МАТЕМАТИКА

БРОЙ 2
2017 г.
ГОДИНА LVI

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

проф. Пенка Рангелова

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи — 0 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $3x^2 - 5x - 2 = 0$, то стойността на израза $x_1^3 + x_2^3$ е:

А) $\dfrac{35}{27}$ **Б)** $\dfrac{215}{27}$ **В)** $\dfrac{215}{9}$ **Г)** $-\dfrac{215}{27}$

2. Решенията на неравенството

$$\frac{x+2}{x-3} > 1$$

са:

А) $x < 3$ **Б)** $x \in (-2; 3)$ **В)** $\forall x \in \mathbb{R}$ **Г)** $x > 3$

3. Корените на уравнението

$$2(5^{x-1} - 3^{x-2}) = 5^x - 3^{x+1}$$

са:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** 2

4. Решенията на системата

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{array} \right.$$

са:

А) $(2; 3),\ (3; 2)$ **Б)** $(-2; -3),\ (3; 2)$

В) $(2; 3),\ (-3; -2)$ **Г)** $(-2, -3),\ (-3, -2)$

5. Сумата от първите три члена на аритметична прогресия е 15, а сумата на третия и петия член е 22. Разликата на прогресията е:

А) 2 **Б)** 8 **В)** 3 **Г)** 6

6. Лицето на правоъгълен триъгълник, един от катетите на който е 13, а височината към хипотенузата – 12, е:

А) 202,4 **Б)** 202,8 **В)** 405,6 **Г)** 60

7. В триъгълник ABC са дадени $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ и радиусът на описаната окръжност R. Дължината на височината през върха C е:

А) $R \sin\alpha \sin\beta$ **Б)** $2R\sin\alpha$ **В)** $2R\sin\alpha\cos\beta$ **Г)** $2R\sin\alpha\sin\beta$

8. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ и медианата към хипотенузата са перпендикулярни. Ако $AC = 3\sqrt{3}$, то дължината на AB е:

А) 6 **Б)** 3

В) $6\sqrt{3}$ **Г)** не може да се намери

9. Решенията на неравенството

$$\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \leqq 8$$

са:

А) $x \leqq 4$ **Б)** $x \geqq 4$ **В)** $\frac{4}{5} < x \leqq 4$ **Г)** $0 < x \leqq 4$

10. Решенията на неравенството

$$x^4 - x^2 - 2 < 0$$

са:

А) $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ **Б)** $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

В) $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ **Г)** $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

11. Корените на уравнението $\dfrac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$ са:

А) -3; 7 **Б)** 1; 3 **В)** -7; 3 **Г)** -1; -3

12. Ако $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, то $\cos 2\alpha$ е:

А) $\dfrac{7}{9}$ **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **Г)** $\dfrac{2}{3}$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Четири естествени числа образуват аритметична прогресия. Ако произведението на първите три и на първите четири е съответно равно на 6 и 24, то тези числа са

14. Корените на уравнението $4^x - 2^{x+1} = 3$ са:

15. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2}$ е:

16. Решенията на неравенството

$$\log_{0,2}(x^2 + 2x - 1) > 0$$

са:

17. Диагоналите на вписания четириъгълник $ABCD$ се пресичат под прав ъгъл в точка E. Ако $AD = 13$, $BC = 26$ и $BE = 10$, то лицето на $ABCD$ е:

Част трета

Разпишете подробно и обосновете решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 15.

18. Медианите AM и BN на $\triangle ABC$ са взаимно перпендикулярни. Намерете дължината на AB, ако $BA = a$ и $AC = b$.

19. Решете уравнението

$$\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2.$$

20. В трапеца $ABCD$ ($AB \| CD$) с $AD = 2$ ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$ пресича правата DC в точка E. В $\triangle AED$ е вписана окръжност, която се допира до AD и DE съответно в точките M и H и $MH = 1$. Намерете големината на $\sphericalangle BAD$.

ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТВАНЕ В УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Вариант 1

Задача 1. Корените на уравнението

$$\log_5(x-2) - 2\log_5 \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{x+13}$$

са:

А) -3 **Б)** 5

В) 5 и -3 **Г)** нито едното от посочените

Задача 2. Нека $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ и $g(x) = 2x+1$. Ъгълът, който допирателната към графиката на функцията $u(x) = f(g(x))$ сключва с положителната посока на оста Ox в точката с абсциса $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, е:

А) $30°$ **Б)** $45°$ **В)** $60°$ **Г)** $90°$

Задача 3. Ако $\sin\alpha + \cos\alpha = 0.8$, то $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ е:

А) 0.008 **Б)** 0.64 **В)** 0.512 **Г)** 0.944

Задача 4. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е $2\sqrt{3}$, центърът ѝ е точката O, а $\sphericalangle BAC = 60°$. Радиусът на вписаната в $\triangle OBC$ окръжност е:

А) $2\sqrt{3}+3$ **Б)** $2\sqrt{3}-3$ **В)** $3(2-\sqrt{3})$ **Г)** $3(2+\sqrt{3})$

Задача 5. В правилна четириъгълна пирамида околният ръб е $\sqrt{2}$ и сключва с основата ъгъл $45°$. Разстоянието от центъра на основата до околна стена е:

А) $\sqrt{3}$ **Б)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ **В)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **Г)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 6. Дадено е уравнението

$$3(a-1)2^{2\cos 2x} - 3(a+1)2^{1-2\sin^2 x} + a + 1 = 0,$$

където a е параметър.

а) За кои стойности на параметъра a уравнението има корен $x = \dfrac{5\pi}{3}$?

б) Да се реши уравнението за $a = 5$.

в) За кои стойности на параметъра a уравнението има единствен корен в интервала $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$?

Задача 7. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи $CD = b$ и $AB = kb$, $k > 1$, в който може да се впише окръжност.

а) Да се намери лицето на трапеца за $k = 2$.

б) Да се докаже, че лицето на $\triangle ABM$ е равно на $\dfrac{k^3b^2}{k^2-1}$, където точката M е пресечната точка на правите AD и BC.

в) Да се намерят ъглите на трапеца, ако при фиксирано b лицето на $\triangle ABM$ е най-малко.

Задача 8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа ромбът $ABCD$ със страна a и остър ъгъл α. Околните ѝ стени сключват с основата един и същи ъгъл β.

а) Да се докаже, че обемът на пирамидата е $V = \dfrac{a^3}{6}\sin^2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

б) Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите AB и CM, ако $\alpha = 60^\circ$, а $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$.

Вариант 2

Задача 1. Дадено е уравнението

$$3^{1-2x} - 5^{3x+5} = \log_2(a+1) - \log_{\frac{1}{2}}(a-2).$$

Ако $x = -1$ е корен на уравнението, то a е:

А) -2 и 3 **Б)** -2 **В)** 3 **Г)** 2 и -3

Задача 2. Ако $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha$ е:

А) -2 **Б)** 0.5 **В)** -0.5 **Г)** 2

Задача 3. Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ в точката $x = 2$:

А) е успоредна на Ox **Б)** съвпада с Ox

В) сключва остър ъгъл с Ox **Г)** е успоредна на Oy

Задача 3. В равнобедрен триъгълник с основа 8 и бедро 6 е вписана окръжност. Прекарана е допирателна към тази окръжност, успоредна на основата. Отсечката от допирателната, заключена между бедрата на триъгълника е:

А) 3.6 **Б)** 4.8 **В)** 1.8 **Г)** 1.6

Задача 4. В правилна четириъгълна пирамида околният ръб е $\sqrt{2}$ и сключва с основата ъгъл 45°. Ъгълът между основен ръб и кръстосан с него околен ръб е:

А) 45° **Б)** 60° **В)** 75° **Г)** 90°

Задача 5. Дадено е неравенството

$$0,008.(0,2)^{\log_2^2(ax^2+4)} > (0,0016)^{\log_2(ax^2+4)} \qquad (1)$$

където $a \neq 0$ е параметър.

а) Да се реши неравенството (1) за $a = -18$

б) За кои стойности на параметъра a всяко решение на неравенството $x^2 + 2x < 0$ е решение и на неравенството (1)?

Задача 6. Даден е успоредникът $ABCD$ със страни $BC = b$ и $AB = kb$, $k > 1$, и ъгъл $\sphericalangle BAD = \alpha$. Нека AM и BL са съответно медиана и ъглополовяща в $\triangle ABC$ ($M \in BC$, $L \in CD$ и $AM \cap BL = N$.

а) Да се докаже, че $\dfrac{AN}{MN} = 2k$ и да се намери отношението $\dfrac{S_{\triangle BLC}}{S_{\triangle BMN}}$.

б) Да се докаже, че $S_{LCMN} > 3S_{\triangle BMN}$.

в) Ако $k = 2$ и около четириъгълника $LCMN$ може да се опише окръжност, да се намери $\cos\alpha$.

Задача 7. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с основа равнобедреният триъгълник ABC, ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = \gamma$ и височината към AB е m. Околният ръб CD е перпендикулярен на основата, а стената ABD сключва ъгъл φ с основата.

а) Да се намери околната повърхнина на пирамидата.

б) Нека λ е равнина, успоредна на AB и CD и на разстояние x от CD, $x \in (0, m)$. Да се намери лицето на сечението на пирамидата с равнината λ. За коя стойност на x това лице е най-голямо?

Забележка. Предложените теми са може би по-трудни от очакваните на самите изпити, но както се казва, „повече пот в тренировките, по-малко „кръв“ в боя“.

ЗИМЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АТАНАС РАДЕВ“

Петър Бойваленков, Емил Колев

На 20–22.01.2017 г. в Сливен се проведе Зимният математически турнир „Атанас Радев“. В него участваха 311 ученици от 8. до 12 клас. Резултатите на всички участници могат да бъдат намерени на сайта на ПМГ Сливен. Ето и имената на победителите:

Осми клас: **Кънг Виет До** (СМГ), **Стефан Хаджистойков** (СМГ) – 26 т., **Светлин Лалов** (СМГ) – 24 т., **Александър Недков** (СМГ), **Никола Стайков** (СМГ) – 22 т., **Валери Ванков** (СМГ) – 21 т.

Девети клас: **Виктор Балтин** (ППМГ, Бургас), **Добрин Бараков** (МГ, Плевен), **Евгени Кайряков** (СМГ) – 26 т., **Алек Димитров** (ПЧМГ), **Василена Цветанова** (МГ, Пловдив), **Димитър Чакъров** (МГ, Пловдив), **Иво Петров** (СМГ), **Кристиан Минчев** (ППМГ, Бургас) – 25 т.

Десети клас: **Борис Барбов** (СМГ), **Борислав Антов** (СМГ), **Иван-Александър Мавров** (СМГ), **Кристиян Василев** (ПЧМГ) – 26 т., **Бойко Борисов** (СМГ) – 24 т., **Богдан Симеонов** (ПЧМГ) – 21 т.

Единадесети клас: **Кирил Бангачев** (СМГ), **Константин Гаров** (ППМГ, Бургас) – 26 т., **Георги Димитров** (СМГ) – 24 т., **Атанас Динев** (ППМГ, Бургас), **Калоян Алексиев** (СМГ) – 21 т.

Дванадесети клас: **Виолета Найденова** (СМГ) – 25 т., **Христо Папазов** (Американски колеж) – 19 т.

Предлагаме ви условията на задачите, отговорите и кратки решения.

Задача 8.1. Да се докаже, че за произволни реални числа x, y и z е изпълнено неравенството:

$$x^2y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + z^2 + 2 \geq 2(xy + xz + yz)$$

Кога се достига равенство?

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на:

$$(z^2 + 1)(xy - 1)^2 + (xz + yz - 1)^2 \geq 0$$

и следователно е изпълнено за произволни реални числа x, y и z. Равенство се достига тогава и само тогава, когато $xy = 1$ и $xz + yz - 1 = 0$. От тези равенства получаваме $y = \dfrac{1}{x}$ и $z = \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{x}{x^2+1}$. Следователно равенство се достига тогава и само тогава, когато $x = p \neq 0$, $y = \dfrac{1}{p}$ и $z = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Коментар. Очакванията, че първата задача е по учебния материал и е лесна, не се оправдаха. Задача 1 се оказа най-трудна в темата за 8 клас. По нея се получиха само 7 пълни решения, а 122 от 131 участници получиха 0 точки.

Задача 8.2. Върху страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$, външно за триъгълника, са построени квадрати съответно с центрове M, N и P. Симетралите на отсечките NP, PM и MN пресичат страните BC, CA и AB съответно във вътрешни точки A_1, B_1 и C_1.

а) Да се намери отношението на лицата на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и ABC.

б) Да се намерят ъглите $\sphericalangle NA_1P$, $\sphericalangle PB_1M$ и $\sphericalangle MC_1N$.

Решението на тази задача, което ни изпрати седмокласникът Валери Ванков, ще намерите в рубриката *Ученическо творчество* в този брой.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $2^{n+2} + 3^{n+2} + 5^{n+2}$ се дели на $2^n + 3^n + 5^n$.

Решение. Нека $A = 2^n+3^n+5^n$ и $B = 2^{n+2}+3^{n+2}+5^{n+2}$. Разглеждаме следните случаи.

При $n = 1$ имаме $A = 10$ и $B = 160$. Следователно B се дели на A.

При $n = 2$ имаме $A = 38$ и $B = 722 = 38.19$. Следователно B се дели на A.

Нека $n \geq 3$. Тъй като $2^n+3^n+5^n = (-1)^n+0+(-1)^n = 2(-1)^n \pmod 3$, то A не се дели на 3. Да допуснем, че B се дели на A. Тогава A е делител на $B - A = 3C$, където $C = 2^n + 8.3^{n-1} + 8.5^n$. Тъй като A не се дели на 3, оттук следва, че C се дели на A. От друга страна при $n \geq 3$ имаме

$$\begin{aligned} C &= 8.3^{n-1} + 9.5^n - (5^n - 2^n) = \\ &= 2[(8.3^{n-2} + 3.5^n) - (5^{n-1} + 2.5^{n-2} + \cdots + 2^{n-2}.5 + 2^{n-1})]. \end{aligned}$$

Следователно C се дели на 3. Оттук следва, че $\frac{1}{3}C$ се дели на A. Затова съществува естествено число k, при което $C = 3kA$. Ако $k \geq 3$, то

$$C = 3kA \geq 9A = 9.2^n + 9.3^n + 9.5^n > 2^n + 8.3^{n-1} + 8.5^n = C.$$

Следователно $k = 1$ или $k = 2$. Ако $k = 1$, то $C - 3kA = C - 3A = 5^{n+1} - 3^{n-1} - 2^{n+1} = 0$. Последното равенство е невъзможно, защото

$$5^{n+1} - 3^{n-1} - 2^{n+1} = 3.5^n + 2.5^n - 3^{n-1} - 2^{n-1} > (3.3^n - 3^n) + (2.5^n - 2.2^n) > 0.$$

Ако $k = 2$, то $C - 3kA = C - 6A = 10(5^{n-1} - 3^{n-1} - 2^{n-1}) = 0$. Това равенство също е невъзможно, защото при $n \geq 3$

$$5^{n-1} - 3^{n-1} - 2^{n-1} = (5-3)(5^{n-2} + \cdots + 3^{n-2}) - 2^{n-1} > 2.5^{n-2} - 2.2^{n-2} > 0.$$

Следователно търсените стойности на n са $n = 1$ и $n = 2$.

Задача 8.4. Дадени са 2017 външно еднакви тежести с тегла 1 грам, 2 грама, ..., 2016 грама и 2017 грама (не знаем коя тежест колко тежи) и естествено число n.

Разполагаме с двураменна везна, която може да сравнява теглата на произволни две от тежестите. При това, ако разликата в теглата на двете тежести не надминава n, везната остава в равновесие. Ако разликата в теглата на двете тежести е по-голяма от n, везната показва коя тежест е по-тежка и колко е разликата в теглата на двете тежести.

а) Да се докаже, че при $n = 1$ с 2017 претегляния на везната можем да намерим теглата на всяка от тежестите.

б) Да се намерят всички стойности на n, за които с претегляния с везната могат да се намерят теглата на всяка от тежестите.

Решение. Да означим тежестите с $A_1, A_2, \ldots, A_{2017}$.

а) Да претеглим A_1 с всяка от останалите 2016 тежести. Да отбележим, че от всички 2016 претегляния везната ще бъде в равновесие в едно или две претегляния.

1. Ако има само една тежест (нека това е A_i), за която везната е в равновесие. Това означава, че теглото на A_1 е 1 (ако тя е по-лека от всички останали без A_i) или 2017 (ако тя е по-тежка от всички останали без A_i) и теглото на A_i е съответно 2 или 2016. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. В този случай 2016 претегляния са достатъчни.

2. Ако има две тежести (нека това са A_i и A_j), за които везната е в равновесие.

    - Ако A_1 е по-тежка от всички останали тежести, то A_1 има тегло 2016, а теглата на A_i и A_j са 2015 и 2017. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. С едно претегляне на A_i и A_j ще определим коя от тях колко тежи.
    - Ако A_1 е по-лека от всички останали тежести, то A_1 има тегло 2, а теглата на A_i и A_j са 1 и 3. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. С едно претегляне на A_i и A_j ще определим коя от тях колко тежи.

- Нека изберем тежест A_p която е по-тежка от A_1 и има най-голяма разлика с теглото на A_1 и тежест A_q, която е по-лека от A_1 и има най-голяма разлика с теглото на A_1. Ясно е, че теглото на A_p е 2017, а теглото на A_q е 1. Тогава от претеглянето на A_1 с A_p (или на A_1 с A_q) определяме теглото на A_1 (нека това тегло е t). От тук следва, че теглата на всички тежести (без A_i и A_j) се определят еднозначно от претеглянето и с A_1. Теглата на A_i и A_j са $t-1$ и $t+1$ и с едно претегляне на тези две тежести можем да определим теглата им.

б) Ако $n \geq 1009$, везната ще бъде в равновесие при всяко претегляне, в което участва тежест с тегло 1008, 1009 или 1010 грама (защото разликата в теглата на произволна тежест и тежест с тегло 1008, 1009 или 1010 не надминава 1009 грама). Това означава, че тежестите с тегла 1008, 1009 и 1010 грама са „неразличими“ при поставяне на везната, т.е. няма как да ги намерим.

Ако $n \leq 1008$, да премерим всички двойки тежести. Двойката, за която разликата в теглата е 2016, ще ни определи тежестите от 2017 грама (нека това е тежест A) и 1 грам (нека това е тежест B). Сега всички тежести с тегла от 2 до 1008 грама ще се определят от претеглянето с A, а всички тежести от 1010 до 2016 грама ще се определят от претеглянето с B.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^2 - (2018^2 - 1 + a)x + (2018 - a)2018^2 = 0$$

има реални корени x_1 и x_2, удовлетворяващи равенството

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2017}.$$

Решение. Да положим за прегледност $2017 = p$. Даденото условие е еквивалентно на

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{p} \iff \frac{(p+1)^2 - 1 + a}{(p+1)^2(p+1-a)} = \frac{1}{p}$$

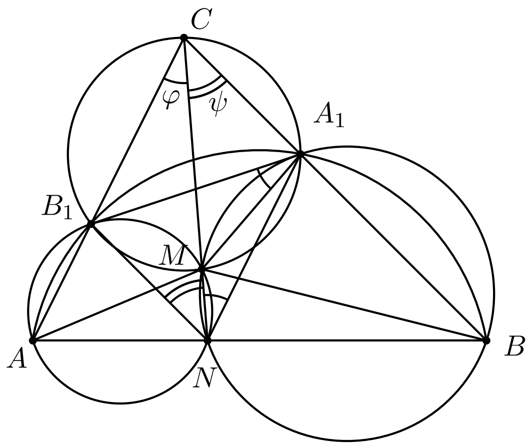
$$p(p+1)^2 + p(a-1) = p(p+1)^2 + (1-a)(p+1)^2.$$

От последното равенство получаваме $a = 1$ или $p = -(p+1)^2$, като второто очевидно е невъзможно. При $a = 1$ корените на даденото уравнение са $p+1$ и $p(p+1)$.

Задача 9.2. Точките A_1, B_1 и N са вътрешни съответно за страните BC, CA и AB на остроъгълен триъгълник ABC, като A_1CB_1N е успоредник, а четириъгълникът ABA_1B_1 е вписан. Описаната около $\triangle A_1B_1C$

окръжност пресича CN в точка M. Да се докаже, че правата A_1B_1 е обща допирателна за окръжностите, описани около триъгълниците AMN и BMN.

Решение. Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. Да означим още $\sphericalangle ACN = \varphi$ и $\sphericalangle BCN = \psi$. Тогава от условието следва, че $\sphericalangle MA_1B_1 = \varphi$ и $\sphericalangle MB_1A_1 = \psi$, както и $\sphericalangle MNA_1 = \varphi$ и $\sphericalangle MNB_1 = \psi$.



Имаме $\sphericalangle ANC = \beta+\psi$ като външен за $\triangle BCN$, а $\sphericalangle B_1A_1C = \alpha$ от вписания четириъгълник ABA_1B_1 и тогава

$$\sphericalangle MA_1B = 180^\circ - (\alpha + \varphi) = \beta + \gamma - \varphi = \beta + \psi = \sphericalangle ANC.$$

Следователно четириъгълникът NBA_1M е вписан. Оттук и от $\sphericalangle MNA_1 = \sphericalangle MA_1B_1 = \varphi$ следва, че правата A_1B_1 е допирателна към окръжността, описана около $\triangle BMN$.

Аналогично се доказва, че четириъгълникът NB_1A е вписан и A_1B_1 е допирателна към окръжността, описана около $\triangle AMN$.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$(n-2)\left[\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2}\right]$$

дели 3^{2017}.

Решение. От условието следва, че $n \geq 3$ и $(n-2)(2n^2+1) = 3^m$ за някое естествено число $m \leq 2017$. Следователно $n - 2 = 3^k$ и $2n^2 + 1 = 3^\ell$, където $k + \ell = m$, k и ℓ са цели неотрицателни числа. Да отбележим, че $k = 0$ и 1 не дават решение. От получената система изключваме n и достигаме до

$$9 + 2.3^{2k} + 8.3^k = 3^\ell.$$

Тъй като $\ell > 2k > k \geq 2$, от горното равенство следва, че всъщност $k = 2$ (в противен случай ще имаме противоречие по модул 27). Тогава $n = 3^k + 2 = 11$ и това е единственото решение на задачата.

Задача 9.4. За целите неотрицателни числа

$$\begin{array}{rcl} a & = & a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0, \\ b & = & b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0, \end{array}$$

$a_i, b_i \in \{0, 1\}$, дефинираме $a \oplus b = c = c_{n-1}2^{n-1} + c_{n-2}2^{n-2} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0$, където

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{ако } a_i = b_i, \\ 1 & \text{ако } a_i \neq b_i. \end{cases}$$

Дадени са три цели числа $0 \leq u, v, w \leq 2^n - 1$, за които е изпълнено

$$u < v \oplus w, \quad v < u \oplus w.$$

Да се докаже, че $u \oplus v < w$.

Решение. Идентифицираме числата $u = u_{n-1}2^{n-1} + u_{n-2}2^{n-2} + \ldots + u_0$, $v = v_{n-1}2^{n-1} + v_{n-2}2^{n-2} + \ldots + v_0$, $w = w_{n-1}2^{n-1} + w_{n-2}2^{n-2} + \ldots + w_0$ с двоичните низове

$$\overline{u} = u_{n-1}u_{n-2}\ldots u_0,\ \overline{v} = v_{n-1}v_{n-2}\ldots v_0, \overline{u} = w_{n-1}w_{n-2}\ldots w_0.$$

По условие имаме

$$\begin{array}{ll} \overline{u} = \alpha 0 \ldots, & \overline{v \oplus w} = \alpha 1 \ldots, \\ \overline{v} = \beta 0 \ldots, & \overline{u \oplus w} = \beta 1 \ldots, \end{array}$$

където α е дума с дължина i, а β е дума с дължина j.

Да допуснем, че $i \neq j$. Без ограничение на общността нека $i < j$. Да положим $\beta = \beta' x \ldots y$, където β' е дума с дължина $i - 1$. Сега имаме

$$\begin{array}{rcl} \overline{w} & = & \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 0 \ldots \\ \overline{w} & = & \overline{v} \oplus (\overline{v} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 1 \ldots \end{array}$$

противоречие, тъй като i-тият символ във $\overline{w}$ не може да е едновременно x и $x \oplus 1$. Следователно $i = j$.

Сега имаме

$$\overline{u} \oplus \overline{v} = (\alpha \oplus \beta)0 \ldots, \overline{w} = \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta)1 \ldots.$$

откъдето $u \oplus v < w$, което трябваше да се докаже.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които неравенството

$$a^2x^4 - (4a - 1)x^2 + 7 < 0 \ \text{ има решение.}$$

Решение. Очевидно при $a = 0$ неравенството няма решение.

Нека $a \neq 0$. Да разгледаме функцията

$$f(t) = a^2t^2 - (4a-1)t + 7, \quad t \geq 0.$$

Задчата се свежда до това да определим, за кои стойности на a неравенството $f(t) < 0$ има неотрицателно решение, или, еквивалентно, за кои стойности на a минималната стойност на $f(t)$ в интервала $[0, +\infty)$ е отрицателна.

Минимумът на $f(t)$ се достига за $t_0 = \dfrac{4a-1}{2a^2}$. Ако $t_0 \leq 0$, то за $t \geq 0$ функцията е растяща и $f(t) \geq f(0) = 7 > 0$. Следователно $t_0 > 0$, т.е. $a > \dfrac{1}{4}$.

Сега

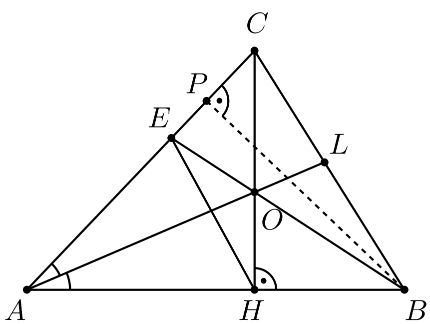
$$f(t_0) = \min f(t) = a^2\left(\frac{4a-1}{2a^2}\right)^2 - (4a-1)\frac{4a-1}{2a^2} + 7 = -\frac{(4a-1)^2}{4a^2} + 7 < 0.$$

Последното неравенство води до $12a^2 + 8a - 1 < 0$, чиито решения са $a \in (-2-\sqrt{7})/6, (-2+\sqrt{7})/6)$. Тъй като $1/4 > (-2+\sqrt{7})/6$, такива a не съществуват.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височина CH ($H \in AB$) и ъглополовяща AL ($L \in BC$), които се пресичат в точка O. Правата BO пресича страната AC в точка E. Да се докаже, че $\sphericalangle AHE > 45^\circ$.

Решение. Първо да забележим, че неравенството $\sphericalangle AHE > 45^\circ$ е еквивалентно с $\dfrac{AE}{EC} > \dfrac{AH}{HC}$. От теоремата на Чева за $\triangle ABC$ и правите AL, BE и CH получаваме

$$\frac{AE}{EC}.\frac{CL}{LB}.\frac{BH}{HA} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BL}{LC}.\frac{AH}{HB} = \frac{AB}{AC}.\frac{AH}{HB}.$$



Нека BP е височината от върха B. Имаме
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CH} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AH}{HC}.\frac{BP}{BH}.$$
Остава да съобразим, че $BP > BH$ като хорди в окръжността с диаметър BC, съответстващи на $\sphericalangle BCP > \sphericalangle BCH$.

Задача 10.3. Да се реши в естествени числа уравнението $2^n + n = m!$.

Решение. Очевидно $n = 1$ не е решение. Освен това $m > 1$ и тогава $m!$ се дели на 2. Понеже 2^n е четно, то n е четно. Ако n е просто, то $n = 2$ и $m = 3$. Ако $n > 2$, то n е съставно. Нека $n = 2^w s$, където $w, s \in \mathbb{N}$ и $(s, 2) = 1$. Получаваме, че w е каноничната степен на 2 в разлагането на $m!$.

Да допуснем, че $s > 1$. Тогава нека p е най-малкият прост делител на s. Ясно е, че ако $p \leq m$, то $m!$ се дели на p и понеже $n = 2^w s$ се дели на p, то и 2^n се дели на p, което е невъзможно. Следователно $p > m$, откъдето $s > m$.

Да допуснем, че $2^w \leq m$. Тогава 2^w ще бъде единствената степен на двойката като множител в $m!$, защото $2^w || m!$. Така получаваме единствена възможност – $w = 1$ и $m = 2$, което не води до решение. Противоречие. Следователно $2^w > m$.

Сега използваме резултатите $s > m$ и $2^w > m$ и след почленно умножение на неравенствата достигаме до $2^w s > m^2$ или $n > m^2$. Тогава $2^n + n > 2^{m^2} + m^2 > 2^{m^2}$. Но $2^m > m$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. Умножаваме неравенствата $2^m > m, 2^m > m - 1, \ldots, 2^m > 1$ и извеждаме $2^{m.m} > m!$, което е равносилно на $2^{m^2} > m!$ и така изкарваме $2^n + n > m!$, което е невъзможно. Следователно $s > 1$ не води до решение.

Сега знаем, че $n = 2^w$ за $w \in \mathbb{N}$ и $2^n + n = m!$. Понеже $n > 2$(n е съставно), то $m \geq 3$ и така $2^n + n$ се дели на 3, но понеже n е четно, то $2^n \equiv 1 \pmod 3$ и оттук извеждаме $n \equiv 2 \pmod 3$. Тогава $2^n \equiv 2^2 \pmod 7$ и така $n \equiv 3 \pmod 7$. Но нека вземем предвид факта, че $n = 2^w$. Така $2^w \equiv 3 \pmod 7$, което е невъзможно, защото степените на 2 дават остатъци 1, 2 и 4 при деление на 7 , а 3 не е от тях. Следователно за съставно n решение няма. Така единственото решение на задачата е $(n; m) = (2; 3)$.

Задача 10.4. Дадено е естествено число n. Да се намери най-малката възможна стойност на естественото число k, за което съществува полином $f(x)$ с цели коефициенти, който има цял корен, а полиномът $f(x) + k$ има n различни цели корена.

Решение. Отговор: $(m!)^2$ при четно $n = 2m$ и $(m+1)(m!)^2$ при нечетно $n = 2m + 1$.

Нека първо $n = 2m$ е четно число. От условието следва, че
$$g(x) = f(x) + k = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{2m})h(x),$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ са различни цели числа, а $h(x)$ е полином с цели коефициенти.

Ако $f(x)$ има цял корен x_0, от горното равенство следва, че

$$k = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{2m})h(x_0),$$

откъдето $k = |x_0 - x_1||x_0 - x_2|\ldots|x_0 - x_{2m}||h(x_0)|$. Множителите отдясно са естествени числа и измежду $|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \ldots, |x_0 - x_{2m}|$ никое естествено число не може да се появява повече от два пъти. Следователно

$$k \geq |x_0 - x_1||x_0 - x_2|\ldots|x_0 - x_{2m}| \geq 1.1.2.2.\cdots.m.m = (m!)^2.$$

Нека $k = (m!)^2$ и $f(x) = (-1)^m(x^2 - 1)(x^2 - 4)\ldots(x^2 - m^2) - (m!)^2$. Лесно се вижда, че $f(0) = 0$ и $f(x) + k$ има корени $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$.

При нечетно $n = 2m + 1$ разсъждаваме по аналогичен начин, като в този случай оценката е $k \geq (m+1)(m!)^2$, а полином с исканите свойства е $f(x) = (-1)^{m+1}(x^2 - 1)(x^2 - 4)\ldots(x^2 - m^2)(x - m - 1) - (m+1)(m!)^2$.

Задача 11.1. Дадена е геометрична прогресия $b_1 \neq 0, b_2, \ldots, b_n$, с дължина $n \geq 3$ и частно $q > 1$, което е естествено число. Аритметична прогресия има първи член, равен на първия член на геометричната прогресия и последен член, равен на предпоследния член на геометричната прогресия. Ако сборът от членовете на геометричната прогресия е равен на сбора от членовете на аритметичната прогресия, да се намери n.

Решение. От условието следва, че ако аритметичната прогресия има дължина k, то $a_1 = b_1$ и $a_k = b_{n-1} = b_1 q^{n-2}$. Сборът от членовете на геометричната прогресия е равен на $b_1(1 + q + \cdots + q^{n-1})$, а сборът от членовете на аритметичната прогресия е $\dfrac{a_1 + a_k}{2}.k = \dfrac{b_1 + b_1 q^{n-2}}{2}.k$. От равенството на тези два израза получаваме:

$$k = \frac{2(1 + q + \cdots + q^{n-1})}{1 + q^{n-2}}.$$

При $n = 3$ числото $\dfrac{2(1 + q + q^3)}{1 + q} = 2 + \dfrac{2q^3}{1 + q}$ не е цяло.

При $n = 4$ получаваме $k = 2(q + 1)$.

При $n \geq 5$ числото $\dfrac{2(1 + q + \cdots + q^{n-1})}{1 + q^{n-2}} = 2(q + 1) + \dfrac{2(q^2 + \cdots + q^{n-3})}{1 + q^{n-2}}$ не е цяло.

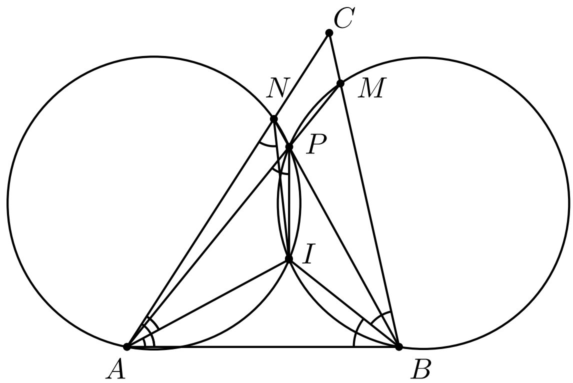
Следователно $n = 4$.

Задача 11.2. В $\triangle ABC$ точките M и N са съответно от страните BC и AC. Отсечките AM и BN се пресичат в точка P. Описаните окръжности около $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ се пресичат за втори път в центъра на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Да се намери IP, ако $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ и $R_{ABC} = 1$.

Решение. Имаме

$$\sphericalangle ANI = \sphericalangle API = 180^\circ - \sphericalangle MPI = \sphericalangle MBI = \frac{1}{2}\beta,$$

откъдето следва, че $\triangle AIN \cong \triangle AIB$. Следователно $AN = AB$ и $AI \perp BN$. Аналогично $BI \perp AM$, което означава, че I е ортоцентър на $\triangle ABP$.



Тъй като $\sphericalangle APB = \sphericalangle API + \sphericalangle BPI = \dfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$, то

$$PI = 2R_{ABP} \cos \sphericalangle APB = 2R_{ABP} \cos \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 2R_{ABP} \sin \frac{1}{2}\gamma.$$

От друга страна $R_{ABP} = R_{ABI} = 2R_{ABC} \sin \dfrac{1}{2}\gamma$. Следователно

$$PI = 4R_{ABC} \sin^2 \frac{1}{2}\gamma = 2 - \sqrt{2}.$$

Задача 11.3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които са изпълнени свойствата:

(i) Съществува $a \in \mathbb{N}$, за което $f(a) = 1$.

(ii) За всеки три естествени числа a, b и c, за които $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$, е изпълнено $\dfrac{1}{f(a)} + \dfrac{1}{f(b)} = \dfrac{1}{f(c)}$.

Решение. Равенството $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$ е изпълнено за всяко естествено число n. От (ii) следва, че

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n+1)} + \frac{1}{f(n(n+1))} > \frac{1}{f(n+1)},$$

откъдето получаваме $f(n+1) > f(n)$. Следователно функцията е растяща, като $f(1) = 1$ (ако $f(1) > 1$, то $f(a) = 1$ и $a > 1$, което е противоречие с това, че f е растяща).

От равенството $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n}$ следва, че $\dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{f(2n)} + \dfrac{1}{f(2n)}$, откъдето намираме

$$f(2n) = 2f(n).$$

От това равенство и от $f(1) = 1$ по индукция следва, че $f(2^k) = 2^k$ за всяко k. Понеже функцията е растяща, като $f(2^{k-1}) = 2^{k-1}$ и $f(2^k) = 2^k$, то $f(n) = n$ за всяко $n \in [2^{k-1}, 2^k]$. Следователно има само една такава функция и тя е $f(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 11.4. Дадени са естествени числа $n > m \geq 2$ и квадрат $n \times n$, разделен на единични квадратчета. Да се намерят всички естествени числа t за които при всяко оцветяване на t на брой единични квадратчета, винаги можем да намерим квадрат със страна m, разположен по линиите на големия квадрат, който съдържа точно 1 оцветено квадратче.

Решение. Нека първо $n \pmod m \neq m-1$. Да допуснем, че $t < 2\left[\dfrac{n}{m}\right]$. Блок ще наричаме m последователни реда един до друг. Разделяме дъската на $\left[\dfrac{n}{m}\right]$ последователни блока. Щом $t < 2\left[\dfrac{n}{m}\right]$ ще има блок с не-повече от едно оцветено квадратче. Ако е точно едно, лесно намираме търсения квадрат със страна m.

Ако няма оцветено квадратче, започваме да движим блока, докато стигнем до блок, в който всички оцветени са само в първия му ред (или последния). Сега разделяме този блок на $\left[\dfrac{n}{m}\right]$ последователни квадрата и отново намираме квадрат с най-много едно оцветено. Ако то е точно едно, задачата е решена. Ако са нула, то движейки квадрата, ще стигнем до квадрат с точно едно оцветено, защото оцветените квадратчета на блока лежат само в един ред.

Нека $t \geq 2\left[\dfrac{n}{m}\right] = k$. Записваме $t = l.k + r, 0 \leq r \leq k-1$. Разделяме стълбовете с номера от 2 до l на ивици $1 \times m$ и поставяме по 2 оцветени – последните две квадратчета на всяка ивица. В първия стълб оцветяваме по произволен начин r квадратчета. Лесно се вижда, че не съществува квадрат със страна m и точно едно оцветено квадратче.

Ако $n \pmod m = m-1$, то сега $k = 2\left[\dfrac{n}{m}\right] + 1$ и в примера ще оцветим и последното квадратче на ивицата $1 \times (m+1)$ на споменатите по-горе стълбове (допуснали сме, че $t \geq 2\left[\dfrac{n}{m}\right] + 1$).

При $t \leq 2\left[\dfrac{n}{m}\right]$ намирането на квадрат със страна m и точно едно оцветено става с аналогични разсъждения на 1 случай, като разглеждаме поотделно случаите, когато последните $m-1$ реда съдържат оцветено квадратче, или не съдържат нито едно.

Отговор: $t < 2\left[\frac{n}{m}\right]$ при $n \pmod{m} \neq m-1$ и $t \leq 2\left[\frac{n}{m}\right]$ при $n \pmod{m} = m-1$.

Задача 12.1. Нека x, y, z са такива реални числа, че

$$x^4 - 4xz + z^2 - 2z = 0, \quad y^4 - 4yz + z^2 - 2z = 0.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на $|x-y|$.

Решение. Имаме, че $t^4 - 4tz + z^2 - 2z = (t^2+z)^2 - 2z(t+1)^2$. Можем да считаме, че $x \neq y$. Тогава $z > 0$ и x, y са корени на квадратното уравнение (спрямо t)

$$2t^2 - 2ut + u^2 - 2u = 0,$$

където $u = \sqrt{2z}$. Оттук $|x-y| = \sqrt{4-(u-2)^2} \leq 2$, като $|x-y| = 2$ при $u = 2$.

Задача 12.2. Окръжност през върха C на $\triangle ABC$ се допира до страната AB в точка R и пресича страните AC и BC в точки P и Q така, че $AR.BR = CR^2$ и $AP.BQ = CP.CQ$. Да се докаже, че CR е височина или ъглополовяща в $\triangle ABC$.

Решение. Полагаме $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\varphi = \sphericalangle ACR$ и $\psi = \sphericalangle BCR$. Тогава $\varphi = \sphericalangle ARP$ и $\psi = \sphericalangle BRQ$. От синусовата теорема следва, че

$$\frac{AP}{RP} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{CP}{RP} = \frac{\sin(\alpha+2\varphi)}{\sin\varphi}, \text{ откъдето } \frac{AP}{CP} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha+2\varphi)}.$$

Аналогично $\frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin^2\psi}{\sin\beta\sin(\beta+2\psi)}$. Тогава

$$AP.BQ = CP.CQ \Leftrightarrow \sin^2\varphi\sin^2\psi \triangleq \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi).$$

По подобен начин следва, че $AR.BR = CR^2 \Leftrightarrow \sin\varphi\sin\psi \mathrel{\mathring{=}} \sin\alpha\sin\beta$. Значи $\sin\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi)$, т.е.

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi) - \cos(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi).$$

Понеже $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi) = 360^\circ$, то $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi)$, т.е. $\sin(\alpha-\beta+\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi) \risingdotseq 0$. Следователно $\alpha+\varphi = \beta+\psi = 90^\circ$ или $\varphi = \psi$, т.е. CR е височина или ъглополовяща в $\triangle ABC$.

Забележка. От $AR.BR = CR^2$ и $CR \perp AB$ следва, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Обратно, ако $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, то за окръжността с диаметър $CR \perp AB$ са изпълнени условията на задачата.

Задача 12.3. Върховете на два квадрата с лица S и T лежат върху страните на правоъгълен $\triangle ABC$, като три от тях лежат на хипотенузата AB с дължина цяло число c. Възможно ли е $S/2$ и $T/2$ да са взаимно прости естествени числа: а) за някое $c < 70$; б) за някое $c > 70$?

Решение. Възможно е и в двата случая.

Нека $a = |BC|$, $b = |AC|$ и $DEFG$ е квадрат със страна $m = \sqrt{S}$, като $D, E \in AB$, $F \in BC$, $G \in AC$. Понеже $\triangle AGD \sim \triangle GFC \sim \triangle ABC$, то $AG = mc/a$, $CG = mb/c$, откъдето $b = mc/a + mb/c$, т.е. (1) $m = \dfrac{abc}{ab + c^2}$.

Можем да считаме, че другият квадрат със страна $n = \sqrt{T}$ е $OMCN$, като $O \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. От $\triangle AON \sim \triangle OBM \sim \triangle ABC$ следва, че $AO = nc/a$, $BO = nc/b$, откъдето $c = nc/a + nc/b$, т.е. (2) $n = \dfrac{ab}{a+b}$.

Тогава
$$\frac{1}{S} - \frac{1}{T} = \frac{(ab + c^2)^2 - (ac + bc)^2}{(abc)^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Ако $S = 2s$ и $T = 2t$, то $c^2 \triangleq \dfrac{2st}{t-s}$. Понеже $(s,t) = 1$, лесно следва, че $t - s = 2$ или $t - s = 1$. В първия случай получаваме, че $c = 0$, което е невъзможно, а във втория достигаме до уравнението на Пел $(2s+1)^2 - 2c^2 \circeq 1$. Както е известно, това уравнение има безбройно много решения в естествени числа, като първите четири са $(1,2)$, $(8,12)$, $(49,70)$ и $(288,408)$.

Остава да видим за кои решения можем да построим $\triangle ABC$. От (1) и (2) следва, че
$$ab = \frac{mc^2}{c-m}, \quad a + b = \frac{mc^2}{(c-m)n}.$$

Тази система има решение в положителни числа, ако (3) $\dfrac{mc^2}{c-m} \geq 4n^2$. Понеже $n^2 = \dfrac{c^2m^2}{c^2 - m^2}$, лесно следва, че $a^2 + b^2 = c^2$. Освен това, $c > m$ и (3) добива вида $c \geq 3m$, т.е. $2s(s+1) = c^2 \geq 18s$ и значи $s \geq 8$.

Задача 12.4. Виж зад. 11.4.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Тодор Митев, 8.2 – Асен Божилов, Веселин Ненков, 8.4 – Емил Колев, 9.1, 9.3, 10.4 – Петър Бойваленков, 9.2 – Диана Данова, 9.4, 10.1 – Иван Ланджев, 10.2 – Емил Карлов, 10.3 – Станислав Димитров, 11.4 (12.4) – Александър Иванов, 11.1, 11.2 – Емил Колев, 11.3 – Пламен Пенчев, Александър Иванов, Емил Колев, 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов.

ЕВРОПЕЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА КУПА

На 4 декември 2016 г. в ИМИ на БАН се проведе Европейската Математическа Купа (EMC). EMC е задочно състезание за ученици, организирано от хърватската Association Young Gifted Mathematicians Marin Getaldic (www.mnm.hr). То се провежда вече четири години с участници от Белгия, Босна и Херцеговина, Гърция, Казахстан, Македония, Молдова, САЩ, Словакия, Турция, Чехия и др. България участва за първи път със съдействието на фондация *Георги Чиликов* и ИМИ – БАН.

Турнирът е в две възрастови групи (Junior и Senior). Състезателните теми включват четири задачи, близки по трудност до задачите, давани на Младежката Балканска олимпиада по математика (за Junior) и на Международната олимпиада по математика (за Senior).

Българските участници се представиха блестящо и спечелиха всичките четири медали в групата Junior:

Борислав Антов (10. клас, СМГ) – златен медал, **Евгени Кайряков** (9. клас, СМГ) – сребърен медал, **Кристиян Василев** (10. клас, ПЧМГ) и **Къонг Виет До** (8. клас, СМГ) – бронзов медал.

Класирането на всички участници е публикувано на адрес http://emc.mnm.hr/competition/results/

Тема за старша възраст

Задача 1. Съществува ли редица $a_1, \dots, a_{2016}$ от естествени числа, такава, че всяка сума $a_r + a_{r+1} + \dots + a_{s-1} + a_s$ (тук $1 \le r \le s \le 2016$) е съставно число, но

а) $(a_i, a_{i+1}) = 1$ за всички $i = 1, 2, \dots, 2015$;

б) $(a_i, a_{i+1}) = 1$ за всички $i = 1, 2, \dots, 2015$ и $(a_i, a_{i+2}) = 1$ за всички $i = 1, 2, \dots, 2014$?

Задача 2. Дадени са естествени числа a и b и две купчини съответно от a и b бисквити. Иванчо и Марийка играят следната игра: играчът, който е на ход, взема $2n$ бисквити от една от купчините, изяжда n от тези бисквити и оставя другите n върху другата купчина. Числото n е естествено и се избира от играча на всеки ход. Играчите се редуват, като Иванчо играе първи. Губи този, който не може да направи ход. При предположение, че двамата играят перфектно, да се определят всички двойки (a, b), за които Марийка има печеливша стратегия.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които равенството

$$f(x + y + yf(x)) = f(x) + f(y) + xf(y)$$

е изпълнено за всички реални числа x и y.

Задача 4. Нека C_1 и C_2 са окръжности, пресичащи се в точките X и Y. Нека A и D са точки върху C_1, а B и C са точки върху C_2, такива, че A, X и C лежат на една права и D, X и B лежат на една права. Допирателната към C_1 в точка D пресича BC и допирателната към C_2 в точка B съответно в точки P и R. Допирателната към C_2 в точка C пресича AD и допирателната към C_1 в точка A съответно в точки Q и S. Нека W е пресечната точка на AD с допирателната към C_2 в точка B, а Z е пресечната точка на BC с допирателната към C_1 в точка A. Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците YWZ, RSY и PQY имат две общи точки, или се допират в една и съща точка.

Тема за младша възраст

Задача 1. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0 и правейки скок с дължина k на k-тия път. Ще посети ли скакалецът всяка цяла точка поне веднъж, ако правилата са следните:

а) Ако дължината на скока е четна, скача наляво, в противен случай скача надясно (например, в началото скача 1 надясно, после 2 наляво, три надясно и т.н.);

б) Ако дължината на скока се дели на 3, скача наляво, в противен случай скача надясно (например, в началото скача 1 надясно, после 2 надясно, после 3 наляво, после 4 надясно и т.н.)?

Задача 2. Окръжностите C_1 и C_2 се пресичат в точки A и B. Нека P и Q са точки съответно върху C_1 и C_2, такива, че $|AP| = |AQ|$. Отсечката $\overline{PQ}$ пресича окръжностите C_1 и C_2 съответно в точки M и N. Нека C е средата на дъгата $\overset{\frown}{BP}$ от C_1, която не съдържа A, а D е средата на дъгата $\overset{\frown}{BQ}$ от C_2, която не съдържа A. Нека E е пресечната точка на CM и DN. Да се докаже, че $AE \perp CD$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват n различни положителни рационални числа, със сума от квадратите им равна на n.

Задача 4. Двойка естествени числа (n, k), $k > 1$, се нарича *добра*, ако съществува таблица $n \times n$ от нули и единици, във всеки ред на която има точно по k единици и за всеки два реда съществува точно един стълб, който пресича и двата реда в единица. Да се решат следните задачи:

а) Нека $d \neq 1$ е делител на n. Да се намерят всички остатъци, които d може да дава при деление на 6.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри двойки.

Решенията на задачите може да намерите на адрес

`http://emc.mnm.hr/competition/problems/`

УСПЕХ НА ЖАУТИКОВСКАТА ОЛИМПИАДА

От 12 до 18 януари 2017 г. в Алмати, Казахстан се проведе 13. Международна Жаутиковска олимпиада. България бе представена от отбор на СМГ (с ръководители Румяна Караджова, Стойчо Стоев и Никола Каравасилев) и отбор на ПМГ, Бургас (с ръководител Станислав Димитров). Всички български участници се върнаха с медал от олимпиадата – **Атанас Динев** (ПМГ, Бургас), **Кирил Бангачев** (СМГ) и **Константин Гаров** (ПМГ, Бургас) със златен медал, **Георги Димитров** (СМГ) и **Костадин Гаров** (ПМГ, Бургас) със сребърен медал и **Христо Попов** (СМГ) с бронзов медал.

Интересно е да се отбележи, че едно от двете пълни решения на задача 6 принадлежи на Кирил Бангчев, а само една точка не достига на Георги Димитров за златен медал.

Предлагаме Ви условията на задачите от двата дни на състезанието.

Задача 1. Неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC е вписан в окръжжност k. Нека H е пресечната точка на височините на ABC, а M е средата на страната AB. На дъгата AB, не съдържаща точката C, са взети точки P и Q, за които $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ < \sphericalangle ACQ$. Нека R и S са петите на перпендикулярите от H съответно към правите CQ и CP. Да се докаже, че точките P, Q, R и S лежат на окръжност с център M.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : R \to R$, за които $(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x))$ при произволни реални x и y.

Задача 3. В квадратна мрежа е построен правоъгълник със страни по линиите на мрежата. Правоъгълникът е покрит с домина (правоъгълници, състоящи се от две крадратчета с обща страна). Да се докаже, че всички възли на мрежата по контура на правоъгълника и вътре в него могат да се оцветят в три цвята така, че всеки два съседни възела да са разноцветни, ако са по контура на едно домино, а в противен случай да са разноцветни.

Задача 4. Първите k члена на редицата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са различни естествени числа, а при $n > k$ числото an е най-малкото естествено число, което не може да се представи като сбор на няколко (или едно) от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Да се докаже, че $a_n = 2a_{n-1}$ за всички достатъчно големи n.

Задача 5. За всяко естествено число k с $C(k)$ означаваме сбора на всички различни прости делители на k. Например, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Да се намерят всички n, за които $C(2^n + 1) = C(n)$.

Задача 6. Даден е правилен тетраедър $ABCD$ и произволни точки M и N. Да се докаже, че $MA.NA + MB.NB + MC.NC \geq MD.ND$.

Решенията на задачите може да намерите на `http://matol.kz/olympiads/499`.

ОКОЛО ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ

Невена Събева

На Областния кръг на Националната олимпиада по математика бе предложена следната задача за 12. клас.

Задача 1. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страните BC, CA, AB съответно в точките A_1, B_1, C_1, а върху дъгата $\overset{\frown}{A_1B_1}$, която не съдържа C_1, е избрана произволна точка P.

а) Да се намери $\dfrac{PA_1 + PB_1}{PC_1}$.

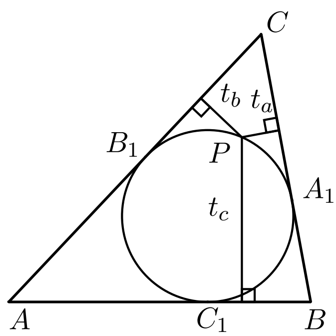
а) Ако разстоянията от точката P до страните BC, CA, AB са равни съответно на t_a, t_b, t_c, да се докаже, че

$$\frac{\sqrt{t_a} + \sqrt{t_b}}{\sqrt{t_c}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Тази задача е частен случай на следното по-общо твърдение:

Твърдение. Вписаната в триъгълник ABC окръжност се допира до страните BC, CA, AB съответно в точките A_1, B_1, C_1. Върху дъгата $\overset{\frown}{A_1B_1}$, която не съдържа C_1, е избрана произволна точка P. Ако разстоянията от точката P до страните BC, CA, AB са равни съответно на t_a, t_b, t_c, то

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_a} + \cos\frac{\beta}{2}\sqrt{t_b} = \cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_c}.$$



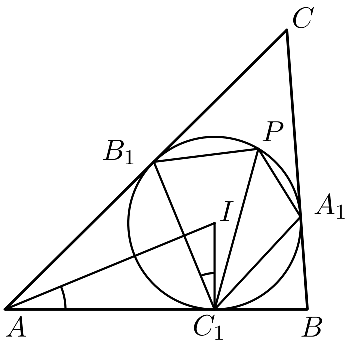
Фиг. 1

Твърдението се доказва лесно с помощта на теоремата на Птолемей. За вписания четириъгълник $PA_1C_1B_1$ имаме

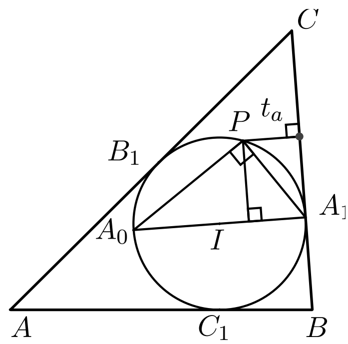
$$PA_1 \cdot B_1C_1 + PB_1 \cdot A_1C_1 = PC_1 \cdot A_1B_1. \tag{1}$$

Като използваме, че $B_1C_1 = 2r\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (фиг. 2) и аналогичните му равенства, от (1) получаваме

$$\cos\frac{\alpha}{2} \cdot PA_1 + \cos\frac{\beta}{2} \cdot PB_1 = \cos\frac{\gamma}{2} \cdot PC_1. \tag{2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Остава да забележим, че ако диаметърът на вписаната окръжност през A_1 е $A_1A_0 = 2r$, то t_a е проекцията на PA_1 върху A_1A_0 (фиг. 3). Следователно

$$PA_1^2 = A_0A_1 \cdot t_a \Longrightarrow PA_1 = \sqrt{2r.t_a}.$$

Аналогично $PB_1 = \sqrt{2r.t_b}$ и $PC_1 = \sqrt{2r.t_c}$ и като заместим в (2) и съкратим, получаваме желаното равенство.

Като следствие от това твърдение *в случая на равнобедрен правоъгълен триъгълник* получаваме задача 1:

$$\frac{\sqrt{t_a}+\sqrt{t_b}}{\sqrt{t_c}} = \frac{\cos 45^\circ}{\cos \frac{45^\circ}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

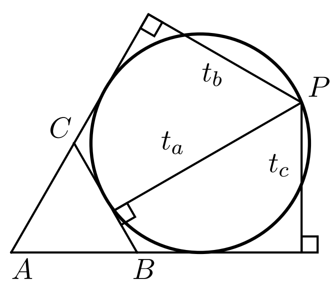
В случая на равностранен триъгълник получаваме известното равенство

$$\sqrt{t_a}+\sqrt{t_b} = \sqrt{t_c},$$

т.е. за точките от вписаната окръжност едно от числата $\sqrt{t_a}, \sqrt{t_b}, \sqrt{t_c}$ е равно на сбора на другите две. Когато точката P е вътрешна за вписаната в триъгълника окръжност, $\sqrt{t_a}, \sqrt{t_b}, \sqrt{t_c}$ са страни на триъгълник (това е задача 1. от състезанието Rumanian Masters of Mathematics през 2008 г).

Подобно равенство е в сила за точките от *външновписаната окръжност в равностранен триъгълник*. За разстоянията на чертежа имаме

$$\frac{\sqrt{t_b}+\sqrt{t_c}}{\sqrt{t_a}} = \sqrt{3}.$$



Оставям на читателя да обобщи това твърдение за произволен триъгълник.

В тази рубрика представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

КАКВО СЕ КРИЕ ЗАД ЕМБЛЕМАТА НА ИМИ–БАН?[1]

Евгения Сендова

Един математически обект не се счита изчерпан, докато не стане интуитивно очевиден...
Феликс Клайн

Вглеждали ли сте се в емблемата на Института по математика и информатика при БАН?

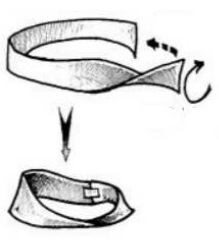
Първо – инициалите са изписани по много остроумен начин (предложен от Иван Держански) – четат се и на кирилица, и на латиница. Второ – рамката е една забележителна повърхнина, наречена *Мъобиусов лист* (още *пръстен* или *лента на Мьобиус*).

Какво ѝ е толкова забележителното – лента като лента? – ще попитате. Нищо подобно! Тази лента може да Ви направи истински фокусник пред приятелите Ви, които още не са прочели тази *Математическа ракла.*

Започваме с експериментите – въоръжете се с ножици, лепило (кламери, телбод) и хартия (за удобство може да е карирана).

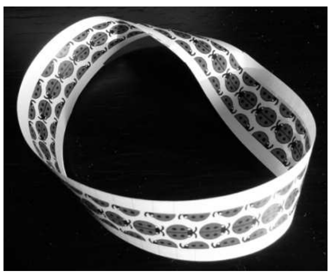
Експеримент 1 – как се прави лента на Мьобиус

Отрежете хартиена ивица с ширина 3–4 см и дължина 15–20 см. Усучете единия ѝ край на половин оборот и залепете двата края (фиг. 1).



Фиг. 1

Фиг. 2а



Фиг. 2б

[1]Посвещавам на 70-годишнината на Института.

Сега прекарайте линия с молив по средата на лентата (фиг. 2а). Какво се оказа? Стигате до точката, от която сте тръгнали, като обхождате цялата лента. Ако ако имате специално тиксо с калинки, може да го залепите върху средната линия (фиг. 2б). Забелязвате ли, че калинките обхождат лентата, без да минават през ръба... Значи тази повърхнина има само една страна! Ето до какво доведе едно *половинчато* усукване...

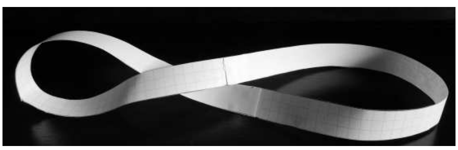
Друго интересно свойство на повърхнината е, че тя е *неориентирана. Какво пък означава това*? – може би се чудите. Ами нарисувайте на равни интервали върху лентата (с калинките например) кръгчета със стрелка по посока на часовниковата. Когато се приближите до началното кръгче, ще забележите, че стрелкичката Ви вече е в посока, обратна на часовниковата. Именно това свойство на повърхнината я определя като *неориентирана.*

Откривателят на тази повърхнина, както се досещате, се казва Мьобиус - германски математик, един от пионерите в областта на топологията. Той направил откритието си и описал свойствата на повърхнината около средата на 19. век.

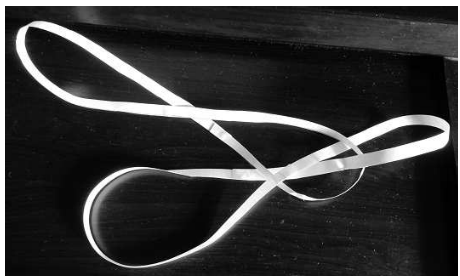
В следващите експерименти не бързайте с рязането. Опитайте се да си преставите резултата и тогава проверете предположението си. Когато влезете в ролята на фокусник, изчакайте да получите евентуално различни отговори от публиката, за да засилите драматизма!

Експеримент 2 – разрез по средата

Сега разрежете лентата по средата (може да следвате линията). Попитайте публиката си колко ленти очаква да се получат. Всеки непредубеден зрител би казал: *Две!* И веднага ще разберете, че още е назад с материала... Получава се една лента, разбира се (фиг. 3)! Но дали пак е Мьобиусова? Изследвайте я. Колко страни има? Какво ще стане, ако я разрежете отново на две? Опишете новополучената конструкция (фиг. 4) така, че някой, който не я вижда, да може да си я представи.



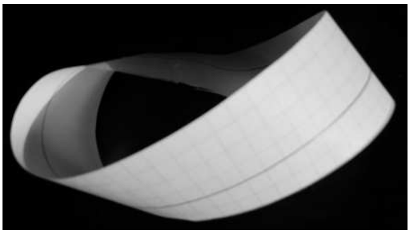
Фиг. 3



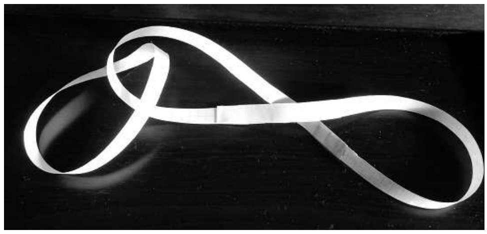
Фиг. 4

Експеримент 3 – разрез на 1/3 от ширината на лентата

Направете нова лента на Мьобиус. Този път ще направите само малка промяна в линията – ще я прокарате на 1/3 от ширината на лентата (фиг. 5). И пак разрязвате по линията. Но не бързайте! Помислете дали ще има разлика в сравнения с предишния експеримент. Попитайте и публиката си за мнение. Излиза, че има разлика, и то каква! Изследвайте новополучения обект (фиг. 6). Може да му дадете и своето име, още не съм чувала да е именуван...



Фиг. 5



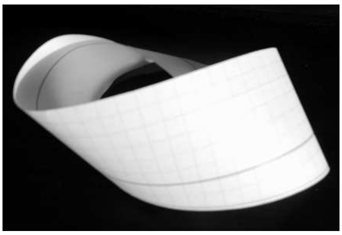
Фиг. 6

Как се отнасят дължините на елементите на този обект? А ширините?

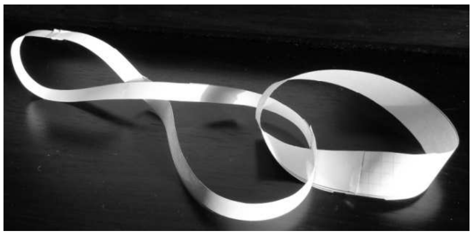
Експеримент 4 – разрез на 1/4 от ширината на лентата

Продължавате с нова лента на Мьобиус. Този път прекарайте линия на 1/4 от ширината му (фиг. 7) и разрежете лентата по нея.

Сравнете резултатите от последните два експеримента (фиг. 6 и фиг. 8).



Фиг. 7



Фиг. 8

Експеримент 5 – продължаваме в същия дух

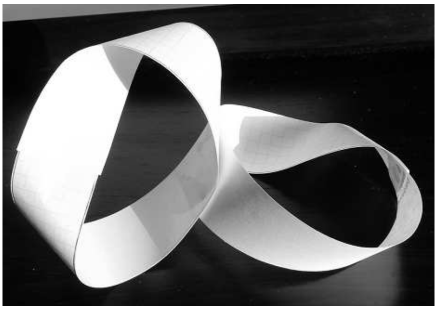
Сигурно се досещате какво следва – линия на разстояние 1/5 от нова лента на Мьобиус. Преди да започнете разрязването обаче, опитайте се да откриете някаква закономерност в досегашните опити и да предвидите какво ще се получи.

Експеримент 6 – отзад напред

Вземете произволен обект, до който стигнахте в предишните експерименти, и се опитайте да го превърнете в изходния обект.

Експеримент 7 – разрез на две ленти на Мьобиус, залепени перпендикулярно

Сега направете две ленти на Мьобиус, като усучете едната наляво, а другата – надясно. След това ги залепете перпендикулярно една към друга (фиг. 9). Разрежете докрай получената конструкция, като започнете с малък пробод по средата на лентата и продължавате да режете по средната й линия. Не забравяйте да подканяте публиката да предсказва: *Колко елемента ще има конструкцията след разрязването? Каква форма ще имат те? Как ще се отнасят размерите им?* и т.н. И когато всички са притаили дъх, направете последното срязване (фиг. 10). Прекрасно, нали! Това вече си струва да поднесете на любимия човек (дори да не е толкова запален по математиката...засега).



Фиг. 9

Фиг. 10

Експеримент 8 – този път цилиндрични пръстени вместо ленти на Мьобиус

Ефектът може да се подсили, ако направите горния експеримент с достатъчно дълги ленти на Мьобиус (така че усукването да не личи), а на доброволец от публиката дадете наглед подобна конструкция, само че с цилиндрични пръстени (залепени пак перпендикулярно един на друг). Започвате да режете по средата едновременно с доброволеца и... Да видим чие произведение ще заслужи да бъде поставено в рамка!

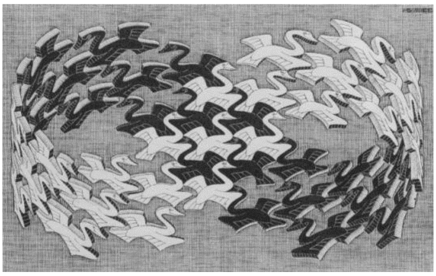
Вариации на тема *Лист на Мъобиус*

Оттук нататък, както казват, *таван може да е само Вашето въображение.* Да правите *вариации на дадена тема*, в случая – да променяте началните условия на задачата, да задавате нови въпроси и т.н., си е чиста проба творчество!

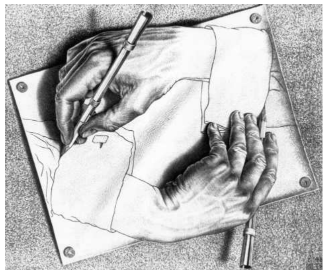
Може да започнете, като си нарисувате собствен мотив върху лентата, да сменяте броя на усукванията и пак да проведете експерименти с новите обекти.

Добре е да се поразходите и из виртуалните галерии – напишете в Google като ключови фрази: *лента на Мъобиус* (*Moebius strip, band, loop*), *рисунки (drawings), скулптури (sculptures).* Редица известни художници и скулптори са се вдъхновявали и продължават да се вдъхновяват от тази повърхнина. Добра идея е да добавите и името на Ешер (Escher), прочут холандски художник от френски произход, който е вплитал много математически идеи в произведенията си (фиг. 11–13).

Фиг. 11



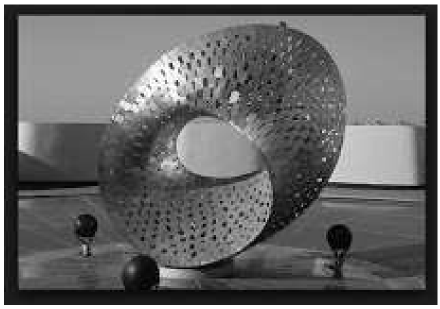
Фиг. 12



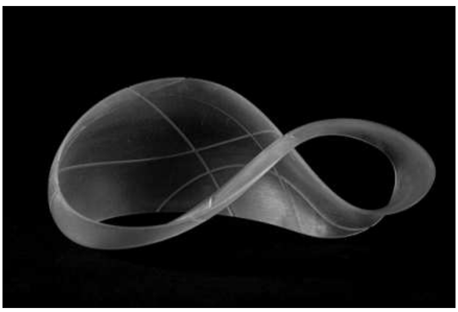
Фиг. 13

Към *скулптури* добавате имената на Макс Бил (Max Bill) (фиг. 14), Роберт Уилсон (Robert Wilson) (фиг. 15) и Марико Мори (Mariko Mori) (фиг. 16). Интересното за макета на фиг. 16 е, че е част от декора на операта *Мадам Бътерфлай*, от постановка във Венеция през 2013 г. (фиг. 17).

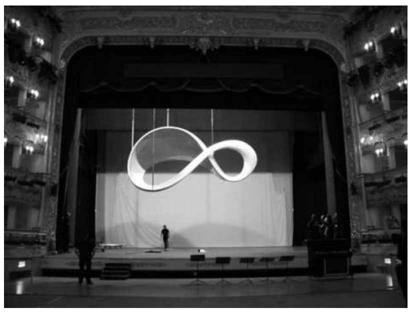
Фиг. 14



Фиг. 15



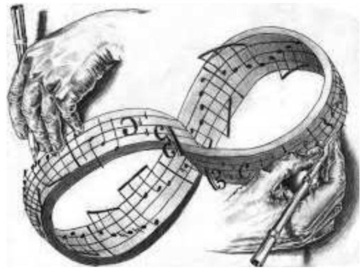
Фиг. 16



Фиг. 17

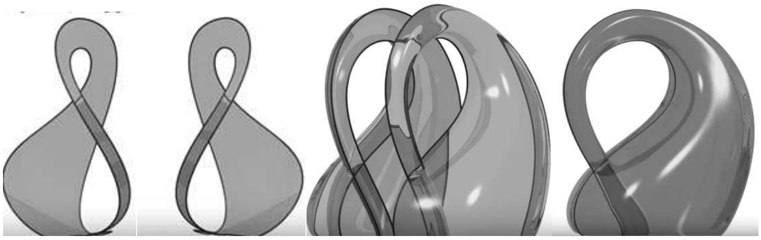
Мьобиусовият лист може да послужи за чудесна визуализация на музикални произведения със специфична структура, какъвто е *рачешкият канон* на Бах – канон, който изсвирен отзад напред звучи по същия начин (фиг. 18, 19). За да се уверите с ушите си, напишете в Google: *Bach – Crab Canon on a Möbius Strip*.

Фиг. 18



Фиг. 19

Авторът на тази забележителна анимация, Jos Leys, показва още как чрез последователни преобразования можем от два листа на Мьобиус да получим друг математически обект, известен като *бутилка на Клайн*. Освен че има само една страна, бутилката на Клайн (за разлика от листа на Мьобиус) е без ръбове.

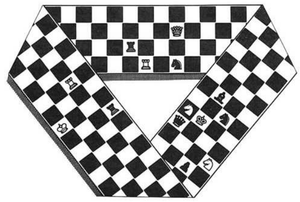


Фиг. 20

Някои приложения в практиката

През 1957 г. бил патентован гумен конвейер във формата на мьобиусов лист – той бил два пъти по-дълготраен от обикновения, понеже имал само една страна. Други приложения били ленти за магнетофон, за пишеши мащини, за принтери. Много идеи за приложения били свързани с производството на електронни съпротивления и на детски играчки, особено за релси във вид на мьобиусов лист, по които се движело миниатюрно влакче (с магнит, който да го придържа, когато се движи *с главата надолу...*)

Разбира се, любителите на шаха сред математиците веднага се сетили и за нов тип дъска (фиг. 21).



Фиг. 21

А що се отнася да една от най-сложните теории във физиката, за единството на времето и пространството, пак можем да си послужим с мьобиусовият лист, за да визуализираме тази идея. Ето какво казва Леонардо Шлейн в книгата си *Arts and Physics*: *Наглед времето и пространството са различни, но това е илюзия, както е илюзия първоначалното ни впечатление, че лентата* *на Мьобиус има две страни. Ако в дадена точка на тази лента си представим, че от едната страна е времето, а от другата – пространството, по-лесно можем да получим интуитивна представа как теорията на относителността обединява това, което в нашия тримерен свят са две отделни лица на действителността.*

Вместо заключение

Писах тази статия с голямо настроение, заобиколена с поне дузина книги по развлекателна математика, и с ножици в ръка. В различните източници се задаваха различни въпроси, някои ми хрумнаха по време на експериментите. На много от въпросите не знаех отговора, макар че самата аз съм правила подобни „фокуси" пред публика от математици и информатици и съм се радвала на изненадания им смях. Изгледах и доста документални видеоклипове, посветени на тази тема. Но друго си е, когато сам направиш експериментите и можеш да си поиграеш и с лентите, и с различни идеи, свързани с тях.

Фиг. 22

В заключение, внимавайте какво ще направите с резултатите от собствените си експерименти. Не забравяйте, че трябва да рециклираме! Както впрочем ни подсказва и самата емблема за процеса (фиг. 22), при който безполезни наглед неща се превръщат в нещо използваемо.

За по нататъшно четене и гледане

Х. Джейкъбз, *За всички, които мислят, че не обичат математиката,* Наука и изкуство, София, 1983

М. К. Ешер – графики и рисунки, Taschen, "Alians-97" ООД

L. Shlain, Arts & Physics, Parallel vision in Space, Time & Light

C. A. Pickover, The Mobius Strip, Dr. August Mobius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology, Thunder's Mouth Press, 2006

J. S. Bach – Crab Canon on a Möbius Strip, `https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU` (1.03.2017)

The Worlds of David Darling, Moebius band, `http://www.daviddarling.info/encyclopedia/M/Mobius_band.html` (1.03.2017)

Factum Arte, Möbius for Madame Butterfly at La Fenice in Venice, `http://www.factum-arte.com/pag/560/Mobius` (1.03.2017)

Two Moebius bands make a Klein bottle, `https://www.youtube.com/watch?v=a5Azcwe9p4o` (1.03.2017)

Moebius chess, `http://www.chessvariants.com/shape.dir/moebius.html` (1.03.2017)

ТЕСТ за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Боянка Савова

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до края на месец февруари.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $3,5^2 - 5.3,5 + 2,5^2$е:

А) 202,5 **Б)** 36 **В)** 165,5 **Г)** 1

2. Числената стойност на израза $b\,(3b - 7) - 7\,(1 - b)$ при $b = -2$ е:

А) -19 **Б)** 5 **В)** -16 **Г)** 47

3. Коренът на уравнението $6x - 4 - \dfrac{1}{2}\,(x - 2) = 8$ е:

А) -14 **Б)** $\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{11}{5}$ **Г)** 2

4. Нормалният вид на многочлена $(5y - 2)\,(5 + 2y) - (3y - 6)^2$ е:

А) $34y^2 + 32$ **Б)** $16y^2 - 36y - 40$

В) $y^2 + 57y - 46$ **Г)** $34y^2 - 36y + 32$

5. Уравнението $2 - \dfrac{x - 2}{2} = 3$ е еквивалентно на уравнението:

А) $2 - \dfrac{x}{2} - 1 = 3$ **Б)** $5 = \dfrac{x - 2}{2}$

В) $x\,(x - 2) = (-x)^2 - x$ **Г)** $x\,(x - 2) = 0$

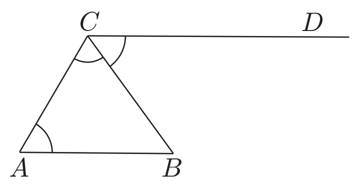
6. Корените на уравнението $4 - 9x^2 + 8\,(3x - 2) = 0$ са:

А) $\dfrac{2}{3}$ и 2 **Б)** $-\dfrac{2}{3}$ и 1 **В)** $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{10}{3}$ **Г)** $\dfrac{3}{2}$ и 2

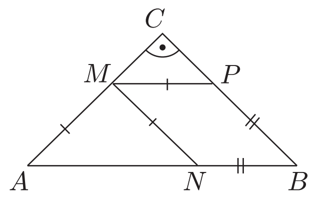
7. На чертежа $AB \| CD$.
Ако $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB$, то $\sphericalangle ABC$ е:

А) 30° **Б)** 60°

В) 45° **Г)** 15°



8. Точките M, N и P са върху страните на равнобедрения триъгълник ABC. Ако $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $MA = MN = MP$ и $BN = BP$, то $\sphericalangle CMP$ е:



А) $37^\circ 30'$ **Б)** 75°

В) 45° **Г)** 30°

9. Покупка от 3 kg домати и 2,5 kg моркови струва 17 лева. Ако е известно, че морковите са два пъти по-евтини от доматите, то цената на 1 kg моркови е:

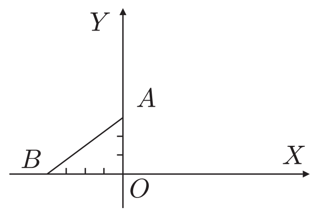
А) 2 лв. **Б)** 2,5 лв. **В)** 1 лв. **Г)** 1,5 лв.

10. Изразът $(2-y)^2 - 4y + 8$ е тъждествено равен на:

А) $(2-y)(2+y)$ **Б)** $(y-2)(y-6)$

В) $(y-2)(y+6)$ **Г)** $(2-y)(8-y)$

11. В координатната система XOY са отбелязани точките $A\,(0;3)$ и $B\,(-4;0)$. Точката C е такава, че $\triangle AOB \cong \triangle OAC$ и $OB = AC$. Координатите на са:



А) $(0;4)$ **Б)** $(3;4)$

В) $(-3;3)$ **Г)** $(4;3)$

12. В офиса на една фирма доставили нов принтер, с който отпечатвали по 5 страници за 24 секунди. Старият принтер бил с 20% по-малка производителност от новия. С двата принтера едновременно отпечатали общо 360 страници за:

А) 15 min **Б)** 40 min **В)** 16 min **Г)** 12 min

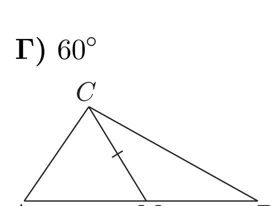
13. В 12 часа̀ разстоянието между автомобил и автобус, които пътуват в една и съща посока, било 32 km. Автобусът се движи със средна скорост 66 km/h. Автомобилът настига автобуса в 13 часа̀ и 20 минути. Средната скорост на автомобила е била:

А) 100 km/h **Б)** 80 km/h **В)** 90 km/h **Г)** 75 km/h

14. Ако $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ са съседни ъгли и $\sphericalangle AOB$ е два пъти по-голям от $\sphericalangle BOC$, то $\sphericalangle AOB$ е:

А) 120° **Б)** 150° **В)** 100° **Г)** 60°

15. В $\triangle ABC$ точката M е средата на страната AB. Ако $BM = CM$, то $\sphericalangle ACB$ е:



А) 60° **Б)** 45°

В) 30° **Г)** 90°

16. От равенствата (1) $2a^2 = (2a+4)(a-2)+8$;

(2) $(y-1)(y-2) = y^2 - 3y + 2$;

(3) $(x^2-1)(x^2-4) = (x^2+x-2)(x^2-x-2)$;

(4) $b^3 + 1 = (b+1)(b^2+b+1)$

тъждества са само:

А) (1), (2) и (3) **Б)** (1) и (3) **В)** (2) и (4) **Г)** (1), (2) и (4)

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Ако $(x-y)^2 - 4(x-y) + 4 = 0$, намерете стойността на израза $A = x + 5 - y$.

18. В два съда, с вместимост по 10 литра, имало прясно мляко: в първия съд – 7 литра с масленост 1,5%, а във втория съд млякото било 8 литра. Когато допълнили първия съд с мляко от втория, маслеността в първия съд станала 2,1%. След това допълнили втория съд с мляко от първия. Намерете маслеността на млякото във втория съд след второто преливане.

Попълнете пропуснатия текст в решението на задачата на местата от (1) до (5).

Да означим с $x\%$ първоначалната масленост на млякото във втория съд. Допълваме първия съд с (1)....... литра мляко от втория. Във втория съд остават (2) .... литра с масленост $x\%$.

Тогава маслеността на млякото в първия съд може да бъде изразена по два начина, от което следва, че

$$7 \cdot \frac{1{,}5}{100} + 3 \cdot \frac{x}{100} = 10 \cdot \frac{2,1}{100} \Leftrightarrow 7.1{,}5 + 3.x = 10.2{,}1 \Leftrightarrow x = (3) \ldots\ldots$$

След това допълваме втория съд с (4)........ литра от първия съд. Да означим с $y\%$ маслеността на млякото във втория съд след второто преливане. Следователно

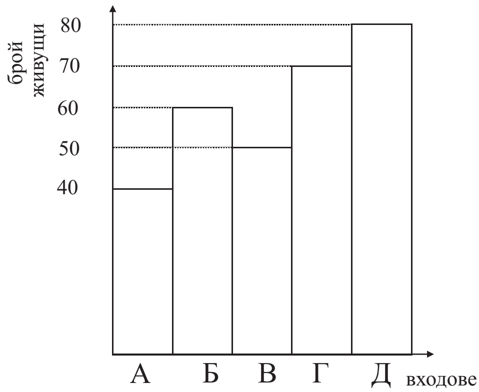
$$5 \cdot \frac{3{,}5}{100} + 5 \cdot \frac{2{,}1}{100} = 10 \cdot \frac{y}{100} \Leftrightarrow 5.3{,}5 + 5.2{,}1 = 10y \Leftrightarrow y = (5) \ldots\ldots\%.$$

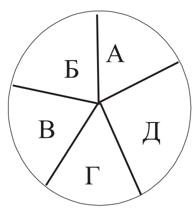
19. Разложете на множители многочлена P.

В първата колона на таблицата последователно са изпълнени указания за разлагане на многочлена M на множители. Попълнете празната колона, като следвате същите действия за многочлена P.

№	Указания	$M = (2x-3)(3x-4)-(4-3x)^2$	$P=(3x-2)(5x-3)-(3-5x)^2$
1.	Приложете тъждеството $(a-b)^2 = (b-a)^2$	$M=(2x-3)(3x-4)-(3x-4)^2$	
2.	Изнесете общ множител пред скоби.	$M = \underbrace{(3x-4)}_{A}\underbrace{((2x-3)-(3x-4))}_{B}$	
3.	Разкрийте скобите в израза B.	$M = \underbrace{(3x-4)}_{A}\underbrace{(2x-3-3x+4)}_{B}$	
4.	Извършете приведение в израза B.	$M = (3x-4)(1-x)$	

20. На диаграмата е показан броят на живущите в пет от входовете на един жилищен блок. Като използвате дадената информация, пресметнете за кръговата диаграма градусните мерки на ъглите,съответстващи на броя на живущите във всеки от петте входа.





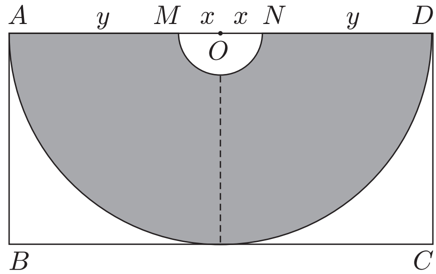
ВТОРИ МОДУЛ

21. Цената на един учебник по математика във фирмена книжарница е 18 лева. При закупуване на по-голяма бройка се предлагат следните отстъпки.

От 5 до 9 броя вкючително	5%
От 10 до 15 броя включително	10%
Над 15 броя	20%

Колко броя учебници са закупени, ако са заплатени:
а) 243 лв.; б) 230,40 лв.; в) 136,80 лв.?

22. На чертежа е показана кройка на пола полуклош (оцветената фигура). От правоъгълно парче плат се изрязва полукръг с център O. От този полукръг се изрязва по-малък полукръг с радиус x и също с център O.



Дължината на полуокръжността MN е равна на обиколката на талията плюс още 2,8 cm, а $y = AM = ND$ е дължината на полата плюс още 2 cm за подгъване. За пола с дължина 48 cm, обиколка на талията 60 cm и $\pi \approx 3{,}14$ пресметнете:

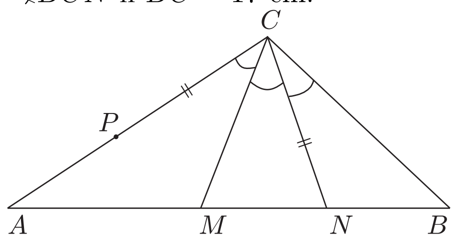
а) x; б) y; в) процента (с точност до 0,1) на използвания за полата плат от правоъгълника $ABCD$.

ЗАДАЧИ, ЗА КОИТО ТРЯБВА ДА СЕ ПРЕДСТАВЯТ ОБОСНОВАНИ РЕШЕНИЯ

23. За коя стойност напараметъра a са еквивалентни уравненията

$$|5 - |2 - x|| = 2 \quad \text{и} \quad x^2(x^2 - 25) + (5 - x)(x + 5) = a(x + 1)(x^2 - 25)?$$

24. Даден е триъгълникът ABC с точки M и N върху страната AB и точка P върху страната AC. Известно е, че $BN = MN = \dfrac{1}{2}AM$, $CN = CP$, $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCN = \sphericalangle BCN$ и $BC = 17$ cm.



а) Намерете $\sphericalangle BNC$ и $\sphericalangle CPM$.

б) Докажете, че $BN = PM$ и $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.

в) Намерете $\sphericalangle ACB$ и периметъра на $\triangle BCM$.

Отговори. **1.** Г; **2.** Б; **3.** Г; **4.** В; **5.** В; **6.** А; **7.** Б; **8.** В; **9.** А; **10.** Б; **11.** Г; **12.** В; **13.** В; **14.** А; **15.** Г; **16.** А; **17.** 7; **18.** (1) 3; (2) 5; (3) 3,5; (4) 5; (5) 2,8%.

19. (1) $P = (3x-2)\,(5x-3) - (5x-3)^2\,;$

(2) $P = (5x-3)\,((3x-2)-(5x-3));$

(3) $(5x-3)\,(3x-2-5x+3)\,;$

(4) $P = (5x-3)(1-2x).$

20. А – 48°; Б – 72°; В – 60°; Г – 84°; Д – 96°; **21.** а) 15; б) 16; в) 8; **22.** $= 20$, $y = 50$, 72,1%.

23. От $|5-|2-x|| = 2$ следва, че $5-|2-x| = 2$ или $5-|2-x| = -2$. Решаваме всяко от последните две модулни уравнения.

1) $5-|2-x| = 2$
$|2-x| = 3$
$2-x = 3$ или $2-x = -3$
$x_1 = -1$, $x_2 = 5$;

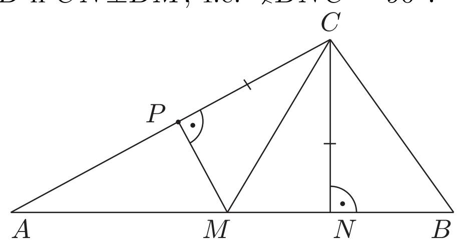
2) $5-|2-x| = -2$
$|2-x| = 7$
$2-x = 7$ или $2-x = -7$
$x_3 = -5$, $x_4 = 9$.

За второто уравнение извършваме следните еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned}
&x^2(x^2-25)+(5-x)(x+5) = a(x+1)(x^2-25)\\
&x^2(x^2-25)-(x^2-25)-a(x+1)(x^2-25) = 0\\
&(x^2-25)(x^2-1-a(x+1)) = 0\\
&(x^2-25)((x+1)(x-1)-a(x+1)) = 0\\
&(x-5)(x+5)(x+1)(x-1-a) = 0.
\end{aligned}$$

Намираме, че корените на второто уравнение са: $x_1' = -1$, $x_2' = 5$, $x_3' = -5$, $x_4' = 1+a$. Тъй като $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$, то при $x_4 = x_4' \Leftrightarrow 1+a = 9 \Leftrightarrow a = 8$ двете дадени уравнения са еквивалентни.

24. В $\triangle BCM$ медианата и ъглополовящата през върха C съвпадат. Следователно $CM = CB$ и $CN \perp BM$, т.е. $\sphericalangle BNC = 90^\circ$.



Нека $\sphericalangle ACB = 3\alpha$. Тогава според условието, $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCN = \sphericalangle BCN = \alpha$. От еднаквостта на $\triangle CPM$ и $\triangle CNM$ по първи признак ($\sphericalangle PCM = \sphericalangle NCM = \alpha$, CM – обща страна, $CP = CN$) следва, че $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CNM = 90^\circ$ и $MN = PM = BN$. В правоъгълния триъгълник APM катетът срещу $\sphericalangle MAP$ е равен на половината от хипотенузата. Следователно $\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle BAC = 30^\circ$, а от правоъгълния триъгълник ACN получаваме, че $2\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Тъй като $\triangle BCN$ е равностранен ($CB = CM$, $\sphericalangle BCM = 2\alpha = 60^\circ$), то $P_{\triangle BCM} = 3.BC = 51$ cm.

ТЕСТ

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Елена Киселова, СМГ

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до края на месец февруари.

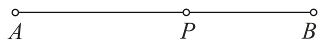
ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Числената стойност на израза $7\frac{1}{5}.10 - 12$ е:

А) $-14{,}4$ **Б)** 2 **В)** 60 **Г)** 72

2. Точка P е вътрешна за отсечката AB, като $AP = 48$ см и $BP : AB = 5 : 9$. Дължината на AB е:



А) 138 см **Б)** 10,8 дм **В)** 10,2 дм **Г)** 9,6 дм

3. Кое от уравненията няма корени?

А) $3 - x = 2x + 1$ **Б)** $2(1 - x) = 2 - 2x$

В) $7x + 3 = 13 + 7x$ **Г)** $-5x^2 = 0$

4. Мярката на ъгъл, който е пет пъти по-голям от своя съседен, е:

А) 120° **Б)** $122^\circ 30'$ **В)** 145° **Г)** 150°

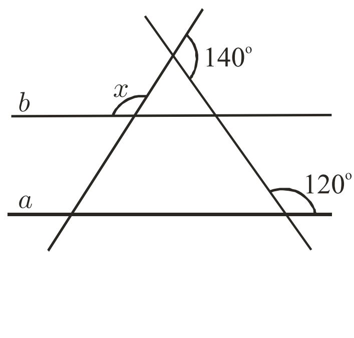
5. Мина за 5 часа прочита 75 страници. За колко минути ще прочете 20 страници?

А) 60 **Б)** 70 **В)** 80 **Г)** 100

6. Правите a и b на чертежа са успоредни. Мярката на ъгъл x е:

А) 70° **Б)** 80°

В) 90° **Г)** 100°



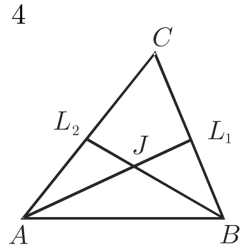
7. Стойността на израза $57{,}8^2 - 47{,}8^2$ е:

А) 10 **Б)** 105,6 **В)** 956 **Г)** 1056

8. Коренът на уравнението $\dfrac{3z-1}{5} - \dfrac{z+1}{15} = \dfrac{2}{3}$ е:

А) $-1\dfrac{3}{4}$ **Б)** $-\dfrac{3}{2}$ **В)** $1\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{7}{4}$

9. Ъглополовящите AL_1 и BL_2 в $\triangle ABC$ се пресичат в точка J и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BJL_1$. Големината на ъгъла при върха C е:



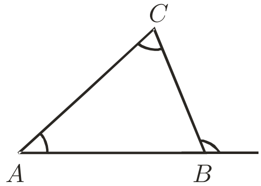
А) 50° **Б)** 60°

В) 90° **Г)** 120°

10. Изразът $-(-x+8)^2 + (-x-8)^2$ е тъждествено равен на:

А) 0 **Б)** $32x$ **В)** -32 **Г)** $-2x^2 - 128$

11. Външният ъгъл при върха B на $\triangle ABC$ е с 36° по-голям от вътрешния ъгъл при върха A и четири пъти по-голям от вътрешния ъгъл при върха C. Най-големият ъгъл на $\triangle ABC$ е:



А) 72° **Б)** 108°

В) 136° **Г)** 144°

12. Абсолютната стойност на разликата на корените на уравнението

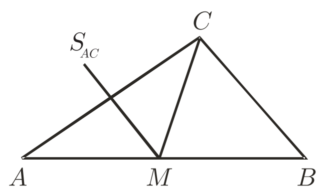
$$\left|-x - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \quad \text{е:}$$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

13. Депозит е внесен на тримесечен срочен влог при 4% лихва за периода. Колко лева е бил депозитът, ако в края на периода е нараснал на 5 200 лв?

А) 4800 **Б)** 5000 **В)** 5050 **Г)** 5100

14. Симетралата на страната AC на $\triangle ABC$ пресича страната AB в точка M, а симетралата на отсечката CM минава през средата на AC. Големината на $\sphericalangle BAC$ е:



А) 60° **Б)** 45°

В) 40° **Г)** 30°

15. Билет за вход на зимната пързалка струва 5 лв. Срещу още 3 лв. всеки посетител, който няма собствени кънки, може да вземе под наем. За един ден пързалката била посетена от 385 души и реализирала приход от 2282 лв. Броят на посетителите със собствени кънки този ден е:

А) 279 **Б)** 266 **В)** 119 **Г)** 106

16. Ако $x - y = 10$ и $xy = 20$, то $x^3 - y^3$ е равно на:

А) 1600 **Б)** 4000 **В)** 7400 **Г)** 8600

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. В 7 часа и 45 минути от два града, разстоянието между които е 96 км, тръгнали едновременно един срещу друг двама мотоциклетисти. Единият се движи със скорост 60 км/ч, а другият изминава разстоянието между градовете за два часа.

В следващата таблица запишете точния час, в който:

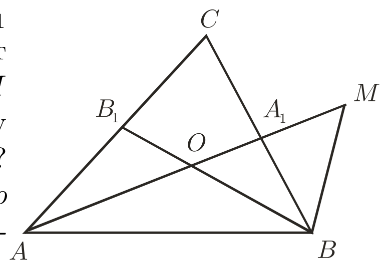
А) са се срещнали;

Б) разстоянието между тях ще бъде 66 км при условие, че не са се срещнали;

В) разстоянието между тях ще бъде 66 км при условие, че са се срещнали.

	ЧАС	МИНУТИ	СЕКУНДИ
А			
Б			
В			

18. В $\triangle ABC$ са построени ъглополовящите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$), които се пресичат в точка O. Върху правата AO е избрана точка M така, че $BO = BM$, $\sphericalangle ABM = 135^\circ$ и O е между A и M. Колко градуса е големината на $\sphericalangle CB_1B$? *Представете отговора на този въпрос, като препишете изреченията и попълните липсващия текст.*



Ъгъл .... е външен за ΔAOB и е ъгъл при основата на равнобедрения Δ....... . Другият ъгъл, прилежащ на основата на същия равнобедрен триъгълник, е ъгъл .... Градусните мерки на тези ъгли са .... Сборът на $\sphericalangle BAM$ и $\sphericalangle AMB$ е равен на .... градуса. Външният ъгъл при върха B_1 на $\triangle ABB_1$ е ъгъл .... Той е сбор на ъгъл .... и ъгъл............. . Следователно е равен на .... градуса.

19. Дадени са уравненията

$$15q - 2x - 9 = 4qx + 21 \quad \text{и} \quad \left|9x^2 - 9x\,(x-1)\right| = 0.$$

За коя стойност на параметъра q:

А) параметричното уравнение няма решение;

Б) уравненията са равносилни?

20. Обемът на газовите запаси, които могат да бъдат съхранени в българските газохранилища, е 350 млн. куб. м. В следствие на газовата криза те били изчерпани. За възстановяването им в продължение на седем дни към газохранилищата постъпват по 2,5 млн. куб. м гръцки газ. Три дни след потичането на гръцкия газ към тях се прибавя и ежедневен поток от 9,5 млн. куб. м газ от Русия до напълването на газохранилищата.

А) За колко дни са възстановени запасите от газ?

Б) Каква част от доставения газ идва от Русия? Представете отговора във вид на несъкратима обикновена дроб.

В) С колко процента газът, доставен от Русия, е повече от този, доставен от Гърция?

ВТОРИ МОДУЛ

21. Танцова школа.

В таблицата е дадено разпределението по групи на танцьорите от школа по танци.

Група	Брой участници	Процент	Градуси на кръгов сектор
Салса	64	x	a
Меренге	48	15	b
Зумба	y	20	c
Народни танци	z	31,25	d
Хипхоп	t	p	e
Общо	k	100	360

А) Колко е броят k на всички участници в школата?

Б) Намерете стойностите на x, y, z, t и p според смисъла им в таблицата.

В) Пресметнете стойностите a, b, c, d и e и начертайте кръгова диаграма, показваща разпределението на танцьорите от шестте курса на школата.

22. Зимни спортове.

А) Петя и Катя се пързалят по обиколката на ледена пързалка с форма на кръг, като дължината на обиколката е 140 м. Скоростта на Петя е $\frac{17}{23}$ от тази на Катя. Двадесет и една минути след като стартирали, Катя забелязала, че изпреварва Петя за шести път. Колко е скоростта на Катя, измерена в км/ч?

В следващия текст пропуснатите данни са означени с цифри. Запишете след всяка от цифрите пропуснатия буквен или числов текст, така че получените твърдения да са верни.

Дължината на пистата е (1) .... км. До шестото изпреварване момичетата са се движили (2)................ часа. Ако означим скоростта на Катя с **x** км/ч, то тази на Петя се изразява чрез **x** като (3).............. км/ч. Когато Катя изпреварва Петя за шести път, разликата в изминатия от тях път е равна на (4)................ обиколки, т.е. на (5)................ км. Тогава скоростта на Катя е (6) .... км/ч.

Б) Една минута след като Иво се спуснал със сноуборд, след него със ски се спуснал и брат му Гого. Колко секунди след старта си Гого е настигнал Иво, ако скоростта му е с $66\frac{2}{3}\%$ по-голяма от тази на брат му?

В следващия текст пропуснатите данни са означени с цифри. Запишете след всяка от цифрите пропуснатия буквен или числов текст, така че получените твърдения да са верни.

Отношението на скоростта на Гого към тази на Иво е (7) .... Гого е толкова пъти по-бърз от брат си, колкото пъти необходимото му време е по- (8)................... от това на брат му. Следователно Гого ще настигне Иво след (9) .... секунди.

ЗАДАЧИ ЗА ПОДРОБНО АРГУМЕНТИРАНО РЕШЕНИЕ

23. Дадени са уравненията:

(1) $2(x-5)^2-(20-4x)^2+(10-2x)^3=0$

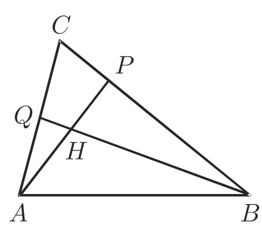
(2) $(3+m)x=2(x-4)$

А) Решете всяко от уравненията.

Б) За кои стойности на параметъра m по-малкият от корените на първото уравнение е решение и на второто уравнение?

В) Намерете всички **цели** стойности на параметъра **m**, за които коренът на параметричното уравнение е **естествено** число.

24. Точката H е пресечна точка на височините AP ($P \in BC$) и BQ ($Q \in AC$) в остроъгълния $\triangle ABC$ и $BH = AC$.



А) Докажете, че $\triangle APC$ и $\triangle BPH$ са еднакви.

Б) Намерете $\sphericalangle BAP$ и $\sphericalangle CHP$.

В) Ако сборът от дължините на отсечките AP и HP е 15 см, намерете дължината на страната BC в сантиметри.

Отговори. **1.** В; **2.** Б; **3.** В; **4.** Г; **5.** В; **6.** Г; **7.** Г; **8.** Г; **9.** Б; **10.** Б; **11.** Б; **12.** Г; **13.** Б; **14.** Б; **15.** Б; **16.** А;

17.

	ЧАС	МИНУТИ	СЕКУНДИ
А	8	38	20
Б	8	01	40
В	9	15	00

18. Ъгъл BOM е външен за ΔAOB и е ъгъл при основата на равнобедрения ΔBOM. Другият ъгъл, прилежащ на основата на същия равнобедрен триъгълник е $\sphericalangle OMB$. Градусните мерки на тези ъгли са *равни*. Сборът на $\sphericalangle BAM$ и $\sphericalangle AMB$ е равен на 45 градуса. Външният ъгъл при върха B_1 на $\triangle ABB_1$ е ъгъл CB_1B. Той е сбор на ъгъл CAB и ъгъл ABB_1. Следователно е равен на 45 градуса.

19. **А)** $-0{,}5$; **Б)** 2; **20.** **А)** 38; **Б)** 19/20; **В)** 1800;

21.

Група	Брой участници	Процент	Градуси на кръгов сектор
Салса	64	20	72
Меренге	48	15	54
Зумба	64	20	72
Народни танци	100	31,25	112,5
Хипхоп	44	13,75	49,5
Общо	320	100	360

22. **А)** Дължината на пистата е (1) 0,14 км. До шестото изпреварване момичетата са се движили (2) 0,35 (*или* 21/60 *или* 7/20) часа. Ако означим скоростта на Катя с x км/ч, то тази на Петя се изразява чрез x като (3) $\frac{17}{23}x$ км/ч. Когато Катя изпреварва Петя за шести път, разликата в изминатия от тях път е равна на (4) 6 обиколки, т.е. на (5) 0,84 км. Тогава скоростта на Катя е (6) 9,2 км/ч.

Б) Отношението на скоростта на Гого към тази на Иво е (7) 5:3. Гого е толкова пъти по-бърз от брат си, колкото пъти необходимото му време е по- (8)малко от това на брат му. Следователно Гого ще настигне Иво след (9) 90 секунди.

23. **А)** Корени на уравнение (1) са 5 и 3,25. Параметричното уравнение (2) при $m = -1$ няма решение, а при $m \neq -1$ има единствен корен $x = -\dfrac{8}{m+1}$; **Б)** $m = -3\dfrac{6}{13}$; **В)** $m = -2; -3; -5; -9$.

24. **Б)** $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CHP = 45^\circ$; **В)** $BC = 15$ см.

ПОКАЗАТЕЛНИ И ЛОГАРИТМИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Мирослав Каракулаков

1. Решението на уравнението $\log_4 x = -1$ е:

А) $x \in \emptyset$ **Б)** $x = -\dfrac{1}{4}$ **В)** $x = 0,25$

Г) $x_1 = \dfrac{1}{4},\ x_2 = 4$ **Д)** $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$

2. Решението на уравнението $\log_{0,1} x^2 = 2$ е:

А) $x = \pm\sqrt{2}$ **Б)** $x = 0{,}0001$ **В)** $x \in \emptyset$

Г) $x_1 = 0{,}1,\ x_2 = -0{,}1$ **Д)** $x = 0{,}1$

3. Решението на уравнението $4^x = 2$ е:

А) $x = 2$ **Б)** $x = -2$ **В)** $x = 0{,}5$

Г) $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$ **Д)** $x \in \emptyset$

4. Решението на уравнението $2^x = 4$ е:

А) $x = 2$ **Б)** $x = -2$ **В)** $x = \dfrac{1}{2}$

Г) $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$ **Д)** $x \in \emptyset$

5. Решението на уравнението $\log_3 x^{0,1} = 0,1$ е:

А) $x = \pm\sqrt{3}$ **Б)** $x = 0,0001$ **В)** $x \in \emptyset$

Г) $x_1 = 0{,}1,\ x_2 = -0{,}1$ **Д)** $x = 3$

6. Решението на уравнението $\log_{0,5}(x^2 - 1) = 1$ е:

А) $x = 0{,}25$ **Б)** $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

В) $x \in \emptyset$ **Г)** $x_1 = -\sqrt{1{,}5},\ x_2 = \sqrt{1{,}5}$

Д) $x_1 = 2,\ x_2 = 0{,}5,\ x_3 = 0$

7. Решението на уравнението $\log_2(x^{0,5}-1)=1$ е:

А) $x\in\emptyset$ **Б)** $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **В)** $x=9$
Г) $x_1=-9,\ x_2=9$ **Д)** $x_1=2,\ x_2=0,5$

8. Решението на уравнението $\log_4\sqrt{-x}=1$ е:

А) $x=-16$ **Б)** $x_1=-16,\ x_2=16$ **В)** $x=16$
Г) $x\in\emptyset$ **Д)** $x=-4$

9. Решението на уравнението $\log_{0,5}(x^2+1)+1=0$ е:

А) $x=1$ **Б)** $x\in\emptyset$
В) $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$ **Г)** $x_1=-1,\ x_2=1$
Д) $x_1=1,\ x_2=0$

10. Решението на уравнението $(\log_2 x)^2-\log_2 x^{0,5}=\log_2\sqrt{2}$ е:

А) $x\in\emptyset$ **Б)** $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=2$ **В)** $x=\sqrt[3]{2}$
Г) $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=1$ **Д)** $x_1=2,\ x_2=\sqrt{2}$

11. Ако $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ решението на уравнението $\log_a x=b$ е:

А) $x=b^a$ **Б)** $x=\log_a b$ **В)** $x=a^b$
Г) $x=\log_b a$ **Д)** $x=b^{\log_a b}$

12. Ако $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ решението на уравнението $a^x=b$ е:

А) $x=b^a$ **Б)** $x=\log_a b$ **В)** $x=a^b$
Г) $x=\log_b a$ **Д)** $x=b^{\log_a b}$

13. Решението на уравнението $75^x+4\cdot 15^x+3^{x+1}=0$ е:
А) $x=\log_5 15$ **Б)** $x=-\log_3 75$ **В)** $x\in\emptyset$
Г) $x_1=-\log_5 3,\ x_2=0$ **Д)** $x_1=\log_5(-3),\ x_2=\log_5(-1)$

14. Решението на уравнението

$$\log_{0,75}(1+\sqrt{x^2-4})-\log_{7,5}\frac{2-\sqrt{16-4x^2}}{2}=0$$

е:
А) $x=1-7{,}5^{0,7}$ **Б)** $x\in\emptyset$
В) $x_1=-2,\ x_2=2$ **Г)** $x_1=-0,75^{7,5},\ x_2=7{,}5^{0,75}$
Д) $x=\dfrac{1}{2}$

15. Решението на уравнението $-\log_2(12x-2x^2)=\log_{0,5}(8x-x^2)$ е:

А) всяко $x\neq 0$ **Б)** $x=4$ **В)** $x_1=4,\ x_2=0$
Г) $x_1=-\log_2 6,\ x_2=0$ **Д)** $x=-\log_2 6$

16. Решението на уравнението $9^{-x} - \dfrac{36}{3^x} + 243 = 0$ е:

А) $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ **Б)** $x_1 = 3,\ x_2 = -2$ **В)** $x_1 = -3,\ x_2 = -2$
Г) $x \in \emptyset$ **Д)** $x_1 = -3,\ x_2 = 2$

17. Решението на уравнението $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{2-4x^2} = 9^{3x}$ е:

А) $x = \dfrac{1}{27}$ **Б)** $x \in \emptyset$ **В)** $x_1 = \dfrac{1}{27},\ x_2 = 9$
Г) $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$ **Д)** $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 1$

18. Решението на уравнението $\dfrac{2^{1-3x}}{\log_2(x^2-3)} = 0$ е:

А) $x \in \emptyset$ **Б)** $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = 2$
В) $x = \dfrac{1}{3}$ **Г)** $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = 2$ **Д)** $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

19. Решението на уравнението $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^4+1}\right)\log_2(x^2-8)}{(x+3)^2} = 0$ е:

А) $x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$ **Б)** $x_1 = -2\sqrt{2},\ x_2 = -1$
В) $x = 3$ **Г)** $x \in \emptyset$
Д) $x_1 = -2\sqrt{2},\ x_2 = -1,\ x_3 = 2\sqrt{2}$

20. Решението на уравнението $2^x + 4^x + 8^x + 16^x = 6 + 3\sqrt{2}$ е:

А) $x \in \emptyset$ **Б)** $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0$ **В)** $x_1 = -2,\ x_2 = 2$
Г) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = 2$ **Д)** $x = 0{,}5$

21. Решението на уравнението $2^x - 4^x + 8^x - 16^x = -6 + 3\sqrt{2}$ е:

А) $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0$ **Б)** $x = \dfrac{1}{2}$ **В)** $x_1 = -2,\ x_2 = 2$
Г) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = 2$ **Д)** $x \in \emptyset$

22. Решението на уравнението $\dfrac{2^{3x-1}}{3^{2x-1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}}$ е:

А) $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0$ **Б)** $x = 0{,}5$ **В)** $x_1 = -2,\ x_2 = 2$
Г) $x = 0{,}25$ **Д)** $x \in \emptyset$

Отговори

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
В	Г	В	А	Д	Г	В	А	Г	В	В

12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
Б	В	В	Б	В	Д	А	В	Д	Б	Г

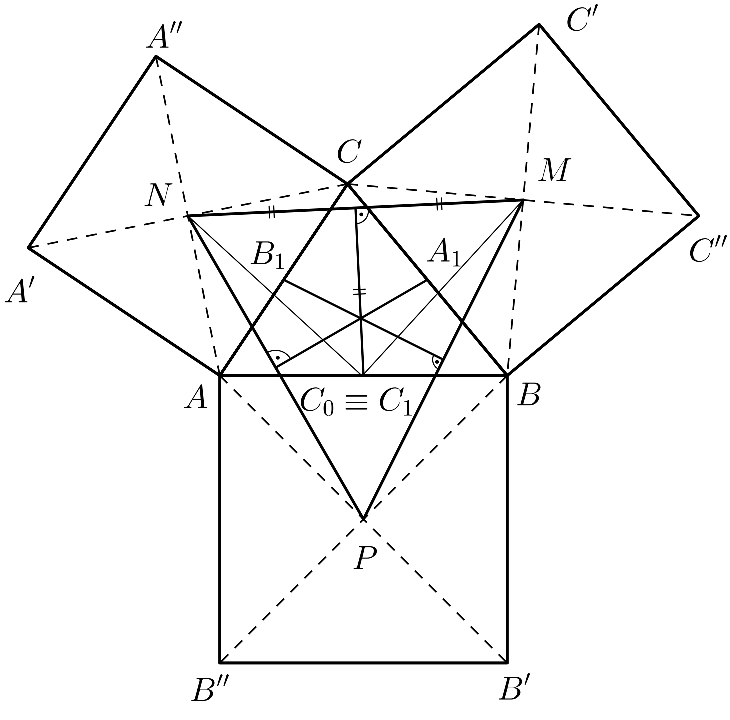
РОТАЦИЯ НА ВЕКТОРИ

Валери Ванков, 7 клас, СМГ

Задача 2 от темата за 8. клас от Зимните математически празници 2017 г. може да се реши, като се използва ротация на вектори.

Задача. Върху страните на BC, CA и AB на триъгълника ABC външно са построени квадрати с центрове съответно M, N и P. Симетралите на отсечките NP, PM и MN пресичат страните BC, CA и AB съответно във вътрешните точки A_1, B_1, C_1.
а) Да се намери отношението на лицата на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и ABC.
б) Да се намерят ъглите NA_1P, PB_1M и MC_1N.

Решение. Ще използваме означенията на чертежа.



Нека C_0 е средата на AB. Ще покажем, че $C_0 \equiv C_1$.

б) Ще докажем, че $\sphericalangle MC_0N = 90^\circ$. За да го направим, е достатъчно да докажем, че $R^{90^\circ}\left(\overrightarrow{C_0M}\right) = \overrightarrow{C_0N}$. Изразяваме последователно

$$\begin{aligned}
R^{90^\circ}(\overrightarrow{C_0M}) &= R^{90^\circ}(\overrightarrow{C_0A} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM}) \\
&= \overrightarrow{C_0P} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM} \\
&= \overrightarrow{C_0P} + \overrightarrow{CN} + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}) + \overrightarrow{BM} \\
&= (\overrightarrow{C_0P} + \overrightarrow{PN}) + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} \\
&= \overrightarrow{C_0N} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'}) \\
&= \overrightarrow{C_0N} + \frac{1}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})}_{\overrightarrow{0}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AA'}) \\
&= \overrightarrow{C_0N} + \frac{1}{2}R^{90^\circ}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{C_0N} + \frac{1}{2}R^{90^\circ}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{C_0N}
\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle MC_0N = 90^\circ$ и $C_0M = C_0N$, тоест C_0 лежи на симетралата на MN. Но $C_0 \in AB \Rightarrow C_0 \equiv C_1$. Следователно $\sphericalangle MC_1N = 90^\circ$.

Аналогично, $\sphericalangle NA_1P = 90^\circ$ и $\sphericalangle PB_1M = 90^\circ$. С това подточка б) е завършена.

а) От б) получаваме, че C_1 е среда на AB. Аналогично A_1 и B_1 са среди съответно на BC и AC. Тъй като B_1A_1 е медиана в BB_1C, то $S_{A_1B_1C} = \frac{1}{2}S_{BB_1C}$, но BB_1 е медиана в ABC, т.е. $S_{BB_1C} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, следователно $S_{A_1B_1C} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{A_1C_1B} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ и $S_{B_1C_1A} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Оттук следва, че $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, т.е. търсеното отношение е

$$S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC} = 1 : 4.$$

С това и подточка „а“ е завършена.

Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2016/17 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. Даден е n-ъгълник (не задължително изпъкнал). На всяка от страните му като на диаметър са построени окръжности. Възможно ли е n-те окръжности да имат обща точка, която не е връх на дадения многоъгълник, ако:

а) $n = 10$;

б) $n = 11$?

Задача 2. Във всяко поле на квадратна таблица 1000×1000 е записано число. Таблицата се нарича S-*интересна*, ако сборът от числата във всеки правоъгълник, състоящ се от S полета на таблицата, е един и същ (страните на правоъгълника лежат на линиите на таблицата). Да се намерят стойностите на S, за които всяка S-*интересна* таблица се състои от равни числа.

Задача 3. Графиките на две квадратни функции се пресичат в две точки. Допирателните към двете графики във всяка от пресечните точки са перпендикулярни. Вярно ли е, че графиките имат обща ос на симетрия?

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2017 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 6/2016 г.

Задача 1. Даден е правилен $2n$-ъгълник $A_1A_2\dots A_{2n}$ с център O, като $n \geq 5$. Диагоналите A_2A_{n-1} и A_3A_n се пресичат в точката F, а A_1A_3 и A_2A_{2n-2} — в точката P. Докажете, че $PF = PO$.

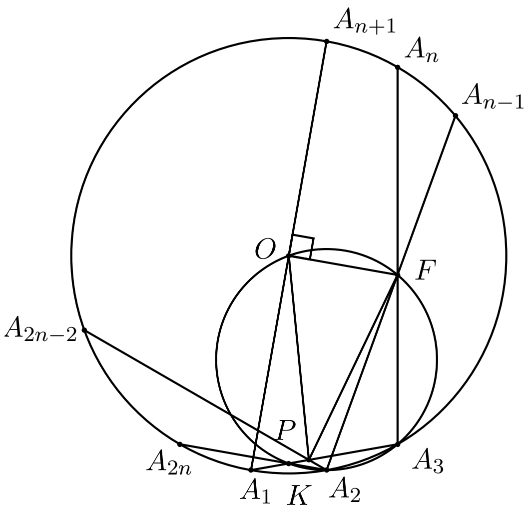
Решение. Точките A_2 и A_{2n} са симетрични спрямо диаметъра A_1A_{n+1}, следователно $A_2A_{2n} \perp A_1A_{n+1}$.

Спрямо симетралата на диаметъра A_1A_{n+1} отсечката A_2A_{n-1} е симетрична на A_3A_n, следователно пресечната точка F на двете отсечки лежи на оста на симетрия; т.е. $OF \perp A_1A_{n+1}$. Получихме, че $OF||A_2A_{2n}$.

Нека A_2A_{2n} и A_1A_3 се пресичат в точката K. Имаме

$$\sphericalangle A_3KA_2 = \sphericalangle A_3OA_2 = \sphericalangle A_3FA_2 = \overset{\frown}{A_3A_2},$$

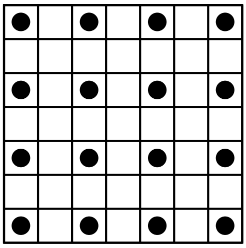
следователно точките A_3, A_2, K, O и F лежат на една окръжност. Оттук следва, че трапецът $KOFA_2$ е равнобедрен.



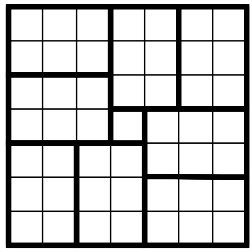
Остава да забележим, че $\sphericalangle KA_2P = \overset{\frown}{A_2A_3}$, т.е. триъгълникът KPA_2 е равнобедрен. Това означава, че точката P лежи на симетралата на основите на равнобедрения трапец $KOFA_2$, откъдето $PF = PO$.

Задача 2. Квадратна кутия за бонбони има 49 еднакви квадратни гнезда и във всяко гнездо е поставен или черен, или бял шоколадов бонбон. Емил може да изяде два бонбона, ако те са едноцветни и са в гнезда с обща страна или с общ връх. Най-много колко бонбона Емил гарантирано ще изяде, както и да са разположени бонбоните в кутията?

Решение. Ще докажем, че Емил гарантирано може да изяде 32 бонбона. Ако 16 черни бонбони са разположени както е показано на фиг. 1, нито една от тях не може да бъде изядена, а от останалите 33 бели бонбони може да се изядат най-много 32 (изядените бонбони са четен брой).



Фиг. 1



Фиг. 2

Ще покажем, че при произволно разположение може да се изядат 32 бонбони. Ясно е, че в ъгълче от 3 гнезда две от бонбоните винаги може да се изядат. Следователно от правоъгълник 2×3 винаги може да се изядат 4 бонбони, а в дадения квадрат се разполагат 8 правоъгълника 2×3 (фиг. 2).

Задача 3. На 2016 червени и 2016 сини картончета са записани положителни числа, всеки две от които са различни. Известно е, че съществува такова множество от 64 числа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{64}\}$, че на картончетата от единия цвят са записани сборовете $\{a_i + a_j |\ i < j,\ a_i, a_j \in A\}$, а на картончетата от другия цвят са произведенията $\{a_i a_j |\ i < j,\ a_i, a_j \in A\}$. Винаги ли е възможно да се определи цвета на картончетата, на които са записани сборовете?

Решение. Ще докажем, че е възможно.

Ясно е, че 64-те неизвестни числа са положителни и различни.

Ако най-много едно от числата е по-малко от 2, то сред сборовете на числата по двойки най-много 63 са по-малки от 4 и сред произведенията на числата по двойки най-много 63 са по-малки от 4.

Ако най-много едно от числата е по-голямо или равно на 2, то сред сборовете на числата по двойки най-много 63 са по-големи или равни на 4 и сред произведенията на числата по двойки най-много 63 са по-големи или равни на 4.

По този начин определяме дали има 2 числа, по-малки от 2 или 2 числа, по-големи или равни на 2.

В първия случай за най-малките числа x и y е в сила неравенството $(x-1)(y-1) < 1$, т.е. $xy < x+y$. Затова най-малкото число на картончетата е произведение.

Във втория случай, ако x и y са двете най-големи числа, имаме $xy > x + y$, което означава, че най-голямото число на картончетата е произведение.

Конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2016 г. и бр. 1, 2 от 2017 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2017 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Колко са тройките от естествени числа $(a; b; c)$, за които $\text{НОК}(a; b) = 200$, $\text{НОК}(b; c) = 500$ и $\text{НОК}(c; a) = 1000$?

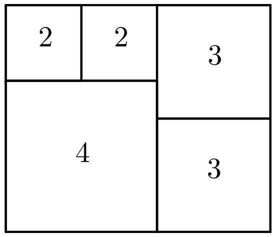
Задача 2. Правоъгълен паралелепипед $a \times b \times c$ е построен от $a.b.c$ еднакви кубчета, всяко от които е червено, зелено или жълто. Във всеки слой $1 \times b \times c$ (успореден на стената $b \times c$) има точно 9 червени, 12 зелени и няколко жълти кубчета. Във всеки слой $a \times 1 \times c$ има точно 20 зелени, 25 жълти и няколко червени кубчета. Да се намери най-малкият възможен обем на паралелепипеда.

Задача 3. Едно число наричаме *красиво*, ако се записва само с една цифра, но не е едноцифрено. Например, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 444 и 1111 са красиви числа със сбор 2017. По колко различни начина 2017 може да се представи като сбор на различни красиви числа? (Редът на събираемите в сбора не е от значение.)

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2017 г.

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 6/2016 г.

Задача 1. Правоъгълникът 6×7 на чертежа е разрязан на пет квадрата – два квадрата със страна 2, два със страна 3 и един със страна 4. Намерете размерите на правоъгълник, който може да се нареже на десет квадрата, чиито страни са съответно 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 и 25 и скицирайте това разрязване.



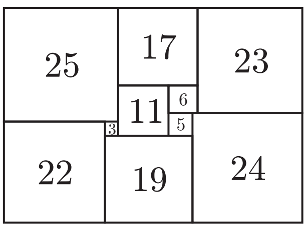
Решение. Лицето на правоъгълника е равно на сбора от лицата на десетте квадрата $9+25+36+121+289+361+484+529+576+625 = 3055$. Ако означим страните на правоъгълника с a и b, получаваме

$$ab = 3055.$$

Тъй като от правоъгълника трябва да се изреже квадрат със страна 25, то страните му a и b са по-големи от 25. Но числото $3055 = 5.13.47$ може да се представи по единствен начин като произведение на множители, всеки от които е по-голям от 25:

$$a = 47 \quad \text{и} \quad b = 5.13 = 65.$$

Като забележим, че $47 = 25+22 = 24+23$ и $65 = 23+25+17 = 22+19+24$, лесно стигаме до желаното разрязване.



Задача 2. По колко различни начина в полетата на таблица 4×4 могат да се запишат 8 единици и 8 нули така, че сборът от числата във всеки ред и във всеки стълб на таблицата да е равен на 2? (Един възможен запис е показан в таблицата.)

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

Решение. Във всеки ред на таблицата има две единици и две нули. Има 6 начина за тяхното разполагане:

$(\star)\quad (1,1,0,0),\quad (1,0,1,0),\quad (1,0,0,1),\quad (0,1,1,0),\quad (0,1,0,1),\quad (0,0,1,1).$

Нека първият ред е $(1, 1, 0, 0)$. Ще разгледаме различните възможности за втория ред.

Първи случай. Ако вторият ред също е $(1, 1, 0, 0)$, имаме

1	1	0	0
1	1	0	0

и нататък всеки стълб в таблицата се попълва еднозначно, т.е. получаваме **1** вариант.

Втори случай. Ако вторият ред е $(0, 0, 1, 1)$, стигаме до

1	1	0	0
0	0	1	1

и третият ред може да се попълни по кой да е от изброените 6 начина $(\star)$. Като изберем третия ред, четвъртият се определя по единствен начин. Така получаваме **6** варианта в този случай.

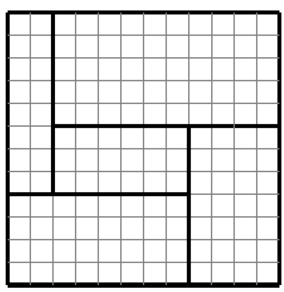
Трети случай. Да попълним втория ред по един от четирите оставащи начина $(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$. Тогава

- в един от първите два стълба има две единици и под тях трябва да запишем две нули;
- в един от последните два стълба има две нули и под тях трябва да запишем две единици.

По този начин имаме една нула и една единица на третия ред. Мястото на втората единица на третия ред може да изберем по два начина, след което таблицата се допопълва еднозначно. Така за всеки от четирите избора на втория ред получаваме две таблици; общо **8** варианта.

Имаме $1 + 6 + 8 = 15$ таблици за всеки от шестте начина за попълване на първия ред, т.е. общо $6 \cdot 15 = 90$ таблици.

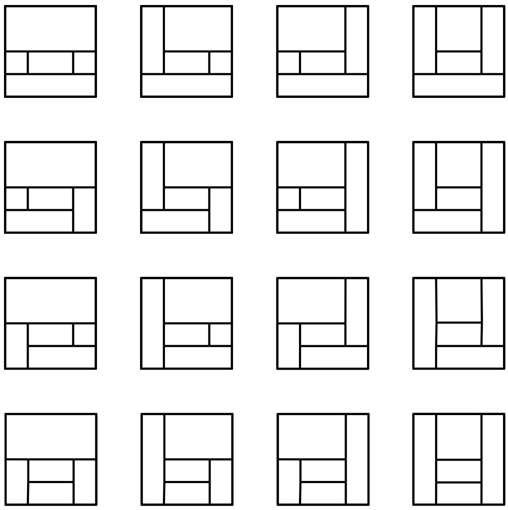
Задача 3. В квадратна мрежа е даден квадрат 12×12. По колко различни начина той може да се разреже по линиите на мрежата на пет правоъгълника, един от които е *вътрешен*, т.е. няма връх на страните на дадения квадрат? (Едно от възможните разрязвания е показано на чертежа. Различни са и разрязванията, които съвпадат при завъртане или преобръщане.)



Решение. Първо ще изберем вътрешния правоъгълник. Той се получава при пресичането на две хоризонтални и две вертикални линии на мрежата. Две от 11-те вътрешни хоризонтали и две от 11-те вътрешни вертикали на мрежата може да изберем по

$$\frac{11.10}{2} \cdot \frac{11.10}{2} = 55^2 \text{ начина.}$$

За всеки избор на вътрешен правоъгълник има по 16 начина за доразрязване на квадрата на 5 правоъгълника.



Затова разрязванията на квадрата на 5 правоъгълника са

$$55^2.16 = 48400.$$

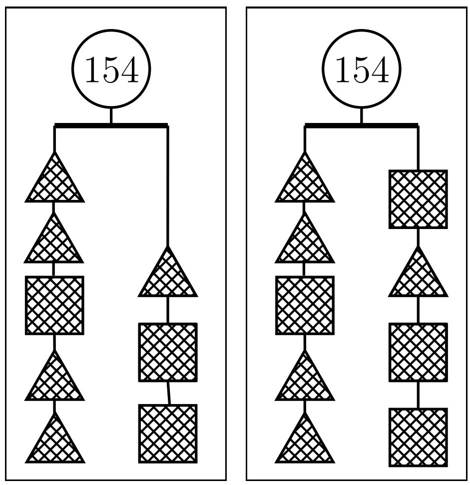
Забележка. За всеки избор на вътрешен правоъгълник има $16 = 2^4$ начина за доразрязване на квадрата, тъй като при всеки от четирите върха на вътрешния правоъгълник има по 2 начина за рязане – хоризонтално или вертикално.

ДА ЗАПАЗИМ РАВНОВЕСИЕ

Пъзелите за уравновесяване на тежести предлагат забавен и увлекателен начин да се представят правилата за решаване на уравнения и системи уравнения.

В тези пъзели има лост, окачен обикновено в средата, а в краищата му са провесени въженца с различни висулки – триъгълни, квадратни и т.н. Еднаквите фигури имат равни тегла. Лостът е в равновесие, което означава, че общото тегло на висулките на всяко въженце е едно и също. В началото е известно колко тежи някоя от фигурите или общото тегло на всички фигури. Нашата задача е *да донаредим пъзела*, като открием теглото на всяка фигура.

Пъзел 1. Ако всички висулки тежат общо 154 грама, колко тежи квадратчето?



Пъзел 1. Пъзел 2.

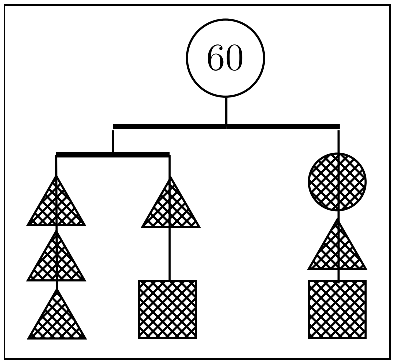
Решение. Висулките на двете въженца се уравновесяват и тежат общо 154 г. Значи на всяко въженце има висулки с общо тегло $154 : 2 = 77$ г.

Да откачим някои от тях. За да *запазим равновесието*, от двете въженца *ще откачим еднакви фигури* – по един триъгълник и по един квадрат. Остават три триъгълника, които се уравновесяват от един квадрат.

А сега да върнем висулките на мястото им. Щом един квадрат тежи колкото 3 триъгълника, равновесието ще се запази, ако от лявото въженце откачим квадрата и на негово място закачим три триъгълника. Триъгълниците на това въженце ще станат 7, а тежат общо 77 г. Пъзелът се нареди – триъгълната висулка тежи 11 г, а квадратната – 33 г.

Пъзел 2. Отново общото тегло на висулките е 154 грама, но е добавен един квадрат. Опитайте самостоятелно да намерите колко тежи всяка висулка.

Пъзел 3. Колко грама тежи кръгчето, ако общото тегло на всички висулки е 60 грама?

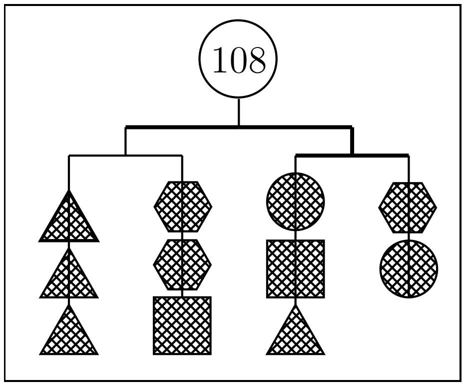


Пъзел 3.

Решение. В този по-сложен пъзел има два лоста – голям и малък. Както в първия пъзел, намираме, че на всяко рамо на големия лост са закачени висулки с общо тегло 30 г.
Това тегло от 30 грама се разпределя поравно на двете рамена на по-малкия лост вляво, т.е. на всяко от тях висят по 15 г.

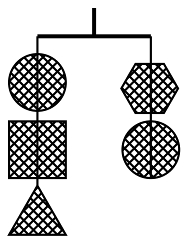
Оттук намираме, че триъгълникът тежи $15 : 3 = 5$ грама, квадратът е $15 - 5 = 10$ грама, а за кръгчето получаваме $30 - (5 + 10) = 15$ г.

Пъзел 4. Ако всички окачени фигури тежат общо 108 грама, колко тежи кръгчето?



Пъзел 4.

Решение. Освен големия лост, в пъзела има и два малки. На всяко рамо на големия лост са закачени по 54 грама, а на всяко рамо на малките лостове – по 27 грама. На най-лявото въженце са закачени три триъгълника, следователно триъгълникът тежи $27 : 3 = 9$ г.

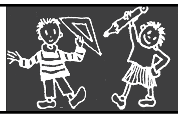


Да разгледаме малкия лост вдясно. Ако откачим по едно кръгче от двете въженца, шестоъгълникът ще уравновесява квадрат и триъгълник.

Оттук следва, че ако откачим двата шестоъгълника от малкия лост вляво и на мястото на всеки от тях закачим квадрат и триъгълник, равновесието ще се запази.

Тогава на малкия лост вляво 3 триъгълника ще уравновесяват 2 триъгълника и 3 квадрата. Оттук следва, че един триъгълник тежи колкото три квадрата и намираме, че квадратът тежи $9 : 3 = 3$ г. За шестоъгълника получаваме $3 + 9 = 12$ грама, а кръгчето тежи $27 - 12 = 15$ г.

Подобни пъзели – и по-лесни, и по-сложни, може да намерите в играта SolveMe Mobiles (`https://solveme.edc.org/Mobiles.html`).

за по-малките  задачи

4. клас

16. В редица са подредени общо 2017 триъгълника, като се редуват по следния начин.

$$\blacktriangle \triangledown \triangledown \blacktriangle \triangledown \triangledown \blacktriangle \triangledown \triangledown \blacktriangle \triangledown \cdots$$

Колко са черните триъгълници в редицата?

17. Кое число е с толкова по-голямо от 17, с колкото е по-малко от 2017?

18. Колко е разликата на числата, означени с $\triangle$ и с $\heartsuit$, ако сборът от числата на първия ред на таблицата е 1001, а сборът от числата в първия стълб е 707?

$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\triangle$	$\heartsuit$

19. Разстоянието между два локомотива е 875 км. Първият от тях изминава 5 км за същото време, за което вторият изминава 2 км. Ако локомотивите пътуват един срещу друг (разбира се, в различни коловози), колко километра ще измине всеки от тях до момента на срещата?

5. клас

20. Да се намери произведението на числата x и y, ако $2,4 - x = 2.0,8$ и $y - 1,4 = 2 : 5$.

21. Лицето на квадрат с обиколка 1 cm е равно на $\dfrac{1}{4}$ от лицето на правоъгълник с дължина 2,5 cm. Да се намери широчината на правоъгълника.

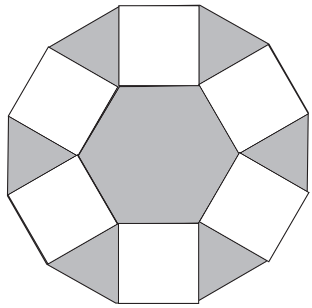
22. Иво решил $\dfrac{1}{3}$ от задачите за домашно и останали още 12 задачи. Ако $\dfrac{3}{4}$ от оставащите задачи са трудни, а измежду решените задачи само $\dfrac{1}{3}$ са трудни, колко трудни задачи е имало в домашното на Иво?

23. Волейболен отбор има 50 мача за сезон. До момента отборът е изиграл 20 мача и е спечелил 60% от тях. Ако спечели и 80% от предстоящите мачове, колко победи ще има отборът за сезона?

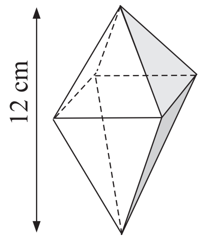
6. клас

24. Да се пресметне y^x, ако

$$2^{-3}.4^x = 8^5 \quad \text{и} \quad x^y = 81.$$



25. Правилният дванадесетоъгълник на чертежа е съставен от квадрати, равностранни триъгълници и един шестоъгълник. Шестоъгълникът има страна 20 cm и апотема, приблизително равна на 17 cm. Приблизително колко процента от лицето на дванадесетоъгълника е лицето на оцветената част?



26. Минерал е шлифован, както е показано на чертежа. Двете правилни четириъгълни пирамиди имат една и съща основа и сборът от височините им е 12 cm. Основният ръб на пирамидите е 4 cm. Да се намери теглото на минерала, ако плътността му е 9 g/cm^3.

27. Цилиндър с околна повърхнина 6π cm^2 и височина 3 cm има обем, равен на обема на конус с радиус на основата 2 cm. Да се намери височината на конуса.

7. клас

28. Да се намери сборът от коефициентите в нормалния вид на многочлена $(2x-3)^3 + (3x-2)^2$.

29. В правоъгълния триъгълник ABC, $\sphericalangle C = 90^\circ$, са построени височината CH и ъглополовящите AL и CN съответно на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle BCH$. Да се докаже, че $AL \perp CN$.

30. Автомобил тръгнал от А, като се движил 2 часа с постоянна скорост, след което увеличил скоростта си с 10 km/h и пътувал още 3 часа до В. Автомобилът изминал разстоянието от А до В със средна скорост 96 km/h. Да се намери разстоянието, което е изминал автомобилът за последните 3 часа от движението си.

за по-малките решения

на задачите от бр. 6/2016 и бр. 1/2017

79. Ани, Бети, Вили, Гого и Дани отишли на кино и седнали на един ред с 5 места, номерирани с числата от 1 до 5 отляво надясно. По време на прожекцията Ани излязла от залата. Като се върнала, видяла, че Бети се е изместила с две места надясно, Вили се преместила с едно място наляво, Гого и Дани си разменили местата и за нея остава крайно място. На кое място е седяла Ани преди да излезе от залата?

Решение. Сборът от всички премествания наляво е равен на сбора на всички премествания надясно. Четиримата без Ани са се преместили общо с 3 места надясно и с 2 места наляво. Значи Ани се е преместила с $3-2=1$ място наляво и е седнала в края. Следователно след връщането си тя е седнала на място 1, а преди да излезе е била на място 2.

80. В една болница за последната година се родили общо 1000 бебета близнаци, тризнаци или четиризнаци. Имало 4 пъти повече раждания на тризнаци, отколкото на четиризнаци, а 3 пъти повече раждания на близнаци, отколкото на тризнаци. Колко четиризнаци се родили в тази болница през последната година?

Решение. На всяко раждане на четиризнаци се падат по 4 раждания на тризнаци и по $3.4=12$ раждания на близнаци; общо $1.4+4.3+12.2=40$ бебета. Тъй като $1000:40=25$, то е имало 25 раждания на четиризнаци, т.е. са се родили $25.4=100$ четиризнаци.

81. Първите пет цифри на седемцифрен PIN код са 10203. Намерете кода, ако е известно, че той е число, което се дели на 9 и на 10.

Решение. От признака за делимост на 10 следва, че цифрата на единиците на кода е 0, а от признака за делимост на 9 намираме, че цифрата на десетиците е 3. Търсеният код е 1020330.

82. Даден е правоъгълник със страни 60 cm и 84 cm. Иво нарязал правоъгълника на възможно най-малко на брой еднакви квадратчета. Не останали никакви изрезки. Колко сантиметра е страната на квадратчетата?

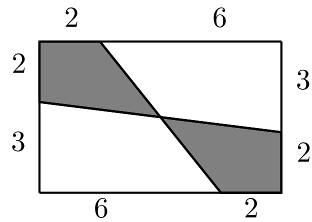
Решение. За да получи най-малък брой квадратчета, Иво ги е избрал така, че да са с възможно най-големи. Тъй като страната на квадратчето е общ делител на 60 и 84 и НОД $(60,84)=12$, Иво е избрал страна, равна на 12 cm.

83. По колко различни начина 2016 може да се представи като сбор на двойки и тройки, ако редът на събираемите не е от значение? (Например, $2016 = 1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$ и $2016 = 402 \cdot 2 + 404 \cdot 3$ са два такива начина.)

Решение. Тъй като сборът 2016 е четно число, то броят на тройките е четно число. Тройките са най-малко 0 (тогава $2016 = 1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$) и най-много 672 (тогава $2016 = 0 \cdot 2 + 672 \cdot 3$. Четните числа 0, 2, 4 и т.н. до 672 са $1 + 672 : 2 = 337$; толкова са търсените представяния.

84. Ако $n\heartsuit m = n^3.m^2$, да се пресметне $\dfrac{2\heartsuit 4}{4\heartsuit 2}$.

Решение. Имаме $\dfrac{2\heartsuit 4}{4\heartsuit 2} = \dfrac{2^3.4^2}{4^3.2^2} = \dfrac{1}{2}$.



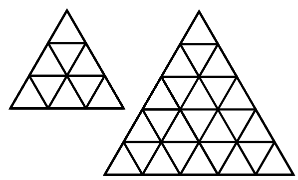
85. Да се намери лицето на оцветената част от правоъгълника 8×5.

Решение. Лицето на всеки от оцветените четириъгълници се състои от лицето на триъгълник със страна 2 и височина към нея 4 и лицето на триъгълник със страна 2 и височина към нея 2,5. Лицето на един четириъгълник е $\dfrac{1}{2}.2.2,5 + \dfrac{1}{2}.2.4 = 6,5$, откъдето лицето на оцветената част е $2.6,5 = 13$.

86. Да се намери числото n от равенството $\dfrac{2^{100} + 2^{97}}{2^{100} - 2^{99}} = 1,5^n$.

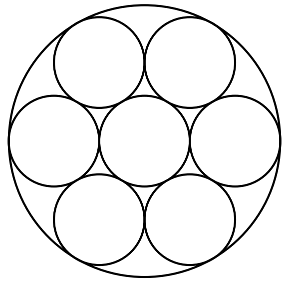
Решение. Имаме $\dfrac{2^{100} + 2^{97}}{2^{100} - 2^{99}} = \dfrac{2^{97}(2^3 + 1)}{2^{99}(2 - 1)} = \dfrac{9}{2^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 1,5^2$, т.е. $n = 2$.

87. Дървен елемент с форма на равностранен триъгълник със страна 3 cm тежи 12 g. Приблизително колко грама тежи дървен елемент с форма на равностранен триъгълник със страна 5 cm, който е със същата дебелина и е изработен от същия материал?



Решение. Равностранният триъгълник със страна 3 е съставен от 9 равностранни триъгълника със страна 1. Оттук теглото на равностранен триъгълник със страна 1 е равно на $12 : 9 = \dfrac{4}{3}$ g. Равностранният триъгълник със страна 5 е съставен от 25 равностранни триъгълника със страна 1 и тежи $25.\dfrac{4}{3} = 33\dfrac{1}{3}$ g, приблизително 33 g.

88. От тесто с форма на кръг изрязали седем кръгли меденки с радиус R, разположени както е показано на чертежа. Колко меденки със същия размер могат да се оформят от останалото тесто?



Решение. Тестото е кръг с радиус $3R$ см. Лицето на тестото е $(3R)^2\pi = 9R^2\pi$, а лицето на една меденка е $R^2\pi$. Следователно от тестото могат да се оформят общо 9 меденки, което означава, че от останалото тесто могат да се оформят още две меденки.

89. За коя стойност на x е изпълнено равенството $10^x \cdot 100^{2x} = 1000^5$?

Решение. Имаме

$$10^x.(10^2)^{2x} = (10^3)^5 \iff 10^x.10^{4x} = 10^{15} \iff 10^{5x} = 10^{15},$$

откъдето следва равенството $5x = 15$, т.е. $x = 3$.

90. Да се намерят ъглите α и β, ако $\alpha : \beta = 5 : 4$, а съседният ъгъл на α е два пъти по-малък от съседния ъгъл на β.

Решение. Означаваме $\alpha = 5x$ и $\beta = 4x$. От съотношението на съседните ъгли имаме

$$180 - 4x = 2(180 - 5x).$$

Решението на това уравнение е $x = 30$. Тогава $\alpha = 150^\circ$, а $\beta = 120^\circ$.

1. Вярно ли е, че $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+987+654+321 = 2017$?

Решение. Да, тъй като $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, $987 + 654 + 321 = 1962$, а $55 + 1962 = 2017$.

2. Сборът на две числа е 83, а ако разделим едното на другото, ще получим 8 и остатък 2. Кои са числата?

Решение. По-малкото число е равно на $(83-2) : 9 = 9$, а по-голямото е $9.8 + 2 = 74$.

3. Ели дала половината от бонбоните си и още 5 бонбона на сестра си. След това майка ѝ ѝ дала още толкова бонбони, колкото Ели имала в момента. Ели изяла 6 бонбона, а след това и половината от останалите. Последните два бонбона дала на сестра си. Колко бонбона имала Ели отначало?

Решение. Да проследим какво се е случило с бонбоните на Ели.

$$\bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{-5} \bigcirc \xrightarrow{.2} \bigcirc \xrightarrow{-6} \bigcirc \xrightarrow{:2} 2.$$

По обратен път намираме, че в началото тя е имала $((2.2+6) : 2+5).2 = 20$ бонбона.

4. Имам девет банкноти на обща стойност 177 лв. Банкнотите са от 1, 5, 10 или 50 лв., като от всеки вид има поне по една банкнота. Колко са десетлевовите банкноти?

Решение. Сред банкнотите има по една от всеки вид и тези четири банкноти са на обща стойност $1+5+10+50 = 66$ лв. Останалите 5 банкноти са на обща стойност $177 - 66 = 111$ лв., следователно те са една банкнота от 1 лв., две по 5 лв. и две по 50 лв. Сред банкнотите има една от 10 лв.

5. Ако

$$1\frac{1}{5} - a = \frac{1}{2}, \quad a : b = \frac{7}{6}, \quad c - b = \frac{3}{20}, \quad d : c = \frac{4}{9},$$

да се пресметне $\dfrac{a+b}{c+d}$.

Решение. Намираме $a = \dfrac{6}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10}$, $b = a : \dfrac{7}{6} = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{6}{7} = \dfrac{3}{5}$, $c = b + \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{4}$ и $d = c \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{3}$. Следователно

$$\frac{a+b}{c+d} = \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{10} : \frac{13}{12} = \frac{6}{5}.$$

6. Иво получил 20 шоколада. Той изял $\dfrac{1}{4}$ от шоколадите, след което раздал на приятелите си $\dfrac{3}{5}$ от оставащите шоколади. Колко шоколада са останали?

Решение. Иво изял $\dfrac{1}{4}.20 = 5$ шоколада и от оставащите 15 шоколада раздал $\dfrac{3}{5}.15 = 9$. Останали са $15 - 9 = 6$ шоколада.

7. В кутия има жълти, зелени и червени топчета. Червени са $\dfrac{2}{5}$ от топчетата, зелени са $\dfrac{1}{4}$ от от топчетата, а жълтите топчета са 14. Колко топчета има в кутията?

Решение. Жълтите топчета са $1 - \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{7}{20}$ от общия брой. Следователно топчетата са общо $14 : \dfrac{7}{20} = 40$.

8. В първия ден от ваканцията Теди решила $\dfrac{1}{4}$ от задачите, които получила за домашно. На следващия ден решила $\dfrac{4}{9}$ от оставащите задачи. Броят задачи, които решила на третия ден, бил равен на $\frac{5}{7}$ от броя задачи, решени общо през първите два дни. Колко задачи са останали за четвъртия ден?

Решение. След първия ден останали нерешени $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ от задачите. На втория ден Теди решила $\frac{4}{9}.\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$ от задачите за домашно, а на третия – $\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$. През първите три дни тя решила $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=1$, т.е. цялото домашно и за четвъртия ден останали 0 задачи.

9. Вярно ли е, че $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4-2^3-2^2-2^1-2^0=2017$?

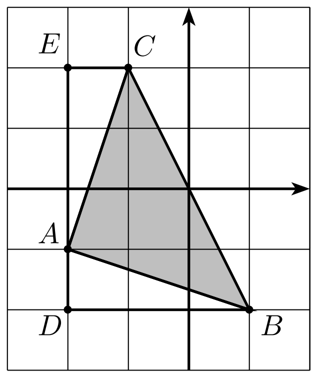
Решение. Да, защото

$$2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5=2^5(2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1)=32.63=2016,$$

а $2^4-2^3-2^2-2^1-2^0=1$.

10. Ако $a=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $b=\frac{(-2^2)^3}{(-2^3)^2}$, в правоъгълна координатна система да се построи триъгълник с върхове $A(a;b)$, $B(-b;a)$ и $C(b;-a)$ и да се намери лицето му.

Решение. Намираме $a=-2$ и $b=\frac{-2^6}{2^6}=-1$.
Отбелязваме в координатната система точките $A(-2;-1)$, $B(1;-2)$ и $C(-1;2)$, както и $D(-2;-2)$, $E(-2;2)$. Лицето на трапеца $DBCE$ е 8, а лицето на всеки от правоъгълните триъгълници DBA и ECA е равно на 1,5. Следователно лицето на ABC е равно на $8-2.1,5=5$.



11. Да се пресметне стойността на израза $\frac{(x+y)^y}{x^{y-x}}$ при x и y, за които $7+12:x=1$ и $5-y:(-3)=7$.

Решение. Имаме $7+12:x=1 \;\Rightarrow 12:x=-6 \;\Rightarrow x=-2$ и $5-y:(-3)=7 \;\Rightarrow y:(-3)=-2 \;\Rightarrow y=6$. Тогава

$$\frac{(-2+6)^6}{(-2)^{6-(-2)}}=\frac{4^6}{2^8}=\frac{2^{12}}{2^8}=2^4=16.$$

12. Фермер ожънал пшеница, ечемик и ръж. Количеството на ръжта било с 50% по-малко, отколкото на ечемика, а общото количество ръж и ечемик било с 40% по-малко, отколкото пшеницата. С колко процента ечемикът е бил по-малко от пшеницата?

Решение. Ако количеството ечемик е x, то ръжта е $0,5x$, а общото количество ръж и ечемик е $1,5x$. Нека количеството пшеница е y. Тогава $1,5x$ е с 40% по-малко от y, т.е. $1,5x = 0,6y$. Оттук $x = 0,4y$, т.е. ечемикът е с 60% по-малко от пшеницата.

13. Ако $a = 2xz$, $b = 2yz$, $c = x^2 + y^2 - z^2$ и $d = x^2 + y^2 + z^2$, да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на $(d-c)(d+c) = a^2+b^2$. Като заместим в това равенство $d + c = 2x^2 + 2y^2$, $d - c = 2z^2$, $a = 2xz$ и $b = 2yz$, получаваме тъждество.

14. Да се реши уравнението $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{2x-1}{3} = ax$ и да се намерят целите стойности на параметъра a, за които решението x е цяло число.

Решение. Уравнението е еквивалентно на $(6a - 5)x = 5$. При $a = \dfrac{5}{6}$ то няма решение, а при $a \neq \dfrac{5}{6}$ решението е $x = \dfrac{5}{6a-5}$. Решението е цяло, ако $6a - 5$ е делител на 5, т.е. ако $6a - 5$ е равно на 1, -1, 5 или -5. При $6a - 5 = 1$ получаваме $a = 1$, при $6a - 5 = -5$ намираме $a = 0$, а в другите два случая не се получават цели стойности.

15. В 9:00 от село Х към село У тръгнал пешеходецът Димо. По същото време и по същия път, но от У към Х тръгнал велосипедистът Мишо. До срещата Димо изминал третината от пътя до У. Ако Димо беше тръгнал един час по-рано, срещата би била по средата на пътя между двете села. В колко часа̀ са се срещнали Димо и Мишо?

Решение. За времето, за което Димо изминал $\dfrac{1}{3}$ от пътя, Мишо изминал $\dfrac{2}{3}$ от пътя. Следователно Мишо се движи 2 пъти по-бързо от Димо.

Ако Димо тръгне в 8 часа, а Мишо – в 9 часа, срещата ще е по средата на пътя. Но за времето, за което Мишо изминава $\dfrac{1}{2}$ от пътя, Димо изминава $\dfrac{1}{4}$ от пътя, т.е. останалата $\dfrac{1}{4}$ от пътя Димо би изминал от 8 до 9 часа.

Щом Димо изминава $\dfrac{1}{4}$ от пътя за 1 час, то Мишо изминава $\dfrac{1}{2}$ от пътя за 1 час. Те са тръгнали в 9 часа и са се срещнали след $1 : \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$ часа, т.е. в 10 часа 20 мин.

ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

В последно време по различни форуми на социалните мрежи възмутени родители разгорещено коментират формулировката на задачи по математика за по-малките ученици. В отговор на този проблем, който се подмята като горещ картоф и сред дейците на математическото образование, ще се опитам да демонстрирам развитието на методиката през последните десетилетия в роден и международен контекст. Ето една от многобройните метаморфози, през които минава типична за тази възраст задача:

1950 г. Чувал с картофи, произведен в ТКЗС „Път към комунизма“, се продава на кооперативния пазар за 10 лева. Производствената цена е 4/5 от продажната. Колко лева печели ТКЗС-то?

1960 г. Кооператор продава чувал с картофи за 10 лева. Производствената цена е 0.8 от продажната, т.е. 8 лева. Каква е печалбата?

1970 г. (новата математика) Производител разменя множество K от картофи за множество P от пари. Кардиналното число на множеството P е 10 и всеки негов елемент струва 1 лев. Начертайте 10 големи точки, представляващи елементите на P. Множеството C на производствената цена се състои от 2 големи точки по-малко от множеството P. Представете C като подмножество на P и отговорете на въпроса: какво е кардиналното число на множеството на печалбата? (Оцветете всичко в червено).

1980 г. Земеделски стопанин продава чувал с картофи за 10 лева. Производствената цена на картофите е 8 лева, а печалбата – 2 лева. Подчертайте думата „картофи“ и дискутирайте със съучениците си.

1990 г. Фермер печели 2 лева на *човал* с *къртофи*. Анализирайте текста и намерете правописните и печатни грешки. Коментирайте справедлива ли е тази печалба.

2012 г. Фермер продава чувал с картофи за 10 лева. Производствената цена е 0.80 от продажната. Заредете на айфона си програмата POTATO, за да определите печалбата. Напишете кратко есе, в което да анализирате този пример в контекста на световната икономическа криза.

2017 г. Фермер продава чувал с картофи за 10 лева. Производствената цена е 0.80 от продажната. За да определите печалбата, приложете изследователския подход.

Упътване: Идете на платформата Scientix (вж. задната корица на това списание) и открийте подходящ динамичен софтуер, за да моделирате ситуацията. Приложете стратегията What if… Обобщете задачата. Представете решението и идеите си за развитие на проекта пред по-широка публика. (Не е задължително да е с Power Point). Намерете връзка със света на работата (World of Work).

За жалост, последните изследвания на PISA и на Европейската комисия не ни помагат да се усмихнем отвисоко на това развитие…

* * *

Когато бях студентка в първи курс, с голям успех сред състудентите ми се ползваше следната задача:

Котка и половина изяжда мишка и половина за час и половина. За колко време 10 котки могат да изядат 10 мишки?

И ако това все пак си е една много смислена задача, какво да кажем за следната, наглед от същия тип:

Четирима музиканти изпълняват 4-тата част на струнния квартет No. 4 (в до минор) за 4 мин. За колко време трима ще изпълнят третата част на същия квартет?

А ето една автентична история от времето, когато в началното училище (а дори и в детската градина) се въведоха елементи от теорията на множествата (т.нар. *нова математика*). Разтревожена майка споделя с учителката, че детето ѝ не е наред, защото настоява, че една ябълка е множество. Учителката реагира съчувствено: *Това не е нищо! Някои математици се опитват да ме убедят, че дори да изяде ябълката, пак ще бъде множество – викат му „празното множество“* …

* * *

По същото време гост на Института по математика бе френският математик Рене Том, известен като автор на *теорията на катастрофите.* След лекцията си той сподели, че вече има много общо между едно френско и едно българско дете на 7 години: вместо да кажат: „Имам 2 ябълки.“ те биха формулирали същото твърдение на модерен математически език: „Кардиналното число на множеството от ябълки, които притежавам, е две.“

Така че, драги родители, не бързайте да казвате: *По мое време нямаше такива задачи* … Радвайте се, че може заедно да се позабавлявате с децата си на математически теми …

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 1/2017 г.

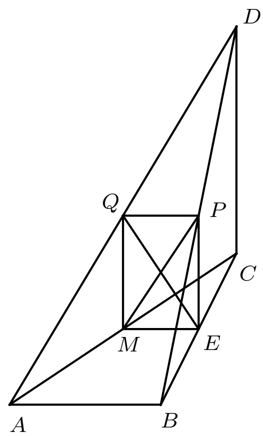
ТЕМА 1

1. В); **2.** А); **3.** Г); **4.** Б); **5.** В); **6.** Б); **7.** А); **8.** Б); **9.** Г); **10.** В); **11.** А); **12.** Г); **13.** 3 или 12; **14.** $\frac{1}{25}$; **15.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; **16.** $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(2) = 0$; **17.** 4.

18. Даденото неравенство е равносилно на системата $\left|\begin{array}{l} 2-|x| \geq 0 \\ x-1>0 \\ 2-|x|<(x-1)^2 \end{array}\right.$ с решение $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$.

19. С полагането $7^{x-\sqrt{x}} = y$ свеждаме уравнението до $y^2 - 42y - 343 = 0$ с корени $y_1 = 49$ и $y_2 = -7$. Тъй като $y > 0$, то $y = 49$. Оттук $x - \sqrt{x} = 2$, откъдето намираме $x = 4$.

20. Нека M, P, Q, E са средите съответно на AC, BD, AD, BC. Отсечките MQ и PE са средни отсечки съответно в триъгълниците ACD и BCD, откъдето $QM||DC$, $QM = \frac{1}{2}DC$ и $PE||DC$, $PE = \frac{1}{2}DC$. Следователно $QM||PE$ и $QM = PE$, т.е. $MEPQ$ е успоредник. По условие $MP = QE$, което означава, че е $MEPQ$ правоъгълник. Тогава $QM \perp ME$. От $QM||DC$ и $ME||AB$ следва, че $AB \perp DC$, т.е. търсеният ъгъл е 90°.



ТЕМА 2

1. В; **2.** Б; **3.** В; **4.** Б; **5.** Г.

6. а) При $x = \frac{\pi}{3}$ получаваме $a = 4\sqrt{3} - 6$.

б) След полагането

$$3^{\cos x} = y,\ \frac{1}{3} < y < 3 \tag{2}$$

при $a = 4$ получаваме уравнението

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = 9$. Следователно $3^{\cos x} = 1$ и $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

в) При полагането (6) имаме уравнението

$$y^2 - (6+a)y + 9 = 0. \tag{3}$$

Изискването за x води до изискването уравнението (5) да има точно едно решение в интервала $(1, 3)$, т. е. лявата страна на (5) да приема стойности с различни знаци. Така за a получаваме неравенството $-3a(4-a) < 0$ с решение $a \in (0, 4)$.

Трябва да отбележим, че макар това да е отговорът на подусловието, това решение не е пълно, ако не са разгледат съответно случаите, когато дискриминантата на (5) е равна на нула и случаите, когато един от корените на (5) съвпада с един от краищата на интервала $(1, 3)$.

7. а) Четириъгълникът $CANP$ е правоъгълен трапец с основи CA и NP и височина MN. Тогава лицето му е $S_{CANP} = R^2 \operatorname{cotg} \alpha(3 - \cos 2\alpha)$.

б) Нека $Q = CN \cap AP$. Тогава $\triangle CAQ \sim \triangle NPQ$. Следователно $\dfrac{CQ}{NQ} = \dfrac{AC}{NP} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{4}{3}$. Тъй като $\alpha < 90^\circ$, то $\alpha = 60^\circ$.

в) Тъй като височината на $\triangle ABC$ е постоянна, то лицето му е най-малко точно когато дължината на $AB = \dfrac{4R}{\sin 2\alpha}$ е най-малка. Тъй като $\sin 2\alpha \le 1$, то трябва $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

8. а) Тъй като стената ADE е перпендикулярна на основата, върхът E се проектира в точка O от AD. Тогава от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDE = 90^\circ$ и следователно по дефиниция $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EAD = \alpha$.

б) От равнобедрения триъгълник ADE височината на пирамидата $EO = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg} \alpha$ и обемът е $\dfrac{a^3}{2}\operatorname{tg} \alpha$.

в) От $CD \parallel AB$ следва, че търсения ъгъл е $\sphericalangle ABE$ с тангенс $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ при $\alpha = 30^\circ$, т.е. е равен на 30°.

Търсеното разстояние d е височината през върха D в пирамидата $ABED$ с обем $V = \dfrac{a^3}{12}\operatorname{tg} \alpha$. Тогава $d = \dfrac{3V}{S_{ABE}} = a \sin\alpha = \dfrac{a}{2}$.

Разбира се, d може да се намери и чрез директно построяване на перпендикуляра от D към ABE.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 2/2017 г.

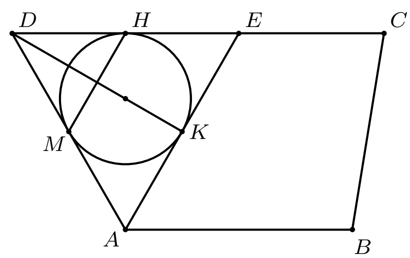
ТЕМА 1

1. Б); **2.** Г); **3.** В); **4.** А); **5.** В); **6.** Б); **7.** Г); **8.** А); **9.** В); **10.** Б); **11.** Б); **12.** А); **13.** 1, 2, 3, 4; **14.** $\log_2 3$; **15.** $-\dfrac{5}{64}$; **16.** $(-1-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1)$; **17.** 319.

18. Ако медицентъра означим с P и $PM = x$, $PN = y$, то $AP = 2x$ и $BP = 2y$. По Питагоровата теорема за триъгълниците BPM и APN имаме $x^2 + 4y^2 = \dfrac{a^2}{4}$ и $4x^2 + y^2 = \dfrac{b^2}{4}$. Като съберем двете равенства, получаваме $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2+b^2}{20}$. От теоремата на Питагор за триъгълника ABP следва, че $AB^2 = 4x^2 + 4y^2 = \dfrac{a^2+b^2}{5}$, откъдето $AB = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$.

19. Като запишем равенството във вида $\sqrt{x^2+9} = 2 + \sqrt{x^2-7}$ и степенуваме, получаваме $\sqrt{x^2-7} = 3$, откъдето $x = \pm 4$. С проверка в даденото уравнение установяваме, че $x = \pm 4$ са корени.

20. Нека $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD = \sphericalangle AED = \alpha$. Понеже $\triangle EAD$ е равнобедрен, то допирната точка на окръжността със страната AE е средата K на AE и $DK \perp AE$.



От $\triangle AKD$ намираме $AK = 2\cos\alpha$ и $AE = 4\cos\alpha$. Понеже $DM = DA - AM = DA - AK = 2 - 2\cos\alpha$, от подобието на триъгълниците MHD и AED следва, че

$$\frac{MH}{AE} = \frac{DM}{DA} \iff \frac{1}{4\cos\alpha} = \frac{2-2\cos\alpha}{2} \iff 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0.$$

Получаваме $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\alpha = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 2\alpha = 120^\circ$.

ТЕМА 2

1. Б; **2.** Б; **3.** Г; **4.** В; **5.** Г.

6. а) При $x = \dfrac{5\pi}{3}$ получаваме $a = \dfrac{12\sqrt{2} - 13}{7}$.

б) След полагането

$$2^{\cos 2x} = y, \ \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \tag{4}$$

при $a = 5$ получаваме уравнението

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Следователно $2^{\cos 2x} = 1$ и $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$, както и $2^{\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$ и $x = (2l+1)\dfrac{\pi}{2}, \ l \in \mathbb{Z}$.

в) При полагането (6) имаме уравнението

$$3(a-1)y^2 - 3(a+1)y + a + 1 = 0, \tag{5}$$

Изискването за x води до изискването уравнението (5) да има точно едно решение в интервала $(1, \sqrt{2})$, т. е. лявата страна на (5) да приема стойности в краищата на интервала с различни знаци. Така за a получаваме неравенството $((7-3\sqrt{2})a-5-3\sqrt{2})(a-5) < 0$ с решение $a \in \left(\dfrac{5+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}, 5\right)$.

Трябва да отбележим, че макар това да е отговорът на подусловието, това решение не е пълно, ако не са разгледат съответно случаите, когато:

1) Дискриминантата на (5) е равна на нула;

2) случаите, когато един от корените на (5) съвпада с един от краищата на интервала $(1, \sqrt{2})$;

3) $a = 1$.

7. а) Нека $CP \underset{=}{\parallel} AD$, $(P \in AB)$. От условието за вписаност и теоремата на Питагор за триъгълника BCP получаваме, че височината на трапеца $AD = CP = \dfrac{2kb}{k+1}$ и че лицето му е kb^2.

б) От подобието на триъгълниците ABM и PBM следва, че $AM = \dfrac{AB.CP}{BP} = \dfrac{2k^2b}{k^2-1}$, откъдето следва исканото равенство.

в) Чрез стандартно изследване на функцията $y(k) = \dfrac{k^3}{k^2-1}$ се получава, че най-малката стойност на лицето е при $k = \sqrt{3}$. В този случай имаме $\operatorname{tg} \sphericalangle B = \dfrac{AM}{AB} = \sqrt{3}$, т.е. неправите ъгли на трапеца са 60° и 120°.

8. а) От условието следва, че върхът M се проектира в пресечната точка O на диагоналите на основата. Ако $ON \perp AB$, $(N \in AB)$, то $\sphericalangle ONM = \beta$ и височината на пирамидата $OM = ON\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$, откъдето лесно се получава обемът на пирамидата.

б) Тъй като $CD \parallel AB$, ъгълът φ между въпросните прави е $\sphericalangle DCM$. Нека $OK \perp CD$, $(K \in CD)$. Получаваме последователно $MK = \dfrac{OK}{\cos\beta}$, $CK = \dfrac{OK}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MK}{CK} = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi = 60^\circ$.

Не е трудно да се види, че търсеното разстояние d е височината през върха N в $\triangle NKM$, т. е. $d = NK\sin\beta = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Разбира се, разстоянието може да се намери и като височина през върха A в пирамидата $DCMA$.

ТЕМА 3

1. В; **2.** Г; **3.** А; **4.** Г; **5.** Б.

6. След преминаване към основа 5 получаваме

$$5^{-3}.(5^{-1})^{\log_2^2(ax^2+4)} < (5^{-4})^{\log_2(ax^2+4)},$$

откъдето след полагането $y = \log_2(ax^2+4)$ имаме $y^2 - 4y + 3 < 0$ с решения интервала $(1,3)$ или

$$-2 < ax^2 < 4 \qquad (6)$$

а) Като разделим (6) на -18 получаваме системата $\dfrac{1}{9} > x^2 > -\dfrac{2}{9}$ или $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

б) Изискването всъщност е интервалът $(-2, 0)$ да е част от решенията на (6).

При $a > 0$ за решенията на (6) получаваме $|x| < \dfrac{2}{\sqrt{a}}$, т. е. трябва $-\dfrac{2}{\sqrt{a}} \leq -2$ или $a \leq 1$.

При $a < 0$ аналогично се получава $a \geq -\dfrac{1}{2}$.

7. а) Нека $BL \cap AD = P$. Тогава $\dfrac{AN}{MN} = \dfrac{AP}{BM} = 2k$. Не е трудно да се види, че $\dfrac{BN}{LN} = \dfrac{k}{k+1}$ и тогава

$$\frac{S_{\triangle BLC}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{BC.BL}{BM.BN} = \frac{4k+2}{k}.$$

б) Следва от факта, че $S_{LCMN} = \dfrac{3k+2}{k} S_{\triangle BMN}$.

в) От искането следва, че $\sphericalangle AMB = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle BAM = \dfrac{3\alpha}{2} - 90^\circ$ (Тогава трябва $\alpha > 60^\circ$). Сега със синусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме, че $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -2k\cos\dfrac{3\alpha}{2}$, откъдето лесно се получава, че $\cos\alpha = \dfrac{2k-1}{4k} < \dfrac{1}{2}$, т. е. $\alpha > 60^\circ$).

8. а) Нека M е средата на AB. Тогава $\sphericalangle CMD = \varphi$ и $\sphericalangle MCD$ е прав. След решаване на съответните правоъгълни триъгълници се получава

$$S_{ok} = S_{ABD} + 2S_{ACD} = m^2 \frac{\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\varphi}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\varphi}.$$

б) Нека точката $N \in CM$ така, че $CN = x$. Тогава равнината λ минава през N, успоредно на AB и е перпендикулярна (ABC). Не е трудно да се види, че търсеното сечение е правоъгълник. От съответните подобия следва, че страните му са $\dfrac{x.AB}{m}$ и $\dfrac{(m-x).CD}{m}$, т. е. лицето на сечението е $S = \dfrac{AB.CD}{m^2}x(m-x)$. Непосредствено се вижда, че то е най-голямо при $x = \dfrac{m}{2}$.

За упражнение читателят може да намери за кое x в сечението може да се впише окръжност.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности, 30 магистърски програми и над 10 научни специалности. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти висока конкурентноспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2017/2018 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Представяме ви най-утвърдените от тях, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 13.03.2017 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.