1)$ **Г)** $2a(\sqrt{2}-1)$

11. Отношението на лицата на квадрат и равностранен триъгълник, вписани в една и съща окръжност, е:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ **Б)** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **В)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ **Г)** $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$

12. За правоъгълния триъгълник ABC с катети $AC = 18$ и $BC = 24$ е построена ъглополовящата BD. Дължината на BD е:

А) $64\sqrt{10}$ **Б)** $16\sqrt{10}$ **В)** $8\sqrt{10}$ **Г)** $4\sqrt{10}$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен – 0 точки.

13. Коренът на уравнението $\lg(x-2)\cdot\sqrt{x-14}=\sqrt{x-14}$ е: $\boxed{}$

14. Стойността на реалния параметър a, за която уравнението

$$\sqrt{a+1}x^2-4\sqrt{a}x+1=0$$

има два равни корена, е: $\boxed{}$

15. Около квадрата $ABCD$ е описан кръг с лице 8π. Ако K е произволна точка от страната DC, то стойността на $AB.AK\sin\sphericalangle BAK$ е: $\boxed{}$

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 6.

16. Да се реши уравнението $\log^2_{0,5}|x-1|=\log_2|x-1|$.

17. В триъгълника ABC са построени медианите AA_1 и CC_1, които се пресичат в точка O. Намерете отношението $CA_1:AO$, ако $S_{OA_1N}=\dfrac{1}{12}S_{ABC}$, където A_1N е перпендикулярът от A_1 към CC_1.

18. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle B=90^\circ$). С диаметър AB е построена окръжност, която минава през средата на хипотенузата AC. През точка C е построена допирателна към окръжността, която се допира до нея в точка K и $CK=4$. Да се намери AK.

ТЕМА 2: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

Проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи – 0 точки.

1. Решенията на неравенството $\sqrt{2^{x^2}-4}>-3$ са:

А) $x\geqq 2$ **Б)** $x\leqq -2$ или $x\geqq 2$

В) $x\leqq -\sqrt{2}$ или $x\geqq\sqrt{2}$ **Г)** $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

2. Коренът на уравнението $3^{x-\log_3 2} - 9^x = -\dfrac{1}{2}$ е:

А) 1 **Б)** 0 **В)** 2 **Г)** 3

3. Третият член на безкрайна геометрична прогресия с частно $|q| < 1$, чийто сбор е 1,6, а вторият член е $-0{,}5$, е равен на:

А) $\dfrac{1}{8}$ **Б)** $-\dfrac{1}{8}$ **В)** $\dfrac{5}{8}$ **Г)** $-\dfrac{1}{4}$

4. Ако $\sin\alpha - \cos\alpha = p$, то $\sin 2\alpha$ е равно на:

А) $1-p$ **Б)** $1-p^2$ **В)** $\dfrac{1-p^2}{2}$ **Г)** p^2-1

5. След опростяване на израза $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}}$ при $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ се получава:

А) $\dfrac{\sin 2\alpha}{4}$ **Б)** $\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ **В)** $-\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ **Г)** $-\sin 2\alpha$

6. Ако $x-y=4$ и $xy=3$, то x^3y+xy^3 е равно на:

А) 66 **Б)** 22 **В)** 30 **Г)** 10

7. Стойностите на x, за които стойностите на функцията $y=x^2+5x+6$ са от интервала $[6;\ 12]$, са

А) $x \geqq 0$ **Б)** $x \leqq -5$ и $x \geqq 0$

В) $-6 \leqq x \leqq 1$ **Г)** $-6 \leqq x \leqq -5$ или $0 \leqq x \leqq 1$

8. Границата $\lim\limits_{x\to -0{,}5} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$ е:

А) $\dfrac{7}{20}$ **Б)** $\dfrac{7}{22}$ **В)** 0 **Г)** $-\dfrac{7}{22}$

9. Лицето на равнобедрен триъгълник е $\dfrac{1}{3}$ от лицето на квадрат със страна, равна на основата на триъгълника. Ако бедрата са с 1 cm по-къси от основата на триъгълника, то дължината на основата е:

А) 6 cm **Б)** 5 cm **В)** 7 cm **Г)** 8 cm

10. Обиколката на ромб е 20 dm, а диагоналите му се отнасят както 3 : 4. Лицето на ромба е:

А) 12 dm^2 **Б)** 24 dm^2 **В)** 6 dm^2 **Г)** 48 dm^2

11. Даден е равнобедрен трапец с височина h. Бедрото на трапеца се вижда от центъра на описаната около трапеца окръжност под ъгъл 60°. Лицето на трапеца е:

А) $2h^2\sqrt{3}$ **Б)** $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{2}$ **В)** $h^2\sqrt{3}$ **Г)** $3h^2$

12. Лицето на правоъгълен триъгълник е $2\sqrt{3}$ cm^2. Височината към хипотенузата разделя правия ъгъл в отношение $1 : 2$. Височината е равна на:

А) 3 cm **Б)** $\sqrt{3}$ cm **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm **Г)** $2\sqrt{3}$ cm

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен – 0 точки.

13. Ако числата $x,\ 3,\ y$ образуват геометрична прогресия и $x^4 = y\sqrt{3}$, то числата x и y са равни на: $\boxed{}$

14. Стойността на израза $3^{2\log_9 \frac{1}{3}} + (\sqrt{5}+1)^{\log_{\frac{4}{\sqrt{5}-1}} \frac{2}{3}} + \log^2_{343} 27$ е: $\boxed{}$

15. Двуцифреното число, което е с 36 по-голямо от сбора на своите цифри и с 4 по-голямо от сбора на квадратите им, е: $\boxed{}$

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 6.

16. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2$ в интервала $[-2;\ 4]$.

17. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$). Ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ е перпендикулярна на медианата към хипотенузата и я пресича в точка K. Да се намери дължината на AK, ако лицето на описания около $\triangle ABC$ кръг е 16π.

18. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle A = 60^\circ$, пресечна точка на диагоналите O и среда на страната AB – точката K. Да се намери отношението на радиуса на описаната около четириъгълника $AKOD$ окръжност и радиуса на вписаната в ромба окръжност.

ТЕМА 3 ПО ФОРМАТА НА ДЗИ

Стойчо Стоев

Отбележете верните отговорите на задачите от 1. до 20. включително.

1. Изразът $\dfrac{3}{5\sqrt{3}} : \left(\dfrac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}\right)$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{25}{11}$ **Б)** $\dfrac{11}{25}$ **В)** $\dfrac{11}{5\sqrt{3}}$ **Г)** $\dfrac{5\sqrt{3}}{11}$

2. Координатите на общите точки на графиките на функциите $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ и $y = \sqrt{2x+3}$ са:

А) $(1;-1)\,,\,(3;-3)$ **Б)** $(-1;-1)\,,(-3;3)$

В) $(-1;1)\,,\,(3;3)$ **Г)** $(1;1)\,,(3;3)$

3. Числата, за които е вярно равенството $3^x - 8.3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0$, са:

А) 2 и $2\log_3 5$ **Б)** 2 и $2\log_5 3$ **В)** 2 и $\log_5 3$ **Г)** 1 и $\log_3 25$

4. Решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{x+3y+6} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 1 \end{array} \right.$$

са:

А) $\left(-\dfrac{5}{7}; \dfrac{3}{7}\right)$ **Б)** $\left(\dfrac{5}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$ **В)** $\left(-\dfrac{5}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$ **Г)** $\left(\dfrac{5}{7}; \dfrac{3}{7}\right)$

5. Стойността на израза $\sqrt{18} - \sqrt{72}\sin^2 \dfrac{13\pi}{8}$ е:

А) -3 **Б)** -2 **В)** -6 **Г)** 3

6. Да се намерят a_1 и d в аритметична прогресия, за която

$$\left| \begin{array}{l} a_4 : a_6 = -1 \\ a_2.a_8 = -1 \end{array} \right. .$$

А) $\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ **Б)** $\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

В) $\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ **Г)** $\left(\dfrac{4}{3}; \pm\dfrac{1}{3}\right), \left(\pm\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$

7. Ако $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=a$, то $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$ е равно на:

А) $2a$ **Б)** $\dfrac{a}{2}$ **В)** $2-a$ **Г)** $2+a$

8. Ако $\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{4}$, то $\cos(\alpha+\beta)$ е равно на:

А) $\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$ **Б)** $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$

В) $\dfrac{6+\sqrt{35}}{12}$ **Г)** $\dfrac{6-\sqrt{35}}{12}$

9. В тъпоъгълния триъгълник ABC е дадено, че $AB=BC$, $AB=10$ и височината $CH=6$. Косинус от $\sphericalangle ABC$ е равен на:

А) $-0{,}8$ **Б)** $-0{,}6$ **В)** $\dfrac{3}{5}$ **Г)** $\dfrac{4}{5}$

10. През точка C, външна за окръжността $k(O,R=OA)$, е построена допирателна CA и секуща CO, а BD е диаметър и $B,D\in CO$ (B е между C и D). Ако $\sphericalangle ACO=24^\circ$, то градусната мярка на дъгата е:

А) 114° **Б)** 138° **В)** 156° **Г)** 246°

11. Ако върховете на четириъгълника $ABCD$ имат координати $A(6;3)$, $B(9;4)$, $C(10;7)$, $D(7;6)$, то S_{ABCD} е равно на:

А) $2\sqrt{2}$ **Б)** 8 **В)** $4\sqrt{2}$ **Г)** 4

12. Ако $ABCD$ е вписан четириъгълник и $\sphericalangle A:\sphericalangle B:\sphericalangle C=2:1:3$, то радианната мярка на $\sphericalangle D$ е:

А) $\dfrac{\pi}{5}$ **Б)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **В)** $\dfrac{3\pi}{5}$ **Г)** $\dfrac{4\pi}{5}$

13. В равнобедрен трапец $ABCD$ голямата основа AB е диаметър на описаната около него окръжност, а $AC=2\sqrt{5}$ и $\sin(\sphericalangle ABC)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Лицето на трапеца е:

А) 3 **Б)** 5 **В)** 8 **Г)** 12

14. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C=90^\circ$) е вписана окръжност, която се допира до AC и BC съответно в точките M и N. Ако $AC=4$ и $BC=3$, то дължината на MN е:

А) 1 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** 2 **Г)** $2\sqrt{2}$

15. За $\triangle ABC$ е дадено, че височината $CD = 2$, $\sphericalangle ACD = 60^\circ$ и $\sphericalangle BCD = 45^\circ$. Радиусът на вписаната в ABC окръжност е равен на:

А) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ **Б)** $3 - \sqrt{2}$

В) $3 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ **Г)** $6 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

16. Даден е четириъгълник $ABCD$, в който $BC = 2$, $BD = 10$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 90^\circ$ и $\sphericalangle BCD = 135^\circ$. Лицето на четириъгълника $ABCD$ е:

А) 10 **Б)** 20 **В)** 30 **Г)** 40

17. На една пейка има 10 места. По колко начина 6 жени и 4 мъже могат да седнат на нея, ако общият брой на жените е 9, а на мъжете – 8.

А) 5880.10! **Б)** 5881.10! **В)** 5878.10! **Г)** 6042.9!

18. В зала има 13 реда и на всеки ред има по 13 стола. Редовете са номерирани последователно с естествените числа от 1 до 13 , а столовете от k –тия ред имат номера последователно от $\overline{k1}$ до $\overline{k13}$. Каква е вероятността, ако седнете на произволен стол, сборът от номерата на реда и на стола да е нечетно число?

А) $\dfrac{6}{13}$ **Б)** $\dfrac{60}{169}$ **В)** $\dfrac{84}{169}$ **Г)** $\dfrac{96}{169}$

19. Ако гросмайстор А играе с белите фигури, той побеждава гросмайстор Б с вероятност 0,52. Ако А играе с черните фигури, то А побеждава Б с вероятност 0,3. Гросмайсторите А и Б играят две партии, като във втората партия сменят цвета на фигурите. Намерете вероятността А да спечели и в двете партии.

А) 0,22 **Б)** 0,82 **В)** 0,156 **Г)** $\dfrac{26}{35}$

20. На изпит по планиметрия на ученик се дава един въпрос от списъка с изпитни въпроси. Вероятността този въпрос да е по темата „Вписана окръжност“ е 0,2, а да е по темата „Успоредник“ – 0,15. Няма въпроси, в които се разглеждат и двете теми. Намерете вероятността на изпита ученикът да получи въпрос по една от тези две теми.

А) 0,75 **Б)** 0,05 **В)** 0,03 **Г)** 0,35

Напишете отговорите на задачите от 21. до 25.

21. Да се реши уравнението:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+2015}\right)=337.$$

22. Окръжностите $k_1(O_1, R_1 = 4)$ и $k_2(O_2, R_2 = 1)$ се допират външно в точка K. Правата ABc е допира до k_1 в точка A и до k_2 в точка B. Правата BK пресича втори път k_1 в точка D, а правата AK пресича втори път k_2 в точка C. Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.

23. Да се реши неравенството

$$\frac{(2x-1)(7x+11)}{-x^2+x+2} \leq 2x-1.$$

24. Точките M и N делят страната AC на $\triangle ABC$ на три части, всяка от които е с дължина 2, като $AB \perp BM$, $BC \perp BN$. Намерете лицето на $\triangle ABC$.

25. Да се намери най-голямата стойност на израза $x - y$ за всички реални числа (x, y) удовлетворяващи равенството $x^2 + 3y^2 = 4$.

Напишете пълните решения на задачите от 26. до 28.

26. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^2 + 2a^2 + 1 = 3a\sqrt{x^2+1}$$

има точно три различни реални корени.

27. По колко начина 10 неразличими монети от по 1 лев могат да се разпределят между трима ученика Асен, Борис и Васил, като всеки от тях може да получи от нула до десет монети?

28. В окръжност k са построени хордите AA_1, BB_1, CC_1, които се пресичат в една точка T. Ако $\overset{\frown}{AC_1}= 150^\circ$, $\overset{\frown}{AB}= 30^\circ$, $\overset{\frown}{CA_1}= 60^\circ$, $\overset{\frown}{A_1B_1}= 30^\circ$ и $\overset{\frown}{B_1C_1}= x^\circ$, намерете x. ($\overset{\frown}{AC_1}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CA_1}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ и $\overset{\frown}{B_1C_1}$ са по-малките дъги.)

ВСЕРУСИЙСКА ОЛИМПИАДА 2016

Петър Бойваленков, ИМИ–БАН, София
Румяна Караджова, СМГ „П. Хилендарски“, София

На 21–29.04.2016 г. в Санкт-Петербург се проведе заключителният етап на Всерусийската олимпиада по математика. Участваха 388 ученика от цяла Русия, както и отбори от България и Китай.

Нашата страна беше представена от втория си отбор (класираните от 7 до 12 място на контролните за БОМ) – Калоян Алексиев (СМГ, учител Румяна Караджова), Иван Ганев (АК, учител Десислава Йорданова), Константин Гаров (ПМГ Бургас, учител Динко Раднев), Георги Димитров (СМГ, учител Румяна Караджова), Габриел Костадинов (ПМГ Силистра, учител Галина Тодорова и Теодор Димитров) и Иван-Александър Мавров (СМГ, учител Петя Тодорова). Първите петима участваха в състезанието за 10-ти клас, а Иван-Александър се яви на темата за 9-ти клас. Ръководители на отбора бяха пишещите тези редове.

Председател на журито беше академик Юрий Матиясевич, известен с решаването на 10-тата задача на Хилберт преди повече от 40 години. Един от основните организатори, филдсовият медалист проф. Станислав Смирнов, показа топло отношение към българския отбор, като заедно с Максим Пратусевич, директор на прочутото 239-то училище (сега Президентски физико-математически лицей) спомогна за постигането на преференциални цени за настаняването ни в хотел Москва. Богатата културна програма включваше обзорна автобусна екскурзия, посещение на Ермитажа, на Петропавловската крепост и на опера, както и достатъчно свободно време за разглеждане на други забележителности на Санкт-Петербург.

Въпреки непривичните за нашите ученици теми, те се справиха отлично, като всички станаха призьори[1] на Всерусийската олимпиада. Резултатите ни по задачи са в следващата таблица.

Клас	Име/Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Общо
10	Калоян Алексиев	7	7	6	1	3	7	0	0	31
10	Иван Ганев	7	6	7	0	7	0	7	0	34
10	Константин Гаров	7	7	0	1	7	7	2	0	31
10	Георги Димитров	7	7	0	7	7	6	1	0	35
10	Габриел Костадинов	7	7	7	1	7	7	1	0	37
9	Иван-Александър Мавров	7	7	0	7	7	6	7	0	41

[1]На Всерусийска олимпиада се връчват три вида награди – победител, призьор и почетна грамота.

Закриването на олимпиадата се състоя във Филхармонията на Санкт-Петербург. Участието на председателя на Държавната Дума на Русия г-н Сергей Наришкин показа още веднъж вниманието към математиката и подчерта поставянето ѝ като приоритет[2] в руското образование.

Предлагаме ви условията на задачите от олимпиадата, както и решения за 9. и 10. клас.

9. клас

Задача 9.1. (Г. Жуков) На пазара работи пункт за размяна на килими. Срещу килим с размери $a \times b$, клиент може да получи или килим с размери $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ или два килима с размери $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при всяка такава размяна, числото c се избира от клиента). Пътешественик разказал, че първоначално е имал един килим със страни, по-големи от 1, а след краен брой такива размени се е сдобил с няколко килима, за всеки от които едната страна е по-голяма от 1, а другата – по-малка от 1. Възможно ли е тази история да е вярна? (Ако клиентът желае, килим с размери $a \times b$ може да се счита за килим с размери $b \times a$.)

Задача 9.2. (И. Богданов, П. Кожевников) Окръжност ω се допира до раменете на ъгъл BAC в точки B и C. Права ℓ пресича отсечките AB и AC съответно в точки K и L. Окръжността ω пресича ℓ в точки P и Q. Точките S и T са избрани от отсечката BC така, че $KS \| AC$ и $LT \| AB$. Да се докаже, че точките P, Q, S и T лежат на една окръжност.

Задача 9.3. (А. Кузнецов) Нека $1 = d_1 < \cdots < d_s = N$ са всички естествени делители на естественото число $N > 1$. Да се намерят всички стойности на N, за които

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \cdots + (d_{s-1}, d_s) = N - 2$$

(както обикновено, с (a, b) е означен най-големият общ делител на числата a и b).

Задача 9.4. (С. Берлов) От правоъгълна таблица 100×100 са изрязани 1950 домина (правоъгълници 1×2 или 2×1). Да се докаже, че от останалите части може да се изреже тетрамино , евентуално ротирано. (Ако тетрамино вече се е получило, то се счита за изрязано.)

Задача 9.5. (Н. Агаханов) От цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ са съставени девет (не непременно различни) деветцифрени числа, като всяка цифра се

[2]Разбира се, математиката е приоритет и в много други страни. За съжаление, в някои от тях това са само думи, а не дела.

използва във всяко число точно по веднъж. С колко най-много нули може да завършва сумата на тези девет числа?

Задача 9.6. (С. Берлов) Квадрат е разбит на $n^2 \geq 4$ правоъгълника чрез $2n-2$ прави, $n-1$ от които са успоредни на едната страна на квадрата, а останалите $n-1$ са успоредни на другата му страна. Да се докаже, че е възможно от правоъгълниците да се изберат $2n$ такива, че за всеки два от избраните единият може да се разположи в другия (евентуално след завъртане).

Задача 9.7. (И. Митрофанов) Окръжност ω е вписана в триъгълник ABC, за който $AB < AC$. Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ се допира до страната BC в точка A'. Точка X от отсечката $A'A$ е такава, че отсечката $A'X$ не пресича ω. Допирателните от X към ω пресичат отсечката BC в точките Y и Z. Да се докаже, че сумата $XY + XZ$ не зависи от избора на точката X.

Задача 9.8. (А. Храбров) Сумата на положителните числа a, b, c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

10. клас

Задача 10.1. (А. Грибалко) В НБА има 30 отбора, всеки от които трябва да изиграе за един сезон 82 мача. Възможно ли е отборите да бъдат разделени на две конференции (не непременно с равен брой отбори) – Източна и Западна, и разписанието на мачовете да се направи така, че броят на мачовете между отбори от различни конференции да е равен на половината от всички мачове?

Задача 10.2. (А. Кузнецов) Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка P. Точка Q от отсечката BC е такава, че $PQ \perp AC$. Да се докаже, че правата, минаваща през центровете на описаните около триъгълниците APD и BQD окръжности, е успоредна на правата AD.

Задача 10.3. (А. Голованов) Нека $f(x)$ е полином от трета степен с реални коефициенти. Тройката (a, b, c) от различни реални числа се нарича *циклична*, ако $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Оказало се, че съществуват осем циклични тройки (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в които участват 24 различни реални числа. Да се докаже, че измежду осемте суми $a_i + b_i + c_i$ има поне три различни.

Задача 10.4. (С. Берлов, Ф. Петров) В изпъкнал 100-ъгълник M е избрана точка X, нележаща на страна или диагонал на M. В началото няма маркирани върхове. Петя и Вася поред маркират (немаркирани дотогава) върхове на M, като на първия ход Петя маркира два върха, а след това всеки от тях маркира по един връх, когато е на ход. Губи този, след чийто ход точката X се е оказала във вътрешността на многоъгълник с маркирани върхове. Да се докаже, че Петя има печеливша стратегия.

Задача 10.5. Виж Задача 9.5.

Задача 10.6. Виж Задача 9.6.

Задача 10.7. (И. Богданов) На дъската са написани четири две по две различни цели числа, всяко от които има абсолютна стойност, по-голяма от един милион. Известно е, че не съществува естествено число, по-голямо от 1, което да дели всяко от четирите написани числа. Петя записал в тетрадката си шестте суми на по две от числата от дъската, след това разбил тези шест суми на три двойки и умножил числата във всяка двойка. Възможно ли е тези три произведения да се окажат равни?

Задача 10.8. (М. Кунгожин) Нека ABC е остроъгълен триъгълник, в който $AC < BC$, а M е средата на страната AB. В окръжността Ω, описана около $\triangle ABC$, е построен диаметърът CC'. Правата CM пресича правите AC' и BC' съответно в точките K и L. Правата AB, перпендикулярът от K към правата AC' и перпендикулярът от L към правата BC' определят триъгълник Δ. Да се докаже, че окръжността, описана около Δ, се допира до окръжността Ω.

11. клас

11.1. Виж Задача 10.1.

11.2. (П. Кожевников) Отсечките A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в точка P, но не лежат в една равнина. Нека O_{ijk} е центърът на сферата, минаваща през точките A_i, B_j, C_k и P. Да се докаже, че правите $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ се пресичат в една точка.

11.3. (Д. Храмцов) Върху таблица 100×100 са поставени няколко непресичащи се равнобедрени правоъгълни триъгълника с катети 1, като всеки триъгълник покрива точно половин клетка. Оказало се, че всяка страна на клетка (включително и граничните) е покрита от точно един катет на триъгълник. Да се намери максималният възможен брой на клетките, които не съдържат нито един триъгълник.

11.4. (А. Глазирин) Тримерното пространство е разбито на тетраедри и октаедри с равнини с уравнения $x \pm y \pm z = n$ (за всички цели n). Нека точката (x_0, y_0, z_0) с рационални координати не лежи в никоя от равнините на разбиването. Да се докаже, че съществува естествено число k, за което точката (kx_0, ky_0, kz_0) лежи строго вътре в някой от октаедрите от разбиването.

11.5. (И. Богданов) Нека n е естествено число. Върху всяка от $2n+1$ карти е написано по едно ненулево цяло число, като сумата на всички написани числа не е нула. С тези карти трябва да се заменят звездичките в израза $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \cdots + *x + *$ така, че полученият полином да няма *цели* корени. Винаги ли е възможно това?

11.6. (Ф. Петров) В една страна има $n > 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни директни авиолинии, като между всеки два града съществува единствен маршрут от авиолиния (евентуално с прекачвания). Кметът на всеки град X преброил номериранията на градовете с числата от 1 до n, за които във всеки маршрут, започващ от X, номерата на градовете са в растящ ред. Всички кметове, освен един, забелязали, че техните резултати се делят на 2016. Да се докаже, че и резултатът на последния кмет също се дели на 2016.

11.7. (А. Храбров) Сумата на положителните числа a, b, c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

11.8. (А. Якубов) В триъгълника ABC медианите AM_A, BM_B и CM_C се пресичат в точка M. Окръжността Ω_A минава през средата на отсечката AM и се допира до отсечката BC в точка M_A. Аналогично се дефинират окръжностите Ω_B и Ω_C. Да се докаже, че окръжностите Ω_A, Ω_B и Ω_C имат обща точка.

Решения на задачите за 9. и 10. клас.

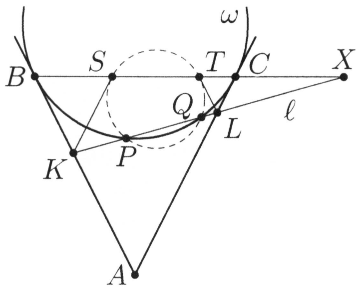
9.1. Отговор – пътешественикът послъгва.

Да наречем *големи* килимите със страни, по-големи от 1, и *малки* тези, чиито страни са по-малки от 1. В началото пътешественикът имал един голям килим. Ще докажем, че общият брой на големите и малките килими не намалява. Достатъчно е да разгледаме случаите, в които пътешественикът заменя голям и малък килими.

При замените от първия вид голям килим се сменя с малък и обратно, т.е. общият брой не намалява.

Да разгледаме замените от втория вид. При замяна на голям килим $a \times b$ пътешественикът ще получи килими $a_1 \times b$ и $a_2 \times b$. Ако $0 < a_1, a_2 \leqq 1$, то $a = a_1 a_2 \leqq 1$, което е невъзможно. Тъй като $b > 1$, поне един от новите килими ще е голям. Аналогично, при замяна на малък килим поне един от новите килими ще е малък.

9.2. Ако $\ell \parallel BC$, твърдението е очевидно поради симетрията относно симетралата на BC. Нека правите ℓ и BC се пресичат в точка X. От успоредността имаме $\dfrac{XB}{XT} = \dfrac{XK}{XL} = \dfrac{XS}{XC}$, откъдето $XT \cdot XS = XB \cdot XC$. Тъй като точките B, C, P и Q лежат върху ω, имаме $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$. Тогава $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$, което означава, че точките P, Q, S и T лежат на една окръжност.



Забележка. Може да се докаже, че получената окръжност се допира до правите KS и LT съответно в точките S и T.

9.3. Отговор – $N = 3$.

Да отбележим, че $d_{s+1-i} = N/d_i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, s$.

Числото $d_{i+1} - d_i$ се дели на (d_i, d_{i+1}), откъдето $(d_i, d_{i+1}) \leq d_{i+1} - d_i$. Да означим $r_i = (d_{i+1} - d_i) - (d_i, d_{i+1}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, s-1$. От условието следва, че

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \cdots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \cdots + (d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

От тези равенства получаваме $r_1 + \cdots + r_{s-1} = 1$. Следователно $r_k = 1$ за някое k, а $r_i = 0$ за $i \neq k$.

От равенството $1 = (d_{k+1} - d_k) - (d_k, d_{k+1})$ следва, че $(d_k, d_{k+1}) | 1$, откъдето $(d_k, d_{k+1}) = 1$ и $d_{k+1} - d_k = 2$. В частност d_k и d_{k+1} са нечетни.

Тъй като d_k и d_{k+1} са последователни делители на N, то и $\dfrac{N}{d_{k+1}}$ и $\dfrac{N}{d_k}$ са такива. Нека $\dfrac{N}{d_{k+1}} = d_m$ и $\dfrac{N}{d_k} = d_{m+1}$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}(d_m, d_{m+1}) &= \frac{d_m d_{m+1}}{[d_m, d_{m+1}]} = \frac{N}{d_k d_{k+1}} \cdot \frac{N}{[d_m, d_{m+1}]} \leq \frac{N}{d_k d_{k+1}} \\ &< \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m\end{aligned}$$

(използвахме, че N е общо кратно на d_m и d_{m+1} и следователно $N \geq [d_m, d_{m+1}]$). От полученото неравенство $(d_m, d_{m+1}) < d_{m+1} - d_m$ следва, че $r_m > 0$, т.е. $k = m$ (и следователно $s = 2k$).

Получихме $d_{k+1} = \dfrac{N}{d_k}$, т.е. $N = d_k d_{k+1}$ е нечетно число. Но тогава $d_{s-1} \leq \dfrac{N}{3}$, откъдето $(d_{s-1}, d_s) \leq d_{s-1} \leq \dfrac{N}{3}$. Следователно е в сила неравенството $1 \geq r_{s-1} \geq \dfrac{2N}{3} - \dfrac{N}{3} = \dfrac{N}{3}$, т.е. $N \leq 3$. Лесно се вижда, че единствената останала възможност $N = 3$ е решение на задачата.

9.4. Да разгледаме изрязването на домината едно по едно. Във всеки момент от процеса на изрязването да наречем *цена* на всяка неизрязана още клетка броят на нейните неизрязани съседи (по страна), намален с 2. Тогава началната цена на всяка клетка е $2 - t$, където t е броят на единичните отсечки от контура на квадрата, които са гранични за тази клетка. Следователно общата начална цена е $2 \cdot 100^2 - 400 = 19\,600$.

Да проследим как се променя общата цена S на всички неизрязани клетки след изрязване на домино. Изрязването премахва две клетки с цена най-много $2 + 2 = 4$) и намалява с 1 цената на клетките, граничещи с изрязаното домино (които са не повече от шест). Следователно общата цена S намалява най-много с 10.

След изрязването на 1950 домина S ще е поне $19\,600 - 1950 \cdot 10 = 100$. Следователно ще има неизрязана клетка k с положителна цена. Това означава, че k има поне три неизрязани съседа и образува, заедно с тези три съседа, исканото тетрамино.

Забележка. Решението на Иван-Александър се основава на сходно преброяване, като предварително се отделя ивица с ширина 2 по контура на квадрата.

9.5. Първо ще докажем, че сумата не може да завършва с 9 нули. Всички съставени по описания начин числа се делят на 9 (защото сумата от цифрите им се дели на 9). Следователно и сумата им се дели на 9. Най-малкото естествено число, което се дели на 9 и завършва на девет нули, е $9 \cdot 10^9$. Тогава нашата сума е поне $9 \cdot 10^9$, откъдето следва, че поне едно от числата е по-голямо от 10^9, което е невъзможно.

Пример за числа от разглеждания вид със сума, завършваща на 8 нули, се дава например с осем числа 987654321 и числото 198765432 (сумата им е $81 \cdot 10^8$).

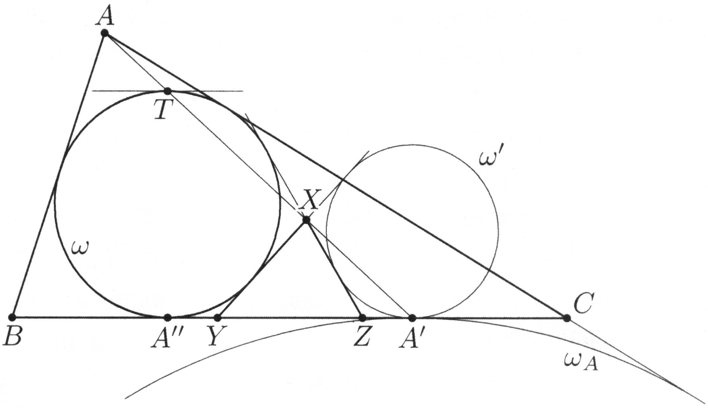
9.6. Ще казваме, че двойка правоъгълници е *добра*, ако е възможно единият ит тях да се разположи в другия.

Нека хоризонталната страна на квадрата се е разбила на отсечки с дължини $a_1, \ldots, a_n$, а вертикалната – на отсечки с дължини $b_1, \ldots, b_n$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ и $b_1 \geq \cdots \geq b_n$ (Защо?). Да означим с $Q_{i,j}$ правоъгълника от рабиването със страни a_i и b_j и да отбележим, че при $i \leq k$ и $j \leq \ell$ двойката $(Q_{i,j}, Q_{k,\ell})$ е добра.

Тъй като $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$, съществуват различни индекси i и j, за които $a_i \geq b_i$ и $a_j \leq b_j$. Можем да считаме, че $i < j$. Тогава съществува индекс $k \in [i, j]$, за който $a_k \leq b_k$ и $a_{k-1} \geq b_{k-1}$.

Твърдим, че правоъгълниците $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \ldots, Q_{1,k-1}, Q_{2,k-1}, \ldots, Q_{k,k-1}$, заедно с $Q_{k-1,k}, Q_{k,k}, \ldots, Q_{k,n}, Q_{k+1,n}, \ldots, Q_{n,n}$, вършат работа. Броят им е $2(k-1)+2(n-k+1) = 2n$. Всяка двойка, освен $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, е добра по забележката от по-горе. Последната двойка също е добра, защото $a_k \leq b_k$ и $b_{k-1} \leq a_{k-1}$.

9.7. Ще считаме, че точката Y е по-близо до B, отколкото Z, както и че страната BC е хоризонтална, а A е над нея.



Да означим с ω_A външновписаната окръжност към страната BC в $\triangle ABC$, а с ω' външновписаната окръжност към страната XZ в $\triangle XYZ$. Нека ω се допира до BC в точка A''. Да означим с T пресечната точка на AA' и ω, която е по-близо до A. Хомотетията с център A, изпращаща ω в ω_A, изпраща T в A' и следователно допирателната към ω в точка T е успоредна на BC.

Тъй като окръжностите ω и ω' са вписани във вертикални ъгли, образувани от правите XY и XZ, съществува хомотетия с център X (и отрицателен коефициент), изпращаща ω в ω'. Нека при тази хомотетия точката T да отива в точка T'. Тогава T' лежи върху права AA', допирателна към ω' в T' и успоредна на BC, и ω' е разположена над тази допирателна. Такава допирателна към ω' е правата BC и следователно T' лежи върху BC, т.е. ω' се допира до BC в точка A'.

Да означим с p полупериметъра на $\triangle XYZ$. Тъй като окръжностите ω и ω' са външновписани за този триъгълник, имаме $ZA' = YA'' = p - YZ$.

Следователно

$$XY + XZ = 2p - YZ = 2(p - YZ) + YZ = ZA' + YZ + YA'' = A'A'',$$

което не зависи от избора на точката X.

Забележка. Фактът, че ω' се допира до BC в точка A' може да се докаже и с помощта на теоремата за трите хомотетии за окръжностите ω, ω_A и ω'. Центровете на тези хомотетии са A, X и някаква точка Q, лежаща върху BC (понеже BC е обща вътрешна допирателна за ω_A и ω'). Получаваме, че Q лежи върху правата AX, т.е. съвпада с A'. Тъй като ω_A се допира до BC в $Q = A'$, то и ω' също се допира до BC в тази точка.

9.8. Даденото неравенство е еквивалентно на

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 1. \tag{$*$}$$

Тъй като неравенството е симетрично, можем да считаме, че $a \geq b \geq c \geq d$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за числата a, b и $c + d$ имаме

$$ab(c + d) \leq \left(\frac{a + b + (c + d)}{3}\right)^3 = 1$$

откъдето $a^2b^2(c + d)^2 \leq 1$.

Следователно за доказване на $(*)$ е достатъчно да покажем, че

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq a^2b^2(c + d)^2.$$

След разкриване на скобите и опростяване получаваме неравенството

$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 2a^2b^2cd,$$

което следва от събиране на двете очевидни неравенства $a^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$.

Забележка. Ако допуснем неотрицателни стойности за променливите в $(*)$, равенство ще се достига точно когато три от числата са равни на 1, а четвъртото е равно на 0.

10.1. Отговор – не е възможно.

Да означим с x и y броя на мачовете изиграни съответно вътре в Източната и Западната конференции, а с z броя на мачовете между отбори от различни конференции. Трябва да докажем, че равенството $z = \dfrac{x + y + z}{2}$ е невъзможно.

Всеки от отборите (k на брой) от Източната конференция участва в 82 мача и следователно $82k = 2x + z$ (коефициентът 2 се появи поради факта, че всеки вътрешен мач от преброен и за двата участващи в него отбора). Тогава числото $z = 82k - 2x$ е четно. От друга страна, преброяването на общия брой мачове дава равенството

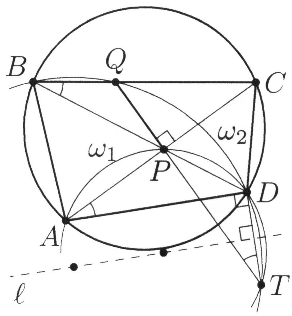
$$x + y + z = \frac{30 \cdot 82}{2},$$

откъдето числото

$$\frac{x + y + z}{2} = 15 \cdot 41$$

е нечетно.

10.2. Нека точката $T \in QP$ е такава, че $DT \perp DA$. Тъй като $\sphericalangle APT = 90^\circ = \sphericalangle ADT$, точките A, P, D и T лежат на една окръжност. Следователно центърът на окръжността ω_1, описана около $\triangle APD$, лежи на симетралата ℓ на отсечката DT.



Тъй като четириъгълникът $ABCD$ е вписан, имаме $\sphericalangle QBD = \sphericalangle PAD$. Четириъгълникът $APDT$ също е вписан, откъдето $\sphericalangle PAD = \sphericalangle QTD$. Получихме $\sphericalangle QBD = \sphericalangle PAD = \sphericalangle QTD$, което означава, че точките B, Q, D и T лежат на една окръжност. Тогава центърът на окръжността ω_2, описана около $\triangle BQD$, също лежи на симетралата ℓ на отсечката DT. Следователно ℓ минава през центровете на ω_1 и ω_2. Тъй като $\ell \perp DT$ и $AD \perp DT$, получаваме $\ell \parallel AD$, което и трябваше да се докаже.

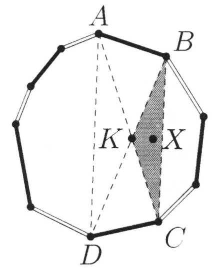
10.3. Да допуснем противното – тогава има четири цикъла (a_i, b_i, c_i) с еднаква сума s. За всеки от тези цикли имаме

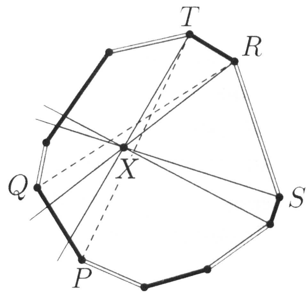
$$s = a_i+b_i+c_i = a_i+f(a_i)+f(f(a_i)) = b_i+f(b_i)+f(f(b_i)) = c_i+f(c_i)+f(f(c_i)).$$

Следователно всичките 12 числа от нашите четири цикъла са корени на полинома $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s$. Но тези 12 числа са две по две различни по условие, а $g(x)$ е от девета степен, противоречие.

10.4. Да оцветим страните на M в черно и бяло така, че всеки две съседни страни да са разноцветни. Да разгледаме две едноцветни страни

AB и CD, образуващи изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Нека диагоналите AC и BD се пресичат в точка K и да предположим, че X лежи в триъгълника KBC. Тогава Петя може да спечели, избирайки на първия си ход върховете B и C. Действително, след този ход играчите могат да избират (ако не искат да загубят на момента) само върхове, лежащи в полуравнината относно правата BC, несъдържаща X. Броят на тези върхове е четен и следователно последният ход с тях е на Петя.





Остава да докажем, че винаги можем да намерим такива страни AB и CD. Да допуснем противното. Нека T е произволен връх и да предположим, че лъчът TX пресича черна страна PQ. Нека TR е черната страна, излизаща от T. Можем да считаме, че четириъгълникът $TRPQ$ е изпъкнал. Ако X лежи във вътрешността на триъгълника TRQ, то $RTQP$ има исканите свойства. В противен случай лъчът RX също пресича отсечката PQ.

Нека RS е следващата след TR страна на M. Ако лъчът SX пресича бяла страна, както по-горе се доказва, че лъчът RX също я пресича, което е невъзможно. Следователно SX пресича някаква черна страна и можем да повторим горните разсъждения за върха S. Продължавайки по същия начин, ще заключим, че за всяка черна страна $T'R'$ ще има черна страна $P'Q'$, която се пресича и от двата лъча $T'X$ и $R'X$. Но това не е изпълнено за черната страна PQ (лъчите PX и QX пресичат съответно участъците QT и RP от контура на M), противоречие.

10.5. Виж Задача 9.5.

10.6. Виж Задача 9.6.

10.7. Отговор – да! Работа вършат например числата

$$x = N^2 - 3N + 1,\ y = N^2 - N + 1,\ z = -3N^2 + 3N - 1,\ t = N^2 + N - 1,$$

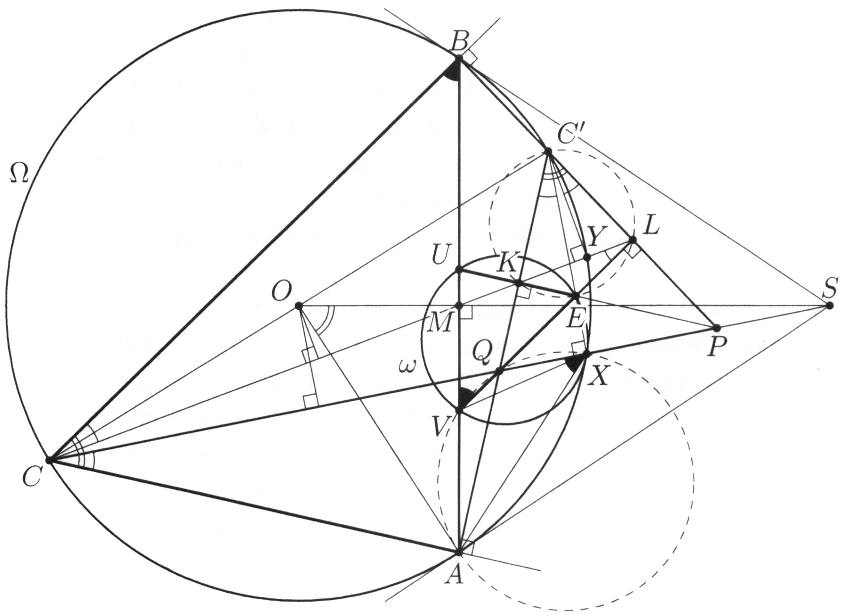
(N е естествено число, по-голямо от 10^6) и това не е трудно да се провери.

10.8. Нека дадените перпендикуляри през K и L да пресичат AB съответно в точките U и V и да се пресичат в точка E. Да отбележим, че правите AC и KE са перпендикулярни на правата AC' и значи $AC \parallel KE$. Аналогично $BC \parallel LE$. Да означим с ω окръжността, описана около $\triangle EUV$. Нека правата $C'E$ да пресича за втори път окръжността Ω в точка X. Ще докажем, че окръжностите ω и Ω се допират именно в точка X.

Тъй като $\sphericalangle C'KE = \sphericalangle C'LE = 90^\circ$, четириъгълникът $C'KEL$ е вписан. Оттук

$$\sphericalangle ACX = \sphericalangle AC'X = \sphericalangle KLE = \sphericalangle LCB,$$

т.е. $\sphericalangle ACX = \sphericalangle MCB$ и $\sphericalangle BCX = \sphericalangle MCA$. Това означава, че правата CX е симедиана в $\triangle ABC$ и следователно минава през пресечната точка S на допирателните към Ω в точките A и B.



Нека O е центърът на Ω и $\gamma = \sphericalangle ACB$. Нека CM да пресича за втори път Ω в точка Y. Тъй като AM е височина в правоъгълния $\triangle OAS$, имаме $OM \cdot OS = OA^2 = OC^2$. Оттук следва, че триъгълниците OMC и OCS са подобни. Тогава отношението на височините им от O е равно на $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OM}{OA} = \cos\gamma$. Тези височини са и средни отсечки в правоъгълните триъгълници CYC' и CXC' и значи $\dfrac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma$.

Нека правите AC' и BC' да пресичат CX съответно в точките Q и P. Да забележим, че $\sphericalangle PC'Q = \sphericalangle ACB = \gamma$. Освен това

$$\sphericalangle YC'L = \sphericalangle YCB = \sphericalangle QC'X$$

и следователно правоъгълните триъгълници $YC'L$ и $XC'Q$ са подобни. Тогава

$$\frac{C'L}{C'Q} = \frac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma = \cos\sphericalangle PC'Q.$$

Оттук следва, че QL е височина в $\triangle PCQ$. Следователно точките L, E, Q и V лежат на една права.

Тъй като $\sphericalangle QVB = \sphericalangle VBC = \sphericalangle AXC$, четириъгълникът $AVQX$ е вписан в някаква окръжност. Понеже $\sphericalangle EKQ = \sphericalangle EXQ = 90^\circ$, точките X, E, K и Q също лежат на една окръжност. От тези две окръжности получаваме

$$\sphericalangle UEX = \sphericalangle KEX = \sphericalangle AQX = \sphericalangle AVX,$$

т.е. точките U, V, E и X лежат на една окръжност ω. Освен това $\sphericalangle EVX = \sphericalangle QAX = \sphericalangle C'AX$. Това означава, че градусните мерки на дъгите $C'X$ и EX от окръжностите Ω и ω са равни. Следователно допирателните към тези окръжности в точка X съвпадат и значи Ω и ω се допират.

Забележка 1. Не е трудно да се досетим, че окръжностите ω и Ω се допират именно в точка X. Действително, ако тези окръжности се допират, то допирната им точка е център на хомотетия, изпращаща ω в Ω. Тази хомотетия трябва да изпраща $\triangle EUV$ в $\triangle A'B'C'$, симетричен на ABC относно O и значи допирната точка трябва да лежи върху $C'E$.

Забележка 2. Има още няколко начина да се докаже, че правите CX, AC' и EL се пресичат в една точка (Q) – например с помощта на понятието хармоничност. Да напомним, че четворката точки (A, B, C, D), лежащи на една права или на една окръжност, се нарича *хармонична*, ако

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1,$$

четворка прави, минаващи през една точка, е *хармонична*, ако четворка точки, определена от тях на някаква права, е такава.

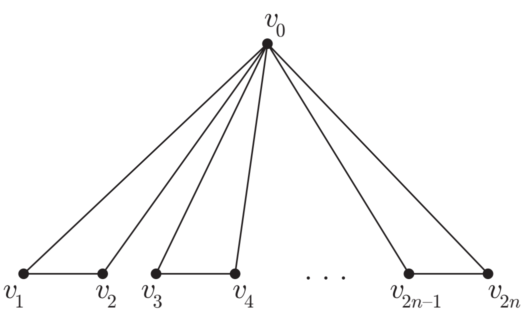
Бележка от редакцията. В брой 3/2016 г. поради редакторска грешка са пропуснати имената на авторите на статията „Пролетни математически състезания“ – Петър Бойваленков и Емил Колев.

КОМПАНИИ, В КОИТО ВСЕКИ ДВАМА ИМАТ ТОЧНО ЕДИН ОБЩ ПОЗНАТ

проф. дмн Николай Хаджииванов

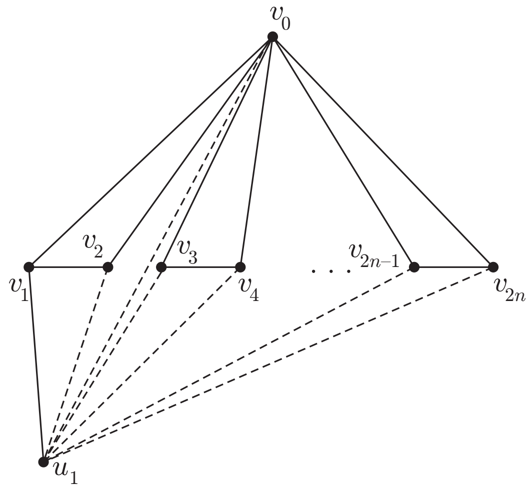
На фигурите по-долу всеки участник в компанията ще се изобразява с точка, познанствата между двама – чрез непрекъсната линия, която съединява съответните им точки, а непознанствата – чрез прекъсната линия.

Теорема. *На фиг. 1 е изобразена схемата на компания, в която всеки двама имат точно един общ познат. Ще докажем, че това е единствената компания с това свойство.*



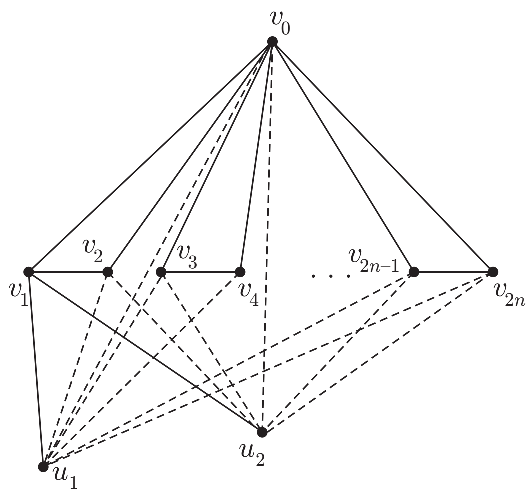
Фиг. 1

Доказателство. Нека v_0 е човекът от компанията с поне трима познати. Ако такъв човек няма, тогава очевидно компанията се състои от трима души и всеки двама се познават (т.е. $n = 1$). Ще означим познатите на v_0 с v_1, v_2, v_3, ... Ще означим единственеият общ познат на v_0 и v_1 с v_2. Единственеият общ познат на v_0 и v_3 не може да бъде v_1, защото тогава v_0 и v_1 биха имали двама общи познати – v_2 и v_3. Той не може да бъде и v_2, защото иначе v_0 и v_2 ще имат двама общи познати – v_1 и v_3. С v_4 ще означим общия познат на v_0 и v_3. Продължавайки така, ще се убедим, че броят на познатите на v_0 е четно число $2n$ и всички познанства между тях са $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$, ..., $[v_{2n-1}, v_{2n}]$ (вж. фиг. 1). Тъй като v_1, v_2, ..., v_{2n} са всички познати на v_0, то останалите участници u_1, u_2, ..., u_m са непознати на v_0. Тъй като v_0 и u_1 имат единствен общ познат и той е измежду познатите v_i на v_0, можем да считаме, че е v_1. Очевидно u_1 е непознат с останалите познати на v_0, които са v_2, v_3, ..., v_{2n} (вж. фиг. 2).



Фиг. 2

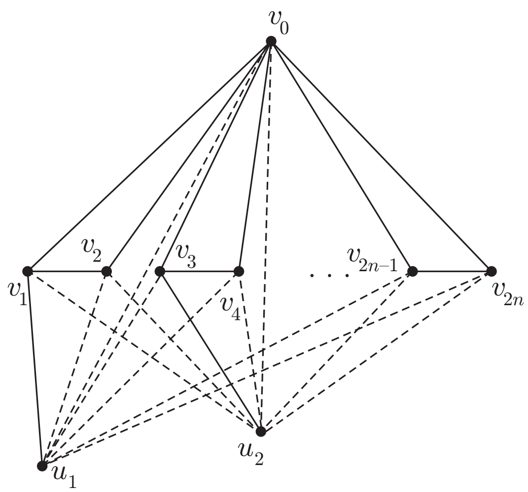
Аналогично, u_j (при $j \geqq 2$) и v_0 имат единствен общ познат, така че u_j има единствен познат измежду $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$.



Фиг. 3

Да допуснем, че v_1 е единственият познат на u_2 (вж. фиг. 3). Сега u_1 и v_4 нямат общ познат, понеже познатите на v_4 са v_0 и v_3, а u_1 не познава нито v_0, нито v_3. Следователно и това не може да се случи, така че v_1 е непознат на u_2. Разбира се и v_2 е непознат на u_2, защото иначе v_1 и v_2 ще имат двама общи познати – v_0 и u_2.

Тогава можем да считаме, че u_2 е познат на v_3, вж. фиг. 4.



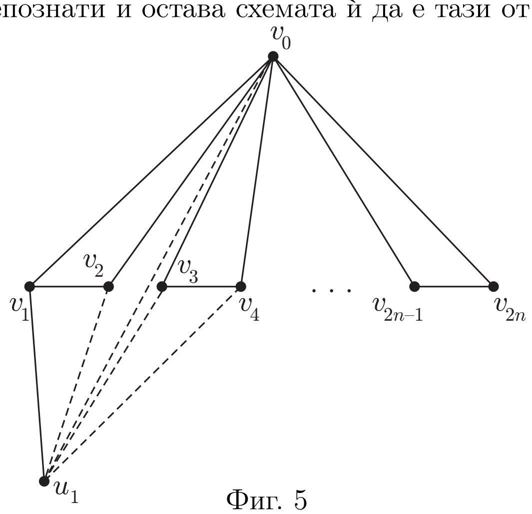
Фиг. 4

Единствените познати на v_4 са v_0 и v_3, а u_1 не познава нито v_0, нито v_3. Следователно u_1 и v_4 нямат общ познат. Заключаваме, че u_2 не е познат с v_3.

По същия начин отпадат случаите, когато u_2 е познат с v_4 или $v_5, \dots,$ или v_{2n}.

Оказва се, че u_2 не може да бъде познат на никой v_i, а това противоречи на факта, че u_2 и v_0 имат общ познат.

Доказахме, че никой от непознатите $u_2, \dots, u_m$ на v_0 не е познат с никой от $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$, така че v_0 и u_i при $i > 1$ нямат общ познат. Следователно единственият непознат на v_0 е u_1, т.е. компанията има схемата от фиг. 5, но там v_1 и u_1 нямат общ познат, така че и тази схема е невъзможна. Значи v_0 няма непознати и остава схемата ѝ да е тази от фиг. 1.



Фиг. 5

Теоремата е доказана.

ПЕТА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА

Емил Колев, Линка Минчева

От 10 до 16 април 2016 г. гр. Бущени, Румъния се проведе 5. Европейска олимпиада по математика за момичета. България участва с отбор в състав:

1. Деница Маркова, 12 клас, СМГ
2. Виолета Найденова, 11 клас, СМГ
3. Симона Кукова, 10 клас, МГ Варна
4. Мария Делякова, 11 клас, СМГ

Ръководители на отбора бяха Емил Колев от ИМИ–БАН и Линка Минчева от СМГ. С резултат от 38 точки (трети резултат от всички 142 участници) Виолета Найденова спечели златен медал. Деница Маркова и Мария Делякова спечелиха сребърни медали, а Симона Кукова спечели бронзов медал. В отборното класиране България се нареди на трето място след отборите на Русия и САЩ.

Предлагаме ви задачите от състезателните теми и техните решения.

Задача 1. Нека n е нечетно естествено число и нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са неотрицателни реални числа. Да се докаже, че

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

където $x_{n+1} = x_1$.

Решение. Ако има две съседни равни числа (например $x_1 = x_2$), ще получим $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2$ и неравенството от условието е изпълнено. Ще докажем, че съществуват три последователни числа x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, които образуват строго растяща или строго намаляваща редица. Да допуснем, че такива три последователни числа не съществуват. Тогава за всяко число x_k е изпълнено $x_k > x_{k-1}$ и $x_k > x_{k+1}$ или $x_k < x_{k-1}$ и $x_k < x_{k+1}$. Да наречем x_k *голямо*, ако са изпълнени първите две неравенства и *малко*, ако са изпълнени вторите две неравенства. Ясно е, че малките и големите числа се редуват. Тъй като n е нечетно, получаваме, че x_1 е едновременно малко и голямо, противоречие.

Следователно съществуват три последователни числа x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, които образуват монотонна (растяща или намаляваща) редица. Ако $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2}$, то

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 \leq x_i x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+2} \leq 2x_{i+1}x_{i+2}.$$

Следователно

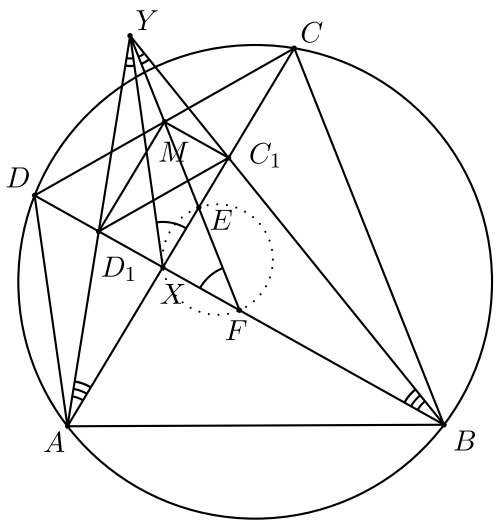
$$\min_{k=1,\dots,n}(x_k^2+x_{k+1}^2)\le x_i^2+x_{i+1}^2\le 2x_{i+1}x_{i+2}\le \max_{j=1,\dots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

с което задачата е решена. Случаят $x_i\ge x_{i+1}\ge x_{i+2}$ се разглежда аналогично, като тогава $x_{i+1}^2+x_{i+2}^2\le 2x_ix_{i+1}$.

Задача 2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и диагоналите му AC и BD се пресичат в точка X. Нека C_1, D_1 и M са среди съответно на отсечките CX, DX и CD. Правите AD_1 и BC_1 се пресичат в Y, а правата MY пресича диагоналите AC и BD в различни точки E и F. Да се докаже, че правата XY е допирателна към описаната окръжност за триъгълник EFX.

Решение. Достатъчно е да докажем, че $\sphericalangle EXY=\sphericalangle EFX$, което равенство е еквивалентно на

$$\sphericalangle AYX+\sphericalangle XAY=\sphericalangle BYF+\sphericalangle XBY.$$



Тъй като четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, то $\triangle XAD$ и $\triangle XBC$ са подобни. Отсечките AD_1 и BC_1 са съответни медиани в тези два триъгълника, откъдето следва

$$\sphericalangle XAY=\sphericalangle XAD_1=\sphericalangle XBC_1=\sphericalangle XBY. \tag{1}$$

От $\sphericalangle XAY=\sphericalangle XBY$ следва, че ABC_1D_1 е вписан в окръжност, откъдето получаваме, че $\triangle ABY$ е подобен на $\triangle C_1D_1Y$. Точките X и M са съответни точки в тези два триъгълника, защото $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XDC = \sphericalangle MC_1D_1$ и $\sphericalangle XBA = \sphericalangle XCD = \sphericalangle MD_1C_1$. Следователно

$$\sphericalangle AYX = \sphericalangle BYF. \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме търсеното равенство.

Задача 3. Дадено е естествено число m. Разглеждаме $4m \times 4m$ таблица от единични квадратчета. Две различни квадратчета са *асоциирани* едно с друго, ако те се намират или в един ред или в един стълб. Никое квадратче не е асоциирано със себе си. Някои от клетките са оцветени в синьо така, че всяка клетка е асоциирана с поне две сини клетки. Да се намери минималния възможен брой сини клетки.

Решение. Ще докажем, че търсеният минимален брой сини клетки е $6m$. При $m = 1$ оцветяваме клетките, означени със X.

X			
X			
X			
	X	X	X

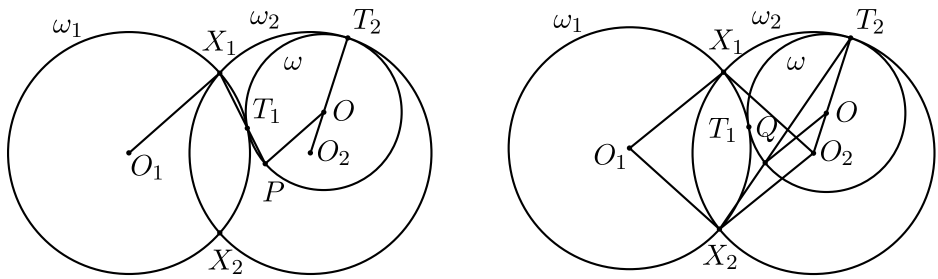
.

При произволно m разделяме таблицата на квадрати 4×4 и оцветяваме по показания начин само квадратите по единия от диагоналите. Тогава общо имаме $6m$ оцветени клетки и директно се проверява, че всяка кетка е асоциирана с поне две сини кетки.

За да докажем, че са ни необходими поне $6m$ сини клетки разглеждаме двуделен граф G. Двата дяла на G са редовете и стълбовете на дадената таблица (броят на върховете на G е $8m$). Ред и стълб са свързани с ребро само когато общата им клетка е оцветена. Тогава броят на оцветените клетки е равен на броя на ребрата на графа G. За всеки ред r и стълб c, пресечната клетка на които е оцветена, е изпълнено $d(r) + d(c) \geq 2$. Това означава, че всяка свързана компонента на G има поне 4 върха. Възможно най-малък брой ребра се получава когато свързаните компоненти са възможно най-много и всяка свързана компонента е с възможно най-малко ребра, т.е. е дърво. Най-много свързаните компоненти са $\dfrac{8m}{4} = 2m$ и във всяка компонента има поне 3 ребра (ако е дърво). Следователно имаме поне $6m$ ребра, т.е. оцветени клетки.

Задача 4. Окръжностите ω_1 и ω_2 имат равни радиуси и се пресичат в точки X_1 и X_2. Окръжност ω се допира външно до ω_1 в точка T_1 и вътрешно до ω_2 в точка T_2. Да се докаже, че правите X_1T_1 и X_2T_2 се пресичат в точка върху окръжността ω.

Решение. Да означим центровете на ω_1, ω_2 и ω съответно с O_1, O_2 и O. Нека X_1T_1 пресича ω в точка P, а X_2T_2 пресича ω в точка Q. Тъй като ω_1 и ω са хомотетични с център на хомотетия T_1, то $O_1X_1 \parallel OP$. Аналогично $O_2X_2 \parallel OQ$. Но ω_1 и ω_2 са с равни радиуси, което означава, че $O_1X_2O_2X_1$ е ромб. Следователно $O_1X_1 \parallel O_2X_2$, откъдето $OP \parallel OQ$. Понеже P и Q не са дииаметрално противоположни, то $P \equiv Q$.



Задача 5. Нека k и n са цели числа, за които $k \geq 2$ и $k \leq n \leq 2k-1$. Поставяме правоъгълни плочки с размери $1 \times k$ или $k \times 1$ на шахматна дъска $n \times n$ така, че всяка плочка покрива точно k клетки и плочките не се застъпват. Поставяме плочките до момент, в който не могат да се поставят повече плочки. За всички k и n да се намери минималният брой плочки, които могат да са поставени в този момент.

Решение. Ще докажем, че търсеният минимум е: n при $n = k$; $2n - 2k + 2$ при $k < n < 2k - 1$ и $2k - 1$ при $n = 2k - 1$.

Първо ще покажем разположение на търсения брой плочки върху дъска $[0, n] \times [0, n]$.

Случаят $n = k$ е тривиален. При $k < n < 2k - 1$ поставяме 4 плочки $[0, k] \times [0, 1]$, $[0, 1] \times [1, k + 1]$, $[1, k + 1] \times [k, k + 1]$ и $[k, k + 1] \times [0, k]$ в квадрата $[0, k] \times [0, k]$. След това поставяме $n - k - 1$ хоризонтални плочки в правоъгълника $[1, k + 1] \times [k + 1, n]$ и още $n - k - 1$ вертикални плочки в правоъгълника $[k + 1, n] \times [1, k + 1]$.

При $n = 2k - 1$ поставяме $k - 1$ хоризонтални плочки в правоъгълника $[0, k] \times [0, k - 1]$, $k - 1$ вертикални плочки в правоъгълника $[0, k] \times [k, 2k - 1]$ и една хоризонтална плочка $[k - 1, 2k - 1] \times [k - 1, k]$.

Остава да докажем, че винаги можем да разположим необходимия брой плочки. Да разгледаме хоризонтална плочка T. Тъй като $n < 2k$ по-близката хоризонтална страна на цялата дъска е на разстояние по-малко от k. Редовете между T и тази страна образуват правоъгълник, в който не може да се разположи вертикална плочка. Това означава, че във всеки такъв ред трябва да има хоризонтална плочка. Следователно редовете, които не съдържат плочка са последователни.

Да означим с r и c броя на редовете (стълбовете), които не съдържат плочка. Редовете и стълбовете без плочка се пресичат в правоъгълник $r \times c$. Следователно, ако $r \geq k$ или $c \geq k$ ще можем да разположим още една плочка. Следователно $r < k$ и $c < k$, откъдето $n - r \geq n - k + 1$ и $n - c \geq n - k + 1$. Това означава, че има поне $n - r \geq n - k + 1$ реда с плочка и $n - c \geq n - k + 1$ реда с плочка, общо $2n - 2k + 2$ плочки.

Задача 6. Нека S е множеството от естествени числа n, за които n^4 има делител измежду числата $n^2 + 1$, $n^2 + 2$, $\ldots$, $n^2 + 2n$. Да се докаже, че съществуват безбройно много елементи на S от всеки от видовете $7m$, $7m + 1$, $7m + 2$, $7m + 5$, $7m + 6$ и не съществуват елементи на S от вида $7m + 3$ или $7m + 4$, където m е цяло число.

Решение. Нека $t \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ е такова, че $n^2 + t$ дели n^4. Тогава $n^2 + t$ дели $n^4 - t^2 + t^2$, т.е. $n^2 + t$ дели t^2. Следователно $t^2 = k(n^2 + t)$, за някое естествено число k. Ако $k \geq 4$ получаваме

$$k(n^2 + t) \geq 4n^2 + 4t = (2n)^2 + 4t > t^2,$$

противоречие. Да допуснем, че $k = 1$, като тогава $t^2 = n^2 + t$. Тъй като $n^2 < n^2+t < n^2+2t+1 = (n+1)^2$, то n^2+t не е точен квадрат, противоречие. Следователно $k = 2$ или 3.

Ако $t^2 = 2n^2 + 2t$, то $(t-1)^2 = 2n^2 + 1$, а ако $t^2 = 3n^2 + 3t$, то $(2t-3)^2 = 12n^2 + 9$.

Първото от горните две уравнения е от вида $m^2 - 2n^2 = 1$ и е уравнение на Пел. Решенията му се задават с

$$(m_1, n_1) = (3, 2) \quad \text{и} \quad (m_{t+1}, n_{t+1}) = (3m_t + 4n_t, 2m_t + 3n_t).$$

По модул 7 решенията са циклични с цикъл $(3, 2), (3, -2), (1, 0)$. Следователно в S има безбройно много числа от вида $7s \pm 2$.

Тъй като $2t - 3$ и n се делят на 3, то второто уравнение също се свежда до уравнението на Пел $x^2 - 12y^2 = 1$. Решенията на това уравнение на Пел са задават с

$$(x_1, y_1) = (7, 2) \quad \text{и} \quad (x_{t+1}, y_{t+1}) = (7x_t + 24y_t, 2x_t + 7y_t).$$

Съответните решения за $2t - 3$ и n са циклични по модул 7 с цикъл $(0, 6)$, $(4, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$. Следователно в S има безбройно много числа от вида $7s$ и $7s \pm 1$.

Тъй като решенията, получени от двете уравнения на Пел са всички решения на задачата, то в S няма числа от вида $7s \pm 3$.

Ксения Цочева е студентка във Факултета по математика и информатика на СУ „Св.Климент Охридски“ и участва активно в национални и международни студентски състезания по математика. Сред многобройните ѝ постижения са първо място на всяко Студентско състезание по математика от 2012 до 2015 г., бронзов и сребърен медал на South Eastern European Mathematical Olympiad for University students (2013 и 2014 г), един златен и два сребърни медала от Група А в Национална Студентска олимпиада по математика (2013–2015 г), трета награда на 20. и 21. International Mathematics Competition for University Students.

За своите постижения Ксения Цочева бе наградена с една от десетте стипендии на фондация „Еврика“ за млади български таланти и получи възможността за интензивен образователен стаж в китайската компания „Хуауей технолъджис“. Представяме ви разказа на Ксения Цочева за нейната среща с Китай.

КЪДЕТО И ДА ОТИВАШ, ОТИВАЙ С ЦЯЛОТО СИ СЪРЦЕ[1]

Ксения Цочева

При споменаването на държавата Китай, неслучайно в съзнанието на почти всеки състезател по математика се появява асоциацията с Международната олимпиада по математика и ненадминатото присъствие в челните две позиции в ранглистата от 86-та насам. Изключвайки математиката, Китай в последния век е символ на индустриален и технологичен прогрес, лидер в търговията, значителна културна, научно-техническа, геополитическа и военна сила. За всеки европеец посещението на страна като Китай и запознаването с една от най-старите и значими за човечеството цивилизации в света е едно истинско предизвикателство за ума, извор на познание и еуфория за сетивата. Докосването до интелекта, волята, амбицията, дисциплината и организацията на лидера в математиката в последния век и опознаването на начина на живот за мен беше една сбъдната мечта и тя беше осъществена отново благодарение на математиката.

След кандидатстване за именната награда на фондация „Еврика“ в област „Математика“, представители от компания Huawei отличиха 10 сти-

[1] Конфуций

пендианти, получаващи награда „незабравимо посещение в Китай“. Една от наградените бях аз. Това беше началото на една мечта, сбъднат сън в една приказка. Никога не съм вярвала в клишетата, нито пък в пътуването като единствен източник на нестихваща еуфория. Но двуседмичния престой в Китай ме обогати, одухотвори, промени и може би ми помогна да осъществя едно сливане на „ин“ и „ян“, макар бегло и само подсъзнателно.

С излитането за Китай, десетима българи нямахме представа къде отиваме, нито какво ни очаква. Леко уплашени, донякъде резервирани, потеглихме към нашето пътешествие. Бяхме подготвени за нещо различно, но не и дотолкова. Единствената препоръка, която получихме, беше да се насладим на всеки миг. И ние я преизпълнихме – оставихме част от сърцата си там.

С пристигането в Пекин, достигнахме до осъзнаването, че следващите две седмици ще сме заобиколени от дружелюбни нисички китайци, които в последствие установихме, че са безкрайно дисциплинирани, стриктни и отдадени до съвършенство на професиите си.

„Първото условие да разбереш една чужда страна е да я помиришеш“ (Ръдиард Киплинг). Е, ако трябва да свържем Китай с аромат, то това е мирисът на китайско. И не традиционното китайско, което сме свикнали да опитваме в „българските“ китайски ресторанти. Малко след пристигането се сблъскахме с екзотичната китайска кухня и забравихме за вилиците и стандартните обноски. Пред нас се откри типичният китайски ресторант – с червените фенери и украси от страховите пъстри фигури и въртяща се маса, отрупана с пържени храни, бланширан бял китайски ориз, люто и пикантно, водорасли, рапани, супи от миди и крайници (неясно какви), буболечки, рибни деликатеси, наподобяващи морски чудовища, скариди в кокос със сладък сос, китайски сладки с изненадващ пълнеж, изобилие от вкусове, аромати и усещания, несравними с нищо, описвано до сега. Приготвена с любов и грижа, китайската храна и процесът на хранене са издигнати в култ – на масата не е прието да се говори, храненето трябва да е съсредоточено върху насладата от храната и възприемането ѝ с всички сетива. След приключване, масата се събира невероятно бързо от няколко сръчни китайки, бакшиши не се дават и не се приемат и всеки продължава с дейността си.

Още от първия ден след пристигането ни, бяхме потопени в красотата на древната китайска история и архитектура. Намиращ се в самия център на Пекин, навремето забранен за обикновени хора, днес дворец-музей, Забраненият град от средата на XIIII до началото на XX век е бил дом за императорското семейство, както и церемониален и политически център на китайското правителство. Още с влизането през портите на града, се усеща хармонията, лъхаща от идеалната симетрия на сградите. Огромните и величествени постройки, идеално подредени и изваяни с пъстрота, те карат да не можеш да сведеш очи, сякаш се губиш сред феерията от багри, красота и същевременно мощ. В непосредствена близост до града пък се насладихме на разнообразната природа в градината, разполагаща с екземпляри на многовековни дървета, много зеленина и свежест.

Няма как да се отрече връзката между Китайския античен свят и магията, след като пред очите ти се разпростре едно от новите седем чудеса на света – а именно Великата Китайска стена. И определението *велика* по никакъв начин не звучи преувеличено, след като се обърнеш и я видиш – виеща се по билото на планината, всеобхватна и величествена. Докато се изкачвахме по каменните стълби, останали без дъх, всеки от нас си задаваше въпроса – как е възможно това да е дело на човешка сила? Способно ли е човечеството да сътвори такова огромно съоражение, навръх планината, разкриващо забележителна гледка, служело за защита в миналото? Способен е народ като китайския – при който се пренебрегва личността сама по себе си, а се разглежда в цялост – с ползите ѝ за общността и със социалната позиция в обществото. Принципът за полезност е водещ. Всеки вид лицемерие, култ към личността и егоизъм се пренебрегват в името на всеобщото благо. И не Китайската стена сама по себе си е велика, а народът, способен да сътвори подобно чудо със собствени усилия и отдаденост за една всеобща кауза. Няма човек, който да не настръхне пред вида на тази величествена картина.

След уморителния ден, свързан с вълшебството и съвършенството на китайската архитектура и история, последва седмица, запознаваща ни с китайския език, култура, нрави и изкуство. За човек, занимавал се от съзнателна възраст с точни науки, винаги е било трудно и безинтересно изучаването на езици. Но ученето на китайски не е просто наизустяване. Изисква се отдаденост, изразителност и внимание. Всеки тон, задъхване или нотка са значими. Дали благозвучието, предизвикателството в учене на език, съвсем различен от нашия или отдадеността на laoshi (учителката) или всичко накуп накара нас – десетима българи, да произнасяме разнообразни звуци с определена интонация и да се стараем в изговарянето на всеки звук, докато не достигнем до възможността сами да практикуваме диалози. Освен езикът, часовете по калиграфия и рисуване ни показаха една различна и много впечатляваща страна от китайското изкуство, накараха ни да се опитаме да осъществим хармония в ума си, за да можем да я изразим и в лично творение. Под тоновете на успокояваща музика, рисувахме йероглифи и панди и искрено се забавлявахме. И в противоречие с всички догми, че китайците са безчувствени, в последния час всички се разделихме с учителката със сълзи на очите, прегръдки и безброй положителни емоции.

Дойде време и за полета до Шенжен – технологичен център на развитие на Китай. Още със слизането усетихме тропическия климат, топлината и влажността на въздуха, но и погледите ни бяха запленени от буйната растителност, наличието на палми навсякъде около нас и зеленината, която носеше спокойствие. Потопихме се във високотехнологичния свят на Китай, като всеки от нас се сдоби с по един дрон и то на изгодна цена, благодарение на пазарлъшките ни умения. За качество може да се каже само Made in China. Другото е късмет.

След обиколката по местните магазини, се насочихме към зоологическата градина – или по-скоро към джунглата, пригодена за битуването на фауната на Китай. Освен невероятната природа, зеленина и изобилието от растителен и животински свят, успяхме да осъществим една всеобща цел на групата – да видим панда – най-дружелюбното и мило животинче, което се среща единствено в Китай. А за да е пълна насладата, слон ни качи на хобота си.

И следваше сериозната част – седмица на лекции и уроци, свързани с най-новите технологии в сградата на Huawei. Освен шестчасовите занимания, теоретични и практически, специалисти в областта ни показваха иновации във всички сфери на живота и стремежа към моделиране на света около нас до по-удобен и пригоден за нуждите ни. Макар човек, занимаващ се основно с математика, аз бях впечатлена и развълнувана от проектите и идеите, на базата на които изключително интелигентните и способни китайци модернизират света и го правят място, удовлетворяващо с прецизност човешките нужди и желания. Дано всички да станем свидетели на тази технологична революция в най-скоро бъдеще.

За съжаление, всичко прекрасно в един момент приключва. С малко тъга и с безброй незабравими спомени потеглихме към родината. За мен това беше едно от най-впечатляващите събития в живота ми, престоят в Китай ме накара да осъзная ценността на всеки човек и да уважавам всеки вид труд, насладих се на невероятни гледки, обогатих културния си мироглед и в съзнанието ми се отвориха врати към необятната природна красота и възможностите на човешката амбиция, оставящи те без дъх. Мога да пиша още много, но каквото и да кажа, ще е недостатъчно. В мен гори надеждата да се завръщаме към тази приказка, да черпим опит и вдъхновение от магията, която сме преживели, да се стремим към нея, да я пренасяме в нашата действителност, стремейки се да градим света около нас такъв, какъвто е в сънищата ни – лишен от лицемерие, красив, хармоничен, високотехнологичен, даваш ни възможост за все повече незабравими изживявания, интелигентен и съвършен.

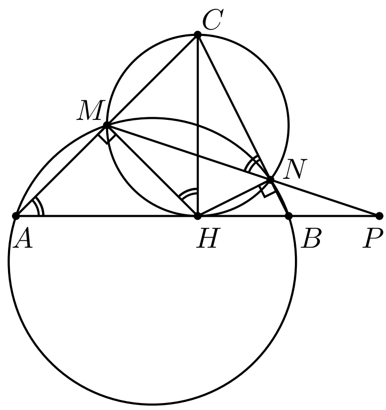
ДВЕ ЗАДАЧИ НА БОРИСЛАВ МИХАЙЛОВ

Борислав Михайлов (1943–2003) е любим учител на поколения ученици в ОМГ, Пловдив и автор на оригинални задачи. Неговата книга *Задачи по „елеменмтарна“ геометрия* е уникален сборник с изящни геометрични миниатюри. Задачите на Борислав Михайлов предизвикват възхищение и любопитство; попаднали в ума на любознателен слушател, те са като искра, от която се разгаря творчески огън.

В архивите на списанието намерихме две непубликувани задачи, изпратени от Борислав Михайлов. Те са по темата *Степен на точка спрямо окръжност* и ги предлагаме на вашето внимание.

Задача 1. В триъгълника ABC е построена височината CH. От точката H са спуснати перпендикуляри $HM \perp AC$ и $HN \perp BC$. Ако P е пресечната точка на AB и MN, да се докаже, че

$$\frac{1}{PH} = \left|\frac{1}{BH} - \frac{1}{AH}\right|.$$



Решение. Да започнем с наблюдението, че точките H, M, N и C лежат на една окръжност, която се допира до правата AB в точката H. От равенството на ъглите

$$\sphericalangle MNC = \sphericalangle MHC = \sphericalangle BAC$$

следва, че съществува окръжност през точките A, B, N и M.

Точката P е от радикалната ос MN на двете окръжности и спрямо тях степента на P е равна на

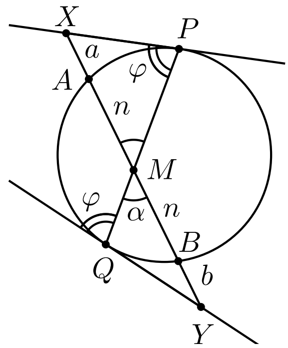
$$AP.BP = MP.NP = HP^2.$$

Като запишем равенството във вида

$$(AH + PH)(PH - BH) = PH^2 \iff AH.PH = AH.BH + PH.BH$$

и разделим на $AH.BH.PH$, получаваме $\dfrac{1}{BH} = \dfrac{1}{PH} + \dfrac{1}{AH}$.

Задача 2. Точката M е среда на хордата AB. Хордата PQ минава през M. Допирателните в P и Q пресичат AB в X и Y. Да се докаже, че $PX = QY$.



Решение. Да означим $XA = a$, $YB = b$, $AM = MB = n$, $\sphericalangle XMP = \alpha$, $\sphericalangle XPQ = \varphi$. В триъгълниците PMX и QMY имаме

$$\frac{PX}{\sin\alpha} = \frac{MX}{\sin\varphi}, \quad \frac{QY}{\sin\alpha} = \frac{MY}{\sin(180^\circ - \varphi)},$$

следователно

$$\frac{PX}{MX} = \frac{QY}{MY}.$$

Последното равенство може да запишем във вида

$$\left(\frac{PX}{QY}\right)^2 = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^2$$

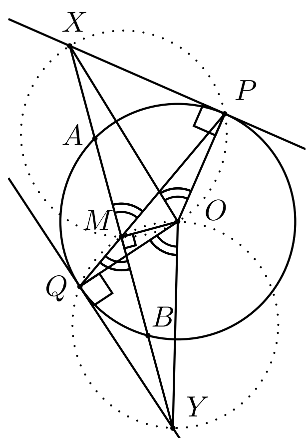
и като използваме, че $PX^2 = a(2n+a)$ и $QY^2 = b(2n+b)$, получаваме

$$\frac{a(2n+a)}{b(2n+b)} = \frac{(n+a)^2}{(n+b)^2}.$$

Но

$$\frac{a^2+2na}{b^2+2nb} = \frac{a^2+2na+n^2}{b^2+2nb+n^2} = \frac{a^2+2na+n^2-(a^2+2na)}{b^2+2nb+n^2-(b^2+2nb)} = \frac{n^2}{n^2} = 1,$$

следователно $PX = QY$.



Второ решение. Нека O е центърът на окръжността. Тогава $OM \perp AB$, $OP \perp PX$ и $OQ \perp QY$. Оттук следва, че точките X, M, O и P лежат на една окръжност; както и точките Y, M, O и Q. Получаваме равенството на ъглите

$$\sphericalangle XOP = \sphericalangle XMP = \sphericalangle YMQ = \sphericalangle YOQ$$

и тъй като $OP = OQ$, правоъгълните триъгълници QYO и PXO са еднакви, откъдето следва, че $PX = QY$.

Надяваме се, че учениците на Борислав Михайлов ще разкажат повече за своя незабвавим учител и ще публикуват ръкописа на последната му книга.

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2015/16 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O. Продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка P, а продълженията на страните BA и CD се пресичат в точка Q. Правата, през Q, перпендикулярна на AC, пресича OP в точка X. Да се докаже, че $\sphericalangle ABX = 90^\circ$.

Задача 2. Дадени са реални числа x, y и z, всяко от които е по-голямо от 1 и $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$. Да с е докаже неравенството:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Задача 3. Дадено е безкрайно множество A от естествените числа. Да се докаже, че в A има два елемента, чиито сбор има прост делител, по-голям от един милион.

Срокът за представяне на решенията е 31.08.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 2/2016 г.

Задача 1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Симетралата на CD пресича AD в точка P и BD в точка Q. Да се докаже, че $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle PCB$.

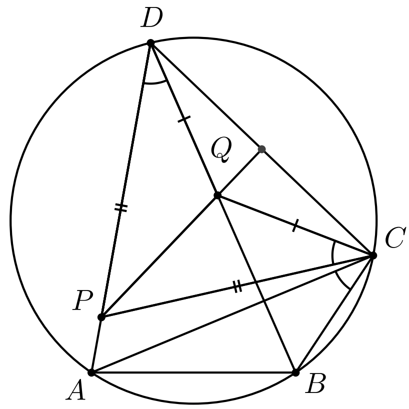
Решение. Тъй като

$$\sphericalangle ACQ = \sphericalangle ACP + \sphericalangle PCQ \quad \text{и}$$

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle PCA + \sphericalangle ACB,$$

достатъчно е да докажем, че

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACB.$$



Точките P и Q лежат на симетралата на отсечката CD. Това означава, че $PD = PC$ и $QD = QC$, откъдето получаваме, че $\triangle DPQ$ и $\triangle CPQ$ са еднакви по три страни. Следователно

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PDQ = \sphericalangle PDB.$$

Остава да забележим, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, което означава, че $\sphericalangle PDB = \sphericalangle ACB$. Получихме

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PDB = \sphericalangle ACB,$$

с което решението е завършено.

Задача 2. Да се докаже, че за триъгълник със страни a, b, c и лице S е изпълнено неравенството:

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Решение. Първо ще докажем, че всеки триъгълник е вярно неравенството $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$. Нека O и G са съответно центърът на описаната окръжност и медицентърът на триъгълника. Имаме

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}, \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}.$$

Повдигаме всяко от горните равенства на втора степен и получаваме

$$OA^2 = OG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA},$$

$$OB^2 = OG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GB},$$
$$OC^2 = OG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GC}.$$

Събираме почленно тези три равенства и намираме

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 + OC^2 &= 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + \overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Използвахме, че за триъгълник ABC с медицентър G е изпълнено равенството $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. От формулите за медианите в триъгълник следват равенствата

$$GA^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{4}{9}\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$GB^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = \frac{4}{9}\frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

$$GC^2 = \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

След заместване в равенството $OA^2+OB^2+OC^2 = 3OG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ и като използваме, че $OA = OB = OC = R$, получаваме

$$9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

От $OG^2 \geq 0$, следва $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

От $S = \dfrac{abc}{4R}$ заместваме $R = \dfrac{abc}{4s}$ и получаваме

$$\frac{9a^2b^2c^2}{16S} \geq a^2 + b^2 + c^2 \iff 4S \leq \frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

От друга страна $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$ (след повдигане на втора степен, това неравенство става еквивалентно на $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$), което означава, че:

$$\frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Следователно

$$4S \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{a^2 + b^2 + c^2},$$

което е еквивалентно на неравенството от условието.

Задача 3. Върху окръжност са избрани 40 точки и са построени 5 триъгълника с върхове в тези точки. Триъгълниците нямат общи върхове и общи вътрешни точки. Да се докаже, че може да се построи още един триъгълник, който няма общи върхове и вътрешни точки с никой от построените пет.

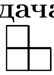
Решение. Да започнем да строим триъгълниците един по един. Върховете на първия триъгълник разделят окръжността на 3 части. Върховете на втория триъгълник се съдържат изцяло в някоя от тези три части, защото в противен случай двата триъгълника ще имат общи точки.

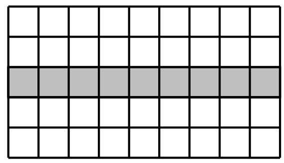
Трите върха на втория триъгълник разделят тази част на 3 части. Следователно върховете на първите два триъгълника разделят окръжността на 5 части. Всеки следващ триъгълник се съдържа изцяло в някоя от получените до този момент части. Неговите върхове разделят тази част на 3 части, т.е. всеки следващ триъгълник добавя по две нови части. Това означава, че след построяване на петия триъгълник, общо ще имаме $3+2.4 = 11$ части. Тези 11 части съдържат всички останали $40 - 5.3 = 25$ точки. От принципа на Дирихле следва, че в някоя от тези части ще има поне 3 точки. Тези три точки са върхове на триъгълник, който не се пресича с никой от вече построените триъгълници.

Забележка. Вярно е следното твърдение. *Върху окръжност са избрани 41 точки и са построени пет триъгълника с върхове в тези точки. Триъгълниците нямат общи върхове и общи вътрешни точки. Тогава могат да се построят още два триъгълника, които нямат общи върхове и вътрешни точки помежду си и с никой от построените пет триъгълника.*

конкурсни задачи

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 2/2016 г.

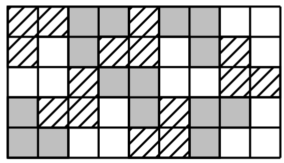
Задача 1. В полетата на таблица 5×9 се записани числа. Ако всяко ъгълче  покрива три числа със сбор,



а) кратен на 3, докажете, че сборът на всички числа в таблицата се дели на 3;

б) равен на 3, намерете сбора на числата в оцветения ред на таблицата.

Решение. а) Таблицата може да се покрие (изцяло и без припокриване) с 15 ъгълчета. Сборът на числата във всяко ъгълче е кратен на 3, следователно сборът на всички числа в таблицата е кратен на 3.



б) Да разгледаме произволен квадрат 2×2, в който са записани числата a, b, c, d.

a	b
c	d

В този квадрат ъгълче може да се постави по четири начина и всеки път то покрива числа със сбор 3. От равенствата

$$a + b + c = a + b + d = a + c + d = b + d + c = 3$$

получаваме, че $a = b = c = d = 1$. Следователно всички числа в таблицата са равни на 1 и сборът на числата в оцветените полета е 9.

Задача 2. На изборите за цар животните гласували за лъва, за мечката и за слона. Броят на животните, които гласували за мечката, бил 2 пъти по-голям от резултата на слона в проценти. Броят на животните, които гласували за лъва, бил 4 пъти по-голям от резултата на мечката в проценти. Броят на животните, които гласували за слона, бил 8 пъти по-голям от резултата на лъва в проценти. Кой е спечелил изборите и колко животни са гласували за него?

Решение. Нека за мечката са гласували $x\%$ от животните, за лъва – $y\%$, а за слона – $z\%$. Имаме $x + y + z = 100$. Освен това, мечката е получила $2z$ гласа, лъвът – $4x$ гласа, а слонът – $8y$ гласа. Отношението на броя получени гласове е равно на отношението на съответните проценти

$$2z : 4x : 8y = x : y : z.$$

Оттук следват равенствата

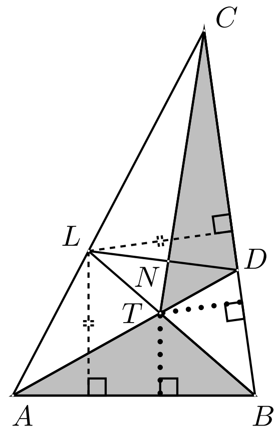
$$2z = kx, \quad 4x = ky, \quad 8y = kz. \tag{1}$$

Като ги умножим, получаваме

$$64xyz = k^3xyz, \quad \text{т.е.} \quad 64 = k^3 \quad \text{и} \quad k = 4.$$

Като заместим в (1) с $k = 4$, намираме $x = y$ и $z = 2x$. Сега от $x+y+z = 100$ получаваме, че $x = y = 25$ и $z = 50$. Това означава, че за слона са гласували 50% от животните и той е спечелил изборите с $8.25 = 200$ гласа.

Задача 3. В триъгълника ABC е построена ъглополовящата BL. На страната BC е отбелязана точка D така, че $AB = CD$. Правите AD и BL се пресичат в точката T. Да се докаже, че лицата на триъгълниците LTC и ADL са равни.



Решение. Тъй като BL е ъглополовяща на $\sphericalangle B$, то разстоянията от точката L до AB и до BC са равни. Това означава, че височините през L в триъгълниците ABL и CDL са равни и тъй като $AB = CD$, то триъгълниците ABL и CDL имат равни лица.

По същия начин, точката T от ъглополовящата BL е на равни разстояния от AB и от BC, следователно триъгълниците ABT и CDT имат равни лица.

Ако означим пресечната точка на LD и CT с N, имаме

$$\begin{aligned} S_{CLT} &= S_{LNC} + S_{LNT} = S_{LCD} - S_{NCD} + S_{LNT} = \\ &= S_{LCD} - (S_{CTD} - S_{NTD}) + S_{LNT} = \\ &= S_{ALB} - S_{ATB} + S_{NTD} + S_{LNT} = \\ &= S_{ATL} + S_{NTD} + S_{LNT} = S_{ALD}. \end{aligned}$$

тест

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Румяна Караджова, Иван Симеонов

ПЪРВИ МОДУЛ

Верният отговор на всяка задача от 1. до 10. включително се оценява с 2 точки

1. Стойността на израза $\left(5^2 - 2^4\right)^2$ е равна на:

А) $5^4 - 2^8$ **Б)** $5^4 - 2^6$ **В)** 18 **Г)** 81

2. Изразът $(-2x - 1)^2$ е тъждествено равен на:

А) $-4x^2 - 4x - 1$ **Б)** $4x^2 + 4x + 1$ **В)** $4x^2 + 1 - 4x$ **Г)** $4x^2 + 2x + 1$

3. Коефициентът в пред x^3 в нормалния вид на многочлена

$$(x - 1)(2x + 1)(2 - x)$$

е равен на:

А) -2 **Б)** -1 **В)** 2 **Г)** 4

4. Кое от уравненията е еквивалентно на уравнението $1 - |x + 1| = 0$?

А) $x^2 - 2x = 0$ **Б)** $x^2 + 2x = 0$ **В)** $-2x = 4$ **Г)** $0.x = 4$

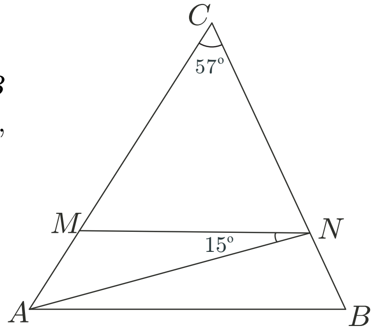
5. Решенията на неравенството $-2 - 3x > 2.\left(3x - 5\dfrac{1}{2}\right)$ са:

А) $(-\infty; -3)$ **Б)** $(3; +\infty)$ **В)** $(1; +\infty)$ **Г)** $(-\infty; 1)$

6. На чертежа $AB = BC$ и правите MN и AB са успоредни. Ако $\sphericalangle ACB = 57^\circ$ и $\sphericalangle ANM = 15^\circ$, колко градуса е мярката на $\sphericalangle NAM$?

А) 72° **Б)** 52°

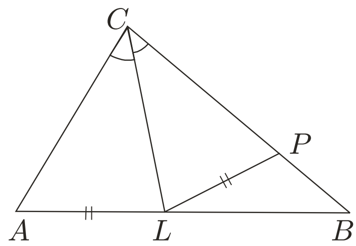
В) 42° **Г)** 32°



7. Мерките на ъглите в триъгълник се отнасят както числата $2 : 3 : 5$. Средният по големина ъгъл на триъгълника има мярка:

А) 36° **Б)** 54° **В)** 72° **Г)** 82°

8. На чертежа CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ в триъгълника ABC. Отсечките AL и LP са равни. Винаги е вярно, че:



А) $AC = CP$

Б) $LC^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ALP$

В) $\sphericalangle LAC = \sphericalangle LPC$

Г) $LB = AB - LP$

9. Ако в $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC = 56^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 74^\circ$, то за страните на триъгълника са изпълнени неравенствата:

А) $AC < BC < AB$ **Б)** $AB < BC < AC$

В) $BC < AC < AB$ **Г)** $AB < AC < BC$

10. На един странен тест по математика били зададени 30 въпроса. За верен отговор зачитали по 5 точки, за грешен отговор изваждали по 1 точка, а за непопълнен отговор прибавяли по 3 точки. Антон отговорил правилно на 7 въпроса и не попълнил с един въпрос по-малко, отколкото сгрешил. Точките, получени от Антон са:

А) 0 **Б)** 14 **В)** 56 **Г)** 70

Верният отговор на всяка задача от 11. до 17. включително се оценява с 3 точки

11. Ако многочленът $9x^2 - (3 - 2x)^2$ е разложен на множители, той е тъждествено равен на израза:

А) $(x + 3)(x - 3)$ **Б)** $(x + 3)(5x - 3)$

В) $(7x + 3)(5x - 3)$ **Г)** $(x + 3)(7x - 3)$

12. Коренът на уравнението $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} + x\right) - \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$ е:

А) по-малък от (-2) **Б)** в интервала $[-1; -0,5]$

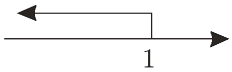
В) в интервала $(-2; -1)$ **Г)** по-голям от 0

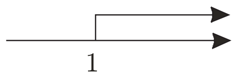
13. Ако $a = b$, НЕ винаги е вярно, че:

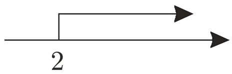
А) $|a| = |b|$ **Б)** $|a - b| = 0$

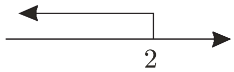
В) $1 - \frac{b}{3} = \frac{3 - a}{3}$ **Г)** $a + b = 0$

14. Решенията на неравенството $\dfrac{3x^2-2x+\frac{1}{2}}{3} \geq \dfrac{4x^2+\frac{x-5}{2}}{4}$ се изобразяват върху числовата ос с интервала:

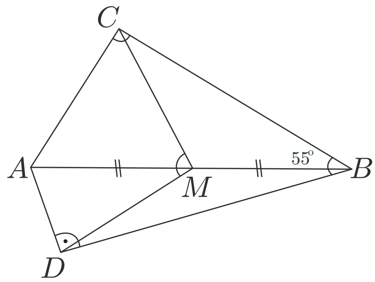
А) 

Б) 

В) 

Г) 

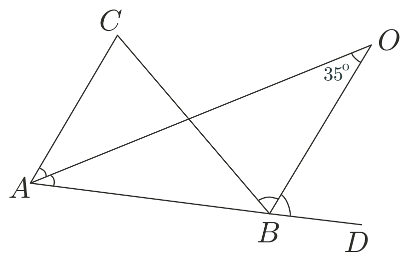
15. Правоъгълните триъгълници ABC и ABD имат обща хипотенуза AB. Ако точка M е среда на AB и $\sphericalangle CBD = 55^\circ$, мярката на $\sphericalangle CMD$ е равна на:



А) 70° **Б)** 90°

В) 110° **Г)** 120°

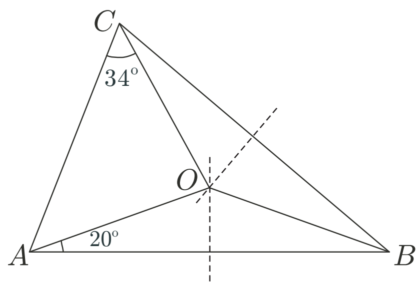
16. На чертежа $AO^{\rightarrow}$ и $BO^{\rightarrow}$ са съответно ъглополовящи на ъглите $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle CBD$, където D е точка от правата AB. Ако $\sphericalangle AOB = 35^\circ$, то мярката на $\sphericalangle ACB$ е равна на:



А) 70° **Б)** 90°

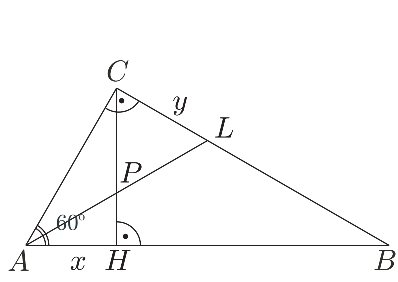
В) 95° **Г)** 105°

17. В остроъгълен триъгълник ABC симетралите на страните AB и BC се пресичат в точка O. Мерките на ъглите $\sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OAB$ са съответно 34° и 20°. На колко градуса е равна мярката на $\sphericalangle BOC$?



Верният отговор на задача 18. се оценява с 6 точки

18. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) с $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Нека CH е височина в триъгълника, AL е ъглополовяща в триъгълника, $AH = x$ cm и $CL = y$ cm. Точката P е пресечната точка на CH и AL. Попълнете таб-

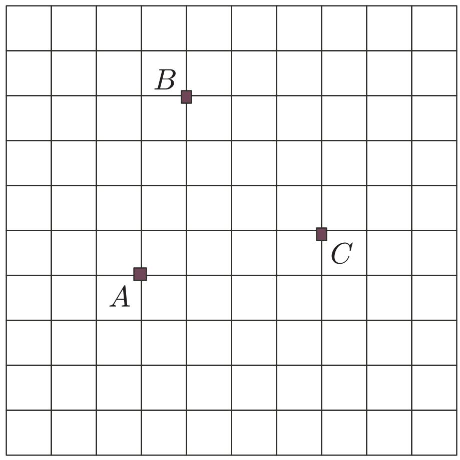


лицата като представите дължините на отсечките, записани в таблицата, чрез x или y.

Представете чрез x	Представете чрез y	Представете чрез x и y
$AC =$	$PL =$	Обиколката на триъгълник ABC $P_{ABC} =$
$BH =$	$PH =$	Обиколката на триъгълник APH $P_{APH} =$

Верният отговор на задача 19. се оценява с 12 точки

19. В квадратна мрежа 10×10, образувана от 100 еднакви квадратчета със страна 1 cm, са отбелязани точките A, B и C. Във възлите на квадратната мрежа отбележете:



а) Точка D, така че правата BC да е симетрала на отсечката AD;

б) Точка M, така че
$$\triangle ABC \cong \triangle CMA;$$

в) Точка K, така че $\triangle ABK$ да е правоъгълен и равнобедрен (точките K и C да са в различни полуравнини относно правата AB);

г) Точка H, така че правата HC да разполовява отсечката AB;

д) Точка S, така че $\triangle BCS$ да е правоъгълен, неравнобедрен и с възможно най-голямо лице (точките S и B да са в различни полуравнини относно правата AC);

е) Точка L, така че обиколката на $\triangle ABC$ да е 2 пъти по-малка от обикоката на $\triangle BSL$.

Верният отговор на задача 20. се оценява с 6 точки

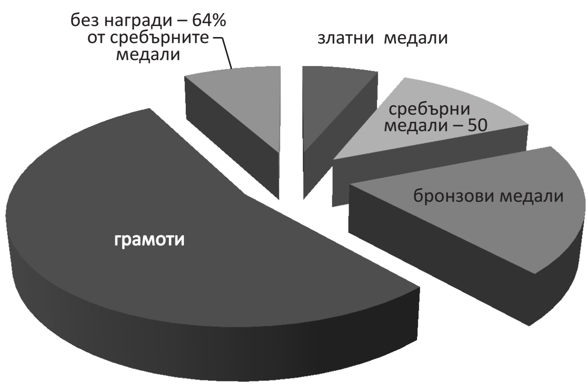
20. За подготовката за изпита по математика след 7 клас г-н Учителят дал на своите ученици скромно количество задачи след пролетната ваканция. През първата седмица Иван успял да реши $\frac{3}{7}$ от всички задачи, през втората седмица – $\frac{1}{4}$ от останалите задачи и през последната трета седмица му останали последните 105 задачи. Попълнете незатъмнените части от таблицата, като следвате указанията.

указания	Въведете неизвестно	Изразете чрез неизвестното	Брой задачи
Брой задачи за ваканцията			
През първата седмица Иван решил			
След първата седмица останали			
През втората седмица Иван решил			
През последната седмица Иван решил			
През втората седмица Иван решил			

ВТОРИ МОДУЛ

Верният отговор на задача 21. се оценява със 7 точки

21. Награди на олимпиада по математика



За заключителния етап на Всерусийската олимпиада по математика се класираха 388 ученика от Русия. На олимпиадата взеха участие и по 6 състезатели от България и Китай. На тържествена церемония след надпреварата бяха връчени златни, сребърни и бронзови медали съответно в отношение 1 : 2 : 3. На учениците, решили поне по една задача и неполучили медал, им бяха връчени грамоти. Попълнете липсващата информация в текста, като използвате данните от диаграмата.

Златните медалисти са .... на брой. Получилите бронзови медали са .... на брой. Без награди са останали .... ученика. Учениците, получили златни медали са ....част от всички участници. Те са с .... % по – малко от участниците, получили бронзови медали. Учениците, получили грамоти, са ....% от всички участници на олимпиадата.

Верният отговор на задача 21. се оценява с 9 точки

22. Математически предизвикателства

На състезанието „Математически предизвикателства“ се дават 20 задачи, номерирани последователно с числата от 1 до 20.

Задачите с номера от 1 до 5 са „лесни“ и при верен отговор носят по 1 точка.

Задачите с номера от 6 до 10 са „нормални“ и при верен отговор носят по 2 точки.

Задачите с номера от 11 до 15 са „трудни“ и при верен отговор носят по 3 точки.

Задачите с номера от 16 до 20 са „невъзможни“ и при верен отговор носят по 4 точки.

Ако участник в състезанието постигне поне 41 точки, то представянето му е „фантастично“.

Ако участник в състезанието постигне между 31 и 40 точки, то представянето му е „отлично“.

Ако участник в състезанието постигне между 21 и 30 точки, то представянето му е „оптимистично“.

Ако участник в състезанието постигне между 11 и 20 точки, то представянето му е „прилично“.

Ако участник в състезанието постигне не повече от 10 точки, то представянето му е „безлично“.

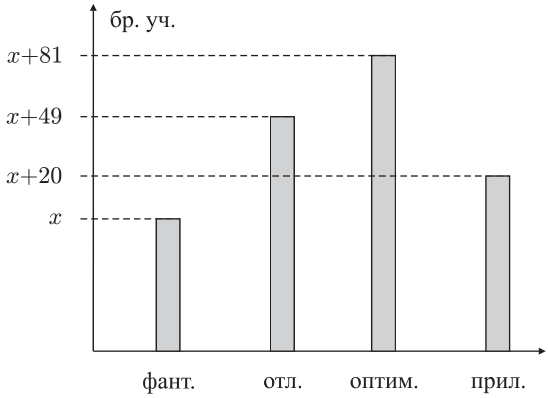
а)(2) Как се е представил участник, решил вярно 3 „лесни“, 3 „нормални“, 2 „трудни“ и 2 „невъзможни“ задачи?

б)(2) Колко най-малко задачи трябва да реши вярно участник в това състезание, че представянето му да е „отлично“?

в)(3) Участниците А., Б., В., Г. и Д. се представили съответно „фантастично“, „отлично“, „оптимистично“, „прилично“ и „безлично“, като постигнали най-малкия възможен за съответното представяне брой точки. Колко точки е средният им резултат? (отговорът да се запише като десетична дроб)

г)(2) На диаграмата вдясно е показано *представянето* на участниците в състезанието без тези, които са се представили „безлично“.

Ако всички участници в състезанието са 400 и 130 от тях са се представили „безлично“, то колко от участниците в това състезание са се представили „оптимистично“?



Верните решения на задача 23. и 24. се оценяват с по 10 точки

23. Дадено е неравенството:

$$x(x+3)(x-3)-(x-2)\left(x^2+2x+4\right) \geq x\left(\frac{x}{2}-1\right)-\frac{(2x+1)^2}{8}$$

а) Да се реши неравенството.

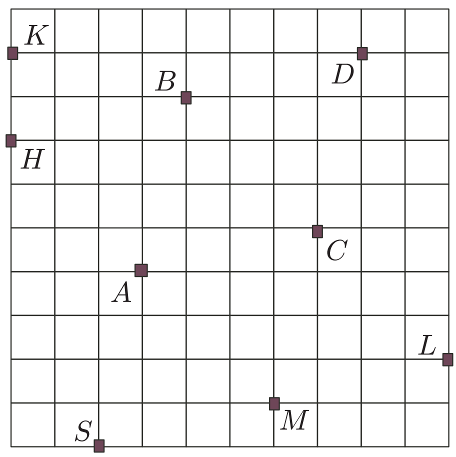
б) Да се намери най-голямото цяло решение на неравенството.

24. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) височината CD и ъглополовящата AL на $\sphericalangle BAC$ се пресичат в точка M. През точка B е построена права, успоредна на AL, която пресича правата CD в точка O. Ако мерките на ъглите $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ABC$ се отнасят съответно както $3:1$, да се докаже, че четириъгълникът $AOBM$ е ромб, $AL = 2CD$ и $BL > CL$.

ОТГОВОРИ

1. Г; **2.** Б; **3.** А; **4.** Б; **5.** Г; **6.** В; **7.** Б; **8.** Г; **9.** Б; **10.** В; **11.** Б; **12.** В; **13.** Г; **14.** Б; **15.** В; **16.** А; **17.** 108; **18.** $AC = 2x$, $BH = 2x$, $PL = 3y$, $PH = \frac{y}{2}$, $P_{ABC} = 6x + 3y$, $P_{APH} = x + \frac{3y}{2}$.

19.



20.

указания	Въведете неизвестно	Изразете	Брой задачи
Брой задачи за ваканцията	x		
През първата седмица Иван решил		$\frac{3}{7}x$	
След първата седмица останали		$\frac{4}{7}x$	
През втората седмица Иван решил		$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7}x = \frac{1}{7}x$	
През последната седмица Иван решил		$\frac{3}{7}x$	105
През втората седмица Иван решил			35

21. Златните медалисти са **25** на брой, получилите бронзови медали са **75** на брой. Без награди са останали **32** ученика. Учениците, получили златни медали са $\frac{1}{16}$ част от всички участници. Те са с $66\frac{2}{3}\%$ по – малко от участниците, получили бронзови медали. Учениците, получили грамоти, са **54,5%** от всички участници на олимпиадата.

22. а) оптимистично; б) 9; в) 20,8; г) 111

23. а) $x \leq 1\frac{1}{12}$; б) $x = 1$

24. Упътване: Докажете, че $\triangle ADM \cong \triangle BDO$ и диагоналите AB и MO са перпендикулярни и взаимно се разполовяват от пресечната си точка.

Докажете, че ъглите на $\triangle ABC$ са съответно 36°, 36°, 108°.

Ако означите $CM = x$ и $MD = y$, докажете, че $CO = x+2y$, $AO = CO$ и $AO = x + 2y$.

Ако точка $H \in AB$ и $AH = AC$, докажете, че $\triangle AHL \cong \triangle ACL$. Сравнете страните BL и HL в $\triangle HBL$.

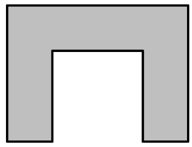
Бележка от редакцията. В условието на задача 24 от примерния тест за 7. клас, публикуван в бр. 3/2016, е пропуснато равенството $AC = 2.BM$ поради редакторска грешка.

за по-малките  задачи

4. клас

46. Три ябълки, четири круши и една праскова струват 4 лв. Една ябълка, четири круши и праскова струват 3 лв. 20 ст. Колко струва всеки плод поотделно, ако праскователа струва колкото две ябълки?

47. От правоъгълник със страни 15 см и 18 см изрязали квадрат със страна 12 см, както е показано на чертежа. Да се намери лицето и обиколката на получената фигура.



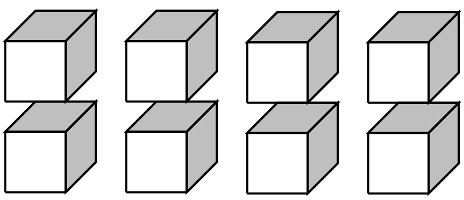
48. Васко решавал задачи в понеделник, вторник и сряда. В понеделник и сряда общо той решил с 32 задачи повече, отколкото във вторник, а във вторник решил с 11 задачи по-малко, отколкото в понеделник. Колко задачи е решил Васко в сряда?

49. В шест кутии има съответно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 бонбони. Иво взел две от кутиите, а Емо – три от останалите кутии и се оказало, че Емо е взел 2 пъти повече бонбони от Иво. Колко бонбони има в останалата кутия?

5. клас

50. В древен индийски трактат намираме следната задача. Ако $\frac{1}{5}$ от пчелния рой полетяла към акацията, $\frac{1}{3}$ — към липата, утроената разлика на тези числа – към цъфтящите череши, а една пчела продължила да лети през цветната градина, колко са пчелите в този рой?

51. За боядисване на повърхността на дървено кубче използвали 4 грама боя. Когато боята изсъхнала, разрязали кубчето на 8 еднакви кубчета. Колко грама боя са нужни, за да се боядисат неоцветените стени на малките кубчета?

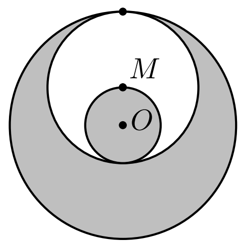


52. Яна, Ина и Ани си купили обща палатка. Яна дала 60% от цената на палатката, Ина дала 40% от останалата сума, а Ани – останалите 30 лв. Колко струва палатката?

53. Младеж се наел на работа при условие, че в края на годината ще получи автомобил и 2600 лв. Но след 8 месеца той напуснал, като за работата си получил автомобил и 1000 лв. Колко струва автомобилът?

6. клас

54. Едно от числата A, B и C е положително, друго е отрицателно, а третото е равно на 0. Ако $A = B(B - C)$, кое е положителното, кое – отрицателното и кое число е равно 0?



55. На чертежа са построени две окръжности с център точката O, а третата окръжност е с център M и се допира до другите две. Ако $OM = 1$, да се намери лицето на оцветената фигура.

56. Хари и Джим играли на топчета. В началото те имали по равен брой топчета. В първата игра Хари спечелил 20 топчета, но при втората загубил $\dfrac{2}{3}$ от всичките си топчета. Така топчетата на Джим станали 4 пъти повече, отколкото топчетата на Хари. С колко топчета е започнала играта?

57. Един от пет братя – Андрей, Васко, Димо, Тони или Юри, разбил прозореца. Те провели следния разговор.

Андрей: *Виновен е или Васко, или Тони.*

Васко: *Аз и Юри не сме виновни.*

Димо: *Един от вас казва истината, а другият лъже.*

Юри: *Димо, не си прав!*

Ако поне трима от братята казват истината, кой е разбил прозореца?

7. клас

58. Пет положителни числа a, b, c, d и e са такива, че

$$ab = 2, \quad bc = 3, \quad cd = 4, \quad de = 5.$$

На колко е равно отношението $e : a$?

59. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AB = BC$). На страната BC са взети точки K и M така, че K е между B и M, $KM = AM$ и $\sphericalangle MAC = \sphericalangle KAB$. Да се намери $\sphericalangle BAM$.

60. Точката D е среда на основата AC на равнобедрения триъгълник ABC. Точката E е петата на перпендикуляра от D към страната BC. Отсечките AE и BD се пресичат в точката F. Коя е по-дългата от отсечките BF и BE?

за по-малките решения

на задачите от бр. 3/2016

31. Кое число, увеличено 16 пъти, е равно на $2016 - 16.16$?

Решение. Търсеното число е равно на

$$(2016 - 16.16) : 16 = 2016 : 16 - (16.16) : 16 = 126 - 16 = 110.$$

32. Една от страните на правоъгълник е 12 см и е 10 пъти по-малка от обиколката му. Да се намери лицето на правоъгълника.

Решение. Неизвестната страна на правоъгълника е $12.4 = 48$ см, а лицето му е равно на $12.48 = 576$ кв.см.

33. Ида има червени и жълти лалета, общо 270. Тя ги натопила в няколко червени и жълти вази, като във всяка червена ваза поставила по 5 жълти и 4 червени лалета, а във всяка жълта ваза – по 4 жълти и 5 червени лалета.

а) Ако в червените вази са натопени общо 108 лалета, колко са всички жълти лалета?

б) Ако червените лалета са общо 137, колко са жълтите вази?

Решение. Във всяка ваза има по 9 лалета, значи вазите са общо $270 : 9 = 30$.

а) Червените вази са $108 : 9 = 12$, а жълтите са $30 - 12 = 18$. Жълтите лалета са $12.5 + 18.4 = 132$.

б) Ако във всички вази има по 4 червени лалета, червените лалета ще са общо $30.4 = 120$. Но те са със $137 - 120 = 17$ повече, следователно в 17 вази има не 4, а 5 червени лалета. Получихме, че жълтите вази са 17.

34. Таня нахранила няколко котки и два пъти повече кучета с общо 90 кренвирша. Всяко куче получило по два кренвирша, а всяка котка – по един кренвирш. Колко животни е нахранила Таня?

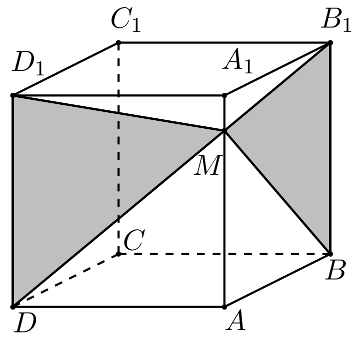
Решение. Тъй като кучетата са 2 пъти повече от котките, може да разпределим животните на групи, като във всяка група има котка и две кучета. Животните от една група, котка и две кучета, изяждат общо 5 кренвирша. Следователно групите са $90 : 5 = 18$, а нахранените животни са $18.3 = 54$.

35. Колко е разликата на най-голямата и най-малката от дробите

$$\frac{7}{8};\quad 1,02;\quad \frac{7}{6};\quad \frac{8}{9};\quad 1,1;\quad \frac{7}{5}\ ?$$

Решение. Търсената разлика е $\dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{8} = 1,4 - 0,875 = 0,525.$

36. Правоъгълният паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има обем 960 куб.см и ръб $AA_1 = 10$ см. На ръба AA_1 е избрана точка M. Ако лицето на триъгълника MBB_1 е 40 кв.см, да се намери лицето на триъгълника MDD_1.



Решение. В триъгълника MBB_1 страната BB_1 е 10 см, а височината към нея е равна на ръба AB. Лицето на MBB_1 е 40 кв.см, откъдето намираме $AB = 2.40 : 10 = 8$ см.
Обемът на паралелепипеда е равен на $960 = 10.8.AD$, откъдето $AD = 12$ см.
В триъгълника MDD_1 страната DD_1 е 10 см, а височината към нея е равна на ръба AD. Лицето на MDD_1 е $10.12 : 2 =$ 60 кв.см.

37. Най-малкото общо кратно на две двуцифрени числа е 2016, а най-големият им общ делител е 3. Колко е разликата на тези числа?

Решение. Нека a и b са числа с НОД$(a, b) = 3$ и НОК$(a, b) = 2016 = 2.2.2.2.2.3.3.7$, като a е четното число. Възможни са четири варианта:

1) $a = 3.2.2.2.2.2 = 96$, $b = 3.3.7 = 63$;

2) $a = 3.3.2.2.2.2.2 = 288$, $b = 3.7 = 21$;

3) $a = 3.2.2.2.2.2.7 = 672$, $b = 3.3 = 9$;

4) $a = 3.2.2.2.2.2.3.7 = 2016$, $b = 3$.

От условието, че числата са двуцифрени, следва, че те са 96 и 63 и търсената разлика е 33.

38. Да се намери неизвестното число в равенството

$$\left(\frac{3}{2} + 3,2\right).x + 2,3 = 60 - 10 \cdot \frac{3}{5}.$$

Решение. Като извършим пресмятанията в скобите и в дясната част на равенството, получаваме $4,7.x + 2,3 = 54$. Оттук $x = (54 - 2,3) : 4,7 = 11$.

39. Колко пъти противоположното на най-голямото от числата $2,5$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{5}{2}$, $5,2$ е по-голямо от реципрочното на най-малкото от тях?

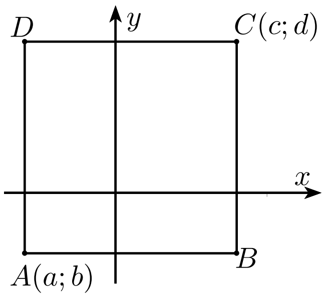
Решение. Най-голямото от дадените числа е $5,2$, а най-малкото е $-\frac{5}{2}$. Частното на противоположното на $5,2$ и реципрочното на $-\frac{5}{2}$ е равно на $-5,2 : \left(-\frac{2}{5}\right) = 13$.

40. Да се намери стойността на израза $\dfrac{2^{13}-2^{10}}{2^{11}+2^{10}}\cdot(2^8+2^5)$.

Решение. Имаме

$$\frac{2^{13}-2^{10}}{2^{11}+2^{10}}\cdot(2^8+2^5)=\frac{2^{10}(2^3-1)}{2^{10}(2+1)}\cdot(256+32)=\frac{7}{3}.288=672.$$

41. В правоъгълна координатна система е построен квадратът $ABCD$ със страни, успоредни на координатните оси. Върховете $A(a;b)$ и $C(c;d)$ имат целочислени координати и са съответно в трети и в първи квадрант. Да се намери страната на квадрата, ако $a.c=-12$ и $b.d=-10$. (Мерната единица е 1 см.)



Решение. От условието следва, че a и b са цели отрицателни числа, а c и d са естествени числа. Случаите, при които са изпълнени равенствата $a.c=-12$ и $b.d=-10$, са описани в таблиците.

a	-12	-6	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-3}$	-2	-1
c	1	2	**3**	**4**	2	12

b	-10	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-2}$	-1
d	1	**2**	**5**	10

Страната на квадрата е равна на $c-a$ и на $d-b$. Равенството $c-a=d-b$ е изпълнено, когато страната на квадрата е 7.

42. Преди две години възрастите на Иво, Любо и Тони бяха в отношение $1:2:3$. Днес отношението на възрастите на Иво и Тони е $2:5$. На колко години е Любо в момента?

Решение. Нека преди две години Иво, Любо и Тони са били съответно на x, $2x$ и $3x$ години. В момента отношението на възрастите на Иво и Тони е

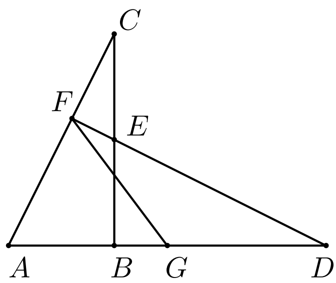
$$(x+2):(3x+2)=2:5 \iff 5(x+2)=2(3x+2) \iff x=6.$$

Следователно днес Любо е на $2x+2=2.6+2=14$ години.

43. С колко процента по-големият корен на уравнението $|x-25| = 5$ е по-голям от по-малкия му корен?

Решение. От равенствата $x - 25 = 5$ и $x - 25 = -5$ получаваме корените на даденото уравнение, $x_1 = 30$ и $x_2 = 20$. По-големият корен е с $\dfrac{30-20}{20} = 50\%$ по-голям от по-малкия корен.

44. На чертежа триъгълниците ABC и BDE са еднакви ($AB = BE = 1$ и $BC = BD = 2$), а точките A, B и D лежат на една права. Колко е разстоянието от средата G на отсечката AD до пресечната точка F на правите AC и DE?



Решение. От еднаквостта на триъгълниците ABC и DBC следва равенството $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBC$ и тъй като тези ъгли са съседни, то $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBC = 90^\circ$. Тогава $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ACB = \alpha$, а $\sphericalangle BAC = \sphericalangle 90^\circ - \alpha$. От сбора на ъглите в $\triangle ADF$ намираме $\sphericalangle AFD = 90^\circ$. В правоъгълния триъгълник ADF отсечката FG е медиана към хипотенузата $AD = 1 + 2 = 3$, следователно $FG = 1,5$.

45. Да се намерят числата a, b и c, за които е изпълнено равенството

$$a^2 + 5b^2 + 9c^2 + 4ab - 20b - 30c + 125 = 0.$$

Решение. Равенството може да се запише във вида

$$(a+2b)^2 + (b-10)^2 + (3c-5)^2 = 0.$$

Сборът на трите квадрата е равен на 0, когато всеки от тях е равен на 0, т.е.

$$a + 2b = 0, \quad b - 10 = 0, \quad 3c - 5 = 0.$$

Оттук $a = -20$, $b = 10$ и $c = \dfrac{5}{3}$.

30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА

Ивайло Кортезов

Състезанието „30 задачи на 30 езика“ е отборно (отборите са от 4 до 6 души) и датира от 2006 година. През първите години то се провеждаше в София, а от 2011 г. досега е част от Фестивала на младите математици в Созопол (който ще се състои тази година в периода 6–13 септември). Както личи от името, състезанието съдържа 30 задачи и те са на различни езици. Отборът трябва да се ориентира в условието на всяка задача и да избере един от петте дадени отговора (от които точно един е верен; отговорите сами по себе си също могат да носят информация за смисъла на задачата; за верен отговор се печелят по 5 точки; за непопълнен по една точка). Освен това отборът разполага с таблица на участващите езици, написани на собствения му език, и трябва да определи кой е номерът на задачата на този език и как се казва този език на родния му език (в различни години са участвали отбори от България, Гърция, Казахстан, Румъния, Русия и Чехия). В тази част от бланката се печели по една точка за всеки верен отговор. Състезанието е ориентирано към ученици от 9.–12. клас, но поради голямото желание и интерес сред малките ученици, в последните години състезанието се провежда в три възрастови групи (6.–7. клас, 8.–9. клас, 10.–12. клас), като съответно бяха включени и задачи, пододящи за по-малките.

Предлагаме ви състезателната тема от 2013 г., отговорите на задачите, както и преводи и решения на някои от тях.

1. María sumó 11 números impares consecutivos y obtuvo como resultado 2013. ¿Cuál es el mayor de los números que sumó María?

A) 173 **B)** 178 **C)** 183 **D)** 188 **E)** 193

2. Dirkalni avto ima začetno hitrost 8,9 m/s, nato pa vsako sekundo poveča hitrost za 1,3 m/s. Kolikšna je hitrost avtomobila po 11 sekundah?

A) 22,2 m/s **B)** 22,3 m/s **C)** 23,3 m/s **D)** 24,2 m/s **E)** Nobeden od teh

3. On teada, et Diana on vanem Annist, aga noorem Kerlist. Brita on vanem Annist ja Viktor on noorem Eevast. Diana on vanem Britast ja Kerli on noorem Viktorist. Kes kuuest sõbrast on kõige vanem?

A) Anni **B)** Brita **C)** Kerli **D)** Diana **E)** Eeva

4. [1] Do súťaže "Miss Cica 2013" sa prihlásilo 73 mačiek. Šestnásť z nich vypadlo zo súťaže po prvom kole, lebo nevedeli chytať myši. Z tých mačiek, ktoré zostali v súťaži, malo 28 pásiky a 37 malo jedno ucho čierne. Do finále sa dostali všetky pásikavé mačky s čiernym uchom. Najmenej kosko bolo finalistiek?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

5. *Καθεμία από τις γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι ίση με* 168°. *Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.*

A) 12 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 24 **E)** *Καμία από αυτές*

6. Mennyi $22! + 24!$ legnagyobb prímosztója? (Itt $n!$ van az n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát; például $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.)

A) 7 **B)** 19 **C)** 47 **D)** 79 **E)** 553

7. Кількість хлопців у класі становить 60% від кількості дівчат. Скільки відсотків всіх учнів становлять хлопці?

A) 37,5 **B)** 40 **C)** 60 **D)** 62,5 **E)** Жодна з цих відповідей

8. Les nombres entiers de 1 à 2013 sont répartis dans un cercle de manière que les nombres voisins diffèrent toujours par 1 ou 2. Quelle paire de nombres parmi les suivantes doit être voisins?

A) 23 et 24 **B)** 24 et 28 **C)** 28 et 31 **D)** 31 et 33 **E)** 33 et 34

9. Koliko ukupno stranica ima knjiga, ako prve tri stranice nisu numerisane, a ostale su numerisane počev od broja 4 i ako je za numeraciju knjige upotrebljeno 2013 cifara?

A) 706 **B)** 707 **C)** 708 **D)** 709 **E)** Drugi odgovor

10. Uma piscina rectangular, cujas dimensões (em metros) são inteiros, esta rodeada por um passeio que tem dois metros de largura. A área deste passeio é igual à área da piscina. Calcular o perímetro máximo possível da piscina.

A) 40 m **B)** 52 m **C)** 64 m **D)** 82 m **E)** 96 m

[1] Задачата е заета от състезанието Кенгуру 2013, проведено в съответната страна, с промени в числовите данни.

11. Илина од новоотворена ќеса со бомбони изела $1/4$ од вкупниот број на бомбони и уште 3 бомбони. Вториот ден изела $1/6$ од преостанатиот број на бомбони и уште 11 бомбони. Третиот ден ги изела преостанатите 19 бомбони. Колку бомбони имало во ќесата на почетокот?

A) 40 **B)** 44 **C)** 48 **D)** 52 **E)** 56

12. Lygties $x^2 - 8x = c$ šaknys x_1 ir x_2 tenkina sąlygą $7x_1 + 26x_2 = 2013$. Rasti c.

A) 9875 **B)** 9785 **C)** 9758 **D)** 9587 **E)** 9578

13. La differenza fra i due lati di un parallelogrammo è di 9 cm una è i $3/4$ dell'altra. Trovare la somma delle due altezze sapendo che l'area è di 432 cm^2.

A) 14 cm **B)** 28 cm **C)** 42 cm **D)** 56 cm **E)** 70 cm

14. Jos $x>0$, ratkaise x tämän järjestelmän yhtälö:

$$\left| \begin{array}{l} 41x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 2013 \\ z - x - y = 41 \end{array} \right.$$

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Mikään näistä

15. O familie este formată din trei persoane: tata, mama şi copilul. Acum suma vârstelor lor este de 72 de ani iar cu 9 ani în urmă aceasta sumă era de 49 de ani. Câţi ani are acum tatăl dacă mama este cu 27 de ani mai mare decât copilul?

A) 32 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 35 **E)** Alt răspuns

16. Tramvaje mají celý den v obou směrech trasy stejné intervaly. Chodec, který šel podél dráhy tramvaje, pozoroval, že ho každých 18 minut jedna tramvaj předjede a zároveň ho každé 6 minuty mine tramvaj v protisměru. Jaký interval (v minutách) mají tramvaje?

A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** Jiná odpověď

17. Në rezervuar të automobilit janë 60 litra benzinë dhe me ta mund të kalohen 600 kilometra. Llamba në tabelën e kontrollit fillon të ndizet kur në rezervuar mbeten më pak se $1/20$ e sasisë së benzinës. Sapo që ka filluar llamba të ndizet janë hedhur në rezervuar edhe 19 litra benzinë. Edhe sa kilometra mund të kalojmë derisa rezervuari plotësisht nuk zbrazet?

A) 200 **B)** 210 **C)** 220 **D)** 230 **E)** 240

18. In the addition problem $FIVE + FOUR = NINE$ identical letters represent identical digits, and different letters represent different digits. What is the largest value that $O + N + E$ can take?

A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

19. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день двумя косцами за один день работы. Сколько косцов было в артели?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

20. Cik pāri naturālu skaitļu $(m;\, n)$, kur $m < n$, apmierina vienādojumu $\dfrac{1}{2013} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$?

A) 9 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 18 **E)** 27

21. Четно число има точно 97 естествени делителя. Намерете сбора на последните му две цифри.

A) 7 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

22. Fyrir jákvæða heiltölu n látum við S(n) tákna summu tölustafa n (til að mynda $S(236) = 2 + 3 + 6 = 11$). Finnið stærsta mögulega gildi á $S(n)/S(4n)$.

A) 1 **B)** 2,5 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 7,5

23. Сваки (сем најмлађег) от 33 пирата различитих година има 1 новчић више от првог млађег. Заједно имају 2013 новчића. Сваког дана бира се пират који свима даје по новчић. Одредити максималан број новчића који може поседовати један пират.

A) 1485 **B)** 1517 **C)** 1683 **D)** 1845 **E)** 1980

24. Wie viele vierstellige natürliche Zahlen enthalten die Ziffer 7 und haben nur verschiedene Ziffern?

A) 1848 **B)** 1858 **C)** 1868 **D)** 1878 **E)** 1888

25. W pewnej klasie ponad 54% uczniów stanowią dziewczynki, zaś chiłpcy stanowią więcej niż 45%. Ilu uczniów może być w tej klasie?

A) 30 **B)** 32 **C)** 33 **D)** 34 **E)** Żadna z tych odpowiedzi

26. Bepaal het aantal oplossingen (a, b, c, d) van de vergelijking $a+b+c+d = 13$, waarbij a, b, c en d zijn gehele positieve getallen.

A) 220 **B)** 286 **C)** 364 **D)** 455 **E)** 560

27. $xyz = 2013$ ve $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

A) Hiçbiri **B)** 6 **C)** 12 **D)** 18 **E)** Sonsuz çoklukta

28. La oss si at et ord på seks bokstaver er *godt* om det ikke inneholder bokstavkombinasjonen AA. (For eksempel et ord ABBACC er godt, mens BAACBA er ikke godt.) Hvor mange *gode* ord kan man lage av bokstavene A, B og C?

A) 164 **B)** 328 **C)** 448 **D)** 1224 **E)** Ingen av disse

29. Дадзены тры акружнасці радыюсамі 1, 4 і 5, якія датыкаюцца папарна знешнім чынам. Знайсці даўжыню хорды, якую адсякае агульная ўнутраная датычная першых дзвюх акружнасцей ад трэцяй акружнасці.

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

30. En skolklass med 12 flickor och 8 pojkar skall ställa upp sig i ett led. Det får inte stå **två flickor** längst fram. På hur många sätt kan de ställa sig?

A) 248×18! **B)** 250×18! **C)** 252×18! **D)** 254×18! **E)** 256×18!

Отговори

1. E	2. E	3. E	4. B	5. E	6. D	7. A	8. D	9. C	10. D
11. D	12. B	13. B	14. E	15. D	16. A	17. C	18. C	19. E	20. C
21. B	22. D	23. B	24. A	25. C	26. A	27. B	28. C	29. C	30. A

3. Известно е, че Диана е по-голяма от Ани, но по-малка от Керли. Брита е по-голяма от Ани, а Виктор е по-малък от Ева. Диана е по-голяма от Брита и Керли е по-малка от Виктор. Кой е най-големият сред шестимата приятели?

Отговор E. Нека „>“ означава „по-голям от“. Тогава Ева > Виктор > Керли > Диана > Брита > Ани.

4. В състезанието “Мис Писанка 2013” били поканени 73 котки. Шестнадесет от тях били дисквалифицирани след първия кръг, понеже не умеели хващат мишки. Сред останалите котки имало 28 на ивици и 37 били с черно ухо. До финала достигнали всички котки на ивици, имащи черно ухо.

Какъв е най-малкият възможен брой финалистки?
Отговор B. Останалите котки са $73 - 16 = 57$. Щом $28 + 37 = 65 = 57 + 8$, поне 8 котки на ивици имат черно ухо, така че финалистките са били поне 8.

5. Всеки от ъглите на изпъкнал многоъгълник е равен на 168°. Намерете колко страни има многоъгълникът.
Отговор E. Сборът на външните ъгли е 360° и всеки от тях е по 12°, така че броят им е 30.

6. Кой е най-големият прост делител на 22!+24!? (Тук $n!$ е произведението на естествените числа, по-малки или равни на n; например 3!=1×2×3=6.)
Отговор D. Най-големият прост делител на $22! + 24! = (1 + 24 \times 23)22! = 553 \times 22! = 7 \times 79 \times 22!$ е 79.

15. Едно семейство се състои от баща, майка и дете. Сега сборът от годините им е 72, а преди 9 години е бил 49. На колко години е бащата сега, ако майката е с 27 години по-голяма от детето?
Отговор D. Сега възрастта на детето е $72 - 49 - 18 = 5$, тази на майката е $27 + 5 = 32$, а на бащата е $72 - 32 - 5 = 35$.

18. В задачата за събиране $FIVE + FOUR = NINE$ еднаквите букви представят еднакви цифри, а различните букви представят различни цифри. Коя е най-голямата възможна стойност на $O + N + E$?
Отговор C. От единиците имаме $R = 0$, а от стотиците (понеже $O \neq R$) имаме $O = 9$. Сега от хилядите $2F + 1 = N$, така че N е нечетно и $N \neq 9$. Ако $N = 7$, трябва $V + U = 17$, което е невъзможно, понеже цифрата 9 е заета. Най-голямата възможна стойност на N е 5, при $V + U = 15 = 7 + 8$. Най-голямото свободно E е 6. Така се реализира и най-малката стойност $O + N + E = 9 + 5 + 6 = 20$. (Решение на ребуса в този случай е $2476 + 2980 = 5456$.) Ако $N \leq 3$, поради $E \leq 8$ не можем да получим повече.

20. Колко двойки естествени числа (m, n), където $m < n$, изпълняват равенството $\frac{1}{2013} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$?
Отговор C. Имаме $mn - 2013m - 2013n = 0$, откъдето получаваме $(m - 2013)(n - 2013) = 2013^2 = 3^2 11^2 61^2$, което има $3.3.3 = 27$ естествени делители. Всеки такъв делител съответства на двойка естествени (m, n) и обратно; сред тях $(27 - 1)/2 = 13$ двойки изпълняват $m < n$. Не можем да ползваме представяне с отрицателни множители, понеже поне един от тях би бил по-малък или равен на -2013.

22. За естественото число n, означаваме с $S(n)$ сбора от цифрите му (например $S(236) = 2 + 3 + 6 = 11$). Намерете най-голямата възможна стойност на $S(n)/S(4n)$.

Отговор D. Имаме $S(n) = S(100 \times n) = S(25 \times 4n) \leq S(25)S(4n) = 7S(4n)$ (неравенството следва от метода за умножение). Така $S(n)/S(4n) \leq 7$, с равенство например за $n = 25$.

27. Колко тройки цели числа (x, y, z) изпълняват равенствата $xyz = 2013$ и $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$?

A) Николко **B)** 6 **C)** 12 **D)** 18 **E)** Безбройно много

Отговор B. Второто равенство се разлага до $(x-y)(x-z)(y-z) = 0$, така че сред x, y, z има равни числа. Но $2013 = 3 \times 11 \times 61$, така че равните числа са равни на 1 или на -1, а третото е 2013.

28. Ще казваме, че една дума с шест букви е *добра*, ако в нея не се среща буквената комбинация AA. (Например думата ABBACC е добра, а BAACBA не е добра.) Колко *добри* думи можем да съставим от буквите A, B и C?

Отговор C. Нека a_k е броят добри думи с дължина k. Явно $a_1 = 3$ (A, B, C) и $a_2 = 8$ (има 3.3 = 9 комбинации, от които трябва да се махне AA). При $k > 2$ всяка добра дума се състои от B или C, следвани от добра дума с $k - 1$ букви, или от AB или AC, следвани от добра дума с $k - 2$ букви. Така $a_k = 2a_{k-1} + 2a_{k-2}$. Оттук $a_3 = 22$, $a_4 = 60$, $a_5 = 164$, $a_6 = 448$.

*	Pr.	Език
English	18	английски
Français	8	френски
Deutsch	24	немски
Italiano	13	италиански
Български	21	български
Ελληνικά	5	гръцки
Português	10	португалски
Nederlands	26	холандски
Română	15	румънски
Norsk	28	норвежки
Українська	7	украински
Беларуская	29	белоруски
Bosanski	9	босненски
Suomi	14	фински
Lietuvių	12	литовски

*	Pr.	Език
Svenska	30	шведски
Türkçe	27	турски
Русский	19	руски
Polski	25	полски
Español	1	испански
Македонски	11	македонски
Shqip	17	албански
Slovenčina	4	словашки
Slovenščina	2	словенски
Српски	23	сръбски
Íslenska	22	исландски
Eesti	3	естонски
Čeština	16	чешки
Latviešu	20	латвийски
Magyar	6	унгарски

математическа ракла

В тази рубрика ще представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

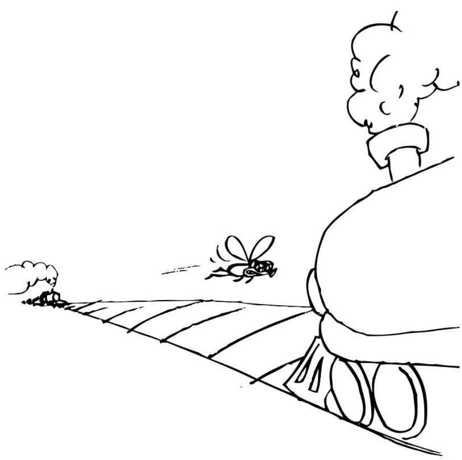
ЗА БЪРЗАТА МУХА, НЕТИПИЧНИТЕ ВЛАКОВЕ И ДЖОН ФОН НОЙМАН

Евгения Сендова[1]

Малко история

Задачата за една муха, която летяла по бързо от влак и летяла по малко странен начин, кацайки последователно на локомотивите на два влака, които се движели един срещу друг, е известна някъде от 20-те години на 20 век. Среща се в различни варианти, най-вече свързани с конкретните данни за разстоянието между влаковете и скоростите на героите в задачата.

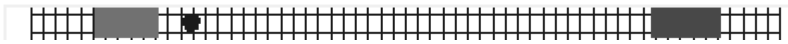
Ето една от известните формулировки.



Два влака се намират на един и същи коловоз, обърнати един срещу друг (не питайте защо). *Разстоянието межу тях е* 300 *км. Тръгват един срещу друг с една и съща скорост* (50 *км/ч*). *Не щеш ли, муха (шамипон по скоростно летене), която е кацнала на първия влак, излита в момента на тръгването му към втория влак със скорост* 100 *км/ч. В момента, в който стига до втория влак, мухата се обръща към първия влак и продължава движението си със същата скорост. И така нататък, докато не бива смачкана от двата влака при сблъсъка им. Колко километра е изминала бедната муха от момента на тръгване на влаковете, докато се сблъскат?*

[1]Ако случайно не сте открили името на водещия тази рубрика в предишните броеве, значи не сте забелязали общото в стила на *Ха на куб* и *Математическа ракла.*

За загрявка. Преди да атакувате задачата, може да погледнете един неин анимационен модел, за да си представите по-добре ситуацията (`http://mathworld.wolfram.com/TwoTrainsPuzzle.html`).



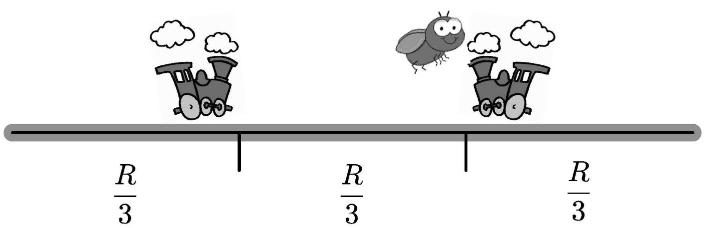
Един сериозен подход

Преди да четете по-нататък, опитайте се да решите самостоятелно задачата. Да отидете до FQA[2] (*често задавани въпроси*) също е начин, но няма да изпитате същото удоволствие, защото тук отговорът е най-маловажното нещо (няма такива мухи, а пък за влакове – да не говорим!).

Как би подходил човек, ако му се падне тази задача на изпит по математика? Естествено, ще я моделира и ще приложи най-подходящия математически апарат, описващ ситуацията. Забелязваме, че мухата се движи 2 пъти по-бързо от всеки влак. Нека под *тур* разбираме движението на мухата от единия влак до другия.

Да означим с R разстоянието между двата влака в начално положение (в нашия случай $R = 300$ km), а с R_n – разстоянието им след n-тия тур на мухата.

$n = 1$ (след края на първия тур)



Щом мухата се движи двойно по-бързо от влаковете, когато насрещният влак измине $\frac{1}{3}$ от разстоянието R, мухата ще е изминала $\frac{2}{3}R$, т.е. тя е кацнала върху него. В това време първият влак също ще е изминал $\frac{1}{3}R$. Следователно новото разстояние R_1 между влаковете ще е

$$R_1 = R - \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$$

(т.е. 3 пъти по-малко от старото), а изминатият през първия тур път на мухата S_1 е

$$S_1 = \frac{2}{3}R.$$

[2] Frequently asked questions

(Разбира се веднага можем да пресметнем, че новото разстояние е 100 km, а изминатият път от мухата до момента е 200 km, но това още не ни вълнува.)

Да съобразим какво става след втория тур, когато мухата отново каца на първия влак.

$n = 2$ (след края на втория тур)

Разсъждаваме по аналогия, само че този път разстоянието между влаковете е R_1:

$$R_2 = R_1 - \frac{2}{3}R_1 = \frac{1}{3}R_1 = \frac{1}{3^2}R,$$

а изминатият до този момент път на мухата е

$$S_1 + S_2 = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}R_1 = \frac{2}{3}(R + R_1) = \frac{2}{3}\left(R + \frac{1}{3}R\right) = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

Да направим още една стъпка, за да открием по-лесно закономерността.

$n = 3$ (след края на третия етап)

Новото разстояние R_3 между влаковете ще е

$$R_3 = R_2 - \frac{2}{3}R_2 = \frac{1}{3}R_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^2}R = \frac{1}{3^3}R,$$

а изминатият път на мухата до този момент е

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}R_2 = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)$$

Сега можем да запишем по-общо:

$$R_n = \frac{1}{3^n}R$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

Кога ще се блъснат влаковете? Когато разстоянието между тях е *безкрайно малко*, т.е., казано на математически език – *когато R_n клони към нула.* А кога става това? Когато *n клони към безкрайност.* Значи след безброй много турове на мухата... Е, както на някои вече е известно, общият път на мухата S може да се изрази със *степенен ред*, по-точно – с *безкрайна геометрична прогресия*

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

или записано по-накратко

$$S = \frac{2}{3} R \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right)$$

Като приложим формулата за сума на геометрична прогресия, получаваме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Окончателно

$$S = R = 300 \text{ км}$$

„Чакайте малко!“ – може би си мислите в този момент. Ами ако не сме учили за геометрична прогресия, и то безкрайна?

Ами тогава може би щяхте да бъдете в още по-благоприятно положение!

Не се шегувам. Да погледнем пак условието по-внимателно. След колко часа ще се срещнат влаковете, щом се движат с 50 км/ч един срещу друг? Естествено, след 3 часа (на всеки час изминават общо 100 км, а разстоянието между тях в началото е 300 км). А какво прави мухата в това време – лети!!! Значи лети си цели 3 часа със скорост 100 км/ч. Значи колко км е изминала?

В този момент сигурно се питате като шопа от една фолклорна история: „Е оти ручахме жабета?“

Интересното е, че кой начин е по-бърз и естествен, не е толкова очевидно. Да припомним следната история, която е толкова красноречива, че може да я срещнете в най-различни източници, често с леки вариации на финала. Ето моят любим вариант.

Фон Нойман и задачата за мухата

Един от най-великите умове на 20-и век, Джон фон Нойман (за когото става дума и в рубриката XA^3), наред с многобройните си таланти бил известен с уникалните си изчислителни способности от гледна точка на скорост и прецизност. Та на един прием домакинята решила да го предизвика със задачата за мухата и влаковете. Секунди след като дамата му казала условието (да предположим, че е с нашите данни), фон Нойман отметнал глава назад и, без да се замисля, казал: 300 км… Разочарована, домакинята казала: „Интересно, всички професионални математици, на които съм давала тази задача, я решават със степенни редове…“ „Че как иначе?“ – попитал още по-смаян фон Нойман…

Вариации на тема

Ако се поразходите из Мрежата с ключови думи *муха*, *влакове*, *Джон фон Нойман*, ще попаднете на интересни форуми, в които въпросната задача се коментира от математици, физици и други любители на занимателни задачи. Ще попаднете на интересни въпроси като например: *В каква посока гледа мухата, когато влаковете се блъснат?* (приписва се на Мартин Гарднър). Два от отговорите заслужават внимание: (1) *И в двете посоки.* (2) *Нагоре.*

А във филма „Красив ум“ (Beautiful mind), главният герой Джон Наш (изигранан блестящо от Ръсел Кроу) дискутира тази задача с група студенти в библиотеката.

С две думи, ако чуете тази задача от възторжен разказвач, не му казвайте: *Знам я!* Или още по-лошо: *Знам я в друг вариант!* Да не говорим за: *„Не е точно така...“* Помислете заедно за още интересни модификации!

И една задача за домашно

Един *турист* (герой на задачи за движение) решил да измине вълнуващ маршрут от A до B. Преди да потегли обаче, видял лека кола, спрял я на стоп и изминал половината разстояние от маршрута 20 пъти по-бързо, отколкото ако вървеше пеша. Точно на средата колата го оставила, но за щастие този път го качила волска кола, с която обаче той изминал останалата част от пътя двойно по-бавно, отколкото ако вървеше пеша. Спечелил ли е време или е загубил, колко и защо?

Използвани източници

- Weisstein, Eric W. *Two Trains Puzzle.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/TwoTrainsPuzzle.html` (последно посещение на 6 май 2016)

- Fly and Two Trains Riddle, `http://math.stackexchange.com/questions/149479/fly-and-two-trains-riddle`

- *The Classic “Two Trains and a Fly” problem*, `http://www.primepuzzle.com/leeslightest/howfar.html`

- Borwein, J. and Bailey, D. (2003) Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Wellesley, MA: A K Peters, p. 42.

- MacRae, N. (1992) *N.John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., p. 10

ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

КОЙ Е ПО-БЪРЗ В СМЕТКИТЕ?

Ако ме попитате какво толкова е направил Джон фон Нойман, сигурно ще ми е по-лесно да ви отговоря какво не е направил. Роден през 1903 г. в Унгария като Янош Нойман, той прави блестяща научна кариера в САЩ с изключителни приноси към квантовата механика, ядрената физика, функционалния анализ,теорията на множествата, теорията на игрите, концепцията за клетъчните автомати, икономиката, информатиката, статистиката. Информатиците го славят като пионер на съвременния компютър – първият основен принцип на фон Нойман гласи, че *няма логическа разлика между записа на данни и инструкции на програма и те се съхраняват в оперативната памет на компютъра* (като низове от 1 и 0). Както споменаваме и в *Математическата ракла*, способностите му да прави сложни изчисления на ум са били феноменални и приятелите и колегите му в Принстън са се отнасяли към него като към *жива легенда*. Естествено, той играел главна роля в разработването и тестването на първия *комютър със запаметена програма*. Историята, която разказвам тук, може да се чуе в оригинал от Херман Голдщаин (Herman Goldstine), основна фигура в разработката на компютъра ENIAC (39-ата минута от документалния филм за фон Нойман: `http://www.britannica.combiography/John-von-Neumann`).

Та по време на тестването на новия компютър, един млад математик от екипа се захваща с доста сложен проблем, свързан с огромно количество обработка на данни. Като разбира, че не може да атакува задачата с аналитични методи, той решава да се ограничи с пет частни случая, които да реши с помощта на новия компютър. Това му отнема цяла нощ и на другия ден той се появява в лабораторията неизбръснат, със сенки под очите, но щастлив, че е решил и петте случая. В това време влиза фон Нойман, току що завърнал се от командировка в друг щат.

— *Каква е хавата, момчета?* – звучи в общи линии поздравът му към екипа.

— *Ами мъчим се тук с един проблем, ама нещо не върви...*

Тогава той запретва ръкави:

— *Я да чуя...*

Казват му проблема и след кратък размисъл промълвява:

— *Това с аналитични методи няма да го бъде... Я да пробвам аз няколко частни случая...* – и почва да си мърмори, отметнал глава. В това време младият математик (който впоследствие станал световно известен, но Голдщаин не казва името му), дебнел внимателно фон Нойман. *Първият случай, аха – да* – и той казал резултата след 1 мин. Вторият, третият и четвъртият частни случаи му отнели малко повече – около 1,5–2 минути всеки. Но петият (с който младежът се борил цяла нощ), явно го позатруднил, защото почнал нервно да ходи напред-назад и да си мърмори междинните резултати. Когато чул едно число, предшестващо крайния резултат, младият математик го изпреварил и казал:

— *26.75.*

— *Какво???* – не повярвал на ушите си фон Нойман.

— *26.75, проф. фон Нойман.*

— *Един момент, да проверя!* – казал професорът и продължил да смята със засилено темпо още цяла минута:

— *Прав сте, младежо, наистина е 26.75.*

В това време, едва сдържащ смеха си, младият колега изхвърчал от стаята, а бедният фон Нойман продължил нервно да крачи из стаята и да си мърмори: *Какъв ли трик е приложило това момче, за да го сметне по-бързо от мен...* Колегите му се смилили над него едва след час и му разкрили трика...

Хумор в къси панталонки

Малкият Иванчо се връща от математическо състезание за първокласници.

— Получих грамота за трето място! – казва той на родителите си.

— Какво реши? – пита гордият баща.

— Задачата бе да сметна $9 + 8$ и аз отговорих: 15.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 3/2016 г.

ТЕМА 1

1. Г); **2.** В); **3.** Г); **4.** Б); **5.** Г); **6.** В); **7.** А); **8.** Б); **9.** А); **10.** В); **11.** Г); **12.** В); **13.** Б); **14.** А); **15.** Б); **16.** А); **17.** Б); **18.** В); **19.** А); **20.** Г); **21.** 0; **22.** $x = 1$; **23.** 3 години; 18,00 лв.; **24.** 57 години; **25.** 8π.

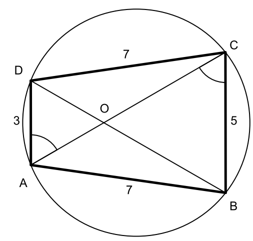
26. От първото уравнение $xy^2 = \dfrac{90}{x-y}$, заместваме във второто и получаваме $3x = 5y$. Оттук лесно следва $y^4 = 81$ или $y = \pm 3$. Решенията на задачата са $(5,3)$, $(-5,-3)$.

27. Родителят може да избере три топки сладолед от предлаганите пет вида по $C_5^3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$ начина, опаковка на сладоледа по 2 начина и два вида сироп от предлаганите четири вида по $C_4^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ начина; т.е. $10\cdot 2\cdot 6 = 120$ възможности.

При фиксирани вафлена фуния, бананов сладолед и карамелов сироп възможностите за избор са: две топки сладолед от останалите четири вида по $C_4^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ начина; още един сироп от останалите три вида по 3 начина; общо $6\cdot 3 = 18$ възможности. Търсената вероятност е

$$P = \frac{\textit{бр. благоприятни възможности}}{\textit{бр. всички възможности}} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20} = 15\%.$$

28. Понеже $AB = CD$, то $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, т.е. AD и BC са успоредни и четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец. Сега имаме $AC = BD$. Понеже $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$, то ΔADO и ΔBCO са равнобедрени и $\Delta ADO \sim \Delta BCO$, т.е. $AO = DO$, $BO = CO$ и $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{5}{3}$.



Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \varphi$ и от косинусовата теорема за ΔABC и ΔADC имаме

$$\left|\begin{array}{l} d_1^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot\cos\varphi \\ d_1^2 = 3^2 + 7^2 + 2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos\varphi, \end{array}\right.$$

откъдето получаваме $AC = d_1 = 8$. От $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{5}{3}$ и $BO + DO = 8$, намираме $BO = CO = 5$ и $AO = DO = 3$.

ТЕМА 2

1. А; **2.** В; **3.** В; **4.** Г; **5.** А.

6. След полагането $\lg x = t$ получаваме $(1-a)t^2 + 3at - a = 0$. Дискриминантата $D = 5a^2 + 4a$ е неотрицателна извън интервала $(-0,8;0)$.

а) При $a = 1$ получаваме $t = \dfrac{1}{3}$ и $x = \sqrt[3]{10}$.

б) От формулите на Виет $\dfrac{3a}{a-1} = t_1 + t_2 = 4a - 1$, откъдето $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

в) Трябва да се разгледат случаите $1 - a = 0$, $D = 0$ и $t_1 t_2 < 0$, които водят до $a \in (0,1] \cup \{-0,8\}$.

7. а) Лицето $S = \dfrac{1}{2}a^2 \sin\gamma$ е максимално при $\gamma = 90^\circ$ и тогава $S = \dfrac{1}{2}a^2$ и $R : r = \sqrt{2} + 1$.

б) Да означим $\sphericalangle A = \varphi$. От условието $R : r = 9 : 4$ получаваме $9\cos^3\varphi - 7\cos\varphi + 2 = 0$, откъдето като вземем предвид, че $\varphi < 60^\circ$, намираме $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$. Тогава $AB = \dfrac{4}{3}a$ и намираме $\operatorname{tg} \sphericalangle(c; m_a) = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

8. а) От равенството на околните ръбове следва, че ромбът $ABCD$ е вписан в окръжност, т.е. е квадрат и $ABCDM$ е парвилна четириъгълна пирамида. Тъй като $MH = 1$, то $AB = \sqrt{2}$ и $V = \dfrac{2}{3}$.

б) Тангенсът на двустенния ъгъл между две съседни околни стени е равен на $-\sqrt{2}$.

в) Ако цилиндърът има радиус r и височина h, то $h = 1 - r\sqrt{2}$ и обемът му е максимален, когато изразът $r^2 - \sqrt{2}r^3$ е максимален, т.е. при $r = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Тогава $V = \dfrac{4}{27}\pi$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 4/2016 г.

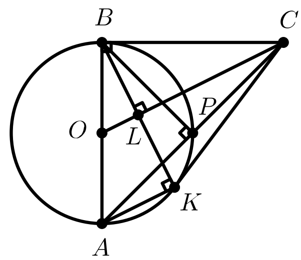
ТЕМА 1

1. Г); **2.** Б); **3.** В); **4.** А); **5.** Б); **6.** Г); **7.** А); **8.** В); **9.** Б); **10.** А); **11.** Г); **12.** В); **13.** 14; **14.** $\dfrac{1+\sqrt{65}}{32}$; **15.** 16.

16. От даденото равенство получаваме $\log_2^2|x-1| = \log_2|x-1|$, откъдето $\log_2|x-1| = 0$ или $\log_2|x-1| = 1$. Оттук $|x-1| = 1$ или $|x-1| = 2$ и получаваме четири корена: -1, 0, 2 и 3.

17. Известно е, че $S_{OA_1C} = \dfrac{1}{6}S_{ABC}$ и тъй като $S_{OA_1N} = \dfrac{1}{12}S_{ABC}$, то $S_{OA_1N} = \dfrac{1}{2}S_{OA_1C}$. Това означава, че точката N е средата на CO, т.е. триъгълникът COA_1 е равнобедрен, като $CA_1 = A_1O$. Оттук намираме отношението $CA_1 : AO = A_1O : AO = 1 : 2$.

18. Допирателните към окръжността през точката C са CK и CB, следователно $CB = 4$ и $CO \perp KB$. Тъй като $\sphericalangle APB = 90^\circ$ и P е среда на AB, то правоъгълният триъгълник ABC е равнобедрен, откъдето $AB = 4$ и $AO = 2$. Ако $L = BK \cap OC$, то OL е средна отсечка в $\triangle AKB$. Намираме OL като проекция на катета OB в правоъгълния триъгълник OBC:



$$OL = \frac{OB^2}{OC} = \frac{2^2}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Longrightarrow AK = 2OL = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

ТЕМА 2

1. В); **2.** Б); **3.** А); **4.** Б); **5.** В); **6.** А); **7.** Г); **8.** Б); **9.** А); **10.** Б); **11.** В); **12.** Б); **13.** $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$; **14.** $\dfrac{10}{9}$; **15.** 45.

16. Производната $y' = x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ при 0, -1 и 3, които са в разглеждания интервал $[-2;\ 4]$. Най-голямата стойност е $y(-2) = \dfrac{16}{3}$, най-малката стойност е $y(3) = -9{,}25$.

17. Описаният около $\triangle ABC$ кръг има радиус 4, следователно $AC = 8$. Тъй като ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ е перпендикулярна на медианата BD към хипотенузата, то $CD = BC$ и тъй като $BD = DC$, получаваме, че триъгълникът BDC е равностранен със страна 4. По косинусовата теорема от триъгълника ADK намираме $AK = 2\sqrt{7}$.

18. Описаната около четириъгълника $AKOD$ окръжност е описана около правоъгълния триъгълник AOD и има радиус $\dfrac{1}{2}AD$. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на $\dfrac{\sqrt{3}}{4}AD$ и търсеното отношение е $2 : \sqrt{3}$.

ТЕМА 3

1. Б; **2.** В; **3.** А; **4.** В; **5.** А; **6.** Б; **7.** В; **8.** Б; **9.** А; **10.** Г; **11.** Б; **12.** Г; **13.** В; **14.** Б; **15.** В; **16.** В; **17.** А; **18.** В; **19.** В; **20.** Г. **21.** $x = 6$; **22.** $S_{ABCD} = 20$; **23.** $x \in \{-3\} \cup \left(-1; \dfrac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$; **24.** $3\sqrt{3}$; **25.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$;

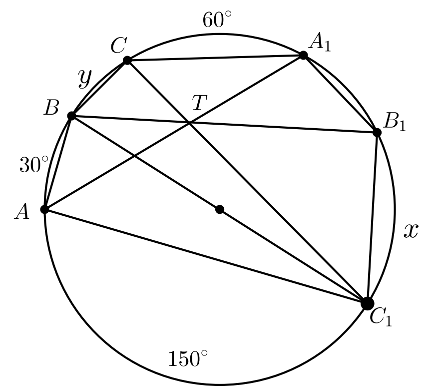
26. Ако x_0 е решение, то $-x_0$ също е решение. Точно 3 различни решения ще има, ако $x = 0$ е корен на уравнението. Получаваме $2a^2 - 3a + 1 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_2 = 1$.

При $a_1 = \dfrac{1}{2}$ получаваме $\left(x^2+1\right) - \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{2} = 0$ и след полагане $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ получаваме $t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{2} = 0$. Корените са $t_1 = \dfrac{1}{2} < 1$ – не отговаря, а при $t_2 = 1$ уравнението има само един корен $x = 0$.

При $a_2 = 1$ получаваме $\left(x^2+1\right) - 3\sqrt{x^2+1} + 2 = 0$ и след полагане $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ получаваме $t^2 - 3t + 2 = 0$ с корени $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. При $t_1 = 1$ получаваме $x_1 = 0$, а при $t_2 = 2$ получаваме $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Следователно търсеното число е $a = 1$.

27. За разпределението на неразличимите 10 монети по 1 лев между Асен, Борис и Васил ще използваме две неразличими монети по 2 лева. Например наредбата от 12 монети 111211112111 показва, че Асен получава 3 монети по 1 лев, Борис получава 4 монети и Васил получава 3 монети. Наредбата 221111111111 показва, че Асен и Борис получават по 0 монети (нищо не получават), а всичките 10 монети взема Васил.Наредбата 111122111111 показва, че Асен получава 4 монети, Борис – 0 монети, а Васил – 6 монети. Следователно броят на всички разпределения съответства на броя на всички подреждания на десет единици и две двойки. Получаваме $\dfrac{12!}{10!2!} = \dfrac{11.12}{1.2} = 66$.

28. Ще използваме, че ако AB е хорда от окръжност и $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, то $AB = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$, където R е радиусът на окръжността. Нека $\overset{\frown}{BC} = y^\circ$; тогава $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$. Имаме



$$\frac{AT}{B_1T} = \frac{AB}{B_1A_1} = 1;$$
$$\frac{B_1T}{CT} = \frac{B_1C_1}{CB} = \sin\frac{x}{2} : \sin\frac{y}{2};$$
$$\frac{CT}{AT} = \frac{CA_1}{AC_1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

Умножаваме почленно и получаваме

$$\frac{AT}{B_1T}.\frac{B_1T}{CT}.\frac{CT}{AT} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{y}{2}}.\frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin\left(45^\circ + 30^\circ\right)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 30^\circ \quad \text{и} \quad x = 60^\circ.$$

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

ИНФОРМАТИКА В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ТЕМИ 3

ВСЕРУСИЙСКА ОЛИМПИАДА 2016, *Петър Бойваленков, Румяна Караджова* 12

КОМПАНИИ, В КОИТО ВСЕКИ ДВАМА ИМАТ ТОЧНО ЕДИН ОБЩ ПОЗНАТ, *Николай Хаджииванов* 25

ПЕТА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА, *Емил Колев, Линка Минчева* 28

КЪДЕТО И ДА ОТИВАШ, ОТИВАЙ С ЦЯЛОТО СИ СЪРЦЕ, *Ксения Цочева* 33

ДВЕ ЗАДАЧИ НА БОРИСЛАВ МИХАЙЛОВ 37

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ 39

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 43

ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА СЕДМИ КЛАС, ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ, *Румяна Караджова, Иван Симеонов* 45

ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 53

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ 55

30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА, *Ивайло Кортезов* 59

ЗА БЪРЗАТА МУХА, НЕТИПИЧНИТЕ ВЛАКОВЕ И ДЖОН ФОН НОЙМАН, *Евгения Сендова* 66

ХА НА КУБ, *Евгения Сендова* 71

РЕШЕНИЯ НА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИТЕ ТЕМИ ОТ БР. 3 и 4/2016 Г. 75

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 13.05.2016 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.