

Мате мати ка

БРОЙ
2024 г.
ГОДИНА
LXIII

1

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн Петър Бойваленов – главен редактор

Невена Събева – зам. главен редактор

Чл.-кор. проф. дмн Генчо Скордев

Чл.-кор. проф. дмн Николай Николов

Проф. дмн Емил Колев

Проф. д-р Иван Тонов

Проф. д-р Станислав Харизанов

Доц. д-р Евгения Сендова

Доц. д-р Ивайло Кортезов

Александър Иванов

Емил Карлов

Татяна Пархоменко – графичен дизайн и предпечат

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

„Атанас Радев“

ПРОФ. СТАНИСЛАВ ХАРИЗАНОВ, ИМИ – БАН

Националните зимни математически състезания „Атанас Радев“ за ученици 8.–12. клас се проведеха на 27 януари 2024 г. В състезанието се включиха 283 ученици от цялата страна.

Победителите в състезанието са:

8. клас

Първо място. **Александър Пендов** (МГ, Пловдив) и **Божидар Сакарев** (ПЧМГ, София)

Трето място. **Дамян Накев** (МГ, Варна) и **Кирил Момчилов** (СМГ, София)

9. клас

Първо място. **Александър Бангачев** (ПЧМГ, София), **Андрей Стефанов** (ПЧМГ, София), **Даниел Гетов** (СМГ, София)

10. клас

Първо място. **Боряна Манолова** (ППМГ, Бургас) и **Виктор Аврамски** (СМГ, София)

Трето място. **Владимира Георгиева** (СМГ, София)

11. клас

Първо място. **Петко Лазаров** (ППМГ, Бургас)

Трето място. **Ангел Христов** (ППМГ, Бургас), **Веселин Маркович** (МГ, Варна) и **Лазар Тодоров** (СМГ, София)

12. клас

Първо място. **Марин Христов** (СМГ, София)

Второ място. **Борис Гачевски** (СМГ, София)

Трето място. **Деян Хаджи-Манич** (МГ, Варна) и **Мария Дренчева** (СМГ, София)

Предлагаме ви условията на задачите, отговори и кратки решения.

Условия

Задача 8.1. Дадено е уравнението

$$2 + x\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = x\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

а) Запишете корена на уравнението във вида $m - \sqrt{n}$, където m и n са естествени числа.

б) Разложете израза $a^3 - 3a^2 - 5a + 7$ на два неконстантни множителя с цели коефициенти и пресметнете стойността на този израз, ако a е намереният в а) корен.

Задача 8.2. Симетралите на страните AC и BC на остроъгълния триъгълник ABC с $\angle ACB = 30^\circ$ се пресичат в точка O . Точките M и N съответно от страните AC и BC са такива, че O е средата на отсечката MN . Колко пъти произведението от дължините на отсечките CM и CN е по-голямо от произведението на дължините на отсечките AM и BN ?

Задача 8.3. Дадено е естествено число n . Имаме $n + 1$ топки, номерирани с $1, 1, 2, 3, \dots, n$ (само първите две са еднакви). Трябва да оцветим тези топки в n дадени цвята, така че всяка топка да е в един цвят и всеки цвят да се използва поне веднъж. Означаваме с a_n броя на възможните оцветявания. Намерете най-малкото n , за което a_n се дели на 2024.

Задача 8.4. Естествено число ще наричаме *ямболско*, ако може да се представи във вида $a^2 + 6ab + b^2$, където a и b са (не непременно различни) естествени числа. Числото 36^{2024} е записано като сбор на k на брой (не непременно различни) ямболски числа. Каква е най-малката възможна стойност на k ?

Задача 9.1. Да се реши системата уравнения:

$$\begin{aligned}(x + 1)^2(y + 1)^2 &= 27xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) &= 10xy.\end{aligned}$$

Задача 9.2. Дадено е число $x = \frac{q}{p}$, където p и q са прости числа, $p > q$ и 240 не дели $p^4 - q^4$. Да се намери максималната стойност на x .

Задача 9.3. Даден е триъгълник ABC с дължина на страните BC , CA и AB съответно a, b, c , като $2b = a + c$. Нека O и J са съответно центровете на описаната и вписаната за триъгълника окръжности. Да се докаже, че правите OJ и BJ са перпендикулярни.

Задача 9.4. Единадесет точки са разположени на равни разстояния по окръжност. Прекарани са няколко отсечки с краища дадените точки. Отсечките са оцветени в два цвята така, че всяка отсечка пресича във вътрешна за нея точка не повече от една отсечка от същия цвят. Да се определи колко най-много могат да бъдат прекараните отсечки.

Задача 10.1. Да се пресметне A_{2024} , където

$$A_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^n.$$

Задача 10.2. Да се намерят всички естествени числа k , за които съществуват естествени числа x, y , такива че числото $\frac{x^k y}{x^2 + y^2}$ е просто.

Задача 10.3. Вписаната окръжност в $\triangle ABC$ ($AC \neq BC$) се допира до страните му AB , BC и CA в точките D , E и F съответно. Нека P е петата на перпендикуляра от D към EF ($P \in EF$). Ако описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle EFC$ се пресичат за втори път в точка Q , да се докаже, че $\angle PQC = 90^\circ$.

Задача 10.4. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери най-малкото реално число $k > 0$ със следното свойство: Ако G е свързан граф с n върха и m ребра, то винаги е възможно да изтрием не повече от $k \cdot \left(m - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ ребра, така че върховете да могат да се оцветят в два цвята и всяко неизтрито ребро да има разноцветни върхове.

Задача 11.1. Първият, седмият и седемнадесетият членове на аритметична прогресия са различни и са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери разликата на аритметичната прогресия, ако първият ѝ член е решение на уравнението

$$x^2 - 9x + x\sqrt{12 - x} - 9\sqrt{12 - x} = 0.$$

Задача 11.2. Точките P , Q и R са от страните AB , BC и AC на $\triangle ABC$. Ако отсечките AQ , BR и CP се пресичат в една точка и $\angle APR = \angle BPQ$, да се докаже, че $CP \perp AB$.

Задача 11.3. Дадено е рационално число $q > 3$ такова, че $q^2 - 4$ е квадрат на рационално число. Редицата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е дефинирана по следния начин:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = q, \quad a_{i+1} = qa_i - a_{i-1}, \quad \text{за всяко } i = 1, 2, \dots$$

Съществуват ли естествено число n и ненулеви цели числа $b_0, b_1, \dots, b_n$, за които $b_0 + b_1 + \dots + b_n = 0$ и ако

$$b_0a_0 + b_1a_1 + \dots + b_na_n = \frac{A}{B},$$

където A и B са взаимнопрости цели числа, то A не се дели на квадрат на просто число?

Задача 11.4. Страните и диагоналите на правилен n -ъгълник са оцветени в $k \geq 3$ цвята. За всеки цвят i между всеки два върха на многоъгълника съществува път, съставен само от отсечки от цвят i . Да се докаже, че съществуват три върха на многоъгълника A, B и C такива, че отсечките AB, BC и AC са разноцветни.

Задача 12.1. Мария и Биляна играят следната игра. Мария разполага с 2024, а Биляна с 2023 честни монети. Монетите се хвърлят на случаен принцип – вероятността за всяка отделна монета да бъде ези след хвърлянето е $\frac{1}{2}$. Мария печели, ако сред нейните монети има строго повече езита отколкото сред тези на Биляна, а в противен случай Биляна печели. Каква е вероятността Мария да спечели?

Задача 12.2. Даден е разностранен и остроъгълен $\triangle ABC$ с $AC > BC$. Нека точка P от вътрешността на $\triangle ABC$ е такава, че $\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ и нека AP и BP пресичат отсечките BC и AC в точките A_1 и B_1 съответно. Нека M е средата на A_1B_1 , а окръжностите, описани около $\triangle ABC$ и $\triangle A_1CB_1$, се пресичат за втори път в точка Q . Да се докаже, че $\sphericalangle PQM = \sphericalangle BQA_1$.

Задача 12.3. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A}$ е непразна фамилия от непразни подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$ със следното свойство – ако $A \in \mathcal{A}$ и $A \subset B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, то $B \in \mathcal{A}$. Да се докаже, че функцията

$$f(x) := \sum_{A \in \mathcal{A}} x^{|A|} (1-x)^{n-|A|}$$

е строго растяща в интервала $(0, 1)$.

Задача 12.4. Ще наричаме едно естествено число m *Спировско*, ако съществуват цели числа a, b, c , за които

$$m = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc.$$

Да се докаже, че съществува естествено число $n < 2024$ такова, че за безбройно много прости числа p , числото np е *Спировско*.

Отговори и решения

8.1. а) $x = 1 - \sqrt{2}$; б) $6\sqrt{2}$.

8.2. Нека L е средата на BC (съответно $OL \perp BC$) и K е петата на перпендикуляра от M към BC . Тогава $OL \parallel MK$ и с $MO = ON$ следва, че OL е средна отсечка в триъгълника KMN – в частност $KL = LN$. От друга страна, имаме и $BL = CL$, откъдето $BN = CK$.

От правоъгълния триъгълник CKM с $\angle KCM = 30^\circ$ получаваме $KM = \frac{1}{2}CM$ и $CK = \sqrt{CM^2 - KM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}CM$ от Питагоровата теорема. Следователно $\frac{CM}{BN} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Аналогично имаме $\frac{CN}{AM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, откъдето окончателно $\frac{CM \cdot CN}{AM \cdot BN} = \frac{4}{3}$.

8.3. Точно един от цветовете ще се използва за две от топките; нека техните номера са a и b , като $a \leq b$.

Ако $a > 1$, то имаме $(n-1)(n-2)/2$ избора за a и b , както и n избора за цвета им. Останалите $n-1$ точки (две от които еднакви) трябва да се оцветят в оставащите $n-1$ цвята; за това имаме $(n-1)!/2$ варианта. Следователно в този случай броят на възможните оцветявания е

$$\frac{1}{4}(n-1)!n(n-1)(n-2) = \frac{1}{4}n!(n^2 - 3n + 2).$$

Ако $a = 1$, то за оцветяване в n цвята на всички точки освен a има $n!$ варианта. Сега има n избора за цвета на a . Така в този случай има $n! \cdot n$ възможни оцветявания.

Окончателно $a_n = \frac{1}{4}n!(n^2 - 3n + 2 + 4n) = \frac{1}{4}n!(n^2 + n + 2)$. Ако a_n е кратно на $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ и $n < 23$, то трябва $23 | n^2 + n + 2$. Директна проверка сочи, че най-малкото такова n е 9, но $a_9 = 9! \cdot 23$ не се дели на 11, а следващото подходящо n е 13, при което $a_{13} = 13! \cdot 46$ се дели на $2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

8.4. Първо ще покажем, че $k = 1$ не е възможно, т.е.

$$a^2 + 6ab + b^2 = 2^{4048} \cdot 3^{4048}$$

няма решение в естествени числа. Ако такива a, b съществуват, то $a^2 + b^2$ се дели на 3 и значи a и b се делят на 3. Записвайки $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ и разделяйки на 3^2 , получаваме $a_1^2 + 6a_1b_1 + b_1^2 = 2^{4048} \cdot 3^{4046}$; повтаряйки този аргумент още 2023 пъти, достигахме до уравнение от вида

$$u^2 + 6uv + v^2 = 2^{4048}$$

където u и v са естествени числа.

Ако v е четно, то и u е четно; записвайки $u = 2u_1$, $v = 2v_1$ и разделяйки на 4, получаваме $u_1^2 + 6u_1v_1 + v_1^2 = 2^{4046}$; повтаряйки неколkokратно това, достигахме до уравнение от вида

$$s^2 + 6st + t^2 = 2^{2A},$$

където s, t, A са естествени числа, t е нечетно и $A \geq 2$ (тъй като лявата страна е по-голяма или равна на 8). Последното е еквивалентно на

$$(s + 3t)^2 - 8t^2 = 2^{2A}.$$

Сега от модул 8 виждаме, че $(s + 3t)^2$ се дели на 8, значи $s + 3t$ се дели на 4, т.е. $(s + 3t)^2$ се дели на 16. Но тогава $8t^2$ трябва да се дели на 16, което е невъзможно за нечетно t , противоречие. Следователно $k = 1$ не е възможно.

За пример с $k = 2$ да забележим първо че

$$36 = [1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2] + [3^2 + 6 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2]$$

и сега умножение по $(6^{2023})^2$ води до

$$\begin{aligned} 36^{2024} &= [(6^{2023})^2 + 6 \cdot 6^{2023} \cdot 6^{2023} + (6^{2023})^2] + \\ &+ [(3 \cdot 6^{2023})^2 + 6 \cdot (3 \cdot 6^{2023}) \cdot 6^{2023} + (6^{2023})^2] \end{aligned}$$

т.е. 36^{2024} е сбор на числата $a_1^2 + 6a_1b_1 + b_1^2$ и $a_2^2 + 6a_2b_2 + b_2^2$, където $a_1 = b_1 = b_2 = 6^{2023}$ и $a_2 = 3 \cdot 6^{2023}$.

9.1. Има 8 решения за (x, y) : $(1/2, 2 + \sqrt{3})$, $(1/2, 2 - \sqrt{3})$, $(2, 2 + \sqrt{3})$, $(2, 2 - \sqrt{3})$, $(2 - \sqrt{3}, 1/2)$, $(2 + \sqrt{3}, 1/2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2)$, $(2 - \sqrt{3}, 2)$.

9.2. Първо, за просто число $p > 3$ имаме че $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ от където $p^4 \equiv 1 \pmod{3}$ и $p^4 - q^4$ се дели на 3 за прости числа по-големи от 3.

Също така $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$ по малката теорема на Ферма (или по теорема на Ойлер, или просто чрез директно изчерпване), следователно $p^4 - q^4$ се дели на 5 за прости числа по-големи от 5.

Сега $p^4 - q^4 = (p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$. Ако p и q са нечетни прости числа с различни остатъци по модул 4, то $p + q$ се дели на 4, а останалите две числа

са четни и произведението се дели на 16. Ако са нечетни прости числа с еднакви остатъци по модул 4, то $p - q$ се дели на 4, а останалите две числа са четни и произведението се дели на 16. Ако $q = 2$ произведението не се дели на 16.

Получаваме, че за да бъде изпълнено условието на задачата трябва $q \leq 5$. Остава да проверим кой от трите максимума за фиксирано q : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{7}$ е най-голям. Отговор: $\frac{5}{7}$.

9.3. Нека BB_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ и B_1 лежи на AC . Знаем че $BB_1^2 = AB \cdot AC - AB_1 \cdot B_1C$. Имаме също $CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{ab}{2b} = \frac{a}{2}$ и аналогично $AB_1 = \frac{c}{2}$. Така получаваме, че

$$BB_1 = \sqrt{ac - \frac{ac}{4}} = \frac{\sqrt{3ac}}{2}.$$

От свойствата на ъглополовящата за $\triangle CBB_1$ имаме $\frac{B_1J}{JB} = \frac{B_1C}{CB} = 1:2$ и значи $3B_1J = BB_1$.

Нека BB_1 пресича описаната окръжност в точка J' . Тогава от свойствата на хордите имаме $AB_1 \cdot B_1C = J'B_1 \cdot B_1B$, или

$$\frac{ac}{4} = \frac{\sqrt{3ab}}{2} \cdot J'B_1.$$

От тук $J'B_1 = \frac{\sqrt{3ab}}{6} = \frac{1}{3}BB_1$. Но тогава $B_1J = B_1J'$ и следователно $JJ' = BJ$, но J е среда на хорда и значи $OJ \perp BJ$.

9.4. Първо ще докажем, че максималният брой отсечки в един цвят, такива, че всяка от тях пресича не повече от една от останалите е 23.

Нека P е броят на отсечките, които не пресичат нито една от отсечките, и нека Q е броят на отсечките, които пресичат точно една от останалите. Тогава $P + \frac{Q}{2}$ не надвишава броя на отсечките в някоя триангулация на точките, който е винаги $\frac{9 \cdot 3 - 11}{2} + 11 = 19$, тъй като всяка триангулация в 11-ъгълника е съставена от 9 триъгълника и всяка отсечка, която не е по изпъкналата обвивка, участва в 2 триъгълника. Оттук

$$P + Q = P + \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} \leq 19 + \frac{Q}{2},$$

което достига най-голяма стойност когато Q е възможно най-голямо.

Всяка двойка пресичащи се отсечки, образува изпъкнал четириъгълник, който не се пресича от никоя от останалите отсечки (в противен случай някоя от двете отсечки, които са диагонали в четириъгълника, ще се пресича с поне две други). Такъв четириъгълник ще наричаме *независим*. Сумата от ъглите на 11-ъгълника е $(11 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ + 4 \cdot 360^\circ$, т.е. броят на независимите четириъгълници е не повече от 4. Откъдето и $Q \leq 4$. Така броят на отсечките в 11-ъгълника, такива, че всяка от тях пресича не повече от една от останалите, е $19 + 4 = 23$.

Оттук максималният брой отсечки от един от цветовете, които са във вътрешността на многоъгълника, е $23 - 11 = 12$. Общият брой на отсечките в двата цвята не надвишава $2 \cdot 12 + 11 = 35$.

Построяването на съответния пример оставяме на читателя.

Забележка. Обобщение на твърдението може да видите в поста *Bulgarian Winter Competition, 2024. Problem 9.4.* от блога на Драгомир Грозев, *A Point of View*.

10.1. Тъй като $2A_n = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + (2n - 3) \cdot 2^n + (2n - 1) \cdot 2^{n+1}$, то

$$\begin{aligned} A_n &= 2A_n - A_n = (2n - 1) \cdot 2^{n+1} - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + \dots + 2 \cdot 2^n) \\ &= (2n - 1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot (2 + 4 + 8 + \dots + 2^n) + 1 \cdot 2 \\ &= (2n - 1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2 = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} + 6. \end{aligned}$$

Следователно $A_{2024} = 4045 \cdot 2^{2025} + 6$.

10.2. Нека $d = (x, y)$ е най-големият общ делител на числата x и y . Тогава, $x = dx_1$, $y = dy_1$, където x_1, y_1 са естествени и взаимнопрости. Изразът в условието се преработва до

$$A(x, y) = \frac{d^{k-1}}{x_1^2 + y_1^2} x_1^k y_1 = p,$$

където искаме p да е просто. Но

$$\left(x_1^k, x_1^2 + y_1^2 \right) = \left(x_1^{\min(k, 2)}, y_1^2 \right) = 1 = (x_1^2, y_1) = (y_1, x_1^2 + y_1^2),$$

т.е., $x_1^k y_1$ е взаимнопросто с $x_1^2 + y_1^2$ и за да бъде p цяло, е необходимо $x_1^2 + y_1^2 \mid d^{k-1}$.

Тъй като $x_1^2 + y_1^2 \geq 2$, то $k \geq 2$. Освен това, ако $x_1 > 1$, то съществува негов прост делител q и $q^k \mid p$, което е противоречие с простотата на p . Следователно, за да бъде p просто цяло число е необходимо да сме в един от следните два сценария: едновременно да са изпълнени

$$1) \ x_1 = 1, \ y_1 = p \text{ и } x_1^2 + y_1^2 = d^{k-1} \text{ или } 2) \ x_1 = 1, \ y_1 = 1 \text{ и } p \cdot (x_1^2 + y_1^2) = d^{k-1}.$$

Лема. Нека G е свързан граф с поне 3 върха. Тогава или съществуват два върха, свързани с ребро, премахването на които (заедно с ребрата, излизащи от тях), оставя G свързан, или съществуват два върха от степен 1 (т.е., “листа”).

Доказателство. Да разгледаме произволно “покриващо дърво” на G и да вземем за негов “корен” произволен връх, който не е “листо”. Нека v е най-отдалеченият връх от “корена”, а u е “предшественикът” му. Нека $v_1, v_2, \dots, v_k$ са “наследниците” на u . Ясно е, че те всички са листа в дървото.

Първи случай. Измежду $v_1, v_2, \dots, v_k$ има два върха, свързани с ребро в G . Тогава премахването на тези два върха оставя дървото (а значи и G) свързано.

Втори случай. Измежду $v_1, v_2, \dots, v_k$ има два върха, които са листа в G . Тогава в изходния граф наистина има поне две листа.

Трети случай. Измежду $v_1, v_2, \dots, v_k$ има не повече от един връх, който е листо в G (б.о.о., нека това е v_1). Тогава да “свържем” всеки от $v_2, \dots, v_k$ с произволен връх в G , различен от u (такива върхове има, като никое от тези “свързващи” ребра не е част от покриващото дърво, поради екстремалния избор на u , т.е., всяко от тях е част от цикъл, всички останали ребра на който са от покриващото дърво). Сега можем да премахнем u и v_1 и отново ще имаме покриващо дърво, а значи G остава свързан.

С това лемата е доказана.

Твърдение. Нека G е свързан граф с $n \geq 2$ върха. Тогава можем да оцветим върховете му в два цвята, така че ако x и y са съответно броя на “разноцветните” и “едноцветните” ребра, то $x - y \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Доказателство. При $n = 2, 3$ твърдението се проверява непосредствено. Нека $n \geq 4$ и G е свързан граф с n върха. Нека u и v са двата върха от Лемата. “Премахваме” u и v и оцветяваме $G \setminus \{u, v\}$ съгласно индукционната хипотеза. Сега не е трудно да се съобрази, че можем да оцветим $u \cup v$ така, че разглежданата разлика да се увеличи поне с 1. Наистина, това е ясно, ако u и v са листа, а в противен случай, разглеждайки четността на броя съседи на $u \cup v$ в $G \setminus \{u, v\}$, виждаме че винаги има такъв начин. Твърдението е доказано по индукция.

Нека сега разгледаме произволен свързан граф G с $n \geq 3$ върха и m ребра. “Оцветяваме” го съгласно твърдението: имаме $x - y \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$; $x + y = m$, следователно

$$y \leq \frac{1}{2} \cdot \left(m - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

и изтриването на y ребра удовлетворява условието. Така получихме $k \leq \frac{1}{2}$.

За да покажем, че $k \geq \frac{1}{2}$, нека разгледаме пълния граф с n върха.

Необходимо и достатъчно условие, за да имаме оцветяването от условието е, полученият след изтриването на ребрата граф да е двуделен. Наистина, в графа не трябва да има цикли с нечетна дължина, което е еквивалентно на горното.

Първи случай. $n = 2n_1$, $n_1 \geq 2$. Тогава $m = \binom{n}{2}$. За достигане до двуделен граф, трябва да изтрием всички ребра във всяка от двете групи върхове, като броят изтрети ребра е минимален, когато двете групи са равномошни и съдържат по n_1 върха. Така, трябва да изтрием поне

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_1}{2} = n_1^2 - n_1$$

ребра. Оттук

$$n_1^2 - n_1 \leq k \cdot \left(\binom{2n_1}{2} - \left\lfloor \frac{2n_1}{2} \right\rfloor \right) = k \cdot \left(\frac{2n_1(2n_1 - 1)}{2} - n_1 \right) \implies k \geq \frac{1}{2}.$$

Втори случай. $n = 2n_1 + 1$, $n_1 \geq 1$. Аналогично, тук трябва да изтрием поне

$$\binom{n_1 + 1}{2} + \binom{n_1}{2} = n_1^2$$

ребра и отново

$$n_1^2 \leq k \cdot \left(\binom{2n_1 + 1}{2} - \left\lfloor \frac{2n_1 + 1}{2} \right\rfloor \right) = k \cdot \left(\frac{2n_1(2n_1 + 1)}{2} - n_1 \right) \implies k \geq \frac{1}{2}.$$

11.1. $d = 1$ и $d = -\frac{4}{9}$.

11.2. Нека X и Y са пресечните точки на PR и PQ с правата през C , успоредна на AB . От подобията $\triangle CXR \sim \triangle APR$ и $\triangle CQY \sim \triangle BQP$ получаваме, че

$$\frac{CX}{AP} = \frac{CR}{RE} \quad \text{и} \quad \frac{CY}{BP} = \frac{CQ}{QB}.$$

Следователно $CX = \frac{AP \cdot CR}{RE}$ и $CY = \frac{CQ \cdot BP}{QB}$. От теоремата на Чева имаме

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

откъдето следва, че $CX = CY$. От друга страна $\triangle PXY$ е равнобедрен поради $\sphericalangle PXY = \sphericalangle APR = \sphericalangle BPQ = \sphericalangle PYC$. Тъй като PC е медиана в равнобедрения триъгълник, получаваме $CP \perp AB$.

11.3. Ще докажем, че такива числа не съществуват.

Квадратното уравнение $x^2 - qx + 1 = 0$ има два рационални корена t и $\frac{1}{t}$, за които $t + \frac{1}{t} = q$. По индукция лесно следва, че $a_m = t^m + \frac{1}{t^m}$. Да допуснем, че съществуват цели числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ удовлетворяващи условието на задачата.

Лема. Нека $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ е полином с ненулеви цели коефициенти за които $c_{n-k} = c_k$ за всяко $k = 0, 1, \dots, n$ и $\sum_{i=0}^n c_i = 0$.

Тогава $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, където $g(x)$ е полином с цели коефициенти.

Доказателство: От условието имаме, че $f(1) = 0$. Тъй като

$$f'(x) = n c_n x^{n-1} + (n-1) c_{n-1} x^{n-2} + \dots + c_1, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 2f'(1) &= (n c_n + (n-1) c_{n-1} + \dots + c_1) + (n c_0 + (n-1) c_1 + \dots + c_{n-1}) = \\ &= n(c_n + c_{n-1} + \dots + c_1 + c_0) = 0 \end{aligned}$$

и следователно $x = 1$ е двоен корен. Лемата е доказана.

Полиномът $f(x) = b_n x^{2n} + b_{n-1} x^{2n-1} + \dots + b_1 x^{n+1} + 2b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$ изпълнява условията на лемата. Не е трудно да се види, че

$$t^n \left(b_n \left(t^n + \frac{1}{t^n} \right) + b_{n-1} \left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}} \right) + \dots + 2b_0 \right) = f(t) = (t-1)^2 g(t).$$

Освен това, ако $t = \frac{r}{s}$, $(r, s) = 1$, то от $\frac{r}{s} + \frac{s}{r} = q > 3$ лесно следва, че $r \geq s + 2$, т.е. $r - s \geq 2$. Тогава $g\left(\frac{r}{s}\right)$ е число от вида $\frac{l}{s^{2n-2}}$.

Окончателно $b_0 a_0 + b_1 a_1 + \dots + b_n a_n$ се представя във вида $\frac{(r-s)^2 \cdot l}{r^n \cdot s^n}$ и понеже числото $r - s \geq 2$ и $(r-s, r) = (r-s, s) = 1$, то числителят винаги ще се дели на квадрат на просто число.

11.4. Трябва да докажем, че в пълен граф с n върха и k цвята, където индуцираният граф по всеки цвят е свързан, съществува разноцветен триъгълник. Да означим цветовете с $1, 2, 3, \dots, k$ и да преоцветим всички ребра, които са в някой от цветовете $4, 5, \dots, k$ в цвят 3. Новият граф изпълнява условието за свързаност по всеки цвят и ако за него има разноцветен триъгълник, то същия триъгълник в началния граф също ще бъде разноцветен. Следователно можем да считаме, че $k = 3$.

Да допуснем, че твърдението не е вярно за граф G , като можем да изберем G да има минимален брой върхове. От минималността на G следва,

че след премахването на произволен връх, новият граф няма да бъде свързан по някой от цветовете и нека това е цвят 1. Да означим с $G_1, G_2, \dots, G_t$ компонентите на свързаност по цвят 1 след изтриване на връх A . Тъй като G е свързан по цвят 1, то съществуват $A_i \in G_i$ за които AA_i е в цвят 1. Отсечката A_1A_2 не е в цвят 1, защото G_1 и G_2 са различни компоненти на свързаност. Нека тя е в цвят 2. Ако A_1B е отсечка с цвят 1 от G_1 , то отсечката A_2B не може да е от цвят 1, защото G_1 и G_2 са различни компоненти на свързаност; не може да е от цвят 3, защото тогава A_1A_2B е разноцветен триъгълник и следователно е от цвят 2. Аналогично се доказва, че всички отсечки между точките от G_1 и G_2 са от цвят 2. Получихме, че всички отсечки между всеки две компоненти на свързаност са или в цвят 2 или в цвят 3.

Сега да разгледаме отсечки AX и AY съответно в цвят 2 и 3 (такива отсечки има, тъй като G е свързан по всеки от цветовете). Без ограничение имаме следните два случая:

1. $X, Y \in G_1$, като тогава единият от триъгълниците AXA_2 и AYA_2 е разноцветен.
2. $X \in G_1$ и $Y \in G_2$, като тогава единият от триъгълниците AXA_2 и AYA_1 е разноцветен.

Полученото противоречие показва, че за всеки граф с дадените свойства съществува разноцветен триъгълник.

12.1. $p = \frac{1}{2}$.

12.2. Нека P' е симетрична на P спрямо средата N на AB . Тогава имаме, че $AP'BP$ е успоредник, откъдето следва, че $AP'BC$ е вписан. Оттук получаваме, че $\sphericalangle AQP' = \sphericalangle ABP' = \sphericalangle BAP$. От друга страна

$$\sphericalangle AQP = \sphericalangle AQC - \sphericalangle PQC = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle AA_1B = \sphericalangle PAB,$$

където използвахме, че P лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C$ окръжност. Така получаваме, че $\sphericalangle AQP' = \sphericalangle AQP$, откъдето следва, че P, Q, P' лежат на една права, т.е. $N \in PQ$. Също имаме, че $\triangle AQB \sim \triangle B_1QA_1$, което означава, че $\sphericalangle NQB = \sphericalangle MQA_1$ като съответни елементи. Последното е еквивалентно на $\sphericalangle PQB = \sphericalangle MQA_1$, откъдето следва, че $\sphericalangle PQM = \sphericalangle BQA_1$.

12.3. Нека $0 < p < q < 1$. Да забележим, че $p^* = \frac{q-p}{1-p} \in (0, 1)$. Конструираме множествата X и Y по следния начин: За всеки елемент $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ слагаме i в X с вероятност p (независимо едно от друго), а за всеки елемент $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus X$ поставяме j в Y с вероятност p^* . Тогава $\mathbb{P}(x \in X \cup Y) = p + (1-p)p^* = q$. Лесно се вижда, че $f(p) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{A})$, а $f(q) = \mathbb{P}(X \cup Y \in \mathcal{A})$, но тъй като $\mathcal{A}$ има свойството от условието имаме, че $X \subseteq X \cup Y \Rightarrow f(p) < f(q)$.

12.4. Лема. Нека p е просто число, а $a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогава съществуват $x, y, z \in \mathbb{Z}$ такива, че $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ и $ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}$.

Доказателство. Да разгледаме множеството

$$M := \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt[3]{p} \rfloor\}\}.$$

Имаме, че $|M| > p$, т.е. в M има два различни елемента (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , за които $ax_1 + by_1 + cz_1 \equiv ax_2 + by_2 + cz_2 \pmod{p}$. Така $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ изпълнява условията от лемата.

Нека сега $p \equiv 2 \pmod{3}$. Тогава сравнението $x^3 \equiv 2 \pmod{p}$ има решение a , тъй като функцията $x \mapsto x^3$ е инективна в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, откъдето следва, че е сюрективна. Един начин да се провери това е да се види, че $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ има само 1 за решение, тъй като $(3, p-1) = 1$ и следователно показателят на $x \pmod{p}$ е 1.

От лемата съществуват x, y, z с $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}$, за които $x + ay + a^2z \equiv 0 \pmod{p}$. Оттук получаваме, че $x^3 + a^3y^3 + a^6z^3 - 3a^3xyz \equiv 0 \pmod{p}$. Последното е еквивалентно на $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \equiv 0 \pmod{p}$. От друга страна $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}$ дава $|x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz| < 13p$. Също така да забележим, че ако $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz < 0$, то тройката $(-x, -y, -z)$ ще даде естествено число, делящо се на p .

Остана да отбележим, че $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \neq 0$. Наистина, ако $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$, то имаме

$$(x + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}z)((x - \sqrt[3]{2}y)^2 + (x - \sqrt[3]{4}z)^2 + (\sqrt[3]{2}y - \sqrt[3]{4}z)^2) = 0,$$

т.е. $x = \sqrt[3]{2}y = \sqrt[3]{4}z$ или $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = 0$, чиито единствени решения в цели числа са $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (първото следва, защото $\sqrt[3]{2}$ е ирационално, а второто следва от факта, че $x^3 - 2$ е минималният полином на $\sqrt[3]{2}$ над рационалните числа).

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1, 10.1 – Недялка Димитрова; 9.2 – Константин Делчев; 9.3 – Ангел Гушев; 9.4 – Младен Вълков; 10.2 – Константин Делчев и Станислав Харизанов; 10.3 – Стоян Боев; 10.4, 11.3 – Александър Иванов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 – Кристиан Василев.

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ, 2024

ДРАГОМИР ГРОЗЕВ

Увод

Ще разгледаме задача 12.2 от Областния кръг на олимпиадата по математика 2024. Всички задачи от този кръг и решенията им може да намерите в брошурата за състезанието. И така, защо задача 12.2? Това е една приятна задача, но в нея няма никакви хитри идеи, все пак е втора задача. И двете официални решения използват индукция. Тук ще използваме малко по-различен подход, но не това е причината за статията. Оказва се, че така дефинираната рекурентна редица има доста по-различно поведение от интуитивно очакваното. Ето самото условие.

Задача 12.2

Дадено е естествено число N . Нека x_n е редица от неотрицателни реални числа такава, че

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x_i x_{n-i}}$$

за всяко $n > N$. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$, за която $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. (Кристиян Василев)

Решение. Да предположим, че знаем само рекурентната формула и искаме да оценим какво е поведението на x_n , как се изменя, когато n расте. Първо може да забележим, че x_n расте неограничено. Грубо казано, ако сложим константа в дясна част на рекурентната зависимост, виждаме, че x_n^2 ще стане много голямо. Ако вместо x_n сложим нещо като $c \cdot n^2$, то дясната страна ще има порядък $c \cdot n^3$, а порядъкът на лявата страна (x_n^2) ще бъде n^4 . Ето защо подозираме, че x_n расте като линейна функция.

Като приложим неравенството между средното аритметично и геометрично (СА-СГ) за всеки член на дясната страна, получаваме

$$\sqrt{x_i x_{n-i}} \leq \frac{x_i + x_{n-i}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

и като съберем тези неравенства се получава

$$x_n^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \forall n > N.$$

Нека положим $x_n = a \cdot n + \Delta(n)$, където a е константа, която ще определим по-късно. Искаме така да подберем a , че $\Delta(n)$ да има по-малък порядък на нарастване от n . Като заместим, за $n > N$ получаваме

$$(1) \quad a^2 n^2 + 2an\Delta(n) + \Delta(n)^2 \leq \frac{a(n-1)n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i)$$

$$2an\Delta(n) \leq \left(\frac{a(n-1)n}{2} - a^2 n^2 \right) - \Delta(n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i).$$

Идеята е да разделим двете страни на (1) на n и да определим a , така че в израза в скобите от дясната страна на (1) да не участва n^2 . Вижда се, че това става при $a = \frac{1}{2}$. Като заместим в (1), се получава

$$\Delta(n) \leq -\frac{1}{4} - \frac{\Delta(n)^2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i).$$

Ако искаме сега просто да решим задачата и да получим 7 точки, само пишем

$$\Delta(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i), \forall n > N,$$

което дава

$$\Delta(n) \leq \max\{\Delta(i) : i < n\}$$

и от тук следва $\Delta(n) \leq \max\{\Delta(i) : i \leq N\}$ за всяко $n > N$. Следователно $x_n \leq \frac{n}{2} + c, \forall n \in \mathbb{N}$ за достатъчно голяма константа c .

Ние обаче искаме да подобрим тази оценка и продължаваме

$$\Delta(n) \leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i), n > N.$$

Нека дефинираме редицата $\Delta'(n)$ както следва: $\Delta'(n) = \Delta(n)$ за $n = 1, 2, \dots, N$ и

$$(2) \quad \Delta'(n) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta'(i), \text{ for } n > N.$$

Ясно е че $\Delta(n) \leq \Delta'(n), \forall n \in \mathbb{N}$. По-нататък имаме

$$(3) \quad \Delta'(n+1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i) + -\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i) \right), n > N.$$

Като извадим (2) от (3), получаваме

$$\Delta'(n+1) - \Delta'(n) = \frac{-1}{4(n+1)}, \forall n > N.$$

Сумирането на горните неравенства дава

$$\Delta'(n) = \Delta'(N+1) - \frac{1}{4} \sum_{k=N+2}^n \frac{1}{k}, n \geq N+2.$$

От добре известната оценка за хармоничния ред следва

$$\Delta'(n) \leq -\frac{\ln n}{4} + c,$$

където c е някаква константа. Окончателно,

$$x_n \leq \frac{n}{2} - \frac{\ln n}{4} + c, n \in \mathbb{N}$$

за някаква константа c .

Точната оценка

Основата на всички оценки по-горе е неравенството СА-СГ. То обаче дава груба оценка, когато двата множителя се различават значително. Точно такъв е нашият случай – ако x_n расте като линейна редица относно n , то x_i и x_{n-i} се различават доста, когато i не е близко до $\frac{n}{2}$. Нека се опитаме да оценим x_n , без да използваме СА-СГ.

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x_i x_{n-i}},$$

$$\left(\frac{x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{x_i}{n} \frac{x_{n-i}}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{x_i}{i} \cdot \frac{x_{n-i}}{n-i}} \sqrt{\frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n}}$$

Да означим $y_n := \frac{x_n}{n}$. Имаме

$$(4) \quad y_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{y_i y_{n-i}} \sqrt{\frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n}}.$$

Забележете, че

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}$$

е Риманова сума за

$$\int_0^1 \sqrt{x(x-1)} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

Може да се докаже, че y_n има граница, и като се използва (4) (малките индекси не играят роля, тъй като множителят $\frac{1}{n}$ ги тушира), получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} = \int_0^1 \sqrt{x(x-1)} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

Ето едно *идейно доказателство* на този факт. Нека означим

$$\ell_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}.$$

От (4) се получава

$$\ell_n \min\{y_k : k < n\} \leq y_n^2 \leq \ell_n \max\{y_k : k < n\}.$$

Ясно е че $\ell_n = \ell + o(1)$, където $\ell := \frac{\pi}{8}$, а с $o(1)$ сме означили величина, която клони към нула при $n \rightarrow \infty$. Като положим $z_n := \frac{y_n}{\ell}$, получаваме

$$(5) \quad \sqrt{\min\{z_k : k < n\}} + o(1) \leq z_n \leq \sqrt{\max\{z_k : k < n\}} + o(1).$$

От тук вече не е трудно да се установи, че $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$. Наистина, двата квадратни корена свиват лявата и дясната страна в посока към 1. Освен това, от някое място нататък значенията на $z_n = \frac{y_n}{\ell}$ за малки

индекси n оказват пренебрежимо влияние върху z_n за големи индекси n , защото рекурсивната формула (4) е един вид усредняване на предишните значения на редицата. Така че, за достатъчно големи n , ние може да изключим малките индекси на n в максимума и минимума, който се взема в двете страни на (5) и тази промяна ще има незначително влияние върху z_n . Така че, значенията на z_n ще продължават да се приближават към 1.

И така, да обобщим. Общият член на редица се представя във вида

$$x_n = \frac{\pi}{8}n + o(n),$$

където с $o(n)$ сме означили величина, която расте с по малки темпове от n , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n)}{n} = 0$.

Препратки

[1] <https://dgrozev.wordpress.com/> (**A Point of View blog**.)

РЕШЕНИЕ С ПРЕОБРАЗУВАНИЕТО НА АБЕЛ

ЛЮБОМИР ЛЮБЕНОВ

На националното зимно математическо състезание „Атанас Радев“, проведено на 27 януари 2024 г. в гр. Ямбол участниците от 10. клас решаваха следната задача.

Задача 1. Да се пресметне A_{2024} , където

$$A_n = 1.2 + 3.4 + 5.8 + \dots + (2n - 1) \cdot 2^n.$$

Решението се основава на известното тъждество на Абел:

$$\begin{aligned} & a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_{n-1}.b_{n-1} + a_n.b_n = \\ & = (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) (b_1 + b_2) + \dots + \\ & + (a_{n-1} - a_n) (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1}) + a_n (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n). \end{aligned}$$

В разглежданата задача

$$a_1 = 2.1 - 1; b_1 = 2^1; a_2 = 2.2 - 1; b_1 = 2^2; \dots; a_n = 2.n - 1; b_n = 2^n.$$

Последователно получаваме:

$$\begin{aligned} 1.2 + 3.4 + 5.8 + \dots + (2n - 1) \cdot 2^n &= 1.2^1 + 3.2^2 + 5.2^3 + \dots + (2n - 1) \cdot 2^n = \\ &= (1 - 3) \cdot 2^1 + (3 - 5) \cdot (2^1 + 2^2) + \dots + \\ &+ ((2n - 3) - (2n - 1)) \cdot (2^1 + \dots + 2^{n-1}) + (2n - 1) \cdot (2^1 + \dots + 2^n) = \\ &= -2.2^1 - 2 \cdot (2^1 + 2^2) - \dots - 2 \cdot (2^1 + \dots + 2^{n-1}) + (2n - 1) \cdot (2^1 + \dots + 2^n) = \\ &= -2 \cdot \left(2 \cdot \frac{2^1 - 1}{2 - 1} + 2 \cdot \frac{2^2 - 1}{2 - 1} + \dots + 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \right) + (2n - 1) \cdot \left(2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = \\ &= -4 \cdot (2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \dots + 2^{n-1} - 1) + 2 \cdot (2n - 1) \cdot (2^n - 1) = \\ &= -4 \cdot (-(n - 1) + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + 2 \cdot (2n - 1) (2^n - 1) = \\ &= -4 \cdot \left(-n + 1 + 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \right) + 2 \cdot (2n - 1) (2^n - 1) = \\ &= 6 - 6.2^n + 4.n.2^n. \end{aligned}$$

Вече не е трудно да пресметнем

$$A_{2024} = 6 - 6.2^{2024} + 4.2024.2^{2024}.$$

Ето и още една задача, в която можем да използваме тъждеството на Абел.

Задача 2. Пресметнете $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} & 1x^0 + 2x^1 + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \\ & = (1-2)x^0 + (2-3)(x^0 + x^1) + \dots + (n-1-n)(x^0 + x^1 + \dots + x^{n-2}) + \\ & \quad + n(x^0 + x^1 + \dots + x^{n-1}) = \\ & = -\left(1 + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x^3-1}{x-1} + \dots + \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right) + n \cdot \frac{x^n-1}{x-1} = \\ & = -\frac{1}{x-1} \cdot (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} - n + 1) + n \cdot \frac{x^n-1}{x-1} = \\ & = -\frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{x^n-x}{x-1} - n + 1\right) + n \cdot \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Забележка. Задача 2. се решава по естествен начин с производни. Ако $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^n-1}{x-1} - 1$, то

$$f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \left(\frac{x^n-1}{x-1} - 1\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 3. Пресметнете $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$.

Задача 4. Пресметнете $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + (n-1)^2x^{n-2} + n^2x^{n-1}$.

Задача 5. Пресметнете

$$\frac{0.2}{1.2} + \frac{1.2^2}{2.3} + \frac{2.2^3}{3.4} + \dots + \frac{(n-2) \cdot 2^{n-1}}{(n-1) \cdot n} + \frac{(n-1) \cdot 2^n}{n \cdot (n+1)}.$$

Задача 6. Нека числата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ образуват аритметична прогресия с разлика d , а числата $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$ образуват геометрична прогресия с частно q . Пресметнете $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + a_n \cdot b_n$.

Задача 7. Пресметнете $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3$.

Задача 8. Пресметнете $1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin 2x + \dots + (n-1) \sin (n-1)x + n \sin nx$.

Литература

ПАСКАЛЕВ, Г. и др. Учебно пособие за факултативна подготовка по математика, Издателство „Народна просвета“, София, 1986 г.

БЕНДУКИДЗЕ, А., СУЛАКВЕЛАДЗЕ, А. Вычисление сумм, сп. *Квант*, брой 9, 1970 г.

ХАРМОНИЧНИЯТ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И НЕГОВИТЕ СВОЙСТВА

НЕВЕНА СЪБЕВА, ИМИ – БАН

Хармоничен се нарича четириъгълник, който е вписан в окръжност и произведенията на срещуположните му страни са равни.

Нека $ABCD$ е хармоничен четириъгълник, вписан в окръжност k . Ще докажем пет негови основни свойства.

Свойство 1. Допирателните към k в точките A и C и правата BD или се пресичат в една точка, или са успоредни.

Първо да отбележим, че върху дъгата $\widehat{AC}$, несъдържаща точката B , съществува единствена точка D , за която $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Това е така, защото ако фиксираме точките A , B и C и движим точката D по дъгата $\widehat{AC}$ от A към C , дължината на хордата AD се увеличава, DC намалява, т.е. $\frac{AD}{DC}$ расте монотонно.

Затова е достатъчно да докажем, че ако допирателните в B и C към описаната окръжност k около триъгълника ABC се пресичат в точка E , за пресечната точка D на BE и k е изпълнено равенството $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. А то следва директно от подобията $ADE \sim BAE$ и $CDE \sim BCE$, поради които

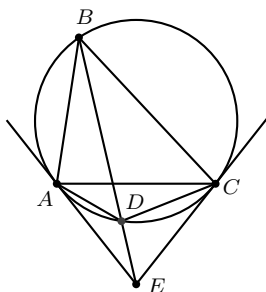
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{CE} = \frac{DC}{BC}.$$

Случаят, когато допирателните в B и C са успоредни, е тривиален, в което читателят лесно може да се убеди.

За тези, които познават свойствата на симедианата, вече е ясно какво означава свойство 1 – BD е симедиана в триъгълника ACB . Това е следващото свойство на хармоничния четириъгълник.

Свойство 2. Диагоналът BD в хармоничния четириъгълник е симедиана в триъгълниците ACB и ACD .

Като използваме свойство 1, достатъчно е да докажем, че BE е симедиана в триъгълника ABC , където E е пресечната точка на допирателните в точките A и C към описаната около ABC окръжност k . Ще разгледаме класическо доказателство на този факт.

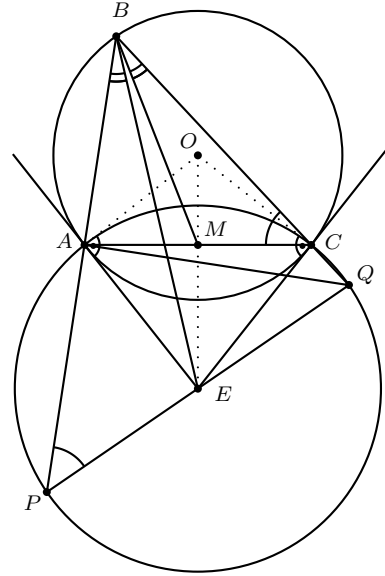


Нека O е центърът на k . Да разгледаме окръжност k^* с център E , която минава през A и C . Нека правите AB и BC пресичат за втори път k^* съответно в точките P и Q . Тъй като

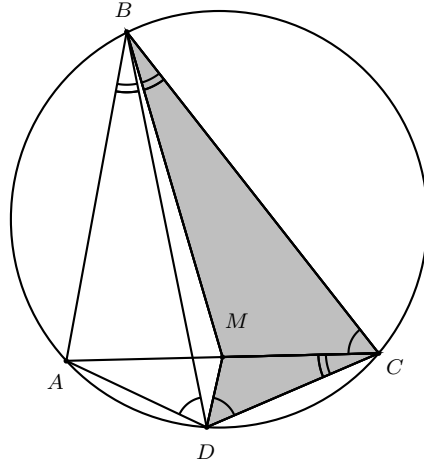
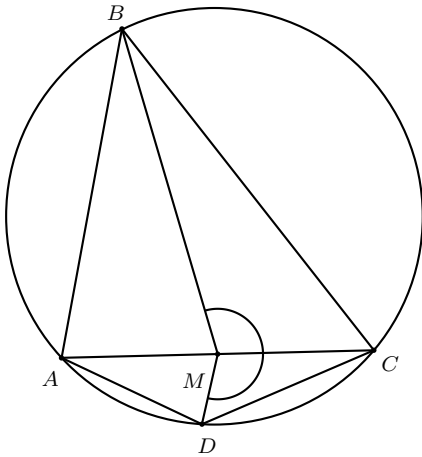
$$\begin{aligned}\angle PAQ &= \angle AQB + \angle ABQ \\ &= \frac{1}{2}\angle AEC + \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ,\end{aligned}$$

PQ е диаметър на k^* , т.е. $E \in PQ$.

Четириъгълникът $APQC$ е вписан в k^* , следователно $\angle QPA = \angle ACB$, откъдето $\triangle PQB \sim \triangle CAB$. В тези подобни триъгълници BM и BE са съответни медиани. Тогава $\angle PBE = \angle CBM$, а това означава, че BE е симедиана в триъгълника ACB .



Свойство 3. Ако M е средата на диагонала AC , то $\angle BMC = \angle DNC$.



Тъй като BD е симедиана в $\triangle ACB$, то $\angle CBM = \angle ABD = \angle ACD$. Тъй като BD е симедиана в $\triangle ACD$, то $\angle CDM = \angle ADB = \angle ACB$. От тези равенства следва подобие на триъгълниците BMC и CMD и желаното равенство на ъгли.

От доказателството на това свойство получаваме полезно следствие: диагоналят BD се вижда под един и същ ъгъл от средата M на другия диагонал и от центъра O на описаната около $ABCD$ окръжност:

$$\angle BMD = 2\angle BCD = \angle BOD \implies BOMD \text{ е вписан.}$$

Свойство 4. Ъглополовящите на ъглите при върховете B и D се пресичат върху диагонала AC .

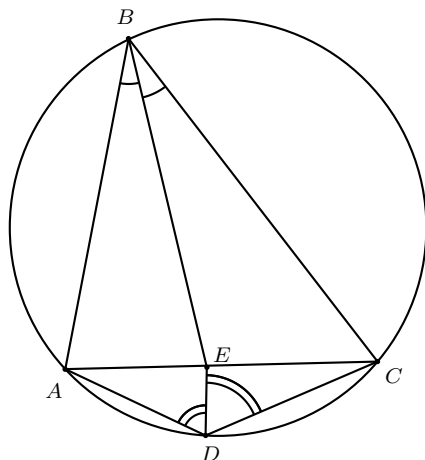
Това следва директно от свойството на ъглополовящата. Нека ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича AC в точка E . Тогава

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC},$$

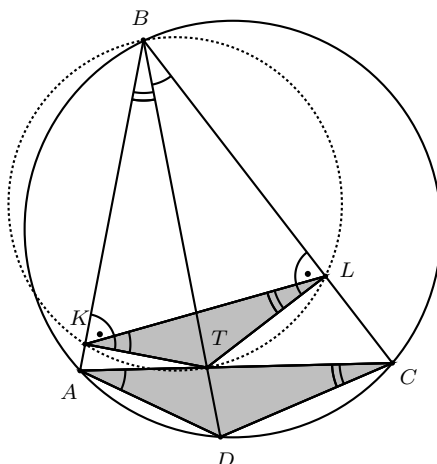
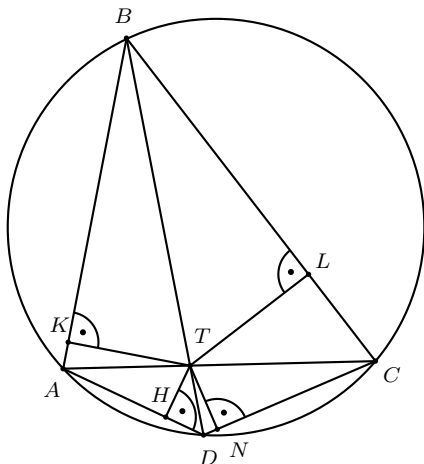
а тъй като от определението за хармоничен четириъгълник имаме $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, получаваме, че

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC},$$

което означава, че DE е ъглополовяща на $\sphericalangle ADC$.



Свойство 5. Разстоянията от пресечната точка на диагоналите до страните на четириъгълника са пропорционални на съответните дължини на тези страни.



Ако пресечната точка на диагоналите е T , при означенията на горния чертеж имаме

$$\frac{AB}{TK} = \frac{BC}{TL} = \frac{CD}{TN} = \frac{DA}{TH}.$$

Достатъчно е да докажем равенството на първите две отношения; останалите следват аналогично.

Като използваме, че четириъгълникът $KTLB$ е вписан в окръжност с

диаметър BT , получаваме

$$\sphericalangle TKL = \sphericalangle TBL = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC,$$

аналогично $\sphericalangle TLK = \sphericalangle ACD$, т.е. триъгълниците TKL и ACD са подобни. Следователно

$$\frac{TK}{TL} = \frac{AD}{DC}$$

и тъй като от определението за хармоничен четириъгълник $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, получаваме

$$\frac{TK}{TL} = \frac{AB}{BC},$$

което е еквивалентно на това, което искахме да докажем.

Сега ще разгледаме някои приложения на свойствата на хармоничния четириъгълник в състезателни задачи. Следващата задача е от Бразилската олимпиада, 2011 г.

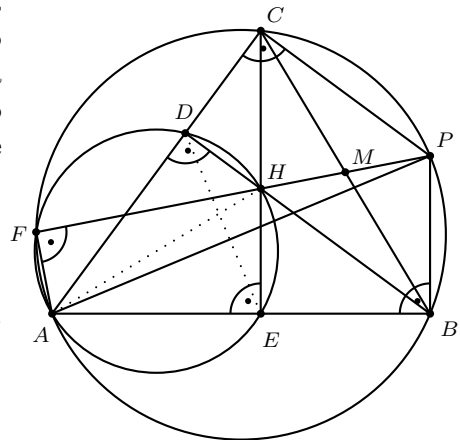
Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и описана окръжност k . Точката D е пета на височината през B , а E е пета на височината през C . Описаната около триъгълника ADE окръжност пресича k в точка $F \neq A$. Да се докаже, че ъглополовящите на $\sphericalangle BFC$ и $\sphericalangle BHC$ се пресичат върху BC .

Решение. За да открием хармоничния четириъгълник в тази класическа конфигурация с ортоцентър, е нужно да отбележим някои нейни добре известни свойства. На тях ще посветим първите два чертежа.

Описаната около триъгълника ADE окръжност k^* има диаметър AH . Следователно $\sphericalangle AFH = 90^\circ$. Това означава, че ако продължим FH до пресичането ѝ с k в точка P , AP ще е диаметър на k . Тогава

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90^\circ,$$

откъдето следва, че $BP \parallel CH$ и $CP \parallel BH$, т.е. $BHCP$ е успоредник. Получаваме, че средата M на BC е среда и на HP .



Тъй като ME е медиана към хипотенузата в правоъгълния $\triangle BEC$, то

$$\begin{aligned}\sphericalangle MAC &= \sphericalangle ECM \\ &= 90^\circ - \beta = \sphericalangle EAH,\end{aligned}$$

което означава, че ME е допирателна към k^* .

Аналогично и MD е допирателна към k^* . Следователно четириъгълникът $FDHE$ е хармоничен, т.е.

$$\frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HD}.$$

От $\triangle HED \sim \triangle HBC$ имаме, че

$$\frac{HE}{HD} = \frac{BH}{CH}.$$

Тъй като $\sphericalangle FCA = \sphericalangle FBA$ (вписани ъгли в k) и $\sphericalangle FEA = \sphericalangle FDA$ (вписани ъгли в k^*), то $\triangle FCD \sim \triangle FBE$, откъдето

$$\frac{FE}{FD} = \frac{FB}{FC}.$$

Така получаваме, че

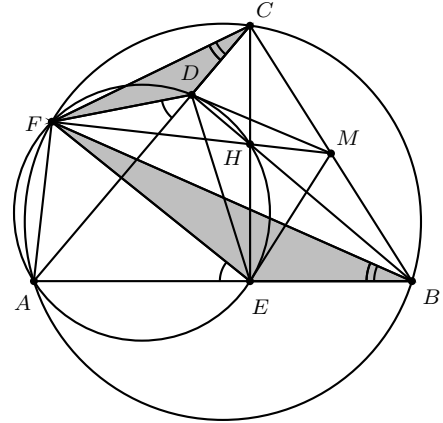
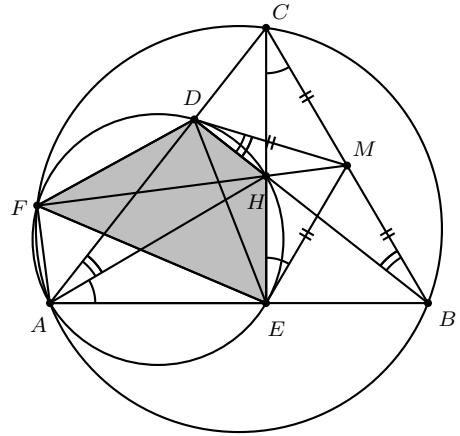
$$\frac{FB}{FC} = \frac{BH}{CH},$$

което означава, че ъглополовящите на $\sphericalangle BFC$ и $\sphericalangle BHC$ разделят отсечката BC в едно и също отношение, т.е. се пресичат върху BC .

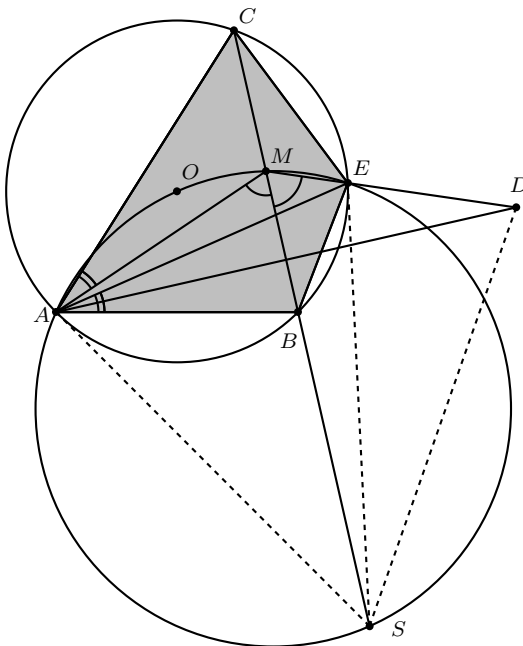
Следващата задача е от Baltic Way 2021.

Задача 2. Около триъгълника ABC е описана окръжност Γ с център O . Нека M е средата на BC . Точката D е симетрична на A спрямо BC , а E е пресечната точка на Γ и лъча MD . Ако S е центърът на описаната около триъгълника ADE окръжност, да се докаже, че точките A, E, M, O и S лежат на една окръжност.

Решение. От симетрията имаме, че $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMB = \sphericalangle EMB$. Тогава от свойство 3 следва, че $ABEC$ е хармоничен четириъгълник (защо?), а от споменатото след свойство 3 следствие – че точките A, E, M и O лежат на една окръжност k .



Така задачата се свежда само до доказателството, че центърът S на описаната около триъгълника ADE окръжност лежи на описаната около $AOME$ окръжност.



Центърът S лежи на симетралата на AD , която е правата BC . За централния ъгъл $\sphericalangle ASE$ в k_{ADE} имаме $\sphericalangle ASE = 2\sphericalangle ADE$. По-нататък от равнобедрения $\triangle ADM$ изразяваме

$$2\sphericalangle ADE = 2\sphericalangle ADM = 180^\circ - \sphericalangle AMD = 180^\circ - \sphericalangle AME,$$

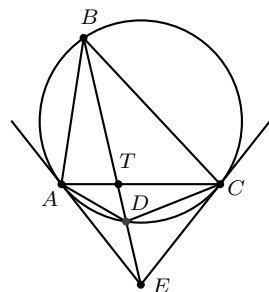
т.е. $\sphericalangle ASE = 180^\circ - \sphericalangle AME$ и S също лежи на описаната около триъгълника AME окръжност k .

Накрая да завършим с отговора на един въпрос, който възниква в самото начало – защо четириъгълникът с посочените свойства се нарича хармоничен?

В разгледаната конфигурация, пресечната точка T на диагоналите и пресечната точка E на допирателните разделят диагонала BD в едно и също отношение, т.е. образуват хармонична четворка

$$[BTDE] = -1.$$

Доказателството на този факт може да намерите в статията *Двойно отношение. Основни факти и приложение* в бр. 4/2023.



ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ

ЕМИЛ КОЛЕВ, ИМИ – БАН

В темата за 11. клас на Областния кръг на Националната олимпиада по математика тази година беше предложена следната задача.

В клетките на квадратна таблица 2025×2025 са записани числата $1, 2, 3, \dots, 2024, 2025$, всяко по 2025 пъти. Да се докаже, че в някой ред или в някой стълб на таблицата се срещат поне 45 различни числа.

Да означим броя на редовете на таблицата, в които се среща числото i , с x_i , $i = 1, 2, \dots, 2025$; а броя на стълбовете на таблицата, в които се среща числото i , с y_i , $i = 1, 2, \dots, 2025$.

Пресечните клетки на редовете, в които се среща числото i , и на стълбовете, в които се среща числото i , са $x_i y_i$ на брой. Тъй като всяко число i се среща само в някои от тези пресечни клетки, то

$$x_i y_i \geq 2025.$$

Следователно

$$x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} = 90.$$

Да означим с a_i , $i = 1, 2, \dots, 2025$, броя на различните числа в ред i , а с b_i , $i = 1, 2, \dots, 2025$ броя на различните числа в стълб i .

В сумата $\sum_{i=1}^{2025} a_i$ всяко число i дава принос x_i (то участва в x_i реда);

а в сумата $\sum_{i=1}^{2025} b_i$ всяко число i дава принос y_i . Тогава

$$\sum_{i=1}^{2025} a_i + \sum_{i=1}^{2025} b_i = \sum_{i=1}^{2025} x_i + \sum_{i=1}^{2025} y_i \geq 90 \cdot 2025.$$

От горното неравенство следва, че някое от числата a_i и/или b_i е поне 45.

Задачата по естествен начин може да се обобщи: ако в клетките на квадратна таблица $n^2 \times n^2$ са записани числата $1, 2, 3, \dots, n^2$, всяко по n^2 пъти, то в някой ред или в някой стълб на таблицата се срещат поне n различни числа.

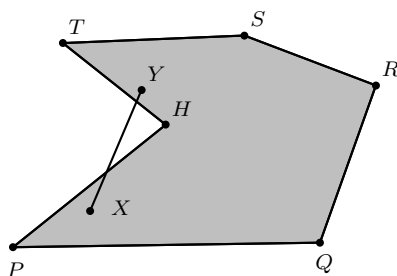
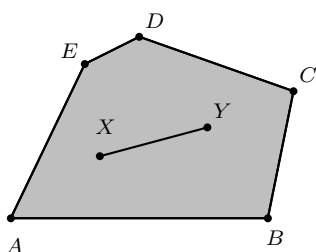


КЛАСИЧЕСКИ ИДЕИ ОТ КОМБИНАТОРНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Емил КОЛЕВ, ИМИ – БАН

Триангулация. Изпъкнала Обвивка

Един многоъгълник се нарича *изпъкнал*, ако всяка отсечка с краища вътрешни точки за многоъгълника се съдържа изцяло в него. Многоъгълник, който няма това свойство, се нарича *вдлъбнат*. На чертежа е показан изпъкнал петоъгълник $ABCDE$ и вдлъбнат шестоъгълник $PQRSTH$.



Задача 1. Даден е изпъкнал многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$. Построени са няколко непресичащи се диагонала, така че многоъгълникът е разбит на триъгълници. Да се докаже, че броят на построените диагонали е $n - 3$, а броят на получените триъгълници е $n - 2$.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по броя на върховете n .

1. При $n = 3$ имаме нула диагонала и един триъгълник, т.е. твърдението е вярно. Приемаме $n = 1$ и $n = 2$ за тривиално верни.

2. Да допуснем, че твърдението е вярно за всеки изпъкнал k -ъгълник за $k \leq n$. Това означава, че всеки k -ъгълник се разбива от $k - 3$ диагонала на $k - 2$ триъгълника.

3. Да разгледаме произволен изпъкнал $n+1$ -ъгълник $A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Да прекараме произволен диагонал, като без ограничение можем да считаме, че това е диагонала A_1A_i за някое $i = 3, 4, \dots, n$. Той разделя многоъгълника на два многоъгълника $A_1A_2 \dots A_i$ с i върха и $A_iA_{i+1} \dots A_{n+1}A_1$ с $n - i + 3$ върха.

Понеже $i \leq n$ и $n - i + 3 \leq n$ (това неравенство е еквивалентно на $i \geq 3$), то от индукционното допускане следва, че за разделянето на двата многоъгълника на триъгълници са ни необходими съответно $i-3$ и $n-i$ диагонала. При това от първия многоъгълник се получават $i-2$ триъгълника, а от втория $n-i+1$ триъгълника. Общо за разглеждания $n+1$ -ъгълник получаваме $1 + (i-3) + (n-i) = (n+1) - 3$ диагонала и $(i-2) + (n-i+1) = (n+1) - 2$ триъгълника. Това означава, че твърдението е вярно и за изпъкнал $n+1$ -ъгълник.

Всяко разбиване на многоъгълник на триъгълници с помощта на непресичащи се диагонали се нарича *триангулация на този многоъгълник*.

Задача 2. Във вътрешността на изпъкнал n -ъгълник са избрани m точки, нито една от които не лежи на диагонал и няма три точки на една права. Някои от тези $m+n$ точки (върховете на многоъгълника и отбелязаните вътрешни точки) са свързани с отсечки така, че никои две отсечки не се пресичат и вътрешността на n -ъгълника е разделена на триъгълници. Да се определи колко са триъгълниците.

Решение. Да означим търсеният брой с t . Ще пресметнем сборът от ъглите на всичките t триъгълника по два начина. Тъй като сборът от ъглите на всеки триъгълник е 180° , то този сбор е равен на $t \cdot 180^\circ$.

Да разгледаме произволен връх на многоъгълника. Ъгълът при този връх е равен на сбор от някои от ъглите на разглежданите триъгълници. Всяка вътрешна точка е връх на няколко триъгълника. Сборът от ъглите на тези триъгълници при този връх е точно 360° . Следователно сборът от ъглите на всички триъгълници е равен на сборът от ъглите на n -ъгълника и $m \cdot 360^\circ$. Тъй като сборът от ъглите на изпъкнал n -ъгълник е $(n-2)180^\circ$, то получаваме равенството

$$t \cdot 180^\circ = (n-2)180^\circ + m \cdot 360^\circ.$$

Оттук намираме $t = n + 2m - 2$.

Задача 3. Във вътрешността на изпъкнал n -ъгълник са избрани m точки, нито една от които не лежи на диагонал и няма три точки на една права. Някои от тези $m+n$ точки са свързани с отсечки така, че никои две отсечки не се пресичат и вътрешността на n -ъгълника

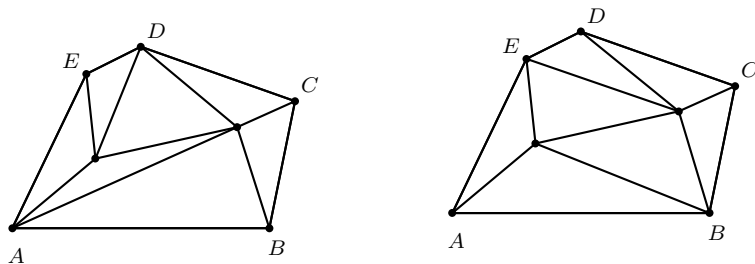
е разделена на триъгълници. Да се определи колко са прекараните отсечки (без да броим страните на n -ъгълника).

Решение. Да означим броя на прекараните отсечки с s . От предишната задача знаем, че имаме точно $n + 2m - 2$ триъгълника. Тези триъгълници имат точно $3(n + 2m - 2)$ страни. При това в сбора $3(n + 2m - 2)$ всяка страна на n -ъгълника е броена по един път (тъй като тя е страна на точно един триъгълник), докато всяка отсечка, която не е страна е броена по два пъти (тъй като тя е страна на два триъгълника). Понеже вътрешните отсечки са s , получаваме равенството

$$3(n + 2m - 2) = n + 2s,$$

откъдето намираме $s = n + 3m - 3$.

Задача 2 и Задача 3 показват, че когато разделяме вътрешността на n -ъгълник на триъгълници с помощта на непресичащи се отсечки, броят на прекараните отсечки и броят на получените триъгълници не зависи от начина на прекарване на отсечките. На чертежа са показани различни триангулации в случая $n = 5$ и $m = 2$.



Задача 2 и Задача 3 могат да бъдат обобщени като допуснем някои от избраните точки да са върху контура на n -ъгълника.

Задача 4. Във вътрешността на изпъкнал p -ъгълник са избрани q точки, някои три от които не лежат на една права, а по контура му са избрани r точки. Някои от тези $p + q + r$ точки са свързани с отсечки така, че някои две отсечки не се пресичат и вътрешността на p -ъгълника е разделена на триъгълници. Да се определи колко са прекараните отсечки и колко са получените триъгълници.

Решение. Едно възможно решение е да повторим разсъжденията от Задача 2 и Задача 3. По-лесно е да разгледаме върховете на p -ъгълника заедно с точките по контура му като върхове на $p + r$ -ъгълник. В този многоъгълник ще имаме ъгли по 180° . Сега остава

да използваме резултатите от предишните задачи за $n = p + r$ и $m = q$. Ще получим, че броят на триъгълниците е $n + 2m - 2 = p + r + 2q - 2$, а броят на диагоналите е $n + 3m - 3 = p + r + 3q - 3$.

Да разгледаме произволни n точки в равнината. Съществува единствен изпъкнал многоъгълник с върхове измежду тези точки, който съдържа всички точки във вътрешността си или по контура. Този многоъгълник се нарича *изпъкнала обвивка на дадените точки*.

Задача 5. В равнината са дадени 5 точки, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че четири от тях са върхове на изпъкнал четириъгълник.

Решение. Ако изпъкналата обвивка на тези точки е петъгълник, то всеки 4 точки образуват изпъкнал четириъгълник. Ако изпъкналата обвивка е четириъгълник, то върховете му са търсените точки. Остава да разгледаме случая, когато изпъкналата обвивка е триъгълник XYZ . Другите две точки P и Q са от вътрешността на $\triangle XYZ$. Правата PQ пресича две от страните на този триъгълник, без ограничение XY и XZ . Тогава P , Q , Y и Z са върхове на изпъкнал четириъгълник.

Задача 6. В равнината са дадени 6 точки, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че някои три от тях образуват триъгълник, единият от ъглите на който е поне 120° .

Решение. Да допуснем, че изпъкналата обвивка на точките е шестоъгълник. Тъй като сборът от шестте му ъгъла е точно $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$, то ще има ъгъл с големина поне $\frac{720}{6} = 120^\circ$.

Ако изпъкналата обвивка не е шестоъгълник, някоя от точките ще лежи във вътрешността на триъгълник с върхове измежду дадените. Нека точка X е вътрешна за триъгълник ABC . Тъй като $\sphericalangle AXB + \sphericalangle BXC + \sphericalangle CXA = 360^\circ$, то поне един от ъглите AXB , BXC и CXA е поне 120° .

Комбинаторна геометрия

Задача 1. Върху окръжност са избрани 15 точки. Да се намери броят на несамопресичащите се начупени линии, които минават през всичките 15 точки.

Решение. Да означим точките последователно с $A_1, A_2, \dots, A_{15}$. Първо ще преброим начупените линии, единият край на които е точката A_1 . Нека от A_1 начупената линия продължава към A_i , $i =$

2, 3, ..., 15. Ако $i \neq 2$ и $i \neq 15$, то начупената линия ще съдържа само точките от едната страна на хордата A_1A_i и няма да минава през всички точки. Следователно от A_1 начупената линия продължава към A_2 или A_{15} . По същия начин виждаме, че от всяка точка, без последните две, имаме точно две възможности да продължим начупената линия. От предпоследната точка има само една възможност. Следователно всички начупени линии с един край A_1 са 2^{13} . Понеже имаме 15 точки, получаваме че всички начупени линии с първа точка някоя от точките са точно $15 \cdot 2^{13}$. Остава да забележим, че всяка начупена линия е броена два пъти – по веднъж от двата си края. Това означава, че търсеният брой е точно половината от $15 \cdot 2^{13}$, т. е. $15 \cdot 2^{12}$.

Задача 2. Дадени са $2n + 1$ реални числа в интервала $(1, 2^n)$. Да се докаже, че съществуват три, които са дължини на страни на триъгълник.

Решение. Необходимо и достатъчно условие три положителни числа да са страни на триъгълник е сборът на всеки две от тях да е по-голям от третата. Когато числата са подредени по големина $x \leq y \leq z$ достатъчно е да е изпълнено $x + y > z$ (защото другите две неравенства са очевидно изпълнени). Ще докажем твърдението с индукция по n .

1. При $n = 1$ имаме три числа a, b и c в интервала $(1, 2)$. Без ограничение нека $a \leq b \leq c$. Тогава

$$a + b > 1 + 1 = 2 > c,$$

което означава, че a, b и c са страни на триъгълник.

2. Нека твърдението е вярно за някое n . Това означава, че от всеки $2n + 1$ числа в интервала $(1, 2^n)$ могат да се изберат три, които са дължини на страни на триъгълник.

3. Да разгледаме $2(n + 1) + 1 = 2n + 3$ числа в интервала $(1, 2^{n+1})$. Ако някои $2n + 1$ от тях са в интервала $(1, 2^n)$, твърдението следва от индукционното допускане. Ако в $(1, 2^n)$ има не повече от $2n$ числа, то в $[2^n, 2^{n+1})$ има поне три числа. Нека това са $a \leq b \leq c$. Имаме

$$a + b \geq 2^n + 2^n = 2^{n+1} > c,$$

което означава, че числата a, b и c са дължини на страни на триъгълник.

Задача 3. В равнината са дадени n точки, никои три от които не лежат на една права. Колко най-малко две по две неуспоредни прави съществуват през тези точки?

Решение. Ще докажем, че съществуват най-малко n две по две неуспоредни прави през тези точки. Да означим точките с $A_1, \dots, A_n$. Без ограничение можем да приемем, че $A_1 A_2 \dots A_k$, $k \leq n$, е изпъкналата обвивка на дадените точки. Тъй като всеки две от правите $A_1 A_i$ за $i = 2, 3, \dots, n$ се пресичат в точка A_1 , то между тях няма успоредни. Да забележим още, че всички точки лежат в ъгъла $A_2 A_1 A_k$, което означава, че правата $A_2 A_k$ не може да бъде успоредна на никоя от вече избраните прави. Следователно винаги можем да изберем поне n две по две неуспоредни прави.

Остава да покажем пример, при който има точно n две по две неуспоредни прави. Да разгледаме правилен n -ъгълник $B_1 B_2 \dots B_n$. Достатъчно е да докажем, че всяка права през някои две от точките е успоредна или на някоя от правите $B_1 B_i$ за $i = 2, 3, \dots, n$ или на $B_2 B_n$. Нека $B_p B_q$, $p < q$ е произволна права през някои две от дадените точки. Ако $p + q = n + 2$, правата $B_p B_q$ е успоредна на $B_2 B_n$. Ако $p + q \neq n + 2$, тя е успоредна на $B_1 B_{p+q-1}$, където индексът $p + q - 1$ се взима по модул n .

Задача 4. Върху окръжност са избрани n точки и са прекарани всички хорди с краища в тези точки. Ако никои три хорди не се пресичат в една точка, да се определи на колко части се разделя кръга от тези хорди.

Решение. Да започнем да прекарваме хордите една по една и да броим частите, на които се разделя кръга. В началото имаме само една част (целия кръг) и нямаме никакви хорди. Първата хорда разделя кръга на две части, т. е. тя добавя още една част. За втората хорда имаме две възможности:

1. Ако тя пресича първата хорда, тя увеличава броя на частите с две.
2. Ако тя не пресича първата хорда, тя добавя само една нова част.

Да забележим, че и в двата случая броят на новите части е равен на $t + 1$, където t е броят на пресечните точки на двете хорди.

Същото е вярно и за всяка от следващите хорди. Броят на добавените от тази хорда части е равен на $t + 1$, където t е броят на пресечните точки на тази хорда с вече прекараните.

Следователно след прекарване и на последната хорда броят на частите, на които е разделен кръгът, ще бъде равен на 1 (първоначалната част) плюс броя на хордите (това са единиците в събираемите $t + 1$ при прекарване на хордите) плюс броя на всички пресечни точки. Тъй като всяка хорда се определя от двата си края, то броят на

хордите е $\binom{n}{2}$.

Остава да пресметнем броя на пресечните точки. Да забележим, че всеки четири точки върху окръжността определят точно една пресечна точка на хорди (това е точно пресечната точка на диагоналите на четириъгълника, образуван от тези 4 точки). Тъй като никои три хорди не се пресичат в една точка, то пресечните точки са точно $\binom{n}{4}$. Окончателно получаваме, че отговорът на задачата е

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

Задача 5. Нека $n \geq 5$ е естествено число. Дадени са 3 пръчки, всяка от които има дължина поне n . Да се докаже, че ако общата дължина на пръчките е $\frac{n(n+1)}{2}$, те могат да се нарежат на парчета с дължини съответно $1, 2, \dots, n$.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по $n \geq 5$.

1. При $n = 5$ имаме три пръчки с обща дължина $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ и дължината на всяка пръчка е поне 5. Това е възможно само когато и трите пръчки са с дължина 5. Първата пръчка чупим на две части с дължини 1 и 4, втората пръчка чупим на 2 и 3, а третата оставаме цяла. По този начин получаваме 5 пръчки с дължини 1, 2, 3, 4, 5.

2. Да допуснем, че исканото е възможно за $n = k - 1$.

3. Да разгледаме 3 пръчки с обща дължина $\frac{k(k+1)}{2}$ и всяка с дължина поне k . Ще докажем, че те могат да се начупят на парчета с дължини $1, 2, \dots, k$. Без ограничение можем да считаме, че дължините на парчетата са $k + a$, $k + b$ и $k + c$, като $a \leq b \leq c$. Да допуснем, че $c \geq k - 1$. Можем да счупим най-дългата пръчка на две части с дължини съответно k и c . Понеже $c \geq k - 1$ оставаме с три пръчки с дължини $k + a$, $k + b$ и k , всяка от които е по-дълга от $k - 1$ и общата им дължина е

$$\frac{k(k+1)}{2} - k = \frac{(k-1)k}{2}.$$

Исканото в този случай следва от индукционното допускане.

Остава да разгледаме случая $c \leq k - 2$. Да разрежем най-дългата пръчка на две части с дължини k и c , а най-късата пръчка на две

части с дължини $k - 1$ и $a + 1$. Ако четирите парчета са с различни дължини, остава да разрежем средната по дължина пръчка на парчета с необходимите дължини, с което задачата е решена.

Да проверим кои парчета могат да имат равни дължини. Тъй като $c \leq k - 2$, то $c \neq k$ и $c \neq k - 1$. Освен това $a + 1 \leq c + 1 \leq k - 1$, което означава, че $a + 1 \neq k$. Ако $a + 1 = k - 1$ ще получим

$$k - 2 = a \leq b \leq c \leq k - 2,$$

откъдето следва, че $a = b = c = k - 2$. Получихме, че трите пръчки са с равни дължини от $2k - 2$ и понеже общата им дължина е $\frac{k(k + 1)}{2}$ получаваме $12k - 12 = k(k + 1)$. Лесно се проверява, че това уравнение няма цели корени. Остава единствената възможност $c = a + 1$.

Аналогично получаваме, че ако $c \neq b + 1$ задачата има решение. Да допуснем, че $a = b = c - 1$. Тогава трите пръчки ще имат дължини $k + a$, $k + a$ и $k + a + 1$. Тъй като

$$3(k + a) + 1 = \frac{k(k + 1)}{2} \geq 15,$$

то $k + a > 4$. Сега можем да разрежем двете по-къси пръчки съответно на 1 и $k + a - 1$ и на 2 и $k + a - 2$ и поради $k + a - 2 > 2$ тези парчета са с различни дължини. Остава да разрежем най-дългата пръчка на необходимите парчета.

Задача 6. В равнината са дадени $2n$ точки, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че точките могат да бъдат разделени на n двойки така, че отсечките, свързващи точките във всяка двойка, не се пресичат.

Решение. Да разгледаме всевъзможните разделяния на дадените точки на n двойки и за всяко такова разделяне да пресметнем сбора от дължините на всички прекарани отсечки. Тъй като тези разделяния са краен брой, можем да изберем онова разделяне, при което сборът е най-малък. Ще докажем, че за това разделяне няма пресичащи се отсечки.

Да допуснем, че съществуват отсечки AB и CD , които се пресичат в точка O . Тогава вместо отсечките AB и CD да разгледаме отсечките AC и BD . От неравенството на триъгълника намираме

$$AB + CD = AO + BO + CO + DO = (AO + CO) + (BO + DO) > AC + BD.$$

Това е противоречие с минималността на сбора на всички отсечки. Следователно няма пресичащи се отсечки.

КВАДРАТИ И РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

НЕВЕНА СЪБЕВА

Ще разгледаме геометрични конфигурации с квадрати и равностранны триъгълници. Първата задача е достъпна и за шестокласници, а следващите задачи са подходящо упражнение за ученици от 8. и 7. клас (с уговорката, че седмокласниците могат да ги решат чрез изразяване на ъгли в равнобедрени триъгълници, вместо да използват описани окръжности).

Задача 1. На чертежа $ABCD$, $CEFG$ и $DHIJ$ са квадрати и точките J , D , C и E лежат на една права.

Да се докаже, че $S_{AFJ} = S_{BEI}$.

Решение. Да означим с l правата, на която лежат точките J , D , C и E , а с a , b и c страните съответно на квадратите $ABCD$, $CEFG$ и $DHIJ$. От равенството $\angle DCA = \angle FCE = 45^\circ$ следва, че точките A , C и F лежат на една права.

Освен това, тъй като $\angle IHD = \angle ACD = 45^\circ$, то $IH \parallel AC$, т.е. $IH \parallel AF$. Да означим с h разстоянието от точките J и H до правата AF . Тогава

$$S_{AFJ} = S_{AFH} = \frac{AF \cdot h}{2}.$$

По същия начин, точките A , D и H лежат на една права, перпендикулярна на l и тъй като $EF \perp l$, то $AH \parallel EF$, откъдето следва, че

$$S_{AFH} = S_{AEH}.$$

От друга страна, в триъгълника AEH отсечката ED е височина към страната AH и

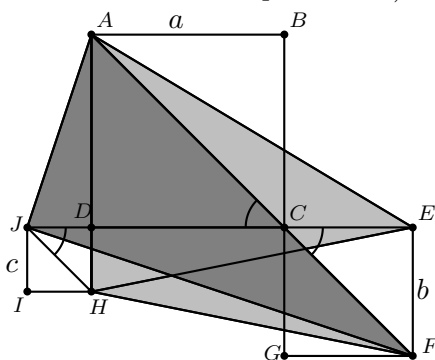
$$S_{AEH} = \frac{AH \cdot DE}{2} = \frac{(a+c)(a+b)}{2}.$$

$$\text{Следователно } S_{AFJ} = S_{AFH} = S_{AEH} = \frac{(a+c)(a+b)}{2}.$$

По аналогичен начин получаваме, че

$$S_{BEI} = S_{BGI} = S_{BGJ} = \frac{BG \cdot JC}{2} = \frac{(a+b)(a+c)}{2},$$

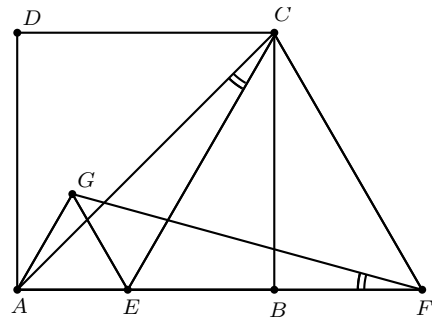
откъдето следва, че триъгълниците AFJ и BEI са равнолицеви.



Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$. Точките E и F от правата AB на чертежа са такива, че триъгълникът EFC е равностранен. Построен е равностранният триъгълник AEG .

Да се намери $\sphericalangle AFG$.

Решение. С конфигурацията на два равностранни триъгълника с общ връх е свързана класическа задача за



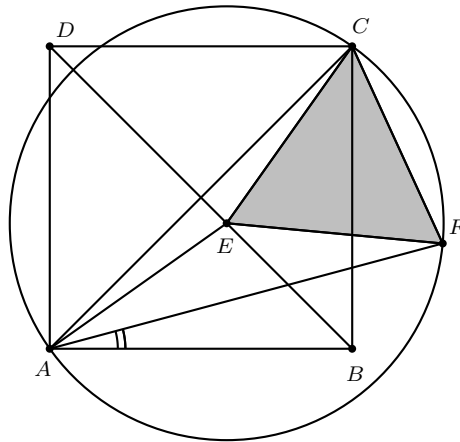
7. клас: триъгълниците FEG и AEC са еднакви (по първи признак). Така допълнителното построение – диагонален AC , се появява съвсем естествено.

От еднаквостта следва, че

$$\sphericalangle AFG = \sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ECB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Задача 3. Даден е квадрат $ABCD$. Точка E лежи на диагонала BD и триъгълникът EFC е равностранен (виж чертежа).

Да се намери $\sphericalangle BAF$.



Решение. Точката E лежи на диагонала BD на квадрата, който е симетрала на диагонала AC . Следователно $EA = EC$. Тъй като $FE = EC$, получихме, че E е центърът на описаната около триъгълника ACF окръжност. Тъй като $\sphericalangle CAF$ и $\sphericalangle CEF$ са съответно вписан и централен ъгъл за тази окръжност, получаваме

$$\sphericalangle CAF = \frac{1}{2} \sphericalangle CEF = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

и тогава

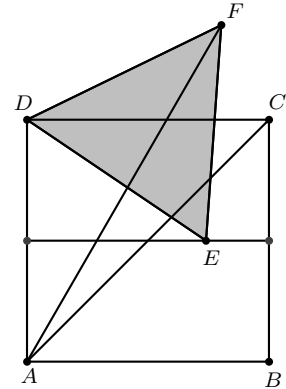
$$\angle BAF = \angle BAC - \angle CAF = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Така всъщност доказахме, че когато точката E се движи по диагонала BD , върхът F на равностранния триъгълник CEF се движи по права, която сключва ъгъл 15° с AB .

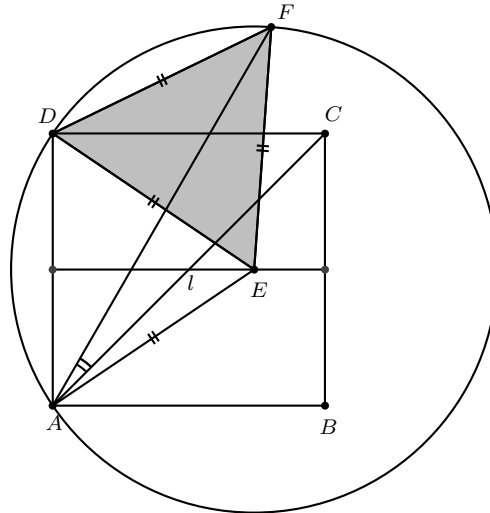
Задача 4. Даден е квадрат $ABCD$. Точка E лежи на правата l през средите на страните AD и BC и триъгълникът EFC е равностранен (виж чертежа).

Да се намери $\angle CAF$.

Решение. Правата l е симетрала на страната AD и следователно $EA = ED$. Тъй като $ED = EF$, получаваме, че E е центърът на описаната около триъгълника ADF окръжност.



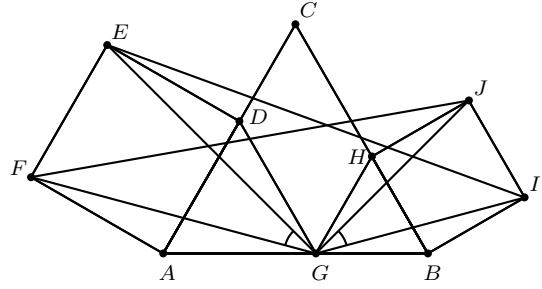
Тъй като $\angle DAF$ и $\angle DEF$ са съответно вписан и централен ъгъл за тази окръжност, получаваме $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle DEF = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ и тогава $\angle CAF = \angle DAC - \angle DAF = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.



Така всъщност доказахме, че когато точката E се движи по правата l , върхът F на равностранния триъгълник DEF се движи по права, която сключва ъгъл 15° с AC .

Задача 5. На страните на равностранния триъгълник ABC са построени външно квадратите $ADEF$ и $BIJH$, както е показано на чертежа.

Ако $BH + AD = AB$, докажете, че $EI = FG$.



Решение. Построяваме точка $G \in AB$ така, че $AD = AG$ и $GB = BH$. Квадратът $ADEF$ и равностранният триъгълник AGD образуват известна конфигурация, за която лесно се доказва, че $EG = FG$ и $\angle FGE = 30^\circ$.

По същия начин, от квадрата $BIJH$ и равностранния триъгълник BHG получаваме $GI = GJ$ и $\angle IGJ = 30^\circ$.

Тогава при ротация с център G на ъгъл 30° точката F се изобразява в E , а J – в I ; следователно отсечката FJ се изобразява в EI , откъдето следва желаното равенство.

И накрая една задача, която се решава с допълнително построени равностранни триъгълници, от Полската олимпиада тази година.

Задача 6. Даден е четириъгълник $ABCD$ с $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$. Точката E от отсечката AD е такава, че $AE \cdot BC = AB \cdot DE$ и точката F от отсечката BC е такава, че $BF \cdot CD = AD \cdot CF$. Да се докаже, че BE и DF са успоредни.

Решение. От условието следва, че ако построим равностранните триъгълници BMC и ADN , то N лежи на правата CD и M лежи на AB .

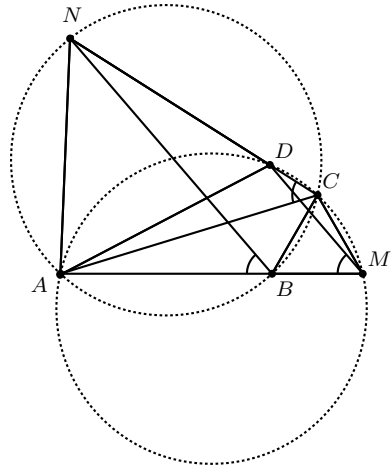
Четириъгълникът $AMCD$ е вписан и получаваме $\angle AMD = \angle ACD$. По същия начин, $ABCN$ е вписан и отук $\angle ABN = \angle ACN$. Следователно $\angle AMD = \angle ABN$, което означава, че $BN \parallel DM$ (1).

От условието по теоремата на Талес имаме

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BM} \Rightarrow DM \parallel BE \quad (2);$$

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AD}{CD} = \frac{ND}{CD} \Rightarrow DF \parallel BN \quad (3).$$

От (1), (2) и (3) получаваме, че $DF \parallel BE$.



ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ТОЧЕН КВАДРАТ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“

МАКСИМ ДИМИТРОВ, ЧУДОМИР СТОЙЧЕВ – СТАРА ЗАГОРА



Чудомир Стойчев е ученик в 8 клас на ПГ по компютърни науки и математически анализи „Проф. Минко Балкански“, гр. Стара Загора



Максим Димитров е ученик в 8 клас на ППМГ „Гео Милев“, гр. Стара Загора

На състезанието „Иван Салабашев“, проведено на 2.12.2023 г., в състезателната тема за учениците от 8 и 9 клас бе следната задача:

Задача 1. Броят на естествените числа n , за които $2^n + 2023^n$ е точен квадрат е:

- А) 0 В) 1 Б) 2 Г) 3

След провеждане на състезанието обсъдихме задачата и намерихме алтернативно решение на посоченото от авторите.

Ето авторовото решение. Очевидно $n = 1$ е решение, тъй като $2 + 2023 = 45^2$. Да допуснем, че уравнението приема решение при

$n > 1$. Ако е четно, то

$$2^n \equiv 2023^n \equiv 1 \pmod{3}$$

и значи $2^n + 2023^n \equiv 2 \pmod{3}$, което не е квадратичен остатък.

Ако $n \geq 3$ е нечетно, то $2^n \equiv 0 \pmod{4}$, докато $2023^n \equiv 3 \pmod{4}$ и значи $2^n + 2023^n \equiv 3 \pmod{4}$, което отново не е квадратичен остатък.

Решихме да потърсим алтернативно решение и първо си припомним следните важни твърдения, които сме научили.

Първо твърдение. Цифрата на единиците на точните квадрати не е нито 2, нито 3, нито 7, нито 8.

Ето защо:

Ако последната цифра на N е	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
То последната цифра на N^2 е	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Второ твърдение. Точните квадрати имат нечетен брой естествени делители.

Ето защо:

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \Rightarrow N^2 = p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdots p_m^{2n_m} \Rightarrow$$

$$\tau(N^2) = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \cdots (2n_m + 1).$$

Тук $p_1, p_2, \dots, p_m$ са различни прости числа, а $\tau(N^2)$ е броят на всички естествени числа, които са делители на N^2 .

Трето твърдение. Точните квадрати или се делят на 4, или при делението на 8 дават остатък 1.

Ето защо:

$$a = \begin{cases} 2b, & b \in \mathbb{N} & \Rightarrow a^2 = 4b^2 \\ 2b + 1, & b \in \mathbb{N} & \Rightarrow a^2 = 4b(b + 1) + 1 = 8c + 1 \end{cases}.$$

Четвърто твърдение. Ако точният квадрат има за цифра на единиците 5, тогава цифрата на стотиците му е 2.

Ето защо. $a^2 = \overline{C5} \Rightarrow a = \overline{B5} = 10B + 5$ и тогава

$$a^2 = 100(B^2 + B) + 25 = \overline{M00} + 25 = \overline{M25}.$$

Решението на задачата от турнира „Иван Салабашев“ може да е следствие от две таблици, както следва.

Числото n не може да е четно, защото тогава последната цифра на $2^n + 2023^n$ е или 3, или 7. Това е невъзможно според първо твърдение.

Ако n е нечетно число, в таблицата са посочени последните две цифри на разглежданите събираеми и сборът им.

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
2^n	02	08	32	28	12	48	92	68	72	88	52	08
2023^n	23	67	43	47	63	27	83	07	03	87	23	67
$2^n + 2023^n$	2025	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75

При всички нечетни степенни показатели, по-големи от 1, последната цифра е 5, но предпоследната цифра е 7. Това противоречи на четвъртото твърдение.

Следователно само за $n = 1$, $2^n + 2023^n$ е точен квадрат.

Тези пресмятания, както установихме, са обемисти¹, но за радост носят краен резултат. Със същия успех, с пресмятане на последните две цифри, решавахме в занятията следната задача.

Задача 2. Да се докаже, че предпоследната цифра на всяка степен на числото 3 е четна.

Решението е свързано с наблюдение върху последните две цифри на степените на числото 3.

n	Последните две цифри на 3^n
1	03
2	09
3	27
4	81
5	43
6	29
7	87
8	61
9	83
10	49
11	47
12	41
13	69
14	07
15	21
16	63
17	89
18	67
19	01
20	03

Направените пресмятания ни изкушаваха да опитаме по същия начин да решим и задачата от турнира „Иван Салабашев“ през 2018 г.

¹Бел. ред. Пресмятанията могат да се съкратят с използване на понятието показател. В случая е важен показателят на 2023 по модул 100, както и периодичността на остатъците на степените на 2 по модул 100.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа , за които числото $32 \cdot 3^a + 1$ е точен квадрат.

Ето какво направихме.

a	Последните две цифри на 3^a	Последни цифри на $32 \cdot 3^a + 1$
1	03	97
2	09	289
3	27	65
4	81	93
5	43	77
6	29	29
7	87	85
8	61	53
9	83	57
10	49	69
11	47	05
12	41	13
13	69	09
14	07	25
15	21	73
16	63	17
17	89	49
18	67	45
19	01	33
20	03	97

В девет от случаите, когато $32 \cdot 3^a + 1$ има за цифра на единиците 3 или 7, прилагаме първото твърдение. В четири случая, когато $32 \cdot 3^a + 1$ има за последни две цифри 65, 85, 05 и 45, прилагаме четвъртото твърдение.

Остават обаче нерешени шест случая, когато последните две цифри са 89, 29, 69, 09, 25, 49.

Тук ще отбележим, че при $a = 2$ се получава решение, защото $32 \cdot 3^2 + 1 = 17^2$.

Но трябва да търсим алтернативен път за решение и той се свежда до следните разсъждения.

Ако $32 \cdot 3^a + 1$ е точен квадрат, то той ще е точен квадрат на нечетно число $2b + 1$.

Така последователно получаваме

$$32 \cdot 3^a + 1 = (2b + 1)^2 \Leftrightarrow 8 \cdot 3^a = b(b + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \begin{array}{l} b = 8 \\ b + 1 = 3^a \end{array} \right. \Leftrightarrow a = 2 \\ \left| \begin{array}{l} b + 1 = 8 \\ b = 3^a \end{array} \right. \Leftrightarrow a \in \emptyset \end{cases}$$

Списъка със задачи за точни квадрати от турнира “Иван Салабашев” допълваме със следващите.

Задача 4. (2021) Кое от следните числа може да се получи при сумиране на квадратите на две естествени числа:

А) 459

Б) 954

В) 495

Г) 549

Решение. Да означим двете числа с x и y . Тъй като, ако $x^2 + y^2$ се дели на 3, то $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ и значи 9 дели $x^2 + y^2$.

В отговор А) имаме $x_1^2 + y_1^2 = 51$, но 51 се дели на 3 и не се дели на 9, следователно няма как да е сума на два квадрата.

В отговор Б) имаме $x_1^2 + y_1^2 = 66$ и случаят е аналогичен на първия.

В отговор В) имаме $x_1^2 + y_1^2 = 55$, но 55 дава остатък 3 при деление на 4 и няма как да е сума на два квадрата.

В отговор Г) имаме $x_1^2 + y_1^2 = 61 = 25 + 36$ и задачата има решение за $x = 15$ и $y = 18$.

Задача 5. (2009) Да се намери броят на простите числа p , за които числото $5 \cdot p^n + 1$ е точен квадрат за някое естествено число n .

Решение. Нека p е просто число и $5p^n + 1 = m^2$ за някои естествени числа m и n . Тогава $(m - 1)(m + 1) = 5p^n$.

Ако p е нечетно число, то $m - 1$ и $m + 1$ са нечетни числа и значи са взаимнопрости. Следователно едно от тях е равно на 1 или 5.

Равенството $(m - 1)(m + 1) = 5p^n$ не е вярно при $m - 1 = 1$ или $m + 1 = 1$.

Ако $m - 1 = 5$, получаваме $5 \cdot 7 = 5p^n$, т.е. $p = 7$ и $n = 1$.

Ако $m + 1 = 5$, получаваме $3 \cdot 5 = 5p^n$, т.е. $p = 3$ и $n = 1$.

Ако $p = 2$, то $5 \cdot 2^4 + 1 = 9^2$, откъдето намираме, че $p = 2$ е възможно решение.

Следователно единствените прости числа с исканото свойство са 2, 3 и 7.

Задача 6. (2017) Да се намери броят на естествените числа от 1 до 1000 включително, които могат да се представят като разлика на квадратите на две неотрицателни числа.

Решение. Числата с исканото свойство имат вида $(x + y)(x - y)$. Всяко нечетно число $2n - 1$ има този вид, защото можем да изберем $x = n$, $y = n - 1$. Броят на нечетните числа от 1 до 1000 е 500.

Да предположим, че $(x + y)(x - y)$ е четно число. Тогава поне едно от числата $(x + y)$ и $(x - y)$ е четно и тъй като разликата им $(x + y) - (x - y) = 2y$ е четно число, следва че и двете числа са четни, т.е. четното число се дели на 4. Обратно, всяко естествено число от вида $4n$ може да се представи като разлика на квадрати, като вземем $x = n + 1$, $y = n - 1$. Броят на числата от 1 до 1000, които се делят на 4, е 250.

Следователно търсеният брой е $500 + 250 = 750$.

Задача 7. (2016) Да се намери броят на целите числа n за които $n^2 + 8n + 3$ е квадрат на цяло число.

Решение. Нека $n^2 + 8n + 3 = m^2$. Тогава

$$(n + 4 - m)(n + 4 + m) = 13.$$

Оттук $n + 4 - m = 1$, $n + 4 + m = 13$ или $n + 4 - m = -1$, $n + 4 + m = -13$ и получаваме, че $n = 3$, $m = 6$ или $n = -11$, $m = -6$.

Задача 8. (2011) Да се намери броят на точните квадрати, които са делители на числото $1! \cdot 2! \cdot 3! \dots 10!$.

Решение. Имаме

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \dots 10! = 2^{38} \cdot 3^{17} \cdot 5^7 \cdot 7^4.$$

Точните квадрати, които го делят, имат вида $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, където a , b , c , d са неотрицателни четни числа, които не надминават съответно 38, 17, 7, 4. Те могат да се изберат по $20 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 = 2160$ начина.

Решение. а) В обиколката на правоъгълника $ABLE$ страната на оцветените квадрати се съдържа 8 пъти. Следователно тяхната страна е равна на $AE = 208 : 8 = 26$ дм. Тогава $AB = 26 \cdot 3 = 78$ дм, т.е. 780 см.

б) Страната на най-малките квадрати на чертежа е равна на $780 : 5 = 156$ см. Страната на най-големите квадрати е равна на $IC = 780 - (260 + 156) = 364$ см. Намираме $CH = 780 - 2 \cdot 364 = 52$ см. Обиколката на правоъгълника $RICN$ е $P = 2 \cdot (364 + 52) = 832$ см.

в) Оградата е с дължина $4 \cdot 780 - 120 = 3120 - 120 = 3000$ см, т.е. 30 м. Том боядисва 18 м за 48 минути, следователно боядисва $18 : 6 = 3$ м за $48 : 6 = 8$ минути. Том може да боядиса оградата за $8 \cdot (30 : 3) = 80$ минути.

Забележка. За съжаление, подточка в) отпадна във финалния вариант на темата.

Задача 3. за 4. клас: глави и крака, уравнения и кръгове на Ойлер

На остров живеят вълшебни животни: еднорози и двурози. Всеки еднорог има един рог и две звезди на челото. Всеки двурог има два рога и една звезда на челото.

Вълшебните животни на острова имат общо 483 рога и 447 звезди на челата.

а) Намерете колко са еднорозите и колко са двурозите на този остров.

б) Всяко вълшебно животно на острова, еднорог или двурог, може да лети или да говори, а някои могат и двете. Животните, които могат и да летят, и да говорят, са 2 пъти по-малко от тези, които не могат да летят, и с 22 по-малко от тези, които не могат да говорят.

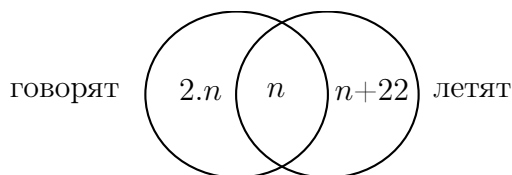
Колко вълшебни животни на острова могат да летят?

Невена Събева

Решение. а) Да означим броя на еднорозите с x и броя на двурозите с y . Общият брой на рогата е $x + 2y = 483$. Общият брой на звездите е $2x + y = 447$. Като съберем двете равенства, получаваме общо $3x + 3y = 930$, откъдето $x + y = 930 : 3 = 310$. Тогава броят на

еднорозите е $447 - 310 = 137$, а броят на двурозите е $483 - 310 = 173$.

б) Да означим с n броя на животните, които могат да летят и говорят. Тогава животните, които не могат да летят, са $2.n$. Животните, които не могат да говорят, са $n + 22$.



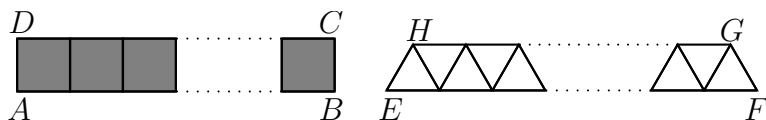
Общият брой на вълшебните животни е 310 и получаваме

$$4.n + 22 = 310, \quad 4.n = 310 - 22 = 288, \quad n = 288 : 4 = 72.$$

Животните, които могат да летят, са $72 + (72 + 22) = 166$.

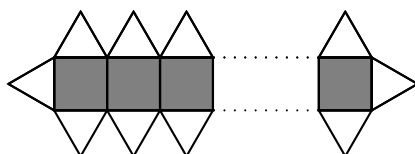
Задача 2. за 5. клас: обиколки, НОД и малко броене

На чертежа правоъгълникът $ABCD$ е сглобен от квадратни плочки и има обиколка 1188 cm, а фигурата $EFGH$ е сглобена от плочки с форма на равностранен триъгълник и има обиколка 1045 cm. И триъгълните, и квадратните плочки имат страна a cm, където a е естествено число и $a > 1$.



а) Намерете броя на квадратните плочки в правоъгълника $ABCD$ и броя на триъгълните плочки във фигурата $EFGH$.

б) Разглобили фигурите $ABCD$ и $EFGH$ и с част от плочките сглобили следната фигура:



Най-много на колко е равна обиколката на сглобената фигура?

Невена Събева

Решение. а) Периметрите на двете фигури се делят на дължината a на страната на една плочка, т.е. a е по-голям от 1 общ делител на 1045 и 1188. Тъй като $1045 = 5 \cdot 11 \cdot 19$ и $1188 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$, то $\text{НОД}(1045, 1188) = 11$, т.е. $a = 11$ см.

От обиколката на $ABCD$ намираме $AB = (1188 - 2 \cdot 11) : 2 = 583$ см. Броят на квадратите е $583 : 11 = 53$.

Тъй като $EF = HG + 11$, от обиколката на $EFGH$ намираме

$$HG = (1045 - 3 \cdot 11) : 2 = 506$$

и броят на обърнатите надолу триъгълни плочки е $506 : 11 = 46$. Броят на обърнатите нагоре триъгълни плочки е 47 и общо са 93.

б) Ако x квадратни плочки участват във фигурата, то триъгълните са $2 \cdot x + 2$. Тъй като разполагаме с 93 триъгълни плочки, то четното число $2 \cdot x + 2$ е най-много 92 и x е най-много $(92 - 2) : 2 = 45$. Това е възможно, тъй като разполагаме с 53 квадратни плочки.

Обиколката на фигурата, сглобена от 45 квадратни и 92 триъгълни плочки, е равна на

$$P = (92 \cdot 2) \cdot 11 = 2024 \text{ см.}$$

Задача 3. за 5. клас: част от число, делимост и кръгове на Ойлер

Анкетирани учениците от едно училище дали могат да плуват и дали могат да карат колело. Оказало се, че няколко ученици нито могат да плуват, нито да карат колело, $\frac{5}{7}$ от останалите могат да карат колело, а $\frac{2}{9}$ от каращите колело могат да плуват.

а) Намерете колко ученици са анкетирани, ако 280 ученици са отговорили, че не могат да плуват, а $\frac{1}{8}$ от тези, които не могат да плуват, не могат и да карат колело.

б) Намерете най-малкия възможен брой на анкетирани ученици, ако $\frac{5}{12}$ от тях могат да плуват.

Таня Стоева

Решение. Да означим с x броя на учениците, които карат колело или плуват. Последователно намираме, че:

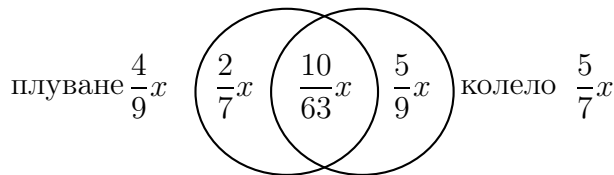
$$\frac{5}{7} \cdot x \text{ ученици карат колело,}$$

$x - \frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{7} \cdot x$ ученици не могат да карат колело, а могат да плуват,

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{7} \cdot x = \frac{10}{63} \cdot x \text{ могат да карат колело и да плуват,}$$

$$\frac{2}{7} \cdot x + \frac{10}{63} \cdot x = \frac{4}{9} \cdot x \text{ ученици могат да плуват,}$$

$x - \frac{4}{9} \cdot x = \frac{5}{9} \cdot x$ ученици могат да карат колело, но не могат да плуват.



а) Тъй като $\frac{1}{8} \cdot 280 = 35$ ученици нито могат да плуват, нито да карат колело, то $280 - 35 = 245$ ученици могат да карат колело, но не могат да плуват. Следователно

$$\frac{5}{9} \cdot x = 245, \quad x = 245 \cdot \frac{9}{5} = 441.$$

Анкетираните ученици са $441 + 35 = 476$.

б) Учениците, които могат да плуват, са $\frac{4}{9} \cdot x$ и са $\frac{5}{12}$ от анкетираните ученици. Следователно анкетираните ученици са

$$\frac{4}{9} \cdot x : \frac{5}{12} = \frac{4}{9} \cdot x \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{15} \cdot x.$$

Броят на анкетираните ученици е естествено число, следователно 15 дели x . Броят $\frac{10}{63} \cdot x$ на учениците, които плуват и карат колело, също е естествено число, следователно 63 дели x .

Най-малкото възможно число x е $\text{НОК}(63, 15) = 315$. Следователно най-малкият възможен брой на анкетираните ученици е $\frac{16}{15} \cdot 315 = 336$.

Задача 2. за 6. клас: координатна система, лица и много въображение

В правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 mm са дадени точките

$$A(-23; -22), B(46; -22), C(0; 22), D(-23; 22).$$

Да се намерят координатите на всички точки E , за които

$$S_{ABE} = \frac{3}{8}S_{ABCD} \quad \text{и} \quad S_{ADE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Да се определи вида на фигурата с върхове в намерените точки E и да се пресметне лицето ѝ.

Павлина Парушева

Решение. Точките A и B (а също C и D) имат равни ординати, следователно AB и CD са успоредни на абсцисната ос. Тогава $AB = 46 - (-23) = 69$ mm, $CD = 23$ mm. Точките A и D имат равни абсциси, следователно AD е успоредна на ординатната ос и $AD = 22 - (-22) = 44$ mm. Следователно $ABCD$ е правоъгълен трапец и

$$S_{ABCD} = \frac{(69 + 23) \cdot 44}{2} = 2024 \text{ mm}^2.$$

Нека EH_1 е височина в $\triangle ADE$. От $S_{ADE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ намираме

$$\frac{AD \cdot EH_1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2024, \quad \frac{44 \cdot EH_1}{2} = 506, \quad EH_1 = 23 \text{ mm}.$$

Тъй като AD е успоредна на Oy и абсцисата на точката E е $-23 + 23 = 0$ или $-23 - 23 = -46$.

Нека EH_2 е височина в $\triangle ABE$. От $S_{ABE} = \frac{3}{8}S_{ABCD}$ намираме

$$\frac{AB \cdot EH_2}{2} = \frac{3}{8} \cdot 2024, \quad \frac{69 \cdot EH_2}{2} = 759, \quad EH_2 = 22 \text{ mm}.$$

Тъй като AB е успоредна на Ox и ординатата на точката A е -22 , от $EH_2 = 22$ следва, че ордината на точката E е $-22 + 22 = 0$ или $-22 - 22 = -44$.

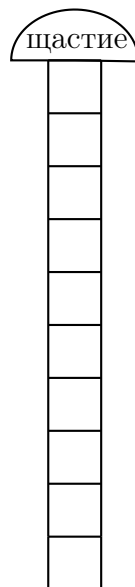
Възможните координати на точката E са $(-46; -44)$, $(0; -44)$, $(0; 0)$, $(-46; 0)$. Тези точки са върхове на правоъгълник със страни 44 mm и 46 mm и лице, равно на $S = 44 \cdot 46 = 2024 \text{ mm}^2$.

Задача 3. за 6. клас: проценти, диофантови уравнения и рекурсивно броене

3. В страната Праволандия жителите се разплащат с монети от по 1, 2, 3 и 4 дмера. Монетите имат формата на правоъгълник съответно с размери 1×1 , 2×1 , 3×1 и 4×1 .

а) Квадрат 21×21 е изцяло покрит с монети, които не се припокриват. Сред тях броят на монетите от 2 дмера е с 20% по-голям от броя на монетите от 1 дмер, а броят на монетите от 4 дмера е с 40% по-малък от броя на монетите по 3 дмера. Колко монети са използвани за покриването на квадрата?

б) Вратата на стаята на щастieto е правоъгълник с размери 1×10 . Тя се отваря, като се покрие изцяло с монети, които не се припокриват. По колко различни начина могат да се подредят монети така, че да се отвори вратата на щастieto?



Иво Кортесов

Решение. а) От условието, че монетите от 2 дмера са с 20% повече от монетите от 1 дмер следва, че броят на монетите от 1 дмер е кратен на 5; нека е $5x$, където x е естествено число. Тогава монетите от 2 дмера са $120\% \cdot 5x = 6x$.

По същия начин, от условието, че монетите от 4 дмера са с 40% по-малко от монетите по 3 дмера следва, че броят на монетите от 3 дмера е кратен на 5; нека е $5y$, където y е естествено число. Тогава монетите от 4 дмера са $60\% \cdot 5y = 3y$.

Като изразим броя на единичните квадратчета в квадрата 21×21 , получаваме $5x \cdot 1 + 6x \cdot 2 + 5y \cdot 3 + 3y \cdot 4 = 21^2$, т.е.

$$(1) \quad 17x + 27y = 441.$$

В полученото равенство $27y$ и 441 се делят на 9, следователно $17x$ се дели на 9. Тъй като 17 и 9 са взаимнопрости, то x се дели на 9. Тогава $x = 9a$, където a е естествено число. Като заместим в равенство (1) и разделим на 9, получаваме

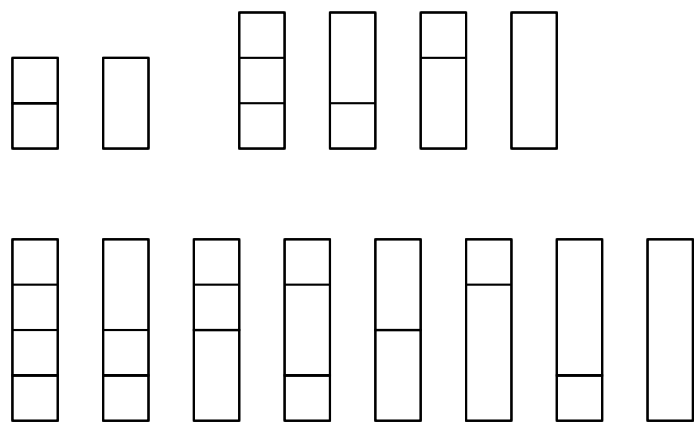
$$17a + 3y = 49.$$

В полученото диофантово уравнение a е най-много 2 (тъй като $17.3 = 51 > 49$). При $a = 1$ получаваме $3y = 32$, което е невъзможно. При $a = 2$ получаваме $y = 5$.

Следователно $x = 9.2 = 18$ и общият брой на монетите е

$$5x + 6x + 5y + 3y = 11x + 8y = 11 \cdot 18 + 8 \cdot 5 = 198 + 40 = 238.$$

б) Последователно ще разгледаме по колко начина могат да се подредят монетите, за да се покрие врата с по-малки размери. Възможните подреждания са показани на чертежа:



размери на вратата	1×1	1×2	1×3	1×4
брой начини за покриване	1	2	4	8

Да разгледаме по колко начина може да се покрие с монети правоъгълник 1×5 . Ако най-отгоре поставим монета 1×1 , под нея остава правоъгълник 1×4 , който може да се покрие по 8 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×2 , под нея остава правоъгълник 1×3 , който може да се покрие по 4 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×3 , под нея остава правоъгълник 1×2 , който може да се покрие по 2 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×4 , под нея остава правоъгълник 1×1 , който може да се покрие по единствен начин. Така възможните подредби в правоъгълник 1×5 са $8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

По същия начин,
 възможните подредби в правоъгълник 1×6 са $15 + 8 + 4 + 2 = 29$;
 възможните подредби в правоъгълник 1×7 са $29 + 15 + 8 + 4 = 56$;
 възможните подредби в правоъгълник 1×8 са $56 + 29 + 15 + 8 = 108$;
 възможните подредби в правоъгълник 1×9 са $108 + 56 + 29 + 15 = 208$;
 възможните подредби в правоъгълник 1×10 са $208 + 108 + 56 + 29 = 401$.

Задача 2. за 7. клас: неравенства, пропорции, теория на числата

Квадрат със страна $5a$ е разделен на квадрати A и B и правоъгълници C и D , както е показано на чертежа. С S_A, S_B, S_C, S_D са означени лицата на съответните фигури.

A	D
C	B

- а) Докажете, че $S_A + S_B \geq S_C + S_D$.
- б) Ако $S_A < S_B$ и $(S_A + S_B) : (S_C + S_D) = 13 : 12$, намерете $S_A : S_B$.
- в) Ако страните на квадратите A и B , измерени в сантиметри, са естествени числа и $S_A + S_B - S_C = 20^2 + 24^2$, намерете възможните стойности на дължината на a в милиметри.

Боянка Савова

Решение. Нека страната на A е x , а страната на B е y ; правоъгълниците C и D са със страни x и y . Имаме $x + y = 5a$.

- а) Имаме $S_A + S_B = x^2 + y^2$, $S_C + S_D = 2xy$. Тогава

$$S_A + S_B - (S_C + S_D) = (x - y)^2 \geq 0.$$

- б) Нека $S_A + S_B = 13k$ и $S_C + S_D = 12k$. Тъй като $13k + 12k = 25a^2$, получаваме $k = a^2$, т.е. $S_A + S_B = 13a^2$ и $S_C + S_D = 12a^2$. Имаме

$$x^2 + y^2 = 13a^2, \quad 2xy = 12a^2 \implies (x - y)^2 = a^2.$$

Тъй като $S_A < S_B$, то $x < y$ и от последното равенство следва, че $y - x = a$. Освен това $x + y = 5a$ и намираме $y = 3a$, $x = 2a$.

Накрая $S_A : S_B = x^2 : y^2 = 4 : 9$.

- в) Записваме условието във вида

$$(\star) \quad x^2 + y^2 - xy = 20^2 + 24^2,$$

където x и y са естествени числа.

Ако x и y са нечетни числа, то лявата страна на $(\star)$ е нечетна, а дясната е четна, т.е. равенството е невъзможно. Ако едно от числата x и y е четно, от $(\star)$ следва, че и другото е четно.

Нека $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, където x_1 и y_1 са естествени числа. Като заместим $(\star)$ и разделим на 4, получаваме

$$(\star\star) \quad x_1^2 + y_1^2 - x_1y_1 = 10^2 + 12^2.$$

По същия начин от $(\star\star)$ получаваме, че x_1 и y_1 са четни числа; $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, където x_2 и y_2 са естествени числа. Като заместим $(\star\star)$ получаваме

$$4x_2^2 + 4y_2^2 - 4x_2y_2 = 244 \iff 3x_2^2 + (x_2 - 2y_2)^2 = 244.$$

От ограничението $3x_2^2 \leq 244$ получаваме, че $x_2 \leq 9$.

Следователно $x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а условието, че $244 - 3x_2^2$ е точен квадрат е изпълнено само при $x_2 = 4, 5$ и 9 .

При $x_2 = 4$ имаме $|4 - 2y_2| = 14$ с единствено естествено $y_2 = 9$.

При $x_2 = 5$ имаме $|5 - 2y_2| = 13$ с единствено естествено $y_2 = 9$.

При $x_2 = 9$ имаме $|9 - 2y_2| = 1$ с $y_2 = 4$ и $y_2 = 5$.

Така възможните стойности на $x + y = 4(x_2 + y_2)$ са 52 и 56. Следователно $5a = 52$ cm, т.е. $a = 104$ mm или $5a = 56$ cm, т.е. $a = 112$ mm.

Задача 3. за 7. клас: теория на числата

Да се намерят всички четирицифрени четни числа N , за които $N + 1$ е точен квадрат, а N^3 има 160 делители.

(Таня Стоева)

Решение. Щом $N + 1 = m^2$ и N е четно число, то m е нечетно число, т.е. $m = 2k + 1$. Тогава

$$N = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

и тъй като произведението на две последователни числа $k(k + 1)$ се дели на 2, то N се дели на 8.

Нека $N = 2^a \cdot p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, където $a \geq 3$ и $p_1, p_2, \dots, p_k$ са различни прости числа, по-големи от 2, а $a_1, a_2, \dots, a_k$ са естествени числа. Броят на делителите на числото $N^3 = 2^{3a} \cdot p_1^{3a_1} \cdots p_k^{3a_k}$ е

$$(3a + 1)(3a_1 + 1) \cdots (3a_k + 1) = 160.$$

Тъй като $3a + 1 \geq 10$ и $3a_i + 1 \geq 4$ за $i = 1, 2, \dots, k$, са възможни следните случаи.

1. случай. $3a + 1 = 160 \Rightarrow a = 53, N = 2^{53}$

2. случай. $3a + 1 = 40, 3a_1 + 1 = 4 \Rightarrow a = 13, a_1 = 1, N = 2^{13} \cdot p_1$

3. случай. $3a + 1 = 16, 3a_1 + 1 = 10 \Rightarrow a = 5, a_1 = 3, N = 2^5 \cdot p_1^3$

4. случай. $3a + 1 = 10, 3a_1 + 1 = 16 \Rightarrow a = 3, a_1 = 5, N = 2^3 \cdot p_1^5$

5. случай. $3a + 1 = 10$, $3a_1 + 1 = 4$, $3a_2 + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$,
 $a_1 = a_2 = 1$, $N = 2^3 \cdot p_1 \cdot p_2$

В първия случай $N = 2^{53}$ не е четирицифрено число.

Във втория случай $N = 2^{13} \cdot p_1 \geq 8192 \cdot 3 > 10000$ не е четирицифрено число.

В третия случай $N = 2^5 \cdot p_1^3$.

При $p_1 = 3$ получаваме $N + 1 = 32 \cdot 27 + 1 = 684$, което не е точен квадрат. При $p_1 = 5$ получаваме $N + 1 = 32 \cdot 125 + 1 = 4001$, което не е точен квадрат. При $p_1 \geq 7$ получаваме $N \geq 32 \cdot 7^3 > 10000$, т.е. N не е четирицифрено число.

В четвъртия случай $N = 2^3 \cdot p_1^5$.

При $p_1 = 3$ получаваме $N + 1 = 8 \cdot 243 + 1 = 1945$, което не е точен квадрат. При $p_1 \geq 5$ получаваме $N \geq 8 \cdot 5^5 = 8 \cdot 3125 > 10000$, т.е. N не е четирицифрено число.

В петия случай $N = 2^3 p_1 p_2$. Тъй като $N = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ е произведение на две последователни четни числа, едното от които се дели на 2, но не се дели на 4, то възможностите за представянето на N във вида $N = (m - 1)(m + 1)$ са:

- $m - 1 = 2$, $m + 1 = 4p_1 p_2 \Rightarrow m = 3$, $p_1 p_2 = 1$ – невъзможно;
- $m - 1 = 2p_1 p_2$, $m + 1 = 4 \Rightarrow m = 3$, $p_1 p_2 = 1$ – невъзможно;
- $m - 1 = 4$, $m + 1 = 2p_1 p_2 \Rightarrow m = 5$, $p_1 p_2 = 3$ – невъзможно;
- $m - 1 = 2p_1$, $m + 1 = 4p_2 \Rightarrow p_1 = 2p_2 - 1$. Следователно

$$N = 8p_1 p_2 = 8(2p_2 - 1)p_2 = 16p_2^2 - 8p_2 = (4p_2 - 1)^2 - 1$$

и от неравенството $1000 \leq N < 10000$ стигахме до ограничението

$$32 \leq 4p_2 - 1 \leq 100,$$

откъдето за простото число p_2 получаваме $p_2 \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$.

Освен това $p_1 = 2p_2 - 1$ също е просто число, което се получава само при $p_2 = 19$, $p_1 = 37$. Намираме решението $N = 8 \cdot 19 \cdot 37 = 5624$;

- $m - 1 = 4p_1$, $m + 1 = 2p_2 \Rightarrow p_2 = 2p_1 + 1$. Както в предишния случай, $N = 8p_1 p_2 = 8p_1(2p_1 + 1) = 16p_1^2 + 8p_1 = (4p_1 + 1)^2 - 1$ и от $1000 \leq N < 10000$ получаваме $p_1 \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$. Освен това $p_2 = 2p_1 + 1$ също е просто число, което се получава само при $p_1 = 11$, $p_2 = 23$ и $p_1 = 23$, $p_2 = 47$. Намираме решенията $N = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$ и $N = 8 \cdot 23 \cdot 47 = 8648$.

Окончателно всички възможни стойности на N са 5624, 2024 и 8648.



конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда кореспондентно. Класирането се извършва въз основа на изпратените в срок решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2022 г. и бр. 1, 2 и 3 от 2023 г.

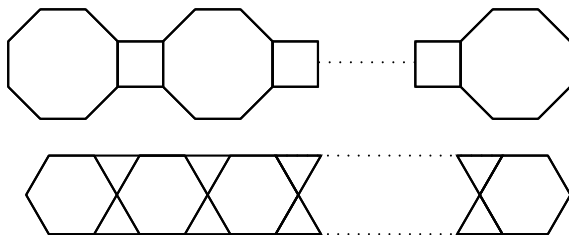
Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

Във всяко писмо напишете **трите си имена, класа и училището си**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg.

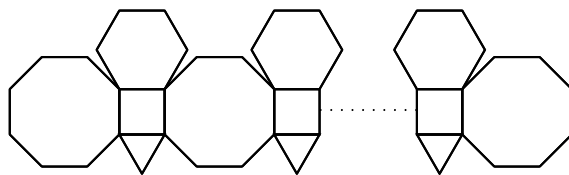
* * *

Задача 1. Дари получила комплект, който съдържа плочки с формата на равностранен триъгълник, квадрат, правилен шестоъгълник и правилен осмоъгълник. Всяка от фигурите има страна a cm, където a е естествено число, по-голямо от 1.

Като използвала всички плочки в комплекта, Дари сглобила показаните фигури. Първата фигура има обиколка 2024 cm, а втората има обиколка 726 cm.



- а) Намерете страната a и общия брой плочки в комплекта.
б) От плочките в комплекта Дари сглобила най-голямата възможна фигура от вида:



Намерете обиколката на получената фигура.

Задача 2. Дядо Желъо има пет внучки: Ирина, Теодора, Лилия, Димана и Милица. Оказало се, че:

- $\frac{1}{8}$ от годините на дядо Желъо са колкото $\frac{1}{3}$ от сбора на годините на Теодора и Милица;
- възрастта на Ирина е $\frac{1}{4}$ от годините на дядо Желъо;
- $\frac{1}{4}$ от годините на Ирина са колкото $\frac{1}{3}$ от годините на Лилия;
- $\frac{1}{3}$ от годините на Теодора са колкото $\frac{1}{2}$ от годините на Милица.

Ако Димана е с 1 година по-голяма от Милица и с 2 години по-малка от Лилия, намерете на колко години е дядо Желъо.

Задача 3. Асен и Боби играят игра. Дават им кутия с $n \geq 1$ бонбони. Асен започва първи. За един ход, ако в кутията има k бонбони, играчът избира естествено число $l \leq k$, като l и k са взаимнопрости, и изядва l бонбони от кутия. Играчът, който изяде последния бонбон, печели.

Кой има печеливша стратегия, в зависимост от n ?

Срокът за представяне на решенията е 30.04.2024 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ БР. 5/2023 Г.

Задача 1. Вихрен има пет монети. На едната страна на всяка монета е записано числото 1, а на обратната страна на монетите са числата $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$. Тъй като всяка монета може да се постави на масата по два начина (лице и гръб), има $2^5 = 32$ различни начина да се поставят монетите на масата. За всеки от тези 32 начина Вихрен умножил петте числа, които се виждат на масата. Колко е сборът на получените 32 числа?

Решение. Задачата може да се реши с директно събиране на тези 32 числа. Така са направили **Ника Атанасова** (6. клас, НПМГ), **Виктор Кожухаров** (6. клас, НПМГ), **Кристиан Атанасов** (6 клас, 125 СУ) и **Младен Иванов** (6 клас, 125 СУ). Друг подход е да забележим, че сборът на получените числа е равен на произведението

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{2}.$$

Задача 2. С $S(n)$ означаваме сбора на цифрите на естественото число n . Да се намерят всички числа n , за които $n + S(n) = 2024$.

Решение. Първо съобразяваме, че числото n е четирицифрено (защо?). Цифрата на хилядите на n е 1 или 2.

В първия случай $n = \overline{1abc}$ и $S(n)$ е най-много $1+3+9 = 28$. Следователно n е не по-малко от $2024 - 28 = 1996$. Лесно се проверява, че 1996, 1997, 1998 и 1999 не изпълняват условието.

Тогава $n = \overline{20ab} < 2024$. Получаваме

$$\overline{20ab} + (2 + a + b) = 2024 \iff 2002 + 11a + 2b = 2024 \iff 11a + 2b = 22.$$

Единствените цифри a и b , за които е изпълнено последното равенство, са $a = 2$, $b = 0$. Така получаваме единствено решение, $n = 2020$.

Задачата е решена от **Ника Димитрова Атанасова** (6. клас, НПМГ), **Виктор Венелинов Кожухаров** (6. клас, НПМГ), **Кристиан Атанасов** (6 клас, 125 СУ) и **Младен Иванов** (6 клас, 125 СУ).

Задача 3. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от естествени числа със следните свойства:

- $a < b < c$ и a , b и c са три последователни нечетни числа;
- числото $a^2 + b^2 + c^2$ се записва с четири еднакви цифри.

Решение. Тъй като a , b и c са три последователни нечетни числа, може да запишем $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ и $c = 2n + 3$, където n е естествено число. Тогава

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11.$$

Този израз трябва да е равен на четирицифрено число, което се записва с 4 еднакви цифри p , т.е.

$$12n^2 + 12n + 11 = \overline{pppp} \implies 12n(n + 1) = \overline{pp(p - 1)(p - 1)}.$$

Следователно $\overline{pp(p - 1)(p - 1)}$ се дели на 4 и от признака за делимост на 4 намираме $p = 1, 5$ или 9. Освен това, $\overline{pp(p - 1)(p - 1)}$ се дели на 3 и от признака за делимост на 4 намираме $p = 2, 5$ или 8.

И двата признака са удовлетворени само за $p = 5$. От равенството

$$12n(n + 1) = 5544 \iff n(n + 1) = 462 = 2.3.7.11$$

лесно намираме единственото естествено решение $n = 21$. Така търсената тройка е $(a, b, c) = (41, 43, 45)$.

Задачата е решена от **Ника Димитрова Атанасова** (6. клас, НПМГ), **Виктор Венелинов Кожухаров** (6. клас, НПМГ), **Кристиан Атанасов** (6 клас, 125 СУ) и **Младен Иванов** (6 клас, 125 СУ).

В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ

ИЗБРАНИ ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ

Задача 1. От гара А за гара В, разстоянието между които е 87 км, тръгва бърз влак със скорост 80 км/ч. Едновременно с него от гара В за гара А тръгва пътнически влак със скорост 54 км/ч. Двата влака се срещат в гара С, като до срещата бързият влак има престой 5 минути, а пътническият – 20 минути. Колко километра е разстоянието от А до С?

Отговор. 60 км

Задача 2. Два влака се движат един срещу друг. Първият се движи със скорост 90 км/ч и е тръгнал 4 часа по-късно от втория, който се движи със скорост 60 км/ч. При срещата се оказало, че вторият е изминал със 150 км повече от първия. Колко часа се е движил всеки влак?

Отговор. 3 ч и 7 часа

Задача 3. Лека кола е изминала 40% от разстоянието между два града, когато водачът забелязал, че му остава да измине 11 км повече, отколкото вече е пропътувал. Колко време е необходимо на колата да се придвижи от единия град до другия със скорост 66 км/ч?

Отговор. 50 мин.

Задача 4. Автомобил пътувал от град А към град В. За 3 часа той стигнал до средата на пътя, след което увеличил скоростта си с 20%. За колко часа автомобилът е изминал разстоянието от А до В, ако не е спирал по пътя?

Отговор. 5,5 часа

Задача 5. Двама атлети загряват с бягане по пистата на стадион с дължина 400 м. Единият загрява със скорост 12 км/ч, а другият – с 13 км/ч. Ако стартират едновременно от едно и също място, след колко време ще са отново заедно, ако тръгнат:

а) в една и съща посока;

б) в различни посоки?

Отговор. а) 24 мин; б) 16 мин.

Задача 6. От пристанище А към пристанище В в 8 часа по течението тръгва сал, а в 10 часа – лодка. Скоростта на течението на реката е 1,5 км/ч, а на лодката в спокойна вода – 15 км/ч. В колко часа разстоянието между лодката и сала ще е 6 км?

Отговор. 10:36

Задача 7. Две шивашки фирми за месец произвеждат общо 1250 рокли. Един месец обаче едната фирма ушила 12% повече, а другата – 8% повече рокли, и така общо ушили 1374 рокли. По колко рокли е ушила всяка фирма през този месец?

Отговор. 672 и 702 рокли

Задача 8. Резервоар се пълни от една тръба за 2 ч и 30 мин, от друга тръба – за 3 ч и 20 мин. За колко минути ще се напълнят 56% от резервоара, ако е празен и се отворят и двете тръби едновременно?

Отговор. 48 минути

Задача 9. Един работник свършва определена работа сам за 15 дни, а друг за същото време свършва само 75% от нея. За колко дни заедно ще свършат 70% от работата?

Отговор. 6 дни

Задача 10. Бутик продава $\frac{1}{6}$ от дрехите с 20% печалба, а 50% от дрехите с 10% загуба. Как трябва да определи цената на останалите дрехи, за да не е на загуба?

Отговор. С поне 5% печалба.

Задача 11. Колко литра 90% медицински спирт трябва да се долеят към 4 литра 70% спирт, за да се получи 75% спирт?

Отговор. $1\frac{1}{3}$ литра

Задача 12. Към 6 литра 60%-ен спиртен разтвор прибавили 4 литра 40%-ен спиртен разтвор. Колко е процентното съдържание на спирт в получения разтвор?

Отговор. 52%

Задача 13. Двама души могат да свършат $\frac{2}{3}$ от една работа за 4 дни. Производителността на първия се отнася към производителността на втория както 2 : 3. За колко дни може първият сам да свърши 60% от работата?

Отговор. 9 дни

Задача 14. Автобус трябва да измине разстоянието между две селища със скорост 72 км/час за определено време. Да се намери разстоянието между селищата, ако автобусът се движил с 80 км/час и пристигнал 10 минути по-рано.

Отговор. 120 км

В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ: ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ЗА ПРОПОРЦИИ

ТАНЯ ДИДОВА, ЧСУ „Наука за деца“

Права и обратна пропорционалност

В практиката често работим с величини, които приемат само положителни стойности и са пропорционални една на друга.

I. Правопропорционални величини: ако едната се увеличи (намалява) няколко пъти, другата също се увеличава (намалява) толкова пъти.

Пример. За сладко от малини са необходими 12 кг малини и 8 кг захар. Колко килограма захар трябва да се осигурят за 9 кг малини? (Колкото пъти се намалят малините, толкова пъти трябва да се намали и захарта, т.е. масите на малините и захарта са правопропорционални.)

II. Обратнопропорционални величини: ако едната се увеличи (намалява) няколко пъти, другата се намалява (увеличава) толкова пъти.

Пример. Лека кола, движеща се със скорост 60 км/ч, изминава определено разстояние за 5 часа. За колко време ще измине същото разстояние, ако се движи с два пъти по-висока скорост? (Ако скоростта се увеличи 2 пъти, времето за изминаване на определеното разстояние ще се намали 2 пъти. Казваме, че скоростта и времето са обратнопропорционални.)

Задачи за упражнение

Задача 1. Определете дали зависимостта между величините е права или обратна пропорционалност:

А) Броят на закупените еднакви топки и стойността на покупката;

Б) Броят на местата в един автобус и броят на автобусите, които трябва да превозят учениците на едно училище;

В) Количеството домати и приготвеният кетчуп;

Г) Производителността на труда и времето за извършване на определена работа.

Задача 2. За ушиването на 8 ризи са използвани 14,4 м плат. Колко метра плат са необходими за ушиването на 15 ризи?

Задача 3. Две снегопочистващи машини разчистили площадка за 8 часа. За колко часа ще разчистят площадката 7 машини?

Задача 4. За да превози 14 тона товар един камион трябва да направи 18 курса, като всеки курс е натоварен максимално. Колко тона товар най-много товар може да превози този камион, ако направи 8 курса?

Задача 5. За превозването на определен товар камион с товароподемност 8 тона трябва да направи 24 курса, като всеки курс е натоварен максимално. С колко курса ще се превози товарът, ако се използва камион с товароподемност 17 тона?

Задача 6. За една работна смяна бригада от 9 зидари с еднаква производителност изграждат 50 кв. м. зид. Колко квадратни метра зид ще изградят за една смяна 16 зидари?

Задача 7. Бригада от 7 зидари с еднаква производителност изграждат стена за 5 часа. За колко време ще изградят стената 14 зидари?

Задача 8. Автомобил изминава разстоянието от 180 км с 16,5 литра гориво. Какво разстояние ще измине автомобила с 24 литра гориво?

Задача 9. От 76 кг брашно се правят 164 хляба. Колко килограма брашно са необходими за приготвянето на 94 хляба?

Задача 10. За екскурзия се записали 15 ученика. За да се плати автобусният превоз, от всеки ученик трябва да се съберат по 36 лв. По колко лева трябва да се съберат от всеки, ако за екскурзията се запишат още 5 ученика?

Приложение на пропорциите. Разделяне на количество в дадено отношение

Задача 1. В едно училище има общо 350 деца. През лятната ваканция 189 от тях били на море.

А) Каква част от всички деца са били на море?

Б) Какъв процент от децата са били на море?

Задача 2. От клас с 30 ученика 27 отишли на театър. Намерете колко процента от учениците в класа са отишли на театър.

Задача 3. За учениците от 5 и 6 клас закупили 50 билета за посещение на музей. Учениците от 5. клас са 72, а от 6. клас – 48. Как да се разделят билетите между петокласниците и шестокласниците?

Задача 4. В първа група на една детска градина има 23 деца, във втора – 27, а в трета – 25. Разделете 150 ябълки пропорционално на децата в групите.

Задача 5. Годишите на майка и дъщеря се отнасят тъй както 5 към 2. Ако сборът от годините им е 56, то на колко години е всяка от тях?

Задача 6. Отношението на две положителни числа е $10 : 7$. Разликата им е 27. Намерете сбора на числата.

Задача 7. Периметърът на триъгълник е 64 см. Дължините на страните му са в отношение $7 : 5 : 4$. Намерете страните на триъгълника.

Задача 8. В една сладкарница доставили шоколадови, ванилови и плодови пасти в отношение $7 : 5 : 4$. Шоколадовите пасти били с 15 повече от плодовите.

А) Колко пасти общо са доставили?

Б) По колко пасти са доставили от всеки вид?

Задача 9. Страните на четириъгълник се отнасят както $2 : 3 : 4 : 5$. Намерете периметъра му, ако разликата между най-голямата и най-малката му страна е 9 см.

Задача 10. Ако $A : B = 2 : 3$ и $B : C = 6 : 7$, колко е отношението $A : B : C$?

Задача 11. Три числа A , B и C имат следното свойство: $A : B = 5 : 3$ и $B : C = 3 : 4$. Намерете числата, ако средното по големина число е 320.

Задача 12. Трима работници получили възнаграждение 1200 лв. Първият взел 30% от цялата сума, а другите двама си разпределили остатъка в отношение $3 : 5$. Колко лева е взел всеки работник?

Задача 13. Лицето на правоъгълник е 15 cm^2 и се отнася към лицето на триъгълник тъй както $5 : 4$. Едната страна на триъгълника е 6 см. Намерете височината на триъгълника, спусната към тази страна.

Задачи за самопроверка

Задача 1. Автобус изминава определено разстояние за 4 часа, като се движи със скорост 80 км/ч. За колко време ще измине същото разстояние, ако намали скоростта си с 20 км/ч?

Задача 2. Карта има мащаб 1:400 000. Колко километра е действителното разстояние между два града, което измерено на картата, е 8,5 см.

Задача 3. Пет еднакви пакетчета ядки тежат 250 гр. Колко килограма тежат 17 такива пакетчета?

Задача 4. Три числа A , B и C имат следното свойство:

$$A : B = 5 : 2 \text{ и } B : C = 3 : 4.$$

Ако най-голямото от дадените числа е 600, намерете най-малкото.

Задача 5. Дължините на страните да един правоъгълен триъгълник се отнасят както 5 : 12 : 13. Единият катет на триъгълника е със 7 см по-малък от другия. Намерете:

А) обиколката на триъгълника;

Б) Лицето на триъгълника;

В) Дължината на височината към хипотенузата.

Една задача за напреднали

Двама пътешественици едновременно тръгнали един срещу друг от A и от B . В момента на срещата се оказало, че първият е изминал 12 km повече от втория. След срещата всеки продължил по пътя си и първият пътувал още 4 h 40 min до B , а вторият $7\frac{5}{7}$ h до A . Да се намери разстоянието между A и B .

Решение. Нека срещата е в точка C , а времето от тръгването до срещата е x h. Всеки се движи с постоянна скорост, затова

$$AC : BC = x : 4\frac{2}{3} = 7\frac{5}{7} : x,$$

откъдето $x = 6$, т.е. пътешествениците са пътували 6 h до C . Ако $BC = y$ km, то $AC = y + 12$ и от пропорцията

$$(y + 12) : y = 6 : 4\frac{2}{3}$$

намираме $y = 42$ km. Това означава, че разстоянието AB е 96 km.

В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЕТИЧНИ ДРОБИ И ПРОЦЕНТ

Задача 1. Допълнете квадрата до магически, ако

$$a = \frac{1,2 \cdot 2 + 1,2 : 0,2}{1,2 \cdot 0,2 + 0,11}, \quad b = \frac{0,6 \cdot 1,8 \cdot 2,6}{0,9 \cdot 3,9 \cdot 0,04}$$

b		c
	a	

$$(0,3 \cdot c + 1,3) : 0,4 - 0,1 = 8,7 \cdot 16,3 - 8,7 \cdot 14,3$$

Задача 2. Нека $a \triangle b = a : 0,1 + b \cdot 0,1$. Намерете:

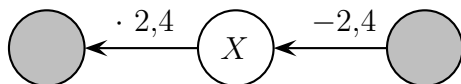
а) $0,14 \triangle 2,3$.

б) x , ако $0,17 \triangle x = 17$.

в) y , ако $y \triangle 13 = 3,1$. г) z , ако $z \triangle z = 6,06$.

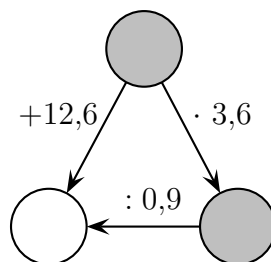
Задача 3. Намерете:

а) сбора на числата в сивите кръгчета, ако $X = 2,5$;



б) X , ако сборът на числата в сивите кръгчета е 7,84.

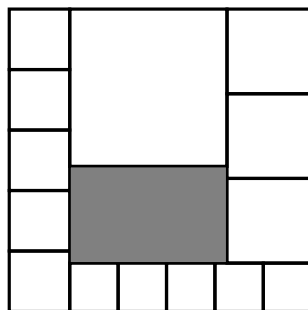
Задача 4. Колко е сборът на числата в сивите кръгчета?



Задача 5. Квадрат е разрязан на 14 бели квадрата и един сив правоъгълник, както е показано на чертежа. Намерете:

а) колко процента от страната на големия квадрат е страната на всеки от по-малките квадрати;

б) колко процента от лицето на големия квадрат е лицето на сивия правоъгълник.



Задача 6. Билбо изминал 30% от пътя от Хобитово до Ломидол. Колко километра е целият път, ако:

- а) е изминал 42 км; б) му остават 42 км?

Задача 7. Билбо откраднал планински кристали, сапфири и рубини от съкровището на дракона Смог. Когато ги преброил, се оказало, че 40% от камъните са кристали, а рубините са толкова, колкото са сапфирите. Колко скъпоценни камъни е откраднал Билбо, ако:

- а) рубините са 120; б) рубините са с 80 по-малко от кристалите?

Задача 8. Фродо тръгнал от Торбодън към Самотната планина. През първия ден изминал 40% от пътя, през втория ден изминал 23% от пътя, а през третия ден – оставащите 7770 метра. Колко километра е изминал Фродо от Торбодън до Самотната планина?

Задача 9. Фродо тръгнал от Торбодън към Мраколес. През първия ден изминал 40% от пътя, през втория ден изминал 40% от оставащия път, а през третия ден – последните 7200 метра. Колко километра е изминал Фродо от Торбодън до Мраколес?

Задача 10. Гандалф тръгнал от Лотлориен към Ломидол. През първия ден изминал 40% от пътя, през втория ден – 40% от оставащия път, през третия ден – 75% от оставащия след втория ден път, а на четвъртия ден – последните 8,1 километра. Колко километра е изминал Гандалф от Лотлориен до Ломидол?

Задача 11. Фродо и Сам си поделили елфическите питки лембас. Оказало се, че Фродо има с 2 питки повече от Сам, а 75% от питките на Фродо са толкова, колкото 80% от питките на Сам. Колко питки имат двамата общо?

Задача 12. Леголас плавал с лодка по реката Бруниен, която в тази си част се движи със скорост 1,2 км/ч. Той се спуснал от Ангрен до Гландуин за 30 минути. За да се върне в Ангрен, той плавал с 40% по-дълго. Намерете разстоянието по реката между Ангрен и Гландуин, ако собствената скорост на лодката е била постоянна.

Задача 13. Арагорн препускал от Рохан към Гондор със скорост 45 км/ч. На следващия ден се върнал по същия път, но препускал с 20% по-бързо, поради което пристигнал с половин час по-бързо. Колко километра е разстоянието между Рохан и Гондор?

Задача 14. Роханските конници се отправили в четирите посоки да търсят помощ: 20% от тях поели на юг, с 20% повече – на север. Останалите конници, между 40 и 50, потеглили на изток или запад. Колко рохански конници са тръгнали на път?

Ученическо творчество

МАТЕМАТИКА В 4. КЛАС ... С ДИСНИ

СЪВМЕСТНА ПРОДУКЦИЯ НА ЧЕТВЪРТОКЛАСНИЦИ
ОТ ЧСУ „НАУКА ЗА ДЕЦА“

Предлагаме ви задачите, които съчинихме в хода на нашата състезателна подготовка.

Задача 1. В приказното царство има големи и малки градове. Във всеки малък град живеят по a красиви девойки, а във всеки голям град живеят по b красиви девойки, където

$$a = 2024 : 11 - 2024 : 23, \quad (b + 23.24) : 25 = 28.$$

След като Пепеляшка загубила пантофката си на бала, всяка красива девойка в царството трябвало да пробва обувката. Така се случило, че Пепеляшка последна пробвала обувката. Всичките 1115 красиви девойки преди нея потънали в скръб, защото обувката не им станала.

Колко са големите градове в това царство?

София Матеева

Задача 2. Ариел отива при леля си, вещицата. Пътят от нейния дом до бърлогата на леля ѝ е равен на a метра, където

$$(a : 25) \cdot 12 = 1728.$$

Морският цар предизвикал буря и наредил на рибките да догонят Ариел и да я върнат у дома. Рибките тръгнали 3 минути след Ариел.

Ариел успявала да преплува в бурята по 48 метра в минута. Най-малко с каква скорост трябвало да плуват рибките, за да настигнат Ариел най-късно пред дома на вещицата?

Ирен Младенова

Задача 3. Аша си намислила желание в 20:30. Ако Звезда лети със скорост 2 км в минута и пътят от дървото до небето е 9 000 км, то в колко часа след няколко дни Звезда ще пристигне при Аша?

Ралица Воева

Задача 4. Приятелите на Аврора са птички, катерички и сърнички. Те имат общо 45 глави и 30 крила. Катеричките са 2 пъти повече от сърничките. Колко приятели катерички има Аврора?

София Матеева

Задача 5. В училище Питър Пан има 11 учебни часа и обяд. Във всеки учебен час губи x пикси енергия, а през обяда се зарежда с y пикси. Тинкър Бел му дава бонбон, който носи $y - 5$ пикси, след което той играе с изгубените момчета и губи $x + 7$ пикси. В края на деня се оказва, че Питър Пан е получил толкова пикси, колкото е изгубил. Намерете x и y , ако сборът им е между 20 и 30.

Теодор Панков

Задача 6. Сто и един далматинци били гладни. Първият изял едно кюфте, вторият изял две кюфтета, третият – три и т.н., последният изял 101 кюфтета! Общо колко кюфтета изяли далматинците?

Ани Кафеджийска

Задача 7. Рататуи е в точка A и иска да стигне до сиренето в точка B , като се придвижва от едно поле в съседното над него или в съседното вдясно от него. Във всички полета с $*$ има капан, а във всички полета с $\times$ дебне котка. По колко безопасните маршрута може да мине Рататуи?

					B
	$\times$				
				*	
		$\times$			
					*
A			*		

Емма Дечева

Задача 8. В бара на Корусант Оби-Уан поръчал 2 коктейла, а Анакин – 3 лазерни лимонади. Платили 200 републикански кредита. На тръгване взели със себе си 4 коктейла и 2 лимонади за общо 280 кредита. Колко струва един корусантски коктейл? **Далян Филиз**

Задача 9. Джак Спароу отплавал от Тортуга и се насочил към Белия залив, на 315 км от Тортуга. Той плавал със скорост 50 км/ч. След 1 час френската флота успяла да тръгне след него от Тортуга със средна скорост 60 км/ч. На колко километра от Белия залив се е състояла битката между пиратите и французите?

Мартин Енев

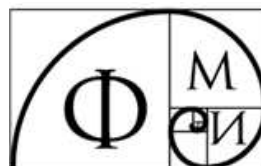
Задача 10. Джейсън обещал да построи храм в Нов Рим, широк $(a+b) : 9$ м, където $a = (69 \cdot 2 + 138 \cdot 4) : 10$; $b = (168 + 84 \cdot 98) : 25$. Основата на храма е правоъгълник с обиколка 150 м. Намерете площта на храма.

Петър Найденов

Отговори. 1. 3; 2. 50 м/мин; 3. 23:30; 4. 20; 5. $x = 3$ и $y = 24$; 6. 5151; 7. 32; 8. 55; 9. 15 км; 10. 1400 кв.м.



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА



Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване досега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 9 бакалавърски програми и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави и разнообразни, като към задължителните курсове през целия период на обучението се предлагат и голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2024/2025 година за образователно-квалификационната степен „Бакалавър“ ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Анализ на данни, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи и Софтуерно инженерство**. Тук Ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието:

1. Новоразкритата бакалавърска програма „**Анализ на данни**“, която стартира за първи път през учебната 2022/2023 година, е първа по рода си в България и ще се осъществява съвместно между Софийския университет и Техническия университет – София. Цел на обучението в тази специалност е придобиването на умения и знания свързани с обработка и анализ на големи масиви от данни, с акцент върху познаването и разработката на необходимия за целта софтуер. Нуждата от такъв вид специалисти в съвременния бизнес и индустрия са големи, което е и предпоставка за наличието на много добри перспективи за реализация на завършилите специалността.

2. В бакалавърската програма „**Компютърни науки**“ се подготвят специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: www.fmi.uni-sofia.bg

ИНФОРМАТИКА В НБУ

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Информатика

Специализации: Компютърно програмиране, Приложна информатика

► Мултимедия и компютърна графика

Специализации: Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Мрежови технологии (на английски език)

Специализации: Мрежово администриране, Мрежово програмиране

► Информационни технологии

Специализации: Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика

Обучението в програмите през първите две години обхваща общо образование в областта на информатиката, както и множество практически курсове като - програмиране на C++, Java, компютърни мрежи и архитектури, организация на компютърни системи, структури в програмирането и информационните технологии, операционни системи и др. В областта на мултимедията се изучават курсове по графичен потребителски интерфейс, рисуване, цветознание в компютърното проектиране, растерна и векторна графика. През третата и четвъртата година обучението се организира в специализирани курсове към програмите и извънаудиторни учебни форми с предимно практическа насоченост. Разглеждат се съвременните, актуални средства в съответните направления на информационните технологии. От третата година програмите предлагат два модула за специализация, които водят до професионална квалификация.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

► Софтуерни технологии в Интернет

Специализации: Моделиране и анализ, Проектиране и разработване

► Управление на проекти по ИТ

► Мултимедия, компютърна графика и анимация

► Извличане на знания и технологии за големи данни

Магистърските програми в областта на ИТ са с предимно практическа насоченост. Обучението се извършва в няколко основни направления – уеббазиран достъп до бази от данни, приложения с архитектура клиент-сървър, комуникиращи през уебсреда, електронен бизнес, разработка и интеграция на мултимедийни приложения, тримерно моделиране и дизайн, компютърна анимация. Застъпени са различни аспекти на управлението на проекти като правна регулация, финансиране, човешки ресурси, комуникации и др. Предлагат се курсове по методи за анализ на данни с цел извличане на знания, както и по технологии за съхранение на големи обеми от данни. Съдържанието и структурата на учебните курсове отразяват последните тенденции в развитието на съответните технологии.

Студентите от всички бакалавърски програми се ползват от високия стандарт на материалната среда и Университетския кампус, имат на разположение богата библиотека, съдържаща голяма част от необходимите учебни материали. Системата за online обучение на Университета е широко застъпена във всички програми от областта на информационните технологии. Преподавателите, водещи курсове в програмите са изявени специалисти и утвърдени учени в съответните направления. В някои от курсовете лектори са световно известни преподаватели от чуждестранни университети.

Повече информация за програмите и кандидатстването можете да намерите на сайта на университета.



НОВ
БЪЛГАРСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

www.nbu.bg



ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ "НЕОФИТ РИЛСКИ" БЛАГОЕВГРАД

Югозападен университет „Неофит Рилски“ – знание за бъдещето и утвърдени традиции в Югоизточна Европа

КОИ СМЕ НИЕ?

Близо пет десетилетия Югозападният университет „Неофит Рилски“ – Благоевград е притегателен образователен, научноизследователски и академичен център за развитие на съвременни методи на преподаване, технологии и тяхното ефективно приложение в сферата на висшето образование.

Университетът е предпочитан от кандидат-студентите – както от завършващите зрелостници, така и от вече успешно реализираните в публичния и частния сектор кадри, което представлява реално приложение на концепцията за учене през целия живот. Понастоящем при нас се обучават над 8000 студенти, от които повече от 500 са чуждестранни студенти от над 20 страни по света.

ЮЗУ „Неофит Рилски“ е висшето училище, предлагащо обучение в най-голям брой професионални направления и образователни програми в Република България. Акредитиран е с максимална оценка от Националната агенция за оценяване и акредитация, като следва да подчертаем, че системата за управление на качеството на университета е в съответствие с изискванията на стандарт ISO 9001:2015 с обхват организация и обучение на студенти. Това е безспорна гаранция за качество на предлаганата образователна услуга в 84 бакалавърски и магистърски програми след средно образование, 137 магистърски програми след завършено висше образование и 86 докторски програми.

ЗАЩО ТРЯБВА ДА ИЗБЕРЕТЕ ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“ – БЛАГОЕВГРАД?

Университетът предоставя изключително атрактивни възможности за реализиране на студентска мобилност с цел обучение и студентска мобилност с цел практика в над 120 университета в Европа и други страни по света по Програма „Еразъм+“. Югозападният университет е отличен с „Академичен Оскар“ за качествено изпълнение на проекти по Програма „Еразъм+“ в сектор „Висше образование“.

Ускорената дигитализация налага една динамична научна и образователна среда във висшето училище, в която приложението на съвременните образователни технологии се осигурява чрез изграждането и развитието на STEM центрове. Първият университетски STEM център в Република България е изграден в Югозападния университет и е разположен във Факултета по педагогика. В два от факултетите – Природо-математически и Технически факултет, са създадени STEM центрове по природни науки – математика, информатика, физика, химия и биология и STEM център по мехатроника. Изключително признание за Университетът е, че бе определен за един от трите регионални STEM центъра от Министерството на образованието и науката.

В университета са акредитирани 12 нови магистърски програми, част от които са: „Регионален мениджмънт и градска икономика“, „Аутсорсинг и киберсигурност“ и „Корпоративна сигурност“, чието обучение се провежда съвместно с други две висши училища от страната.

Благодарение на сключените договори, в ЮЗУ „Неофит Рилски“ се предлага финансово стимулиране на студенти, обучаващи се в конкретни професионални направления, под формата на стипендии, които се предоставят от заинтересовани страни, представители на бизнеса и потребители на кадри.

Югозападният университет се отличава с разнообразна и с чудесни характеристики материална база и инфраструктура. В непосредствена близост до учебните корпуси на университета са разположени студентските общежития, които предстои да бъдат изцяло реновирани, както и студентският стол. Университетската библиотека е модерно оборудвана и изключително уютна. Разполага със 161 читателски места и 48 компютъризирани работни места. Предоставя достъп до научна информация от бази данни по абонамент, свободен достъп до научни и образователни списания и разнообразен книжен фонд. Библиотечните услуги са напълно безплатни и се предоставят на студентите след регистрация. Богатата материална база включва още многофункционален спортен комплекс, както и Университетски научноизследователски и спортно-възстановителен център „Бачиново“. Учебният студентски експериментален театър „УСЕТ“ е неделима част от духовната среда на Благоевград и представя университетския ни град като специфичен театрален център.

Университетът разполага с изградена инфраструктура за реализация на практически обучения, тренинг сесии и експерименти, включваща: Европейски документационен център, Лаборатория по национална сигурност, Учебна съдебна зала, Лаборатория по иконометрични изследвания, Научноизследователски център „Обсерватория Икономика“, Център за изследвания и квалификация, Научноизследователска лаборатория по химия на природните вещества и много други. Съгласно публично оповестени статистически данни, ЮЗУ „Неофит Рилски“ – Благоевград е висшето училище с най-голям брой успешно реализирани завършили студенти, голяма част от които получават работна заплата, която значително надвишава средната работна заплата в Република България. Това е гаранция за високо качество на обучението, което провеждаме и безспорно потвърждение, че нашите студенти инвестират в знания за бъдещето!

Избирайки ЮЗУ „Неофит Рилски“, Вие решавате да продължите Вашето образование в културния, образователен и младежки център на Югозападна България – Благоевград. Културният живот на Благоевград предлага големи възможности за ползотворно уплътняване на свободното време, за посещение на концерти, спектакли, дискотеки, различни клубове по интереси и музей. Могат да се видят спектаклите на Драматичния театър „Никола Вапцаров“, Камерната опера, Ансамбъл „Пирин“, да надникнат във възрожденския комплекс „Вароша“, да се срещнат с богатите фондове на Регионалната библиотека и на Историческия музей, да се гледат последните шедеври на световното киноизкуство в кино „Синемакс“.

Приемът на онлайн заявления за явяване на кандидатстудентски изпити в Югозападния университет „Неофит Рилски“ започва на 19 февруари 2024 г. Не забравяйте, че успехът е въпрос на избор, Вашия избор!

Инвестирайте в бъдещето, Югозападният университет „Неофит Рилски“ – Благоевград е гарант за Вашия успех!

Адрес: ул. „Иван Михайлов“ 66, Благоевград 2700

Официален уеб сайт на университета: www.swu.bg

Прием: <https://www.swu.bg/bg/prospectivestbg/admse>



ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“ БЛАГОЕВГРАД

Югозападен университет „Неофит Рилски“
Знание за бъдещето

Кандидатстудентска кампания за учебната 2024/2025 година

В Югозападния университет „Неофит Рилски“ за учебната 2024/2025 година се провеждат електронни изпити по български език, история на България, география на България, биология, английски език, математика и химия. Електронните изпити се провеждат всеки работен петък до 14 юни 2024 г. и всеки делничен ден от 17 юни 2024 г. до 5 юли 2024 г. на място в университета.

През месеците март, април и юни университетът организира практически изпити по физическа подготовка, по различни видове спорт и в областта на изкуствата. Подаването на заявления за електронен кандидатстудентски изпит на място се извършва в деня на определените дати, най-късно 1 час преди началото на изпита. Заявленията се подават на място в университета в зала 1102А, Учебен корпус No 1 или в електронната система за онлайн регистрация

<https://ksk.swu.bg/WebClient/>.

Желаещите да се обучават в Югозападния университет „Неофит Рилски“ могат да кандидатстват чрез конкурсни изпити, организирани и оценени от изпитни комисии на Университета; с резултати от държавни зрелостни изпити, валидни за съответната специалност и професионални направления, положени след 2008 г. включително; с оценки от конкурсни изпити, положени през 2024 г. в други акредитирани висши училища на Република България (удостоверени със служебна бележка) и с резултати от олимпиади, национални и регионални състезания, международни и републикански, образователно-научни, художественотворчески и спортни прояви. Информация за специалностите, необходимите документи и графика за провеждане на конкурсните изпити е публикувана на университетския сайт – www.swu.bg.

График за организация на конкурсни изпити

Дейност	Срок	Дата на изпита
Подаване на документи за явяване на изпит (Електронно изпитване)	Подаване на документи за явяване на електронен изпит на място се извършва в деня на определените дати най-късно 1 час предварително	
Подаване на документи за явяване на практически изпити през месец март 2024 г.	От 1 март 2024 г. до 15 март 2024 г.	16 март 2024 г.

Подаване на документи за практически изпити през месец април 2024 г., с изключение на празничните дни	От 08 април 2024 г. до 19 април 2024 г.	20 април 2024 г.
Подаване на документи за практически изпити през месец юни 2024 г.	От 27 май 2024 г. до 7 юни 2024 г.	08 юни 2024 г.

**График за провеждане на конкурсни изпити
(Електронно изпитване)**

Дата	Електронен конкурсен изпит	Начало на изпита
Подаване на документи за явяване на електронен изпит на място се извършва в деня на определените дати най-късно 1 час предварително.		
От 19 февруари 2024 г. до 14 юни 2024 г. всеки работен петък и от 17 юни 2024 г. до 5 юли 2024 г. всеки делничен ден	Български език История на България География на България Биология Английски език Математика Химия	13:00 ч.

График за провеждане на практически конкурсни изпити

Дата за изпит	Конкурсен изпит	Начало на изпита
Срок за подаване на заявление за практически изпити м. март – от 1 март 2024 г. до 15 март 2024 г.		
16 март (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
16 март (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.

16 март (събота)	Практически изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.
Срок за подаване на заявление за практически изпити м. април – от 8 април 2024 г. до 19 април 2024 г.		
20 април (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.
20 април (събота)	Практически присъствен изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.
Срок за подаване на заявление за практически изпити – от 27 май 2024 г. до 7 юни 2024 г.		
8 юни (събота)	Практически изпит по вид спорт: баскетбол, волейбол, футбол, лека атлетика, плуване, тенис, гимнастика, борба	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически комплексен изпит по физическа подготовка	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по изобразително изкуство (за специалностите „Педагогика на обучението по изобразително изкуство“ и „Мода“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по музика (за специалностите „Педагогика на музикалното изкуство“, „Изпълнителско изкуство (народни инструменти ли народно пеене), „Изпълнителско изкуство – поп и джаз“ и „Електронни технологии в музиката“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по хореография (за специалностите „Българска народна хореография“ и „Съвременна хореография“)	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит за филмови и телевизионни изкуства	09:00 ч.
8 юни (събота)	Практически изпит по актьорско майсторство	09:00 ч.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ „Атанас Радев“, <i>С. Харизанов</i>	3
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ, 2024, <i>Д. Грозев</i>	17
РЕШЕНИЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕТО НА АБЕЛ, <i>Л. Любенов</i>	22
ХАРМОНИЧНИЯТ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И НЕГОВИТЕ СВОЙСТВА, <i>Н. Събева</i>	24
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ, <i>Е. Колев</i>	30
КЛАСИЧЕСКИ ИДЕИ ОТ КОМБИНАТОРНАТА ГЕОМЕТРИЯ, <i>Е. Колев</i>	31
КВАДРАТИ И РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ, <i>Н. Събева</i>	39
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ.....	51
ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ТОЧЕН КВАДРАТ ОТ ТУРНИРА „ИВАН САЛАБАШЕВ“, <i>М. Димитров, Ч. Стойчев</i>	43
ПОГЛЕД ВЪРХУ ОБЛАСТНИЯ КРЪГ ЗА 4. – 7. КЛАС,	49
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ.....	60
В ПОМОЩ НА СЕДМОКЛАСНИЦИТЕ	63
В ПОМОЩ НА ШЕСТОКЛАСНИЦИТЕ, <i>Т. Дидова</i>	65
В ПОМОЩ НА ПЕТОКЛАСНИЦИТЕ	69
МАТЕМАТИКА В 4. КЛАС... С ДИСНИ	71

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230

1113 София

тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169

e-mail: spisaniematematika2019@gmail.com

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.

Дадена за печат на 6.03.2024 г.

Печат „Фастумпринт“ ЕООД

Цена на отделен брой 6,00 лв.

Ръкописи не се връщат.