мате мати ка

БРОЙ 4
2019 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

 ISSN 0204-6881

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА УАСГ

доц. д-р Ст. Стоилова, ас. П. Стоев

Задача 1. (1 т.) Решението на неравенството $\dfrac{2+\log_{\frac{1}{2}}(-x)}{\sqrt{9-x^2}} > 0$ е:

А) $(0,3)$ **Б)** $(-4,0)$

В) $(-3,0]$ **Г)** $(-3,0)$

Задача 2. (1 т.) Дадено е уравнението

$$x^2-(a+1)x+a=0,$$

където a е параметър. За кои стойности на a разстоянието между корените му е по-малко от 2?

А) $(-1,3)$ **Б)** $(-\infty,3)$

В) $(0,3)$ **Г)** няма такова a

Задача 3. (1 т.) Дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от окръжност с център O и радиус 1 има мярка α. Границата $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{S_{\text{сект}\,O\overset{\frown}{AB}}}{S_{\triangle OAB}}$ е равна на:

А) 2 **Б)** π **В)** 1 **Г)** $\dfrac{\pi}{2}$

Задача 4. (1 т.) В триъгълник ABC страните са $AB=6$, $BC=7$ и $CA=5$. Вписаната му окръжност се допира до AB и BC съответно в точките M и N. Отсечката MN е равна на:

А) $\dfrac{8}{\sqrt{7}}$ **Б)** $\dfrac{5}{7}$ **В)** $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ **Г)** друг отговор

Задача 5. (1 т.) В пирамидата $ABCD$ всички ръбове са равни. Синусът на ъгъла между ръба AB и стената BCD е:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$a\sqrt{2^x - 1} = 4 - 2^x,$$

където $a > 0$ е реален параметър.

а) (2 т.) Да се реши уравнението за $a = 2$.

б) (3 т.) Да се определи a така, че уравнението има корен в интервала $[1, 2]$.

Задача 6. (5 т.) Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и височина $BB_1 = h$, $(B_1 \in AC)$. Окръжност с диаметър BB_1 пресича страните AB и BC съответно в точките D и F.

а) (2 т.) Да се докаже, че $\triangle FBD \sim \triangle ABC$ и

$$\frac{BD}{BC} = \sin\gamma \sin(\beta + \gamma).$$

б) (1,5 т.) Да се определи γ така, че функцията

$$f(\gamma) = \sin\gamma \sin(\beta + \gamma)$$

да има най-голяма стойност при фиксирано β.

в) (1,5 т.) За тази стойност на γ да се докаже, че $\dfrac{S_{BDB_1F}}{S_{ABC}} = \dfrac{BD}{BC}$.

Задача 7. (5 т.) Дадена е пирамидата $ABCD$ с основа правоъгълният $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$), на която околните ръбове са равни. Височината на пирамидата е h, а стените ACD и BCD сключват с основата ъгли, съответно равни на 45° и 30°.

а) (1,5 т.) Да се докаже, че $AB = 4h$.

б) (1,5 т.) Нека $\sphericalangle (BC, AD) = \varphi$. Да се докаже, че $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

в) (2 т.) През средата O на AB успоредно на BC и AD е прекарана равнина ρ. Да се намери лицето на сечението на равнината ρ с пирамидата $ABCD$.

Забележка. Предложената тема е дадена като изпитна тема на симулативен изпит в УАСГ, проведен на 7 април 2019 г.

ПОДГОТОВКА ЗА EGMO – НЯКОЛКО ЗАДАЧИ ОТ ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

Петър Бойваленков
Институт по математика и информатика на БАН

Предлагаме на читателите една от лекциите, изнесена от автора при подготовката на отбора ни за участие в Европейската олимпиада по математика за момичета (EGMO) през 2016 г. Тогава България се класира на трето място (след Русия и САЩ) и на първо място в ЕС, а Виолета Найденова спечели златен медал с 38 т. (трети резултат). На тазгодишното издание на EGMO отново сме трети (след САЩ и Украйна) и първи в ЕС – за повече информация вижте статията на Иванова и Маркова в този брой.

Задача 1. Нека d, k и q са естествени числа, като k е нечетно. Да се намери максималната степен на 2, която дели числото $\displaystyle\sum_{i=1}^{k2^d} i^q$.

Решение. Ще докажем, че търсената степен е равна на $d-1$ при четно d и при $d=1$ е на $2(d-1)$ при нечетно $d \geqq 3$.

При $q=1$ разглежданата сума е $k2^{d-1}(k2^d-1)$ и твърдението е вярно.

При $d=1$ сумата е нечетна и затова оттук нататък ще считаме, че $d>1$.

Ако q е четно, имаме

$$\sum_{i=1}^{k2^d} i^q \equiv 2\sum_{i=1}^{k2^{d-1}} i^q \equiv 2^{d-1} \pmod{2^d}.$$

Ако q е нечетно, имаме

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k2^d} i^q &= (k2^d)^q + (k2^{d-1})^q + \sum_{i=0}^{k2^{d-1}} (i^q + (k2^d - i)^q) \\
&\equiv \sum_{i=0}^{k2^{d-1}} kq2^d i^{q-1} \pmod{2^{2d-1}} \\
&\equiv kq2^d \sum_{i=0}^{k2^{d-1}} i^{q-1} \pmod{2^{2d-1}}
\end{aligned}$$

и остава да приложим за последната сума доказаното за четното число $q-1$.

Задача 2. Да се докаже, че

$$1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1} \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}.$$

Решение. Директно или по индукция лесно следва, че

$$k^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

Да отбележим още, че и сравнението

$$(k + 2^n)^k \equiv k^k(1 + 2^n) \pmod{2^{n+2}}$$

следва директно.

Да означим разглежданата сума с S_n. Тогава е в сила тъждеството

$$S_{n+1} = S_n + R_n,$$

където

$$R_n = (2^n + 1)^{2^n+1} + \cdots + (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1}-1}.$$

Означавайки за краткост $2^n + k = m$, за типичното събираемо в R_n получаваме

$$m^m = m^{2^n} m^k \equiv m^k \equiv k^k(1 + 2^n) \pmod{2^{n+2}}$$

(за този трик вж. задача 25.5 от [1]). Тогава лесно се вижда, че

$$S_{n+1} \equiv 2S_n(1 + 2^{n-1}) \pmod{2^{n+2}}.$$

Сега твърдението следва лесно по индукция.

Задача 3. (Контролно МОМ, 2011) Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с равенствата

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{3 - 2x_n}.$$

Възможно ли е тази редица да е периодична?

Решение. Отговор – не! Да допуснем противното, т.е. че съществуват N и T, такива, че $x_{n+1+T} = x_{n+1}$ за всяко $n \geq N$. Тъй като

$$x_n = \frac{3x_{n+1} - 2}{3 + 2x_{n+1}},$$

от $x_{n+1+T} = x_{n+1}$ следва $x_{n+T} = x_n$ и т.н., т.е. периодичността се оказва пълна.

Да означим $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, където p_n и q_n са взаимнопрости цели числа (т.е. x_n е записано като несъкратима дроб). Тогава рекурентната връзка се записва във вида
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{3p_n + 2q_n}{3q_n - 2p_n}.$$
Лесно се доказва, че $(3p_n + 2q_n, 3q_n - 2p_n) = 1$ или 13, като всъщност общ делител 13 не е възможен, защото това ще означава, че в редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирани с
$$a_{n+1} = 3a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = 3b_n - 2a_n, \quad a_1 = 2, \quad b_1 = 3,$$
има членове, които се делят на 13 (вярно е обратното и това се проверява лесно, тъй като и двете редици са периодични по модул 13).

Следователно имаме $(3p_n + 2q_n, 3q_n - 2p_n) = 1$, което означава, че
$$p_{n+1} = 3p_n + 2q_n, \quad q_{n+1} = 3q_n - 2p_n.$$
От последните равенства следва, че
$$q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 = 13(p_n^2 + q_n^2) = \cdots = 13^{n-1}(p_1^2 + q_1^2) = 13^n.$$
Но сега от $x_{T+1} = x_1 = \dfrac{2}{3}$ следва, че $x_T = 0$, т.е. $13 \mid p_T$, значи $13 \mid q_T$, противоречие.

Задача 4. За редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е известно, че a_0 е естествено число,
$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n - 1}{2}, & \text{ако } a_n \geqq 1, \\ \dfrac{2a_n}{1 - a_n}, & \text{ако } a_n < 1 \end{cases},$$
$a_n \neq 2$ за $1 \leqq n \leqq 2015$ и $a_{2016} = 2$. Да се намери a_0.

Решение. Ако $a_n = \dfrac{p}{q}$ е несъкратима дроб, то $a_{n+1} = \dfrac{p-q}{2q}$ или $\dfrac{2q}{q-p}$. Тъй като $(2q, p-q) = 1$ или 2, сумата от числителя и знаменателя на несъкратимия вид на a_{n+1} е $p+q$ или $\dfrac{p+q}{2}$ (т.е. сумата остава същата или намалява два пъти).

Тъй като за $a_{2016} = 2$ въпросната сума е равна на 3, а сумата от числителя и знаменателя на a_0 е $a_0 + 1$, трябва да имаме
$$a_0 + 1 = 3.2^k$$

за някое естествено число k. Тогава

$$a_n = 3.2^{k-n} - 1 \quad \text{за всяко} \quad n \leqq k,$$

което означава, че при $n = k$ ще имаме $a_n = 2$. От условието следва, че $k = 2016$, т.е. $a_0 = 3.2^{2016} - 1$.

Забележка. Преформулирайте и решете задачата за редицата с общ член $b_n = \dfrac{1}{1 + a_n}$.

Задача 5. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват $n + 1$ реални положителни числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, такива, че всичките 2^{n+1} полинома

$$\pm a_0 \pm a_1 x \pm \cdots \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm a_n x^n$$

имат по n реални корена.

Решение. Твърдението е вярно при $n = 1$. От индукционото предположение следва, че всички полиноми $\pm a_0 x \pm a_1 x^2 \pm \cdots \pm a_{n-1}x^n \pm a_n x^{n+1}$ имат по $n+1$ различни реални корена. Тогава всеки от тези полиноми има по n локални екстремума, никой от които не се достига в корен, т.е. не е равен на 0. Следователно е достатъчно да изберем свободен член ε, който е в интервала $(0, a)$, където a е най-малкият от модулите на всичките $n2^{n+1}$ локални екстремума – тогава полученият полином ще си сменя знака между всеки два от екстремумите, както и преди, и след тях.

Задача 6. Да се докаже, че съществува редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ от реални ненулеви числа, такава, че всеки полином

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

има n различни реални корена.

Решение. Разбира се, исканото следва от твърдението на задача 5. Ще дадем и експлицитна конструкция: да разгледаме $a_j = (-1)^j 10^{-j^2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}
(-1)^k 10^{-k^2} f(10^{2k}) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-k} 10^{-(i-k)^2} \\
&= \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j 10^{-j^2} \\
&> 1 - 2\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j^2} > 0.
\end{aligned}$$

Следователно $f(1), f(10^2), \ldots, f(10^{2n})$ си сменят знака алтернативно и исканото следва.

Задача 7. Функцията $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ притежава следното свойство: за всяко просто число p съществува полином $Q_p(x)$ с цели коефициенти и от степен, ненадминаваща 2016, такъв, че $p | f(n) - Q_p(n)$ за всяко естествено число n. Да се докаже, че съществува полином $g(x)$ с реални коефициенти, за който $f(n) = g(n)$ за всяко естествено число n.

Решение. Нека полиномът $g(x)$ е такъв, че

$$g(i) = f(i) \text{ за } \; i = 1, 2, \ldots, 2017.$$

Тогава от интерполационната формула на Лагранж следва, че $g(x)$ е с рационални коефициенти от степен, ненадминаваща 2016, а полиномът $ag(x)$ е с цели коефициенти за $a = (2016!)^2$.

Нека $p > a$ е просто число. От условието следва, че съществува полином $Q_p(x)$ с цели коефициенти и от степен, ненадминаваща 2016, такъв, че $p | f(n) - Q_p(n)$ за всяко естествено число n. Тогава полиномът $g(x) - Q_p(x)$ е от степен, ненадминаваща 2016, и има 2017 корена в полето $\mathbb{Z}_p$. Следователно

$$p \mid g(n) - Q_p(n)$$

за всяко естествено число n. Но тогава (за фиксирано n)

$$a(f(n) - g(n)) = a(f(n) - Q_p(n)) + a(Q_p(n) - g(n))$$

се дели на p за безбройно много стойности на p, т.е. $f(n) = g(n)$.

Литература

[1] К. Алексиев, К. Бангачев, П. Бойваленков. 640 задачи или теория на числата за олимпиади, Унимат СМБ, София, 2017.

68. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков, Станислав Харизанов, ИМИ – БАН

На 13 и 14 април 2019 г. се проведе Националният кръг на тазгодишната олимпиада по математика. В него участваха 20 ученици от 7 клас, 24 ученици от 8. клас и 74 ученици от 9.–12. клас.

За място в състава на разширения национален отбор за международната олимпиада по математика се преборих **Кристиян Василев** (I място, 12. клас, ПЧМГ), **Евгени Кайряков** (II място, 11. клас, СМГ), **Кристиан Минчев** (III място, 11. клас, ППМГ, Бургас), **Борислав Антов** (11. клас, СМГ), **Иван-Александър Мавров** (12. клас, СМГ), **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ), **Иво Петров** (11. клас, СМГ), **Галин Тотев** (10. клас, ППМГ, Бургас), **Мартин Копчев** (9. клас, ПМГ, Габрово), **Стефан Хаджистойков** (10. клас, СМГ), **Владимир Петков** (10. клас, СМГ), **Димитър Опърлаков** (11. клас, МГ, Варна), **Кьонг Виет До** (10. клас, СМГ).

Предлагаме ви условията и решенията на задачите за 9.–12 клас.

Задача 1. Нека $f(x) = x^2 + bx + 1$, където b е реален параметър. Да се намери броят на целочислените решения на неравенството

$$f(f(x) + x) < 0.$$

(Д. Данова, Н. Николов)

Решение. Ако $|b| \leqq 2$, то $f(x) \geqq 0$ за всяко x.

Нека $|b| > 2$ и $x_1 < x_2$ са реалните нули на f. Тогава

$$\begin{aligned} f(f(x)+x) &= (f(x)+x-x_1)(f(x)+x-x_2) = \\ &= (x-x_1)(x-x_2+1)(x-x_2)(x-x_1+1). \end{aligned}$$

1) Нека $x_2 - x_1 \leqq 1$, т.е. $2 < |b| \leqq \sqrt{5}$. Понеже $f(\pm 1) = 2 \pm b$, лесно следва, че целите числа x, за които $f(f(x) + x) < 0$, са -1 и -2 при $b > 0$, и 1 и 0 при $b < 0$.

2) Нека $x_2 - x_1 > 1$, т.е. $|b| > \sqrt{5}$. Тогава всеки от интервалите $(x_1 - 1, x_1)$ и $(x_2 - 1, x_2)$ съдържа точно по едно цяло число x, за което $f(f(x)+x) < 0$, освен ако x_1 или x_2 не са цели числа.

И така, търсеният брой е равен на 0 при $|b| \leqq 2$, на 1 при $b = m + 1/m$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \geqq 2$, и на 2 в останалите случаи.

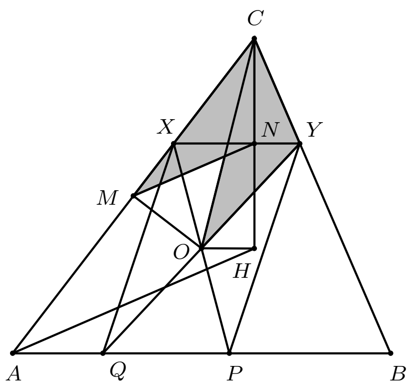
Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Симетралата на CH пресича страните AC и BC съответно в точки X и Y. Правите XO и YO пресичат страната AB съответно в точки P и Q. Ако $XP + YQ = AB + XY$, да се намери $\sphericalangle OHC$.

(*Е. Колев*)

Решение. *Първи начин.* Нека N и M са съответно среди на CH и AC. За $\triangle CYO$ и $\triangle CNM$ имаме: $\sphericalangle OCY = \sphericalangle MCN$ и $\dfrac{CY}{CN} = \dfrac{CO}{CM}$ (което следва от подобието на $\triangle CYN$ и $\triangle COM$). Това означава, че

$$\triangle CYO \sim \triangle CNM.$$

Следователно $\sphericalangle CYO = \sphericalangle CNM$. Понеже MN е средна отсечка в $\triangle AHC$, то $\sphericalangle CHA = 180^\circ - \beta$, т.е. $\sphericalangle BYQ = \beta$, откъдето $YQ = BQ$. Аналогично $XP = AP$.



Условието $XP + YQ = AB + XY$ дава $XY = QP$ и тъй като $XY \parallel PQ$, то $QPYX$ е успоредник. Тъй като O е пресечна точка на диагоналите на този успоредник, то разстоянието от O до XY е равно на разстоянието от O до AB, което е $R\cos\gamma$. Понеже $HN \perp XY$ и $XN = R\cos\gamma$, то $\sphericalangle OHC = 90^\circ$.

Втори начин. Ако N е среда на CH, то $CN = R\cos\gamma$ и

$$CY = \frac{R\cos\gamma}{\sin\beta}, \text{ а } BY = BC - CY = 2R\sin\alpha - \frac{R\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}.$$

Ако $\sphericalangle BYO = \varphi$ от синусовата теорема за $\triangle OBY$ получаваме

$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\sin(90\circ - \alpha + \varphi)} \iff \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\beta.$$

Следователно $\varphi = \beta$, т.е. $YQ = BQ$ и решението се довършва както погоре.

Задача 3. Да се намерят всички реални числа a със следното свойство: за всяка безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ от две по две различни естествени числа, за която неравенството $a_n \leq an$ е изпълнено за всяко естествено число n, съществуват безбройно много членове на редицата със сума на цифрите в бройна система с основа 4038, която не е кратна на 2019.

(*А. Иванов, С. Харизанов*)

Решение. *Отговор:* $1 \leq a < 2019$. Ясно е, че $a \geqq 1$, тъй като a_1 трябва да е естествено число, не по-голямо от a. Нека означим със $\sigma(a_n)$ остатъка при деление на 2019 на сбора от цифрите на a_n в 4038-ична бройна система. Да разгледаме редицата

$$\{b_n \ : \ \sigma(b_n) = 0\}_{n=0}^{\infty},$$

от числата, чиято сума от цифри в 4038-ична бройна система се дели на 2019. Имаме $b_0 = 0$, $b_1 = 2019$, и т.н. Тогава, за всяко $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\sigma(2019n), \sigma(2019n+1), \dots, \sigma(2019n+2018)\}$$

е пълна система остатъци по модул 2019, тъй като в представянето си $2019n, \dots, 2019n + 2018$ се различават единствено по последна цифра. Следователно

$$2019n \leqq b_n \leqq 2019n + 2018.$$

Да разгледаме произволна редица $a_1, a_2, a_3, \dots$, която да не удовлетворява условието на задачата, т.е. само краен брой нейни членове $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ изпълняват $\sigma(a_{i_j}) = 0$. Тогава съществува $M > 0$, $M \in \mathbb{N}$, такова, че $a_m \in \{b_n\}_0^{\infty}$ за всяко $m \geqq M$ и значи за всяко естествено N, числото $a_{M+k} \in \{b_n\}_0^{\infty}$, $k = 0, \dots, N$. Да допуснем, че $a < 2019$. Понеже елементите на редицата са два по два различни, получаваме

$$2019N \leqq b_N \leqq \max_{0 \leqq k \leqq N} a_{M+k} \leqq a(M+N) \ \Rightarrow \ N \leqq \frac{aM}{2019 - a} \text{ за всяко } \ N,$$

което е противоречие, поради предварителния (фиксиран!) избор на M и a. Следователно $1 \leq a < 2019$ е решение на задачата.

За $a \geqq 2019$ редицата $1, b_1, b_2, \dots$ удовлетворява ограничението

$$a_n := b_{n-1} < 2019(n+1) \leqq a(n+1)$$

за всяко n и $\sigma(a_n) = 0$ за всяко $n \geqq 1$. Следователно в тази редица единствено при първия елемент сборът от цифрите му в бройна система с основа 4038 не се дели на 2019. Следователно $a \geqq 2019$ не води до нови решения. Окончателно, $a < 2019$.

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа d, за които съществува естествено число $k \geq 3$, такова, че числата $d, 2d, 3d, \dots, kd$ могат да се наредят в редица със следното свойство: сумата на всеки две съседни числа е точен квадрат.

(*П. Бойваленков, Е. Колев, С. Харизанов*)

Решение. *Отговор:* Всяко d, което е точен квадрат.

Ясно е, че ако съществува $k \geqq 3$ и наредба на $d, 2d, 3d, \dots, kd$, то същото k и същата наредба ще работят за всяко $d_1 = s^2 d$, $s \in \mathbb{N}$. Следователно, достатъчно е да разглеждаме естествените числа d, свободни от квадрати. При $d = 1$ имаме пример за $k = 15$: $8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9$.

Нека сега $d > 1$. Независимо от наредбата на членовете на прогресията, сумата на всеки две съседни ще се дели на d, и тъй като d е свободно от квадрати, то необходимо условие да съществува k с исканото свойство е: всички генерирани точни квадрати да се делят на d^2. Задачата се трансформира до: да се наредят числата от 1 до k в редица $a_1, a_2, \dots, a_k$ така, че за всяко $i = 1, 2, \dots, k-1$ съществува естествено число q_i със свойството: $a_i + a_{i+1} = dq_i^2$. Но тогава

$$a_i + a_{i+1} \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow a_i \equiv -a_{i+1} \pmod{d} \Rightarrow$$

$$a_{2j} \equiv a_{2\ell} \equiv -a_{2\ell+1} \equiv -a_{2j+1} \pmod{d}$$

и значи в цялата редица се срещат само два различни остатъка по модул d. Следователно $k = 2$ (което е невъзможно) или $d = 2$. Последното означава, че числата $a_1, a_2, \dots, a_k$ са от една и съща четност, което е невъзможно.

Задача 5. В изпъкнал 2019-ъгълник са построени всички диагонали, като никои три от тях не се пресичат в една точка. Пресечна точка на два диагонала, вътрешна за многоъгълника, се нарича *възел*. Колко наймного възли могат да се маркират, така че да не съществува поредица от маркирани възли $A_1, A_2, \dots, A_n$, където $A_i A_{i+1}$ е част от диагонал и $A_i A_{i+1}$ и $A_{i+1} A_{i+2}$ са върху различни диагонали (индексите са по модул n)?

(*А. Иванов, С. Харизанов*)

Решение. Отговор: $\dfrac{2019(2019-3)}{2} - 1 = 2035151$.

Да разгледаме по-общата задача, където 2019 е заменено с $n \geqq 4$. Ще докажем, че в изпъкнал n-ъгълник, на който никои три от диагоналите не се пресичат в една точка можем да маркираме най-много $\dfrac{n(n-3)}{2} - 1$ от възлите, така, че да не съществува цикъл с маркирани върхове.

Първо ще дадем оценка, че броят на маркираните възли е по-малък от $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Да допуснем противното и да разгледаме граф, чиито върхове отговарят на диагоналите на n-ъгълника, а ребрата – на маркираните възли.

Тъй като броят на диагоналите в изпъкнал n-ъгълник е точно $\dfrac{n(n-3)}{2}$, то в конструирания граф броят на ребрата е не по-малък от броя на върховете и значи този граф съдържа цикъл. Но лесно се вижда, че има взаимно еднозначно съответствие между циклите в графа и циклите с маркирани възли като върхове.

Сега ще покажем по индукция, че можем да маркираме $\dfrac{n(n-3)}{2} - 1$ възела без да "зациклим". Базата при $n = 4$ е тривиална. Нека сега за произволен изпъкнал n-ъгълник сме доказали, че можем да маркираме $\dfrac{n(n-3)}{2} - 1$ от възлите му без наличието на цикъл от маркирани възли. Да разгледаме изпъкнал $(n+1)$-ъгълник $A_1A_2\dots A_{n+1}$ и да вземем едно такова маркиране за възлите на многоъгълника $A_1A_2\dots A_n$. Добавяйки върха A_{n+1}, страната A_1A_n от $A_1A_2\dots A_n$ се трансформира в диагонал и към диагоналите на $A_1A_2\dots A_n$ добавяме и диагоналите $A_{n+1}A_i$, $i = 2,\dots,n-1$. Сега върху A_1A_n имаме точно $n-2$ възела, които маркираме. Освен това маркираме още един възел върху диагонал от A_{n+1}, например пресечната точка на $A_{n+1}A_2$ и A_1A_3. (Поради изпъкналостта на фигурите е ясно, че всички гореизброени пресечни точки са наистина вътрешни за многоъгълника и значи са възли!) Общо получихме

$$\frac{n(n-3)}{2} - 1 + (n-1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - 1$$

маркирани възела. Измежду новомаркираните $n-1$ възела "съседство" се реализира единствено върху диагоналите A_1A_n и A_2A_{n+1}. При това, всеки друг диагонал през A_{n+1} съдържа точно един маркиран възел, т.е. не реализира съседства. Лесно се съобразява, че за да съществува цикъл от маркирани възли, при положение, че маркирането на възлите на $A_1A_2\dots A_n$ е ациклично по индукционно предположение, в него трябва да участват поне два от новомаркираните възли и значи поне един от възлите върху A_1A_n. Но освен помежду си, тези възли общо имат точно един маркиран съсед (по конструкция) и няма как да се образува цикъл с тяхно участие. Следователно конструираното маркиране също е ациклично и индукцията е завършена.

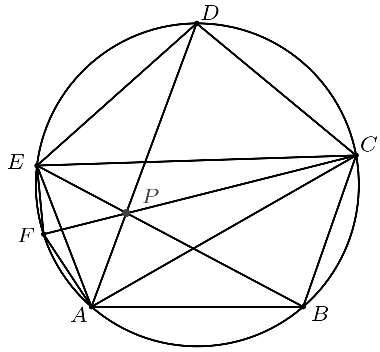
Задача 6. Даден е шестоъгълник $ABCDEF$, вписан в окръжност, за който $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$. Нека точките B и B_1 са симетрични относно правата AC, D и D_1 са симетрични относно CE, F и F_1 са симетрични относно EA. Да се докаже, че $\triangle B_1D_1F_1$ е подобен на $\triangle BDF$.

(А. Иванов, С. Герджиков)

Решение. От условието $|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |AF|$ лесно се вижда, че AD, BE и CF се пресичат в една точка.

Това може да се види от $\triangle ACE$, в който

$$\frac{\sin\sphericalangle DAC}{\sin\sphericalangle DAE}=\frac{|DC|}{|DE|},$$
$$\frac{\sin\sphericalangle AEB}{\sin\sphericalangle CEB}=\frac{|AB|}{|BC|},$$
$$\frac{\sin\sphericalangle ECF}{\sin\sphericalangle ACF}=\frac{|EF|}{|AF|}.$$

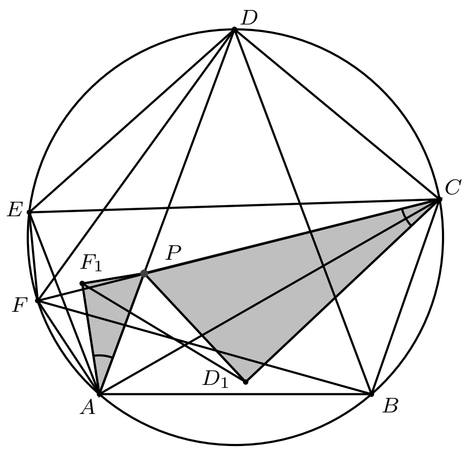


Като умножим трите равенства и използваме условието на задачата, по синусовия вариант на теоремата на Чева следва, че AD, BE и CF се пресичат в една точка. Нека тази точка означим с P.

Да разгледаме $\triangle AF_1P$ и $\triangle CD_1P$. Като използваме, че F_1 и D_1 са симетрични на F и D относно AE и CE и това, че шестоъгълникът е вписан, имаме, че

$$\begin{aligned}\sphericalangle PAF_1 &= |\sphericalangle PAE-\sphericalangle F_1AE|=|\sphericalangle DAE-\sphericalangle FAE|\\ &= |\sphericalangle DCE-\sphericalangle FCE|=|\sphericalangle D_1CE-\sphericalangle PCE|=\sphericalangle PCD_1.\end{aligned}$$

Горното изразяване показва, че D_1 и D са от различна страни на CF точно когато F и F_1 са в една и съща полуравнина относно AD.



Като използваме, че $\triangle APF\sim\triangle CPD$ и $|AF_1|=|AF|$ и $|CD_1|=|CD|$, получаваме

$$\frac{|AF_1|}{|CD_1|}=\frac{|AF|}{|CD|}=\frac{|AP|}{|CP|}.$$

Следователно $\triangle AF_1P \sim \triangle CD_1P$. Оттук $\sphericalangle APF_1 = \sphericalangle CPD_1$ и

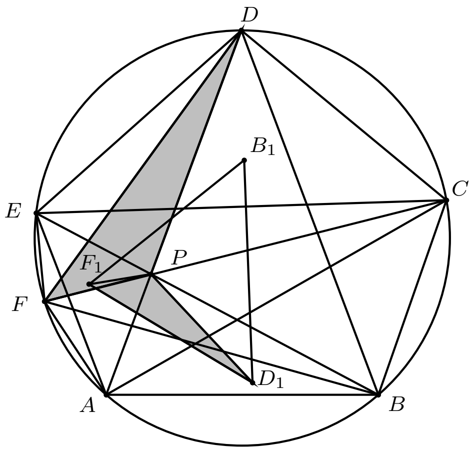
$$\frac{|F_1P|}{|D_1P|} = \frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|FP|}{|DP|},$$

където последното равенство отново е от подобните $\triangle APF \sim \triangle CPD$. Освен това, тъй като D_1 е извън $\sphericalangle PCD$ точно когато F_1 е в $\sphericalangle FAP$, то $\sphericalangle F_1PD_1 = \sphericalangle APC = \sphericalangle FPD$. С това имаме, че

$$\frac{|F_1P|}{|D_1P|} = \frac{|FP|}{|DP|} \quad \text{и} \quad \sphericalangle F_1PD_1 = \sphericalangle FPD.$$

Следователно $\triangle F_1D_1P \sim \triangle FDP$. Това показва, че

$$\frac{|F_1D_1|}{|FD|} = \frac{|F_1P|}{|FP|} = \frac{|D_1P|}{|DP|}.$$



Аналогично се доказва, че

$$\frac{|D_1B_1|}{|DB|} = \frac{|D_1P|}{|DP|} = \frac{|F_1D_1|}{|FD|} \quad \text{и} \quad \frac{|F_1B_1|}{|FB|} = \frac{|F_1P|}{|FP|} = \frac{|F_1D_1|}{|FD|}.$$

Следователно $\triangle F_1D_1B_1 \sim \triangle FDB$.

Забележка. Интересно е да се разгледат резултатите на участниците в Националния кръг.

Задача	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Среден резултат	4,2	1,7	1,2	5,3	1,5	1,5
Брой решения (6 или 7 т.)	34	14	8	46	11	12

Най-лесните задачи са първа и четвърта, а най-трудна е трета задача.

Оказва се, че класирането се определя в най-голяма степен от резулатите по задачи 2, 5 и 6.

ОСМА ЕВРОПЕЙСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА ЗА МОМИЧЕТА EGMO 2019

Велина Иванова, Деница Маркова

От 7 до 13 април в Киев, Украйна, се проведе Осмата олимпиада по математика за момичета. Тази олимпиада цели да привлече повече момичета, които да се занимават с математика, както и да увеличи броя им в международните олимпиади и състезания. Олимпиадата се провежда само в европейски държави и официалните участнички са само представителките от Европа, но действително участват момичета от цял свят, като броят на участващите държави се увеличава с годините. Тази година в олимпиадата взеха участие 196 момичета, от които 142 официални участнички. Те представяха 50 страни, 36 от които европейски.

Форматът на олимпиадата е същият като формата на Международната олимпиада по математика – в два последователни дни участниците решават по 3 задачи, всяка от които се описва подробно и носи по 7 точки. Тази година задачите бяха предложени от Холандия, Люксембург, Полша, Великобритания.

Българският отбор се представи отлично, като спечели един златен и три сребърни медала. Нашите състезателки спечелиха общо 110 точки, което е нов рекорд за седемте години участие на България в това състезание. Този резултат ни поставя на трето място в света в отборното класиране след отборите на САЩ и домакините от Украйна. Михаела Гледачева от ПЧМГ спечели златен медал с 35 точки и е на пето място в общото класиране. Люба Конова (СМГ), Маргарита Стефанова (СМГ) и Марина Бояджиева (ППМГ Бургас) получиха по 25 точки и спечелиха сребърни медали. Ръководители на отбора бяха Деница Маркова и Велина Иванова, бивши участнички в олимпиадата.

Предлагаме Ви условия на задачите и кратки решения.

Задача 1. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от реални числа, за които $ab + bc + ca = 1$ и

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Решение. От условието $ab = 1 - ac - bc$ и тогава

$$b^2c + a = a^2b + c = a - abc - a^2c + c \quad \text{и} \quad c(b^2 + a^2 + ab - 1) = 0.$$

Ако $c = 0$, то $ab = 1$ и $a^2b = b$, откъдето следва $a = b = \pm 1$. В противен случай, $a^2 + b^2 + ab = 1$. Случаите $a = 0$ и $b = 0$ са аналогични на $c = 0$, така че може да допуснем, че $a, b, c \neq 0$. Тогава получаваме системата

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + ab = 1, \\ b^2 + c^2 + bc = 1, \\ c^2 + a^2 + ac = 1, \\ ab + bc + ac = 1. \end{cases}$$

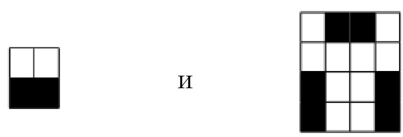
Събирайки първите три равенства и изваждайки последното получаваме $2(a^2+b^2+c^2) = 2 = 2(ab+bc+ca)$, откъдето $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$ и следователно $a = b = c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. Нека n е естествено число. Дъска $2n\times 2n$ е покрита с домина така, че всяко поле на дъската е съседно на точно едно поле, покрито с домино. За всяко n, да се намери най-големият брой домина, които могат да бъдат поставени по този начин.

(Ще наричаме *домино* група от полета 2×1 или 1×2. Домина се слагат на дъската така, че всяко домино покрива точно две полета на дъската и никое две домина не се застъпват. Две полета се наричат *съседни*, ако са различни и имат обща страна.)

Решение. Нека обозначим с M най-големия брой домина, които могат да бъдат поставени на дъската според изискванията. Ще докажем, че $M = n(n+1)/2$ като първо покажем как можем да поставим точно $n(n+1)/2$ домина на дъската, а след това докажем, че $M \leqq n(n+1)/2$.

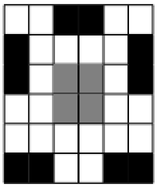
Ще конструираме начините за поставяне на домина индуктивно. Базовите случаи $n = 1$ и $n = 2$ съответстват на конструкциите



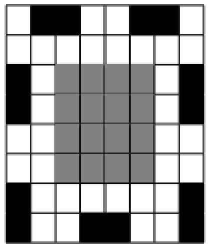
След това добавяме домина по ръба на дъска $2n \times 2n$, за да получим конструкция за дъска $2(n+1) \times 2(n+1)$. в зависимост от четността на n. В тези примери, защрихованият квадрат е запълнен с конструкцията за дъска $2n\times 2n$. Конструкцията ни добавя $2n+3$ домина и съответно поставя общо

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2n + 3 = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

домина на дъската. След като забележим, че външният ръб и вътрешната конструкция осигуряват на всяко поле на дъската единствен съсед, покрит



или



с домино, индукцията ни е завършена. С това достигнахме до конструкция, поставяща $n(n+1)/2$ домина на дъска $2n \times 2n$.

За да докажем, че $M \leqq n(n+1)/2$, ще разширим дъската ни $2n \times 2n$ с рамка от по един ред от всяка страна (без да добавяме нови ъглови полета), за да достигнем до дъска $2(n+1) \times 2(n+1)$. Това разширение добавя $8n$ полета към началните $4n^2$. Нека наречем едно поле покрито, ако върху него или негов съсед лежи домино. Можем да видим, че на всяко домино съответстват точно 8 покрити полета, някои от които принадлежащи на рамката. Също така, всяко от началните $4n^2$ полета е покрито.

Ще докажем, че от всеки 4 поредни клетки от рамката, най-много 2 могат да бъдат покрити. Да допуснем противното – от четири поредни клетки A, B, C, D поне три са покрити. Без ограничение на общността, това са A, B и C или A, B и D. Ако допуснем, че A, B, C са покрити, то в полетата от дъската, съседни на A, B и C има домино. Но тогава полето до B има поне два съседа, съдържащи домино – противоречие. Ако допуснем, че A, B, D са покрити, то в съседните им полета от дъската лежи домино. Но тогава полето, съседно на C, има два съседа, съдържащи домино – отново противоречие.

Можем да разделим полетата от всяка от четирите страни на рамката на групи от по 4 съседни полета (и още една група от по 2, ако n е нечетно). Когато n е четно, най-много n измежду $2n$-те клетки от всяка страна на рамката могат да са покрити, а ако n е нечетно - най-много $n+1$. Това значи, че най-много $4n^2+4n+4$ клетки от разширената ни дъска могат да са покрити. Получаваме неравенството $M \leqq \dfrac{4n^2+4n+4}{8} = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{1}{2}$. Тъй като знаем, че числото $\dfrac{n(n+1)}{2}$ е цяло, можем да заключим, че $M \leqq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с ъгли $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$ и център на вписаната окръжност I. Точка D лежи на отсечката BC така, че $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Нека ω е окръжността, която се допира до AC в точка A и съдържа точка I. Нека X е втората пресечна точка на ω и описаната около триъгълник ABC окръжност. Да се докаже, че ъглополовящите на ъгли $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle CXB$ се пресичат в точка от правата BC.

Решение. Нека S е пресечната точка на BC и ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$ и нека T е пресечната точка на BC и ъглополовящата на $\sphericalangle BXC$. Ще докажем, че четириъгълниците $AISB$ и $AITB$ са вписани, откъдето ще следва, че $S = T$.

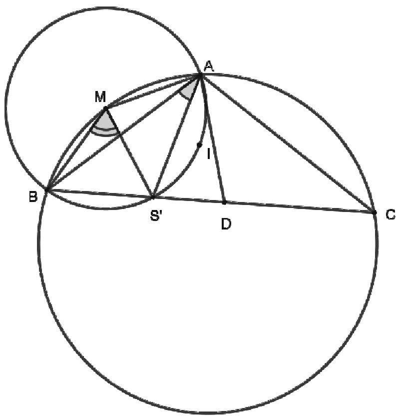
Първо, нека M е средата на дъгата AB от описаната около триъгълник ABC окръжност, която не съдържа C. Нека разгледаме окръжността с център M, която минава през точките A, I и B (известен факт е, че $MA = MB = MI$). Нека тази окръжност пресича BC в точките B и S'. Тъй като $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$, лесно се проверява, че S' лежи на отсечката BC. Като означим ъглите на триъгълник ABC с α, β, γ, получаваме

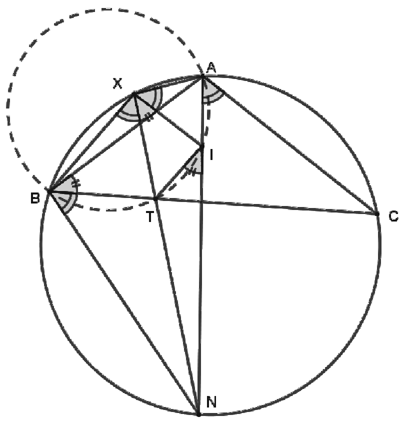
$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = \alpha - \beta.$$

Тъй като $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MBA + \sphericalangle ABC = \dfrac{\gamma}{2} + \beta$, то

$$\sphericalangle BMS' = 180^\circ - 2\sphericalangle MBC = 180^\circ - \gamma - 2\beta = \alpha - \beta.$$

Следователно $2\sphericalangle BAS' = \sphericalangle BMS' = \sphericalangle BAD$, откъдето $S = S'$.





Второ, нека N е средата на дъгата BC от описаната около триъгълник ABC окръжност, която не съдържа A. От $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$ следва, че X лежи на дъгата AB от описаната около триъгълник ABC окръжност, която не съдържа C. Очевидно AI и XT минават през N. Тъй като $\sphericalangle NBT = \dfrac{\alpha}{2} = \sphericalangle BXN$, имаме $\triangle NBT \sim \triangle NXB$ и оттук $NT \cdot NX = NB^2 = NI^2$. Така $\triangle NTI \sim \triangle NIX$. От равенството на ъглите

$$\sphericalangle NBC = \sphericalangle NAC = \sphericalangle IXA$$

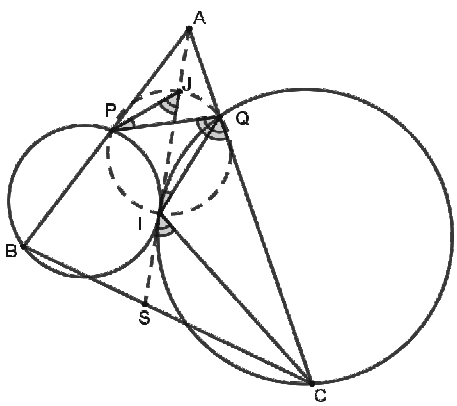
получаваме

$$\sphericalangle TIN = \sphericalangle IXN = \sphericalangle NXA - \sphericalangle IXA = \sphericalangle NBA - \sphericalangle NBC = \sphericalangle TBA.$$

Това означава, че точките A, I, B и T лежат на една окръжност и доказателството е завършено.

Забележка. Забележителен факт е, че българският отбор има най-много точки от Задача 3 сред всички участващи отбори в олимпиадата.

Задача 4. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I. Окръжността през точка B, допираща се до AI в точка I, пресича отсечката AB за втори път в точка P. Окръжността през точка C, допираща се до AI в точка I, пресича отсечката AC за втори път в точка Q. Да се докаже, че PQ се допира до вписаната в триъгълник ABC окръжност.



Решение. От степен на точка получаваме $AQ \cdot AC = AI^2 = AP \cdot AB$, което означава, че $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AB}{AC}$ и следователно триъгълниците AQP и ABC са подобни.

Нека J е центърът на вписаната окръжност в триъгълник AQP. Имаме

$$\sphericalangle JPQ = \sphericalangle ICB = \sphericalangle QCI = \sphericalangle QIJ,$$

и оттук точките J, P, I, Q лежат на една окръжност. Нека S е пресечната точка на AI и BC. Тогава

$$\sphericalangle IQP = \sphericalangle IJP = \sphericalangle SIC = \sphericalangle IQC.$$

Това означава, че IQ е ъглополовяща на $\sphericalangle CQP$ и QP действително е допирателна към вписаната в триъгълник ABC окръжност.

Задача 5. За естествено $n \geqq 2$, нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са естествени числа. Да се докаже, че съществуват естествени числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, които изпълняват следните три условия:

(А) $a_i \leqq b_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n$;

(Б) остатъците на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ при деление на n са два по два различни; и

(В) $b_1 + \cdots + b_n \leqq n \left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Тук $\lfloor x \rfloor$ означава цялата част на реалното число x, т.е. най-голямото цяло число, което не надвишава x.)

Решение. Нека за всяко a_i, $i = 1, \dots, n$, изберем най-малкото цяло число $c_i \geqq 0$ така, че остатъците на $a_1 + c_1, \dots, a_{i-1} + c_{i-1}$ при деление на n са два по два различни. Нека допуснем, че някое $c_i > i - 1$. Това значи, че когато сме избирали c_i, остатъците $a_i, a_i + 1, \dots, a_i + i - 1$ са били заети – но това са i остатъка, а числата $a_1 + c_1, \dots, a_{i-1} + c_{i-1}$ дават $i - 1$ различни остатъка - противоречие. Следва, че $c_i \leqq i - 1$ и по конструкция числата $b_i = a_i + c_i$ за $i = 1, \dots, n$ дават различни остатъци при деление на n. Също така, по конструкция $b_i \geqq a_i$ за всяко $i = 1, \dots, n$.

Остава да докажем, че $b_1 + \cdots + b_n \leqq n \left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$. Нека положим $a_1 + \cdots + a_n = qn + r$, $0 < r \leqq n$. Тогава, $\left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor = q$ и е необходимо да докажем, че

$$b_1 + \cdots + b_n \leqq \frac{n(n-1)}{2} + nq.$$

Разглеждайки числата b_i по модул n, знаем, че

$$b_1 + \cdots + b_n \equiv 0 + 1 + \cdots + (n-1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n},$$

следователно $b_1 + \cdots + b_n = nk + \dfrac{n(n-1)}{2}$ за някое цяло число k. Можем да направим оценката

$$\begin{aligned} b_1 + \cdots + b_n &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + c_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i + 0 + 1 + \cdots + (n-1) \\ &= nq + r + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

тъй като $c_i \leqq i - 1$. Това ни показва, че $nk \leqq nq + r$. Тъй като k и q са цели числа, заключаваме че $k \leqq q$ и оттам

$$b_1 + \cdots + b_n = nk + \frac{n(n-1)}{2} \leqq nq + \frac{n(n-1)}{2}$$

и конструкцията ни изпълнява и трите условия.

Задача 6. Андрей чертае 2019 хорди от една окръжност, всеки две от които имат различни краища. Една точка се нарича *маркирана* ако е или

(i) измежду 4038-те краища на хорди; или

(ii) пресечна точка на поне две хорди.

Андрей записва число във всяка маркирана точка. Измежду 4038-те маркирани точки по критерий (i), Андрей избира 2019, в които да запише числото 0, а в останалите 2019 той записва числото 1. Във всяка от точките по критерий (ii) той записва произволно цяло число (не задължително положително).

По всяка хорда, Андрей разглежда отсечките, определени от съседни маркирани точки. (Хорда с k маркирани точки съдържа $k-1$ такива отсечки.) За всяка от тези отсечки, той записва в жълто сумата на числата, записани в двата ѝ края, и в синьо – абсолютната стойност на разликата им.

Андрей открива, че $N+1$-те жълти числа приемат всяка от стойностите $0, 1, \ldots, N$ точно веднъж. Да се докаже, че поне едно от сините числа е кратно на 3.

(Наричаме *хорда* всяка отсечка, съединяваща две различни точки от окръжност.)

Решение. Първо ще докажем следната лема:

Лема. Ако оцветим всички точки в бяло и черно, то броят на черно-белите отсечки, E_{WB}, и броят на белите, C_W, (или черните, C_B,) точки по окръжността имат една и съща четност.

Да забележим, че промяната на цвета на произволна вътрешна точка не променя четността на E_{WB}, тъй като всяка вътрешна точка има четна степен, така че е достатъчно да докажем твърдението, ако всички вътрешни точки са черни. Но тогава $E_{WB} = C_W$ и очевидно четностите им съвпадат.

Сега да се завърнем към дадената задача и да допуснем, че няма две съседни точки, такива че разликата на числата в тях е кратна на 3. Да оцветим точките в зависимост от остатъка на числото в тях при деление на 3. Означаваме с E_{01} броя на отсечките с краища върхове в цвят 0 и в цвят 1, а с C_0 означаваме броя на върховете в цвят 0 по окръжността. Въвеждаме аналогични означения за другите цветове.

Нека разгледаме оцветяване в два цвята, като за целта разглеждаме 0-върховете и 1-върховете като едно цяло. Прилагайки лемата получаваме $E_{01} + E_{02} \equiv C_0 \pmod 2$. Аналогично $E_{01} + E_{12} \equiv C_1 \pmod 2$ и $E_{02} + E_{12} \equiv C_2 \pmod 2$. Сега като използваме, че $C_0 = C_1 = 2019$ и $C_2 = 0$, получаваме, че или E_{02} и E_{12} са четни и E_{01} е нечетно, или E_{02} и E_{12} са нечетни и E_{01} е четно.

Но тъй като жълтите числа са целите числа от 0 до 2019, то или $E_{01} = E_{12}$, или $N \equiv 0 \pmod 3$ и тогава $E_{01} = E_{02}$. И в двата случая получаваме противоречие и следователно поне едно от сините числа е кратно на 3.

ВСЕРУСИЙСКА УЧЕНИЧЕСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Ивайло Кортезов*, Елена Киселова†

От 21 до 27 април 2019 в Пермския край (Русия) се проведе Заключителният етап на XLV Всерусийска ученическа олимпиада по математика. Участваха 378 ученици от Русия, както и гост отборите на България и Китай. Отборът на България беше избран сред учениците от 9 до 11 клас, допуснати и постигнали най-високи резултати извън челната шестица (съставяща отбора за БОМ) на контролните работи, проведени в ИМИ–БАН на 5–6 април 2019.

Работите на участниците във Всерусийската ученическа олимпиада се оценяваха от 40-членно жури. В него личаха имената на голяма част от специалистите, диктуващи световната мода в математическите състезания.

Учениците решаваха два дни по четири задачи (по седем точки всяка) за пет астрономически часа. Както и очаквахме, Централната предметно-методическа комисия по математика за Всерусийската ученическа олимпиада предложи на учениците много атрактивни и идейни задачи. Следва да се отбележи, че максималният възможен сбор от точки (56) не бе достигнат от нито един участник, и все пак всяка от задачите беше решена от поне един ученик, което свидетелства за добрия подбор на темите.

Българският отбор, явяващ се във възрастовата група 10-ти клас, се представи много добре. Мартин Копчев от ПМГ Габрово с 41 точки е призьор I степен (което ще преведем условно като сребърен медал). Стефан Хаджистойков от СМГ с 37 точки и Светлин Лалов от СМГ с 35 точки са призьори II степен (което превеждаме като бронзови медали). Диян Димитров от СМГ с 29 точки, Михаела Гледачева от ПЧМГ с 28 точки и Димитър Опърлаков от МГ Варна с 28 точки спечелиха почетни грамоти. Ръководители на отбора бяха доц. Ивайло Кортезов (ИМИ–БАН) и Елена Киселова (старши учител в СМГ).

Следва да се отбележи, че по новите правила, статистически погледнато, спечелването на условно наречения златен медал, а именно Победител във Всерусийската ученическа олимпиада по математика, е по-трудно от спечелването на златен медал на МОМ. Реално в момента границите за (условно) сребърните медали, бронзовите медали и почетните грамоти съответстват на предишните граници съответно на златните, сребърните и бронзовите медали.

*Институт по математика и информатика, Българска академия на науките (ИМИ–БАН)

†Софийска математическа гимназия (СМГ)

Вярваме, че работата ви по състезателните теми, предложени по-долу, ще ви достави голямо естестическо удоволствие и ще придобиете нови знания и умения. В следващия брой ще можете да сверите постигнатото; тук само към някои задачи ще дадем кратки коментари.

9 клас

Задача 9.1. В равнината са отбелязани 5 точки. Докажете, че можем да преместим няколко от тях, без да променяме разстоянията между местените точки, и да получим множество от 5 точки, симетрично относно някоя права в равнината.

Забележка. Ако си изберете някоя симетрала, няма да се налага твърде голямо местене.

Задача 9.2. При какво най-малко естествено n съществуват цели $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такива че уравнението

$$x^2 - 2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 1\right) = 0$$

има поне един цял корен?

Задача 9.3. Окръжност Ω с център в точката O е описана около остроъгълния триъгълник ABC ($AB < BC$), имащ ортоцентър H. На продължението на отсечката BO след точка O е отбелязана точка D, за която $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$. Правата през H, успоредна на BO, пресича по-малката дъга AC от Ω в точка E. Докажете, че $BH = DE$.

Задача 9.4. В лагер има 10000 деца. Всеки е приятел с 11 други деца от лагера (приятелството е взаимно). Всеки носи тениска в един от седемте цвята на дъгата. Ако двамина са приятели, то тениските им са разноцветни. Трябвало някои деца (поне едно) да сменят тениската си с такава от друг цвят (от седемте). Сто от децата отказали да си сменят тениските. Да се докаже, че някои от останалите могат да си сменят цвета на тениската, така че пак приятелите да са с разноцветни тениски.

Задача 9.5. В детската градина учителката взела $n > 1$ еднакви картонени правоъгълници и ги раздала на n деца, на всяко по един. Всяко дете разрязало своя правоъгълник на няколко еднакви квадратчета (квадратчетата на различните деца могат да са различни). Оказало се, че общият брой квадратчета е просто число. Докажете, че началните правоъгълници са били квадрати.

Забележка. Ако размерите бяха $x > y$, щяхте да можете да запишете рационалното (защо?) число x/y като несъкратима дроб s/t ($s > 1$).

Задача 9.6. Точка D лежи на страната AC на триъгълник ABC, за който $AB = AC$. Точка K лежи на по-малката дъга CD от описаната около BCD окръжност. Лъчът $\overrightarrow{CK}$ пресича правата през A, успоредна на BC, в точка T. Ако M е средата на DT, докажете, че $\sphericalangle AKT = \sphericalangle CAM$.

Задача 9.7. Има 16 еднакви на вид монети: 8 по 11 г („тежки“) и 8 по 10 г („леки“). Една от монетите е юбилейна. Как с три претегляния на везна с две блюда без теглилки да разберем дали юбилейната монета е тежка или лека?

Задача 9.8. Ако $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, докажете, че

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

10 клас

Задача 10.1. На всяка точка A от равнината съпоставяме реално число $f(A)$. Известно е, че ако M е медицентър на триъгълник ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажете, че $f(A) = 0$ за всички точки A.

Забележка. Ето една подобна задача от математически лагер, която беше цитирана от един много силен ученик като причина навремето да бъде привлечен към математиката: Чък Норис има във всяка ръка два пъти повече пистолети, отколкото в другата. Колко пистолета общо има Чък Норис?

Задача 10.2. Паша и Вова играят на следната игра, като правят ходове, редувайки се. Отначало те имат голямо парче пластелин. Започва Паша. За един ход Паша може да разреже едно произволно налично парче пластелин на три части (не непременно равни). Вова на свой ред избира две парчета и ги слепя. Паша побеждава, ако в даден момент сред наличните парчета пластелин има 100 с еднаква маса. Може ли Вова да попречи на Паша да победи?

Забележка. Поставете се на мястото на Паша: дали не е естествено да си харесате един размер и да се старaете да се сдобиете с повечко бройки от него? Само преценете добре, преди да си изберете размера – той има значение!

Задача 10.3. Междугалактически хотел има 100 стаи с вместимости 101, 102, ..., 200 души. Там живеят общо n души. В хотела пристигнал VIP-гост, за когото трябвало да се освободи цяла стая. За целта директорът на хотела избира една стая и премества всички живущи в нея в една и съща друга стая, стига да не се надхвърля капацитетът. При какво най-голямо n директорът винаги може да освободи стая независимо от началното разпределение?

Забележка. Групирайте стаите по двойки. Ако директорът не може да се справи, то броят хора във всяка двойка е по-голям от вместимостта на по-голямата от тях.

Задача 10.4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $AC < BC$. Окръжност минава през точките A и B и пресича отсечките CA и CB повторно съответно в точки A_1 и B_1. Описаните окръжности около триъгълниците ABC и A_1B_1C се пресичат повторно в точка P. Отсечките AB_1 и BA_1 се пресичат в точка S. Точките Q и R са симетрични на S съответно относно правите CA и CB. Докажете, че точките P, Q, R и C лежат на една окръжност.

Забележка. Припомнете си известното описание на точката на Микел като център на въртяща хомотетия. Приложете го за правите AB, CA, BC, A_1B_1 и за $h : \overrightarrow{AA_1} \to \overrightarrow{BB_1}$.

Забележка. Сравнете със задача 5 от МОМ 1985, вижте например `mks.mff.cuni.cz/kalva/imo/isoln/isoln855.html`

Задача 10.5. Вижте задача 9.5.

Задача 10.6. В остроъгълен триъгълник ABC е построена ъглополовящата BL. Точките D и E са съответно средите на по-малките дъги AB и BC на окръжността ω, описана около триъгълника ABC. На продължението на отсечката BD след точка D е отбелязана точка P, а на продължението на отсечката BE след точка E – точка Q, така че $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD = 90^\circ$. Докажете, че средата на отсечката BL лежи на правата PQ.

Задача 10.7. В школа по математика участват 24 ученици. Всеки отбор от шестима ученици се счита за *сработен* или за *несработен.* За участие в математически боеве ръководителят трябва да разпредели учениците в 4 отбора от по 6 души. Може ли да се окаже, че при всяко разпределение на учениците в 4 отбора сработени са точно един или точно три от тях, като при това да съществуват и единият, и другият вариант?

Забележка. Сбор от цели числа е нечетен точно когато съдържа нечетен брой нечетни събираеми.

Задача 10.8. Дадени са неконстантен многочлен $P(x)$ с цели коефициенти и естествено число n. Редицата $a_0, a_1, ...$ е определена с $a_0 = n$ и $a_k = P(a_{k-1})$ за всяко естествено k. Оказало се, че за всяко естествено b в редицата a_0, a_1, a_2, $\ldots$ има число, което е b-та степен на естествено число, по-голямо от 1. Докажете, че многочленът $P(x)$ е линеен.

Забележка. Докажете, че $a_k(a_k - 1)$ се дели на $a_{k+1} - a_k$; за целта може в някой случай да е полезно да ползвате теоремата на Ойлер.

11 клас

Задача 11.1. Вижте задача 10.1.

Задача 11.2. Вярно ли е, че при произволни ненулеви цели числа a и b системата

$$\left| \begin{array}{rcl} \operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay) & = & 1 \\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by) & = & 1 \end{array} \right.$$

има решение?

Задача 11.3. Имаме $n > 2$ монети, всеки две тежащи различно, и n везни с по две блюда. На всеки ход на блюдата на някоя везна се поставя по монета, показанието на везната се записва и монетите се прибират обратно. Една от везните (не знаем коя) е повредена: понякога мери вярно, друг път грешно. С колко най-малко хода можем със сигурност да открием най-тежката монета?

Задача 11.4. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$. Сферата ω_A допира стената BCD и равнините на останалите стени, но не и самите стени. Сферата ω_B допира стената ACD и равнините на останалите стени, но не и самите стени. Нека ω_A допира равнината ACD в точка K, а ω_B допира равнината BCD в точка L. На лъчите $AK^{\rightarrow}$ и $BL^{\rightarrow}$ след K и L са избрани съответно точки X и Y, така че $\sphericalangle CKD = \sphericalangle CXD + \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle CLD = \sphericalangle CYD + \sphericalangle CAD$. Докажете, че X и Y са на равни разстояния от средата на CD.

Задача 11.5. Радиусите на пет концентрични окръжности ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуват в този ред геометрична прогресия с частно q. За кое най-голямо q можем да начертаем незатворена начупена линия $A_0A_1A_2A_3A_4$, съставена от 4 равни отсечки, за която $A_i \in \omega_i$ за $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

Задача 11.6. Вижте задача 9.6.

Задача 11.7. Вижте задача 10.8.

Задача 11.8. Дадено е естествено число n. Куб $3 \times 3 \times 3$ е съставен от 27 единични кубчета, от които централното е черно, а останалите – бели. От n^3 такива кубове сглобили куб с ръб $3n$. Какъв най-малък брой бели кубчета можем да преоцветим в червено, така че всяко бяло кубче да има поне един общ връх с някое червено?

Забележка. Прави впечатление, че това, което според мястото в темата трябва да е най-трудната задача в най-трудния клас, всъщност е тримерен вариант на задачата с мобилните оператори (Задача 8.4. от Зимните математически състезания, Русе 2010) на един от авторите на тази статия (като тримерността не влияе особено на комбинаторните разсъждения), така че въобще не ѝ се плашѐте. Последният съвет е полезен, разбира се, в много по-общ план.

ЕДНА ЗАДАЧА — МНОГО РЕШЕНИЯ

Николай Райков

Ще разгледаме една класическа геометрична задача и нейни решения, подходящи за ученици от различни класове.

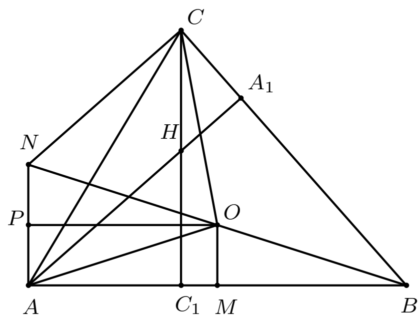
> Даден е остроъгълен разностранен $\triangle\ ABC$ с ортоцентър H и център на описана окръжност O. Да се докаже, че разстоянието от H до връх на триъгълника е два пъти по-голямо от разстоянието от O до страната срещу този връх.

В изложените решения ще считаме, че разположението на точките е както е показано на съответните чертежи.

Решение с еднакви триъгълници за ученици от 7. клас

На продължението на BO построяваме точка N така, че $ON = OB$.

От $OA = OB = ON$ следва, че $\sphericalangle BAN = 90^\circ$. От $NA \perp AB$ и $CC_1 \perp AB$ следва, че



$$AN || HC. \tag{1}$$

От $OB = OC = ON$ следва, че $\sphericalangle NCB = 90^\circ$. От $NC \perp AC$ и $AA_1 \perp AC$ следва, че

$$NC || AH. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $AHCN$ е успоредник и

$$CH = NA. \tag{3}$$

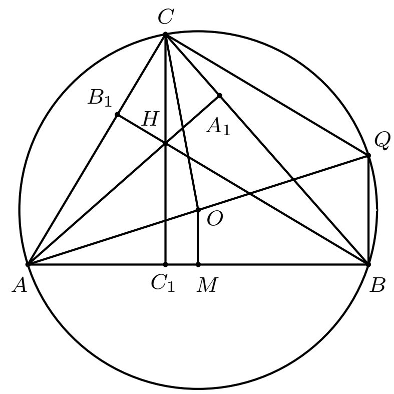
Построяваме височината OP в равнобедрения $\triangle AON$. Тогава $AMOP$ е правоъгълник и $OM = PA = \dfrac{1}{2}AN$ и от (3) следва, че $CH = 2OM$.

Решение с описана окръжност за ученици от 8. клас

Построяваме диаметъра AQ на описаната около триъгълника ABC окръжност. Тогава $\sphericalangle ABQ = 90^\circ$ и $\sphericalangle ACQ = 90^\circ$.

Имаме

(1) $\left.\begin{array}{l} QB\perp AB \\ CC_1\perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow QB \parallel CH;$



(2) $\left.\begin{array}{l} QC\perp CA \\ BB_1\perp CA \end{array}\right\} \Rightarrow QC \parallel BH.$

От (1) и (2) следва, че $BQCH$ е успоредник и

(3) $$BQ = CH.$$

Но OM е средна отсечка в $\triangle\ ABQ$ и

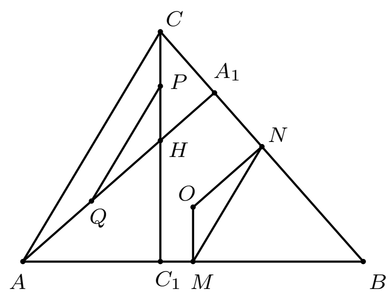
(4) $$OM = \frac{1}{2}BQ$$

От (3) и (4) следва, че $CH = 2OM$.

Решение със средна отсечка за ученици от 8. клас

Построяваме $ON\perp BC$ и точките P и Q – среди съответно на страните CH и AH.

Тогава $MN = QP = \dfrac{1}{2}AC$ (средни отсечки съответно в $\triangle ABC$ и $\triangle AHC$), $\sphericalangle MON = \sphericalangle QHP = 180^\circ - \beta$ и $\sphericalangle OMN = \sphericalangle HPQ$ (остри ъгли с взаимно успоредни рамене). Следователно



$$\triangle OMN \cong \triangle HPQ$$

и оттук $OM = HP = \dfrac{1}{2}CH$.

Решение с подобни триъгълници за ученици от 9. клас

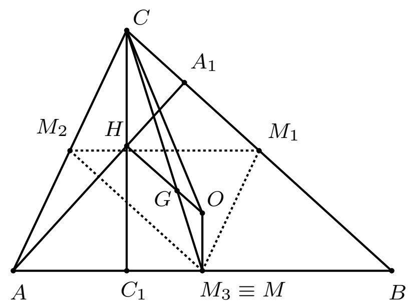
На горния чертеж триъгълниците MON и AHC са подобни с коефициент на подобие $k = AC : MN = 2$. Следователно $CH = 2OM$.

Решение с хомотетия за ученици от 9. клас

Построяваме средите M_1, M_2 и M_3 съответно на страните AB, BC и AC и медицентъра G на $\triangle ABC$.

Височините на $\triangle M_1M_2M_3$ лежат съответно върху симетралите на $\triangle ABC$, т.е. центърът O на описаната около ABC окръжност е ортоцентър на $M_1M_2M_3$.

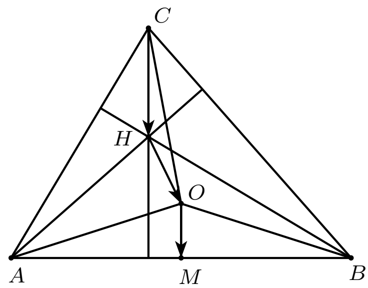
При хомотетията $h\left(G, -\dfrac{1}{2}\right)$ триъгълникът ABC се изобразява в триъгълника $M_1M_2M_3$. При тази хомотетия ортоцентърът H на $\triangle ABC$ се изобразява в ортоцентъра O на $\triangle M_1M_2M_3$, а C се изобразява в M. Следователно CH се изобразява в MO и $CH = 2OM$.



Решение с вектори

Като използваме векторното равенство
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
и $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, получаваме

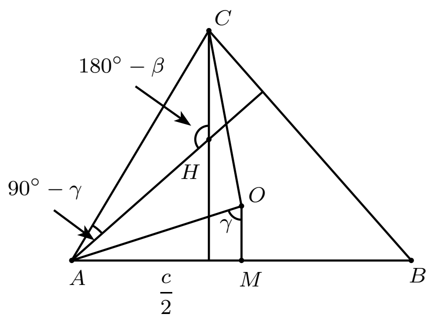
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OH} = \\ &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$



Решение със синусова теорема за ученици от 10. клас

В $\triangle AHC$ при стандартните означения имаме $\sphericalangle AHC = 180^\circ - \beta$, $\sphericalangle HAC = 90^\circ - \gamma$. От синусовата теорема получаваме

$$\frac{CH}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)} \iff$$



$$CH = \frac{b}{\sin\beta}\cos\gamma = 2R\cos\gamma. \tag{1}$$

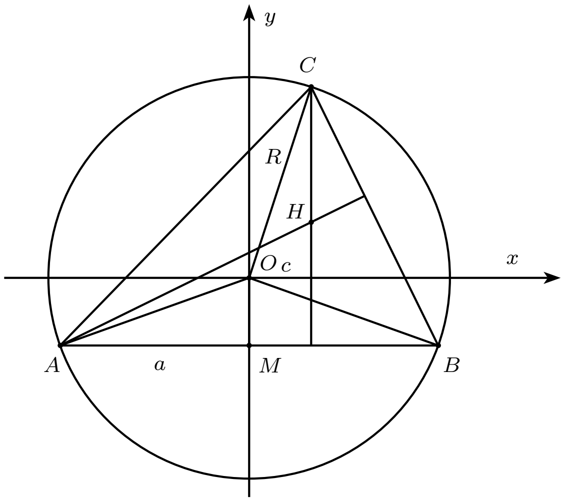
От $\triangle AMO$ имаме, че

$$OM = \frac{c}{2}\operatorname{cotg}\gamma \iff 2OM = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\gamma = 2R\cos\gamma. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $CH = 2OM$.

Решение с аналитична геометрия за ученици от 12. клас

Да въведем правоъгълна координатна система с център O и абсциса, успоредна на AB, както е показано на чертежа. Нека означим $a = AM = BM$ (тогава $OM = \sqrt{R^2 - a^2}$) и c е разстоянието от O до правата CH.



Определяме координатите $A(-a; -\sqrt{R^2 - a^2})$, $B(a; -\sqrt{R^2 - a^2})$, $C(c; \sqrt{R^2 - c^2})$, $H(c; y)$. Имаме

$$\overrightarrow{BC} = (c - a\,;\, \sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - a^2}),\quad \overrightarrow{AH} = (c + a\,;\, y + \sqrt{R^2 - a^2})$$

и тъй като $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$, получаваме

$$(c - a)(c + a) + (\sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - a^2})(y + \sqrt{R^2 - a^2}) = 0.$$

Оттук изразяваме

$$\begin{aligned} y &= \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - a^2}} - \sqrt{R^2 - a^2} = \\ &= \frac{(R^2 - c^2) - (R^2 - a^2)}{\sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - a^2}} - \sqrt{R^2 - a^2} = \sqrt{R^2 - c^2} - 2\sqrt{R^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} CH &= |y_H - y_C| = \\ &= |(\sqrt{R^2 - c^2} - 2\sqrt{R^2 - a^2}) - \sqrt{R^2 - c^2}| = 2\sqrt{R^2 - a^2} = 2OM. \end{aligned}$$

Забележка. Твърдението $CH = 2OM$ е вярно за произволен триъгълник. Това може да се потвърди с четвъртото, шестото и осмото решение. При останалите подходи решението може да се изследва с помощта на Geogebra.

ДВЕ ГЕОМЕТРИЧНИ МИНИАТЮРИ

Йордан Табов, Willie Yong

Предлагаме ви две геометрични миниатюри, публикувани в списанието Mathematics and Informatics Quarterly.

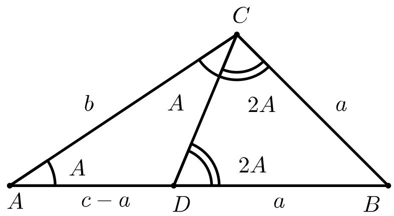
Едно свойство на триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 3\sphericalangle A$

В триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 3\sphericalangle A$ е изпълнено равенството

$$ab^2 = (c-a)(c^2-a^2).$$

Ще докажем този интересен факт по два начина.

Първо доказателство. Нека точката D от страната AB е такава, че $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A$, $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle A$.



Триъгълникът ADC има външен ъгъл $\sphericalangle CDB = 2\sphericalangle A$, следователно

$$BD = BC = a, \quad AD = c - a = CD.$$

От триъгълника CDB изразяваме

$$\cos 2\sphericalangle A = \frac{CD}{2DB} = \frac{c-a}{2a}.$$

От косинусовата теорема за триъгълника ACD имаме

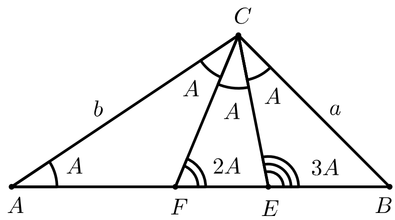
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos(180^\circ - 2\sphericalangle A),$$

следователно

$$\begin{aligned} b^2 &= 2(c-a)^2 + 2(c-a)^2 \cdot \frac{(c-a)}{2a} \\ &= 2(c-a)^2 \left[1 + \frac{c-a}{2a}\right] = 2(c-a)^2 \frac{(a+c)}{2a}, \end{aligned}$$

т.е. $ab^2 = (c-a)(c^2-a^2)$.

Второ доказателство. Нека точките F и E от страната AB са такива, че $\sphericalangle ACF = \sphericalangle FCE = \sphericalangle ECB = \sphericalangle A$.



Триъгълниците BCE и BAC са подобни, следователно

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BC} \iff \frac{a}{c} = \frac{BE}{a} \iff BE = \frac{a^2}{c}$$

и оттук

$$AE = AB - BE = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

Освен това, от същото подобие следва, че

$$\frac{BC}{BA} = \frac{CE}{AC} \iff CE = \frac{ab}{c}. \tag{1}$$

От подобието на триъгълниците ECF и EAC следва, че

$$\frac{EC}{EF} = \frac{EA}{EC}.$$

Тъй като $BF = BC = a$ и

$$EF = BF - BE = a - \frac{a^2}{c} = \frac{ac-a^2}{c},$$

получаваме, че

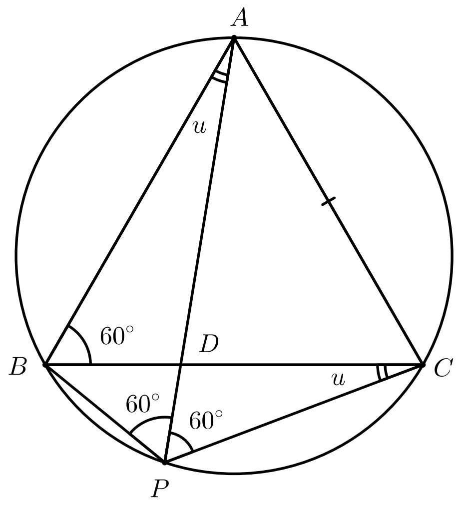
$$EC = \sqrt{\left(\frac{c^2-a^2}{c}\right) \cdot \left(\frac{ac-a^2}{c}\right)}. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че

$$\frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{c^2-a^2}{c} \cdot \frac{ac-a^2}{c} \iff ab^2 = (c-a)(c^2-a^2).$$

Отново за равностранния триъгълник

Да разгледаме равностранен триъгълник ABC. Нека P е произволна точка от описаната около триъгълника окръжност; за определеност, нека P е от дъгата $\overset{\frown}{BC}$, която не съдържа A. Нека AP пресича BC в точката D. Да построим отсечките PB и PC и да разгледаме някои геометрични свойства на тази конфигурация.



Най-известното ѝ свойство се получава директно от теоремата на Птолемей. Имаме $PA \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot PB$, а тъй като $AB = BC = CA$, то

$$PC + PB = PA. \tag{3}$$

Нека $\sphericalangle PAB = u = \sphericalangle PCB$. Имаме $\sphericalangle APC = \sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$, следователно триъгълниците PCD и PAB са подобни. Оттук

$$PB \cdot PC = PA \cdot PD. \tag{4}$$

От (3) и (4) следва, че PB и PC са корени на квадратното уравнение

$$t^2 - PA \cdot t + PA \cdot PD = 0$$

с дискриминанта $D = (PA)^2 - 4(PA \cdot PD) \geqq 0$, следователно

$$\frac{PD}{PA} \leqq \frac{1}{4}.$$

Като вдигнем на квадрат двете страни на равенството (3), получаваме

$$PA^2 = PC^2 + 2PC \cdot PB + PB^2. \tag{5}$$

От косинусовата теорема за триъгълника BPC имаме

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cos 120^\circ$$

и равенството (5) се записва във вида

$$PA^2 = BC^2 + 2BP \cdot PC \cos 120^\circ + 2PC \cdot PB = BC^2 + PC \cdot PB.$$

От подобието на триъгълниците PBD и CAD получаваме

$$\frac{PD}{PB} = \frac{CD}{CA}. \tag{6}$$

От подобието на триъгълниците PDC и BDA получаваме

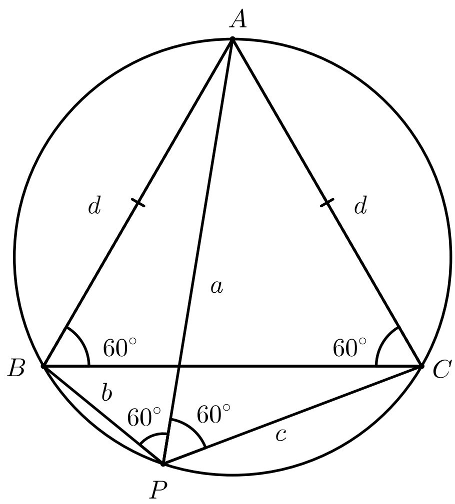
$$\frac{PD}{PC} = \frac{BD}{BA} = \frac{BD}{CA}. \tag{7}$$

Като съберем равенствата (6) и (7), стигаме до

$$\frac{PD}{PB} + \frac{PD}{PC} = \frac{CD + BD}{CA} = \frac{BC}{BC} = 1, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PD}.$$

И накрая ще докажем една връзка между квадратите на отсечките AP, BP и CP. Да означим $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ и $AC = d$.



От (5) изразяваме

$$(8) \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \iff bc = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2).$$

От косинусовата теорема за триъгълниците APC, BPA и PBC имаме

$$d^2 = a^2 + c^2 - ac, \quad d^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad d^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Като съберем тези три равенства и използваме (8), получаваме

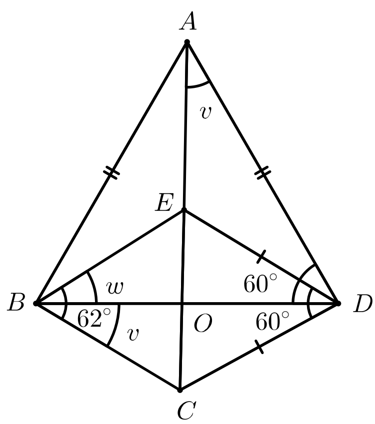
$$\begin{aligned} 3d^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + bc - a(b + c) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2) - a^2 \\ &= \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Следователно $a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2$, т.е.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2AB^2.$$

За седмокласниците: една задача с два равнострани триъгълника

В четириъгълника $ABCD$ триъгълниците ABD и EDC са равностранни ($E \in AC$). Ако $\sphericalangle CBE = 62^\circ$, да се намери $\sphericalangle BEA$.



Решение. Ясно е, че

$$\sphericalangle ADE = 60^\circ - \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC.$$

Тогава триъгълниците ADE и BDC са еднакви и следователно

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBC = v.$$

Ако $\sphericalangle EBD = w$, то $w + v = 62^\circ$. В $\triangle ABE$ имаме $\sphericalangle BAE = 60^\circ - v$ и $\sphericalangle ABE = 60^\circ - w$, следователно

$$\sphericalangle BEA = 180^\circ - (60^\circ - v) - (60^\circ - w) = 60^\circ + (v + w) = 60^\circ + 62^\circ = 122^\circ.$$

ВЪРХУ ЕДНА ЯПОНСКА ЗАДАЧА

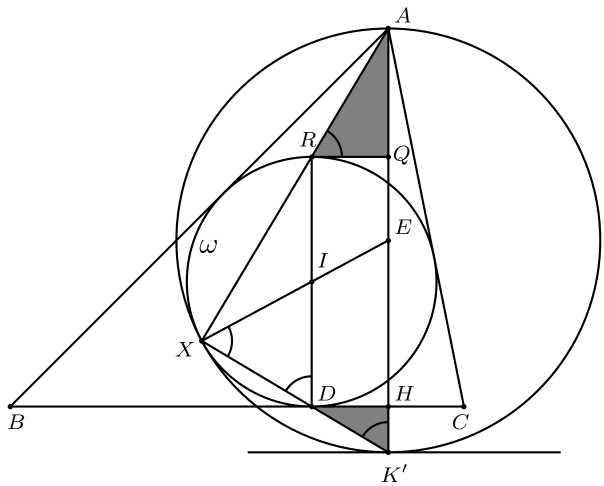
Невена Събева, ИМИ–БАН

Четвърта задача от финалите на Японската олимпиада по математика през 2019 г. бе широко обсъждана в математическите форуми. Тя предизвика любителите-геометри да демонстрират знания и въображение, като предложат елегантни решения на задачата. Ще разгледаме две от тези решения.

Ето я и задачата.

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с център I на вписаната окръжност w и среда M на страната BC. Правата през A, перпендикулярна на BC и правата през M, перпендикулярна на AI, се пресичат в точката K. Да се докаже, че окръжността с диаметър AK допира вписаната окръжност w.

Решение. Нека AH е височина в дадения триъгълник и точката K' от правата AH е такава, че окръжността k с диаметър AK' се допира до ω в точка X, както е показано на чертежа.



В тази конфигурация центърът I на ω, средата E на AK', която е център на k, и допирната точка X лежат на една права.

Нека $\omega \cap BC = D$ и $DI \cap \omega = R$. Хомотетията с център X, която изпраща ω в k, изобразява диаметъра RD на ω в успоредния му диаметър AK' на k, следователно $X \in DK'$ и $X \in RA$.

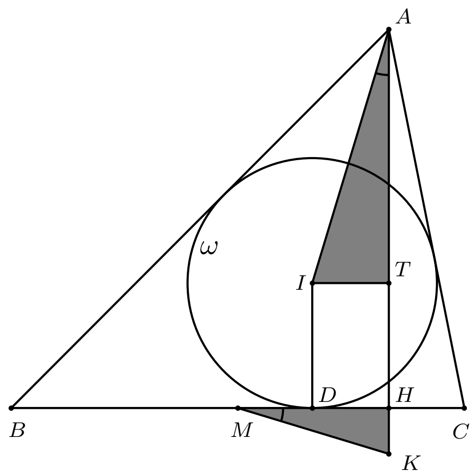
Ако Q е проекцията на R върху AH, имаме

$$\sphericalangle QRA = 90^\circ - \sphericalangle XRD = \sphericalangle XDR = \sphericalangle DK'H$$

следователно правоъгълните триъгълници DHK' и AQR са подобни. Оттук следва, че

$$(1) \qquad HK' = \frac{DH \cdot RQ}{AQ} = \frac{DH^2}{h_a - 2r}.$$

Сега да се върнем към дадената точка K. По условие $MK \perp AI$ и тъй като $AH \perp BC$, то $\sphericalangle KMH = \sphericalangle IAT$ (където T е проекцията на I върху AH).



Следователно правоъгълните триъгълници MHK и ATI са подобни. Оттук получаваме, че

$$(2) \qquad HK = \frac{IT \cdot MH}{AT} = \frac{DH \cdot MH}{h_a - r}.$$

За да докажем, че $K \equiv K'$, е достатъчно да се уверим, че $HK = HK'$, което според (1) и (2) е еквивалентно на

$$(3) \qquad \frac{MH}{DH} = \frac{h_a - r}{h_a - 2r}.$$

Имаме

$$\frac{h_a - r}{h_a - 2r} = \frac{\dfrac{2S}{a} - \dfrac{2S}{a+b+c}}{\dfrac{2S}{a} - \dfrac{4S}{a+b+c}} = \frac{b+c}{-a+b+c},$$

а като използваме, че $HC = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, получаваме

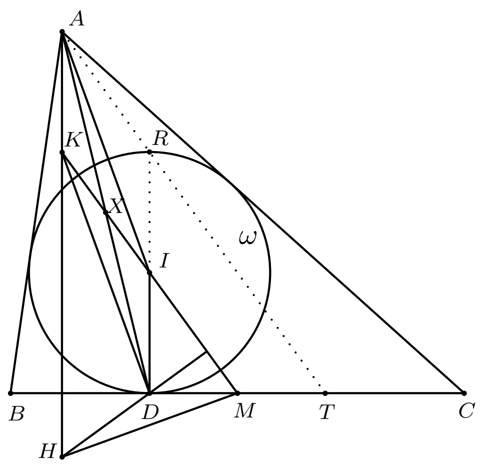
$$\frac{MH}{DH} = \frac{MC-HC}{DC-HC} = \frac{\dfrac{a}{2} - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{\dfrac{a+b-c}{2} - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}} = \frac{b+c}{-a+b+c}.$$

Последните две равенства доказват желаното твърдение (3).

Това решение е подходящо за състезателна обстановка, но не казва много за същността на конфигурацията. Разгледаната японска задача може да се реши и по друг начин, като се използва твърдението от следващата задача, дадена на Сръбската математическа олимпиада през 2016 г.

> **Задача 2.** Даден е триъгълник ABC с център I на вписаната окръжност ω, среда M на BC и допирна точка D на ω и BC. Да се докаже, че перпендикулярите от M, D, A съответно към AI, IM, BC се пресичат в една точка.

Решение. Нека точката K от височината през A е такава, че $AIDK$ е успоредник; $X = AD \cap IK$. Разглеждаме хомотетия с център D и коефициент 2; тя изобразява X в A, I в R – диаметрално противоположната точка на D, а M в T – допирната точка на външновписаната окръжност със страната BC. От известния факт, че A, R и T лежат на една права, следва, че X, I и M лежат на една права.



Сега остава да забележим, че перпендикулярът от M към AI е перпендикулярен и на KD; перпендикулярът от D към IM съвпада с перпендикуляра от D към KM, а перпендикулярът от A към BC съвпада с перпендикуляра от K към DM. Следователно трите разглеждани перпендикуляра се пресичат точно в ортоцентъра H на триъгълника KDM.

Второ решение на задача 1. От задача 2. следва, че пресечната точка K на правата през A, перпендикулярна на BC, и правата през M, перпендикулярна на AI, лежи на перпендикуляра от D към IM, т.е.

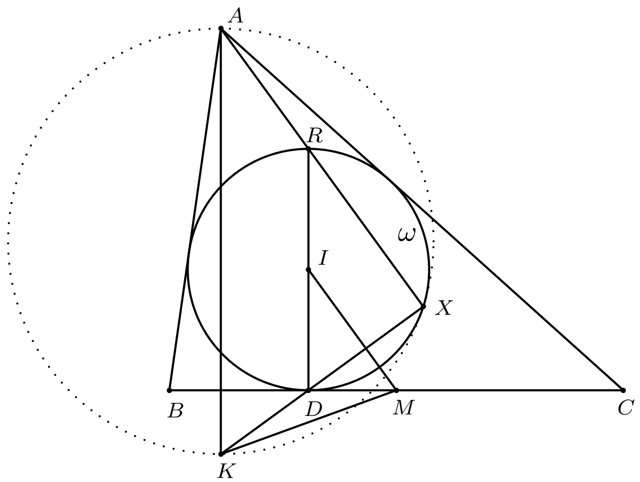
$$DK \perp IM.$$

(Отново ω допира BC в D и R е диаметрално противоположната точка на D.) Нека $X = AR \cap \omega$.

От разгледаната в задача 2. хомотетия следва, че $IM \parallel AX$ и тъй като $\sphericalangle RXD = 90^\circ$, то

$$DX \perp IM.$$

Следователно точките D, K и X лежат на една права. Оттук $\sphericalangle AXK = 90^\circ$, т.е. X лежи на окръжността с диаметър AK.



Остава да забележим, че диаметрите DR и AK са успоредни, следователно двете разглеждани окръжности се допират в точката X.

Разгледаната конфигурация е богата на свойства. Например е добре известно, че MX е допирателна към ω (при въведените в горната задача означения). Предлагаме ви да докажете самостоятелно, че пресечната точка на AI и KM лежи на окръжността с диаметър AK, както и на една окръжност с точките I, D, M и X.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

Петя Тодорова

ПЪРВИ МОДУЛ

1. (2) Допустимите стойности на променливата, за които е дефиниран изразът

$$A=\sqrt{\left(2+\sqrt{a}\right)^2-8\sqrt{a}},\quad \text{са:}$$

А) $a\in R$ **Б)** $a\in[0;4]$ **В)** $a\in[4;\infty)$ **Г)** $a\in[0;\infty)$

2. (2) Броят на реалните корени на уравнението

$$\left(x^2+6x+5\right)\sqrt{-3+x}=0\quad \text{е:}$$

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 0

3. (2) Стойността на израза

$$\frac{\sin\left(-585^\circ\right)\operatorname{cotg}\left(-210^\circ\right)}{\sin 60^\circ-\cos 420^\circ}+\frac{\cos 135^\circ\operatorname{tg}240^\circ}{\sin 150^\circ-\cos\left(-150^\circ\right)}$$

е равна на:

А) $-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Б)** 0

В) $\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Г)** $-3\sqrt{2}$

4. (2) Дадена е функция $f(x)=ax^2+a^3x+1,\ a\neq 0$. Винаги е вярно, че:

А) $f\left(x\right)=0$ има корени с различни знаци

Б) $f\left(x\right)=0$ има корени с еднакви знаци

В) върхът на параболата лежи в трети квадрант

Г) върхът на параболата има отрицателна абсциса

5. (2) В ΔACB е дадено, че $AC = 4$, $BC = 2$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Дължината на ъглополовящата CL $(L \in AB)$ на $\sphericalangle ACB$ е равна на:

А) $\dfrac{16}{9}$ **Б)** $\dfrac{4}{3}$ **В)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ **Г)** $\dfrac{4}{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

6. (2) За аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е известно, че

$$(a_9 + a_3)\, a_6 = 8.$$

Шестият член на редицата е равен на:

А) 2 или -2 **Б)** 2

В) $2\sqrt{2}$ или $-2\sqrt{2}$ **Г)** $2\sqrt{2}$

7. (2) Вписаната окръжност в правоъгълен ΔABC се допира до хипотенузата AB в точка M. Ако $AM = 6$ и $BM = 4$, то радиусът на тази окръжност е равен на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

8. (2) Тъпият ъгъл на успоредника $ABCD$ е α. Единият диагонал е с дължина 20 cm, а другият е с 20% по-малка дължина. Лицето на успоредника е равно на:

А) $18\operatorname{tg}\alpha$ **Б)** $-18\operatorname{tg}\alpha$ **В)** $36\operatorname{tg}\alpha$ **Г)** $-36\operatorname{tg}\alpha$

9. (2) Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2 + 6x - 3 = 0$, то уравнението, чиито корени са $\dfrac{x_1}{2x_2}$; $\dfrac{x_2}{2x_1}$ е:

А) $4x^2 - 28x + 1 = 0$ **Б)** $4x^2 + 20x + 1 = 0$

В) $4x^2 - 20x + 1 = 0$ **Г)** $4x^2 + 28x + 1 = 0$

10. (2) Ако средноаритметичното на извадката $\{2; 6; 11; 11; 8;\}$ е равно на 8, то медианата е равна на:

А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11

11. (3) Решенията на неравенството

$$\frac{(4-x)^2(5+x)^3x^4}{x^2-3x-4} \geq 0 \text{ са:}$$

А) $x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 4)$ **Б)** $x \in [-5; -1) \cup \{0\} \cup [4; \infty)$

В) $x \in [-5; -1) \cup \{0\} \cup (4; \infty)$ **Г)** $x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 4]$

12. (3) Даден е остроъгълен равнобедрен триъгълник ABC $(AC = BC)$ с център на описаната около него окръжност O. Точките M и H са среди съответно на страните AC и AB. Ако $S_{MCO} : S_{AHC} = 25 : 64$, то синусът на ъгъла при основата на ΔABC е равен на:

А) $\dfrac{5}{8}$ **Б)** $\dfrac{4}{5}$ **В)** $\dfrac{25}{64}$ **Г)** $\dfrac{25}{32}$

13. (3) В остроъгълен триъгълник $\sphericalangle ACB = \gamma$ и отсечката с краища петите на височините, построени от върховете A и B, има дължина 3. Ако $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \gamma\right) = \dfrac{1}{3}$, то дължината на страната AB е равна на:

А) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ **Б)** $\dfrac{27}{8}$ **В)** 9 **Г)** 27

14. (3) Окръжностите k_1 и k_2 са външнодопиращи се. Правите t_1 и t_2 са общите им външни допирателни. Ако $k_1 \cap t_1 = A$, $k_1 \cap t_2 = B$, $k_2 \cap t_1 = D$, $k_2 \cap t_2 = C$ и $AD = 5$, то периметърът на четириъгълника $ABCD$ е равен на:

А) 10 **Б)** 20

В) 30 **Г)** не може да се определи

15. (3) Кое от дадените числови неравенства е вярно?

А) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{4} > \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{6}$ **Б)** $\log_2\dfrac{1}{5} > \log_3\dfrac{1}{5}$

В) $\log_{\frac{1}{3}}4^{-1} < \log_{\frac{1}{5}}4^{-1}$ **Г)** $\log_3 6 > \log_5 6$

16. (3) Стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$a.3^x + 3^{-x} - 3 = 0$$

има два реални корена с различни знаци, са:

А) $a < 2$ **Б)** $a \in (0, 2)$ **В)** $a \in (0; 2]$ **Г)** $a > 0$

17. (3) За $\triangle\ ABC$ е известно, че $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 2 : 3 : 7$ и радиусът на описаната окръжност е $R = \sqrt{3} - 1$. Лицето на триъгълника е равно на:

А) $\sqrt{3} + 1$ **Б)** $\sqrt{3} - 1$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ **Г)** $\left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$

18. (3) Броят решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} x^4y^3 + y^4x^3 = 128 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0,5 \end{array}\right. \quad \text{е:}$$

А) 0 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

19. (3) Каква е вероятността при написване на едно трицифрено число с различни цифри, то да е четно и цифрата на десетиците му да е 4?

А) $\dfrac{29}{648}$ **Б)** $\dfrac{8}{225}$ **В)** $\dfrac{29}{900}$ **Г)** $\dfrac{4}{81}$

20. (3) Колко различни седемцифрени числа, записани с четири цифри 5 и три цифри 6 може да се напишат, ако шестиците не са една до друга?

А) 6 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 10

ВТОРИ МОДУЛ

21. (4) Да се опрости изразът

$$\frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}} : \frac{1}{a^2-\sqrt{a}} - a,\ \text{където } a>0,\ a\neq 1.$$

22. (4) Равнобедрен трапец е описан около окръжност с радиус $2\sqrt{3}$. Да се намери бедрото на трапеца, ако диагоналът му сключва с голямата основа ъгъл 30°.

23. (4) Велосипедист изминава всеки километър по равен път с две минути по-бързо, отколкото всеки километър при изкачване. Вчера изминал 25 км, като един час се движил по равен път и един час се изкачвал. С каква скорост (в км/ч) велосипедистът се е изкачвал?

24. (4) Избираме по случаен начин естествено число измежду първите 105. Каква е вероятността числото да се дели на 4 или да се дели на 6?

25. (4) Да се намерят четири положителни числа така, че (в този ред) първите три да имат сбор 12 и да образуват аритметична прогресия, а последните три да имат сбор 19 и да образуват геометрична прогресия.

ЗАДАЧИ, КОИТО ИЗИСКВАТ ПОДРОБНИ РЕШЕНИЯ

26. (10) Дадени са уравнението $\left|2-3x-2x^2\right|-|x+2|=8$ и неравенството

$$\sqrt{9-3x-2x^2}\geq 1+x.$$

а)(5) Да се реши уравнението.

б)(5) Да се реши неравенството и да се провери дали корените на уравнението са негови решения.

27. (10) Даден е $\triangle ABC$ със страни $BC = 10$, $CA = 8$ и $\sphericalangle CAB = 3\sphericalangle ABC$.

а)(5) Да се намери $\cos \sphericalangle ABC$.

б)(5) Да се намери AB.

28. (10) Дадено е уравнението $ax^2 - 2ax - a + 2 = 0$, където a е параметър. Да се намери a така, че:

а)(2) уравнението да няма решение;

б)(4) числото a да е корен на уравнението;

в)(4) уравнението да има два различни реални корена, за които е вярно неравенството

$$\frac{{x_1}^2}{x_2} + \frac{{x_2}^2}{x_1} \geq 0.$$

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Г; **2.** В; **3.** Г; **4.** Г; **5.** Б; **6.** А; **7.** Б; **8.** Г; **9.** Г; **10.** Б; **11.** В; **12.** Б; **13.** В; **14.** Б; **15.** Г; **16.** Б; **17.** В; **18.** Б; **19.** А; **20.** Г; **21.** -1; **22.** 12; **23.** 10 km/h; **24.** $\frac{1}{3}$; **25.** 2; 4; 6; 9;

26. а) Имаме $2 - 3x - 2x^2 = (x+2)(1-2x)$ и получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x < -2 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right) \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right. ,$$

откъдето $x = \left\{-1 - \sqrt{5}; 2\right\}$.

б) Имаме $\sqrt{9 - 3x - 2x^2} \geq 1 + x \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 9 - 3x - 2x^2 \geq 0 \\ 1 + x < 0 \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} 1 + x \geq 0 \\ 9 - 3x - 2x^2 \geq 1 + 2x + x^2 \end{array}\right. ,$$

откъдето $x \in [-3; 1) \cup [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-3; 1]$.

Корените на уравнението не са решения на неравенството.

27. а) Ако $\sphericalangle ABC = \beta$, то $\sphericalangle BAC = 3\beta$ и $4\beta < 180^\circ$, т.е. $\beta < 45^\circ$. Следователно $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin 3\beta}$, т.е. $\frac{8}{\sin\beta} = \frac{10}{\sin 3\beta}$. Като използваме, че $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4{\sin}^3\beta$, получаваме

$$4\sin\beta\left(3 - 4{\sin}^2\beta\right) = 5\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

но $\beta < 45^\circ$, значи $\cos\beta = \dfrac{3}{4}$.

б) *Първи начин.* Имаме $\dfrac{AB}{\sin(180^\circ - 4\beta)} = \dfrac{AC}{\sin\beta} \Rightarrow \dfrac{AB}{\sin 4\beta} = \dfrac{8}{\sin\beta}$ и като използваме, че $\sin 4\beta = \dfrac{3\sqrt{7}}{32}$, намираме $AB = \dfrac{8\sin 4\beta}{\sin\beta} = 3$.

Втори начин. Нека $AB = x$; по косинусовата теорема имаме

$$64 = 100 + x^2 - 20x \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow x = \{3; 12\}.$$

Следва задължителна проверка дали е изпълнено условието на задачата, откъдето се получава, че $AB = 12$ не е решение.

28. а) При $a = 0$ получаваме $x \in \varnothing$, т.е. $a = 0$ е решение. При $a \neq 0$ имаме $D < 0 \iff 2a^2 - 2a < 0$, т.е. $a \in (0; 1)$. Окончателно се получава, че $a \in [0; 1)$.

б) При $x = a$ получаваме

$$a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1)(a-1) = 0 \Rightarrow a = \{\pm 1; 2\}.$$

в) От условието следва, че уравнението е квадратно и има реални различни корени, значи $\left|\begin{array}{l} a \neq 0 \\ D > 0 \end{array}\right.$, значи $a \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. От формулите на Виет следва, че $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = \dfrac{2-a}{a}$ и тогава

$$\frac{{x_1}^2}{x_2} + \frac{{x_2}^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right]}{x_1 x_2} = \frac{7a - 6}{2 - a} \geq 0.$$

Следователно условието на задачата еквивалентно на условието

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{7a-6}{2-a} \geq 0 \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (1; 2).$$

ПРОБЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7 КЛАС

14 април 2019 г., Бургас

ПЪРВА ЧАСТ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

Верните отговори на всяка задача от 1 до 8 включително се оценяват с 2 точки

1. Стойността на израза $3 - \frac{4}{5} : \left(\frac{-2}{15}\right) - \frac{11}{2}$ е?

А) $-8{,}5$ **Б)** $-\frac{7}{3}$ **В)** $3{,}5$ **Г)** $4{,}5$

2. Степента на многочлена $2^2x^2y^3 - 6^2(x^2)^3 + 2^8$ е:

А) десета **Б)** осма **В)** седма **Г)** шеста

3. Тричленът $x^2 - x + \frac{1}{4}$ се получава от:

А) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$ **Б)** $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ **В)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ **Г)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

4. Нормалният вид на израза $(3x - 2)^2 - (3 - x)(3 + x)$ е:

А) $4x^2 - 12x - 5$ **Б)** $10x^2 - 12x - 5$

В) $8x^2 - 12x + 13$ **Г)** $10x^2 - 12x + 13$

5. Външният ъгъл при върха B на триъгълник ABC е остър. Триъгълникът ABC е:

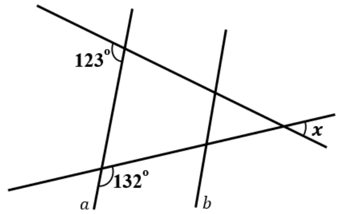
А) остроъгълен **Б)** правоъгълен

В) тъпоъгълен **Г)** видът му не може да се определи

6. В едно училище учат 129 петокласници, 111 шестокласници и 144 седмокласници. Каква е вероятността случайно избран ученик да бъде седмокласник?

А) $\frac{3}{8}$ **Б)** $\frac{8}{3}$ **В)** $\frac{5}{8}$ **Г)** $\frac{8}{5}$

7. На чертежа $a \| b$. Големината на ъгъл x е:



А) 57° **Б)** 48°

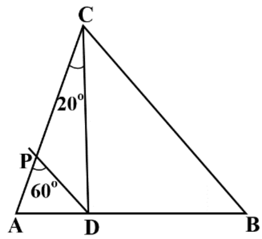
В) 65° **Г)** 75°

8. Кой от двучлените участва в разлагането на множители на израза $3a^2 - 12$?

А) $3a - 4$ **Б)** $a + 4$ **В)** $a + 2$ **Г)** $2a + 1$

Верните отговори на всяка задача от 9 до 17 включително се оценяват с 3 точки

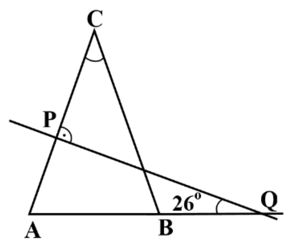
9. В $\triangle ABC$ е дадена височина CD, а през точка D е прекарана права, успоредна на BC и пресичаща AC в точка P. По данните от чертежа определете мярката на $\sphericalangle ABC$.



А) 70° **Б)** 40°

В) 50° **Г)** 60°

10. Даден е $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. През произволна точка P от бедрото AC е построена права, перпендикулярна на AC и пресичаща правата AB в Q. Ако $\sphericalangle AQP = 26^\circ$, то $\sphericalangle ABC$ е равен на:



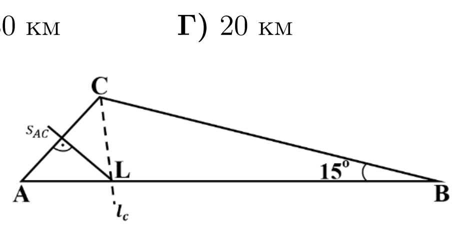
А) 52° **Б)** 32°

В) 72° **Г)** 64°

11. За да измине разстоянието между две населени места, пътник се движил $\frac{3}{5}$ от пътя с автобус, $\frac{1}{4}$ от пътя с кола, а останалите 4,5 км пеша. Разстоянието между населените места е:

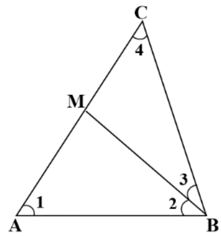
А) 50 км **Б)** 40 км **В)** 30 км **Г)** 20 км

12. В $\triangle ABC$ ъглополовящата на ъгъла при върха C и симетралата на страната AC се пресичат в точка L от страната AB. Ако $\sphericalangle ABC = 15^\circ$, то мярката на $\sphericalangle CLB$ е равна на:



А) 115° **Б)** 110° **В)** 70° **Г)** 55°

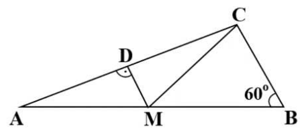
13. В $\triangle ABC$ през върха B е построена права, пресичаща AC в M така, че $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4$. Отсечката BM е:



А) ъглополовяща **Б)** медиана

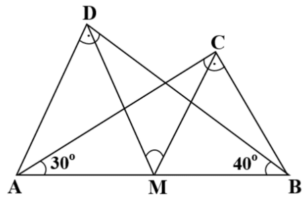
В) височина **Г)** никое от А), Б) или В)

14. В $\triangle ABC$ с $\sphericalangle B = 60^\circ$ от средата D на AC е построен перпендикуляр към AC, който пресича AB в точка M, така че $\sphericalangle ACM : \sphericalangle MCB = 1 : 4$. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:



А) 100° **Б)** 90° **В)** 60° **Г)** 20°

15. На чертежа $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ са правоъгълни с обща хипотенуза AB и точка M е средата на AB. По данните от чертежа определете мярката на $\sphericalangle CMD$.



А) 35° **Б)** 40°

В) 45° **Г)** 50°

16. Средното аритметично на две числа е 10, а средното аритметично на други три числа е 20. Средното аритметично на петте числа е:

А) 15 **Б)** 16 **В)** 20 **Г)** 18

17. Колко литра вода трябва да прибавим към 6 литра 10%-ен солен разтвор, за да го разредим на 3%-ен:

А) 12 **Б)** 14 **В)** 10 **Г)** 11

ЗАДАЧИ С КРАТЪК СВОБОДЕН ОТГОВОР

18. За всяко от уравненията запишете номера на съответното му решение.

(А) $(-x+4)^2 - 1 = x(x+2)$	(1) Уравнението няма решение.
(Б) $(1-3x)^3 = 9x(-3x^2+3x-1)$	(2) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$
(В) $\lvert 3x-1\rvert - 8 = 2$	(3) $x_1 = \dfrac{7}{3}$, $x_2 = -\dfrac{5}{3}$
(Г) $(x^2-25)(x^2+1) = 0$	(4) Всяко число е решение на уравнението.
(Д) $\dfrac{2}{3}\left(3 - \dfrac{5x}{4}\right) - 1\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-5x}{3}\right)$	(5) $x = 1{,}5$
	(6) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1$

19. Триъгълникът ABC е правоъгълен с хипотенуза $AB = 44$ cm и $\sphericalangle BAC = 75^\circ$. Симетралата на страната BC пресича хипотенузата в точка M. Намерете разстоянието от точка A до CM в сантиметри.

20. Даден е правоъгълен триъгълник с катети a, b и хипотенуза c. Ако $7^a = 343$ и b е равно на стойността на израза $\left(\dfrac{9x^5}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{5}{3x^3}\right)^3$ при $x = \dfrac{2^2}{15}$ намерете:

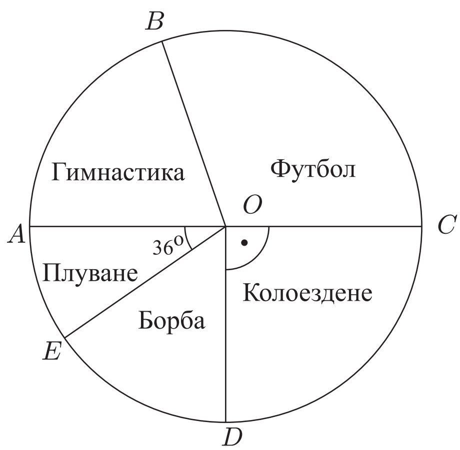
А) a;

Б) b;

В) c.

ВТОРА ЧАСТ
ЗАДАЧИ С РАЗШИРЕН СВОБОДЕН ОТГОВОР

21. На кръговата диаграма е дадено разпределение на седмокласниците от едно училище по спортове (всеки ученик тренира само по един спорт). На диаграмата AC е диаметър, $\sphericalangle COD = 90^\circ$, $\sphericalangle AOE = 36^\circ$ и $\sphericalangle EOD : \sphericalangle AOB = 2 : 3$.



А) Намерете мярката на централния ъгъл AOB.

Б) Намерете отношението на броя на учениците тренираращи футбол към броя на учениците, трениращи колоездене.

В) Колко процента от учениците тренират колоездене?

22. В правоъгълна координатна система изобразете точките $C(0; 6)$, $D(-3; 2)$ и $M(0; -2)$. Точка E е симетрична на D относно абсцисната ос. Намерете обиколката на четириъгълника $MCDE$.

23. Ако A е противоположното число на корена на уравнението

$$\frac{(-x+3)^2}{4} = \left(\frac{x+1}{-2}\right)^2 - (-3)^2,$$

$$\text{а } C = \frac{(-9)^3.4^{11}}{(-2)^{21}.(-27^2)},$$

намерете стойностите на A и C и ги сравнете.

24. Мравка изминава 1 метър за 36 секунди. За същото време охлюв изминава с 54% по-малко разстояние. Мравката и охлювът тръгват едновременно един срещу друг от двата края на пръчка.

А) Какви са скоростите на движение на мравката и охлюва в сантиметри за секунда?

Б) Каква трябва да е дължината на пръчката в метри, така, че 54 секунди след тръгването си да са на разстояние 20 см един от друг?

25. Триъгълникът ABC е равнобедрен и тъпоъгълен с тъп ъгъл при върха C. През точката C е издигнат перпендикуляр CP към AC, като $P \in AB$.

А) Ако $\sphericalangle C = 120^\circ$ и $CP = 3$ cm, намерете дължината на AB.

Б) Отсечката CH е височина в $\triangle ABC$. Точка M е от отсечката CP, такава, че AM пресича CH в точка N и $\sphericalangle ANC = 105^\circ$, а $CN = CM$. Докажете, че AN е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$ и намерете лицето на $\triangle ANH$, ако $AN = 8$ cm.

Отговори

1. В; **2.** Г; **3.** Г; **4.** Б; **5.** В; **6.** А; **7.** Г; **8.** В; **9.** В; **10.** А; **11.** В; **12.** Б; **13.** В; **14.** А; **15.** Б; **16.** Б; **17.** Б; **18.** (А) 5; (Б) 1; (В) 3; (Г) 2; (Д) 4; **19.** 11;
20. (А) 3; (Б) 4; (В) 5;
21. а) $\sphericalangle AOB = 81^\circ$; б) 11 : 10; в) 25%;
22. 20;
23. $x = 5,5$; $A = -5,5$; $C = -2$; $A < C$;
24. а) скоростта на мравката е $2\frac{7}{9}$ см/сек; а на охлюва е $1\frac{5}{18}$ см/сек;
б) ако още не са се срещнали: 2,39 м; ако са се разминали: 1,99 м;
25. а) $AB = 9$ cm; б) $S_{ANH} = 8$ cm^2.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Даден е правилен 100-ъгълник $A_1A_2\dots A_{100}$. За всяка двойка (i, j), $1 \leqq i < j \leqq 100$, отсечката A_iAj е червена, ако $j - i$ е нечетно число, и синя в обратен случай. (Например, страните на многоъгълника са червени.)

Във всеки връх на многоъгълника е записано число така, че сборът на квадратите на записаните числа е 1. На всяка отсечка е записано произведението на числата в нейните краища. Сборът на числата на сините отсечки е изваден от сбора на числата на червените отсечки.

Най-много колко е получената разлика?

Задача 2. Точката K е във вътрешността на равнобедрения триъгълник ABC и $CK = AB = BC$, $\sphericalangle KAC = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AKB$.

Задача 3. Произведението на всеки пет различни променливи измежду

$$x_1, \dots, x_{10}$$

е записано на отделен лист. Асен и Петър играят следната игра. На всеки ход играчът избира лист, като първи е Петър. Когато всички листи са взети, Асен избира стойности на променливите така, че

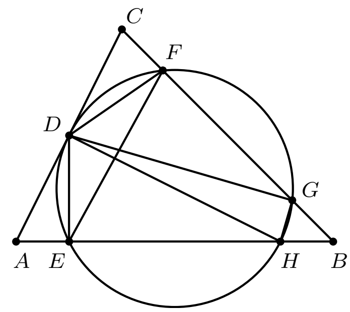
$$0 \leqq x_1 \leq \dots, \leqq x_{10}.$$

Може ли Асен да ги избере така, че стойността на сбора от произведенията на неговите листи да е по-голям от стойността на сбора на произведенията на листите на Петър?

Срокът за представяне на решенията е 31.08.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 2/2019 г.

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с център O на описаната окръжност. Окръжност с център O се допира до страната AC в точка D и пресича страната AB в точките E и H, а страната BC в точките F и G, както е показано на чертежа. Да се докаже, че триъгълниците DEF и DHG имат равни лица.



Решение. Тъй като центърът на дадената окръжност съвпада с центъра на описаната около ABC окръжност, то средата на AB е среда и на EH. Следователно $AE = HB$ (и оттук $AH = BE$). Аналогично $CF = GB$ (и оттук $CG = BF$).

От $\triangle ADE \sim \triangle AHD$ получаваме

$$\frac{DE}{DH} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AH} = \sqrt{\frac{AE}{AH}}.$$

Аналогично от $\triangle CDF \sim \triangle CGD$ получаваме

$$\frac{FD}{GD} = \sqrt{\frac{CF}{CG}}.$$

От $\triangle HBG \sim \triangle FBE$ получаваме

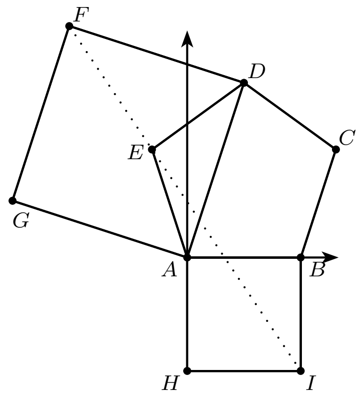
$$\frac{EF}{HG} = \frac{BF}{HB} = \frac{BE}{GB} = \sqrt{\frac{BF.BE}{HB.GB}} = \sqrt{\frac{CG.AH}{AE.CF}}.$$

Триъгълниците DEF и DHG са вписани в една и съща окръжност, следователно

$$\frac{S_{DEF}}{S_{DHG}} = \frac{DE.EF.FD}{DH.HG.GD} = \sqrt{\frac{AE}{AH} \cdot \frac{CF}{CG} \cdot \frac{CG.AH}{AE.CF}} = 1.$$

Задачата е решена от **Радомир Пеев** (СМГ) и **Стилиян Нановски** (МГ, Плевен).

Задача 2. Даден е правилен петоъгълник $ABCDE$. Квадратите $ADFG$ и $ABIH$ са разположени, както е показано на чертежа. Да се докаже, че точките F, E и I лежат на една права.



Решение на Стилиян Нановски. Ще използваме координатната система, показана на чертежа. Нека петоъгълникът има страна 1.

Ще използваме и някои свойства на златното сечение:

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \quad \varphi = \frac{1 = \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

както и известните равенства

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2\varphi}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi},$$

от които следва, че $\cos 27^\circ = \dfrac{\cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{\sqrt{2}}$, $\sin 27^\circ = \dfrac{\cos 18^\circ - \sin 18^\circ}{\sqrt{2}}$. От триъгълника ADE имаме

$$\begin{aligned} AD &= 2\cos 36^\circ = 2(1 - 2\sin^2 18^\circ) = 2\left(1 - \frac{1}{2\varphi^2}\right) = \\ &= \frac{2\varphi^2 - 1}{\varphi^2} = \frac{\varphi^2 + \varphi}{\varphi^2} = \frac{\varphi + 1}{\varphi} = \varphi. \end{aligned}$$

Определяме координатите на точките $I(1; -1)$,

$$E(-\sin 18^\circ; \cos 18^\circ) = \left(-\frac{1}{2\varphi}; \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi}\right)$$

(тъй като ъгълът между $AE = 1$ и ординатата е 18°). Ъгълът между ординатата и $AF = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}\varphi$ е $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$, следователно

$$F(-\sqrt{2}\varphi \sin 27^\circ; \sqrt{2}\varphi \cos 27^\circ) = (\varphi(\sin 18^\circ - \cos 18^\circ); \varphi(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)) =$$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2}\right).$$

За да докажем, че точките E, I и F са колинеарни, е достатъчно да покажем, че

$$\frac{-\dfrac{1}{2\varphi}-1}{\dfrac{\sqrt{4\varphi^2-1}}{2\varphi}+1}=\frac{\dfrac{1-\sqrt{4\varphi^2-1}}{2}-1}{\dfrac{1+\sqrt{4\varphi^2-1}}{2}+1} \iff$$

$$\frac{2\varphi+1}{\sqrt{4\varphi^2-1}+2\varphi}=\frac{1+\sqrt{4\varphi^2-1}}{3+\sqrt{4\varphi^2-1}}.$$

Ако означим $A=\sqrt{4\varphi^2-1}$, последното равенство се записва във вида

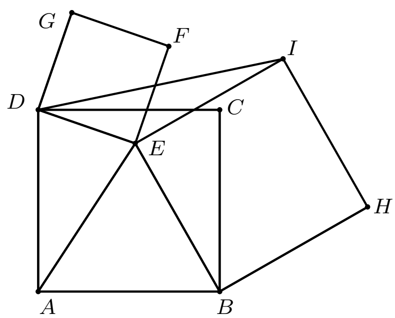
$$(2\varphi+1)(3+A)=(A+2\varphi)(1+A) \iff$$

$$4\varphi+3=A^2 \iff 4\varphi+3=4\varphi^2-1,$$

което следва от $\varphi^2=\varphi+1$.

Задачата е решена и от **Радомир Пеев** (СМГ).

Задача 3. На чертежа $ABCD$, $BHIE$ и $DEFG$ са квадрати. Да се намери отношението $AE : DI$.



Решение на Радомир Пеев. Разглеждаме въртящата хомотетия $h(B, \sqrt{2}, -45^\circ)$.

Тогава $h : A \to D$, $h : E \to I$ и тъй като

$$\sphericalangle ABE=\sphericalangle ABD+\sphericalangle EBD=45^\circ+\sphericalangle EBD=\sphericalangle EBI+\sphericalangle EBD=\sphericalangle DBI,$$

то $\triangle ABE \sim \triangle DBI$ с коефициент на подобие $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно

$$AE : DI=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задачата е решена и от **Стилиян Нановски, МГ, Плевен**.

конкурсни задачи

СПЕЦИАЛНА НАГРАДА НА БРОЯ

С цел да насърчи желанието за творческа изява на децата с математически заложби, ЧОУ „Света София“ осигури награден фонд на конкурса на списание *Математика* за 5. - 7. клас през 2018/19 учебна година.

След всеки от четирите задочни кръга на конкурса, трима от най-добре представилите се участници ще получат награда от 50 лв.

Като оцени получените в срок решения на задачите от брой 2/2019 г., Редколегията на списанието награди:

Румяна Георгиева Лазарова (5. клас, МГ, Варна)

Никола Славков Гюлев (6. клас, МГ, Пловдив)

Виктор Ясенов Костадинов (7. клас, ПЧМГ, София)

Решения на конкурсните задачи за по-малките от бр. 2/2019 г.

Задача 1. В началото на една игра на дъската е записано числото 0. За един ход към числото на дъската може да се прибави 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, стига да не се получава число, което се дели на 10. Кое е най-голямото число, което може да се получи на дъската след 100 хода?

Решение. Най-голямото число, което може да се получи, е 889.

Когато прибавяме 9, цифрата не единиците на числото се намалява с 1 (освен в случая, когато тя е била 0). Следователно, ако цифрата на единиците на числото не е 0, не може 9 пъти подред да прибавяме 9. Значи след 9 хода числото се увеличава най-много с $8.9 + 8 = 80$. За 99 хода се прибавя най-много $11.80 = 880$, значи за 100 хода може да се получи най-много $880 + 9 = 889$.

Ето как може да се получи 889. Първите девет хода са

$$9 \to 18 \to 27 \to \cdots \to 81 \to 89$$

и тъй като полученото число има цифра на единиците 9, отново може да прибавим 8 пъти 9 и след това 8; полученото число отново ще има цифра на единиците 9 и т.н. По този начин след 100 хода ще се получи 889.

Задачата е решена от **Бенедетта Бенедетто** (5. клас, Монтана), **Румяна Лазарова** (5. клас, МГ, Варна), **Никола Гюлев** (6. клас, Пловдив), **Демира Недева** (6. клас, Пловдив), **Александър Мургин** (6. клас, Видин), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Виктор Костадинов** (7. клас, ПЧМГ), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), **Николай Георгиев** (7. клас, Силистра).

Задача 2. Около кръгла маса са седнали рицари и лъжци. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. Всеки от тях се обърнал към един от съседите си и му казал: *ти си лъжец* или *ти си рицар*. След това на всеки на масата задали два въпроса: *бяхте ли наречен лъжец от левия си съсед* и *бяхте ли наречен лъжец от десния си съсед*. Точно 100 от получените отговори били *да*. Най-малко колко лъжци е имало на масата?

Решение на Николай Георгиев. Нека отговорите *да*, получени от рицари, са a на брой, а тези от лъжци са b на брой. Ясно е, че $a+b=100$. Освен това нека броят на лъжците е x.

Ако някой рицар каже *да*, то той наистина е наречен лъжец, т.е. човекът, който се е обърнал към него така, е лъжец. Всеки казва *ти си лъжец* или *ти си рицар* само на един свой съсед, значи на всеки отговор *да*, даден от рицар, съответства точно определен лъжец, т.е.

$$a \leqq x.$$

От друга страна, всеки лъжец дава точно два отговора и отговорите на лъжците са $2x$; следователно

$$b \leqq 2x.$$

От двете получени неравенства следва, че

$$a+b \leqq 3x, \text{ т.е. } 100 \leqq 3x$$

и тъй като x е естествено число, то $x \geqq 34$.

Ще покажем конструкция, при която лъжците са точно 34. В следващите схеми Л означава лъжец, а Р е рицар. Ще подредим хората така: ЛРРЛЛРРЛЛ..., т.е. 17 пъти ЛРРЛ. За да получим точно 100 отговора да, във всеки сегмент ЛРРЛ лъжците ще се обърнат към рицарите и ще получим $a=34$. В 16 от тях рицарите ще се обърнат един към друг и в тях никой няма да се е обръщал към лъжците, т.е. и на двата въпроса лъжците ще отговорят с *да*. Дотук общо $2.32=64$ отговора *да* от лъжци. В последния сегмент рицарите ще се обърнат към лъжците с *ти си лъжец*, т.е. на въпроса за този съсед лъжците ще отговорят с *не*, а на въпроса за другия – с *да*, понеже той не им е казвал нищо; така получаваме $b=64+2=66$ и $a+b=100$, т.е. отговорът е 34.

Задачата е решена от **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Никола Гюлев** (6. клас, Пловдив), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Виктор Костадинов** (7. клас, ПЧМГ), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), а с малка неточност и от **Демира Недева** (6. клас, Пловдив).

Задача 3. Сборът на двата най-големи същински делители на естественото число n е равен на 515. Да се намери n.

(*Същински делители* на естественото число n са делителите на n, различни от 1 и n.)

Решение. Сборът на две естествени числа е нечетен, когато едно от тях е четно, а другото е нечетно. Следователно n има четен делител, т.е. е четно число. Тогава най-големият същински делител на n е $\frac{n}{2}$.

Нека следващият по големина същински делител на n е $\frac{n}{d}$. Ясно е, че 2 и d са най-малките същински делители на n, следователно d е 4 или нечетно просто число. Имаме

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{d}=515 \iff n(d+2)=2d.515.$$

Ако d е четно, т.е. $d=4$, от горното равенство не се получава цяло n.

Ако d е нечетно, числата $d+2$ и $2d$ са взаимнопрости, следователно $d+2$ е делител на $515=5.103$, т.е. е 5, 103 или 515.

Ако $d+2=5$, имаме $d=3$ и намираме $n=618$.

Ако $d+2=103$, имаме $d=101$ и намираме $n=1010$, но най-големите същински делители на 1010 са 505 и 202; противоречие.

Ако $d+2=515$, имаме $d=513$, което обаче не е просто число.

Така получихме, че единственото решение на задачата е $n=618$.

Задачата е решена от **Румяна Лазарова** (5. клас, МГ, Варна), **Александър Мургин** (6. клас, Видин), **Демира Недева** (6. клас, Пловдив), **Лазар Тодоров** (6. клас, СМГ), **Николай Николаев** (6. клас, Видин), **Никола Гюлев** (6. клас, Пловдив), **Виктор Костадинов** (7. клас, ПЧМГ), **Дениз Потурлиев** (7. клас, Плевен), **Николай Георгиев** (7. клас, Силистра).

ВАКАНЦИОННИ ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА

По материали на Mark Saul

Лятната ваканция е идеално време за свободно математическо творчество. Налице са всички условия да се потопите в любимите си задачи и да предприемете пътешествие из интересни области на математиката.

Предизвикателствата на Mark Saul предлагат две възможни дестинации, към които да се отправите в своите ваканционни математически изследвания. Това са две системи от задачи, нещо като примерна програма за пътешествие, която вие по свой вкус може да разширите и обогатите.

Ако тези предложения ви харесат, решите задачите и измислите свои подобни задачи, ще се радваме да ни пишете! Най-оригиналните изследвания ще публикуваме на страниците на списанието.

Импровизирайте смело и с удоволствие!

Необичайни калкулатори: предизвикателство за начинаещи

Разполагаме с четири калкулатора, всеки от които може да извършва само определени пресмятания. Всеки калкулатор в началото показва 0.

Калкулатор 1. Калкулатор 1 извършва само две операции с бутоните A и B. Бутон A прибавя 3, а бутон B прибавя 7.

1. Да се покаже, че при последователно натискане ABAB калкулаторът ще покаже 20. Какво ще се получи, ако натиснем ABBA?

2. Лесно се вижда, че не може да се получи 8. Кои други числа не могат да се получат? Кое е най-голямото естествено число, което не може да се получи на калкулатор 1?

Калкулатор 2. При този калкулатор бутон A прибавя 1, а бутон B умножава по 3.

3. Ако натисна ABBAAAA, ще получа 13. Намерете по-кратка последователност от бутони, след чието натискане се получава 13.

4. Най-малко колко бутона трябва да се натиснат, за да се получи 102? А 511?

Калкулатор 3. Тук бутон A прибавя 6, бутон B дели на 2, а бутон C дели на 3.

5. Покажете, че с калкулатор 3 може да се получи всяко естествено число.

6. Най-малко колко бутона трябва да се натиснат, за да се получи 99?

Калкулатор 4. При калкулатор 4 бутон A прибавя 5, бутон B прибавя 7, а бутон C пресмята квадратен корен.

7. Да се докаже, че на калкулатор 4 може да се получи всяко естествено число.

Игри с палиндроми: предизвикателство за напреднали

Червени и черни пулове са подредени в редица. За един ход се вземат няколко последователни пула отляво или отдясно, които образуват палиндром. Например, ако пуловете са RBRRB, отляво може да се вземе R или RBR, а отдясно може да се вземе B или BRRB.

1. Да се докаже, че ако в редицата има три пула, първият играч може да вземе поне два от тях.

2а. Да се докаже, че ако в редицата има точно 5 пула, първият играч може да вземе поне три от тях.

2б. Да се докаже, че ако в редицата има точно 8 пула, първият играч може да вземе поне два от тях. Винаги ли е възможно първият играч да вземе три пула?

2в. Можете ли да подредите много дълга редица от пулове, при която първият играч може да вземе най-много два пула?

Лакома игра. Дадена е редица от пулове. Двама играчи поред вземат пулове по описания по-горе начин. *Печели този, който има повече пулове*, след като всички пулове са взети.

3. Играта започва с редицата RBRBBBRRBBBRBRB. Единият от играчите има печеливша стратегия. Кой е той?

4. Кой има печеливша стратегия при редица от пулове

RRBRRBBRBRRRBRBBRRBRB?

5. Постройте дълга редица, при която играч 1 печели. Можете ли да построите дълга редица, при която вторият играч има печеливша стратегия?

Търпелива игра. Дадена е редица от пулове. Двама играчи поред вземат пулове по описания начин. *Печели този, който вземе последния пул.*

6. Можете ли да построите дълга редица, при която първият играч има печеливша стратегия?

7. Можете ли да построите дълга редица, при която вторият играч има печеливша стратегия?

8. Съществува ли редица от пулове, при която първият играч има печеливша стратегия при лакома игра, а вторият играч има печеливша стратегия при търпелива игра? А обратното?

ИМА ЛИ КРАЙ ТАЗИ ЗАДАЧА?

Жен-И-Сен

Ще ми се да споделя с вас, драги читатели, една задача, която преди петдестина години чух от Adriaan van Wijngaarden (един от създателите на програмния език Algol), и все още предизвиква интерес сред ученици и приятели на различна възраст. Ето как изглежда оригиналната формулировка:

SYNTAX FLUTE FAIR THE ?

Коя дума трябва да поставим на мястото на въпросителната?

Дори и със скромни знания по английски език (например как се пишат числата) имате шанс да намерите отговора. Не бързайте да четете нататък…Няколко интересни въпроси свързани с тази задача са:

Можем ли да продължим редицата от думи в обратна посока?

Докъде можем да стигнем?

Как да преведем задачата на други езици?

Ето например един възможен превод на български на тази задача:

ШПАГАТ ПАКЕТ ЧИЛИ ТРИ ?

Ако вече сте решили оригиналната задача, ще съобразите, че за разлика от нея, преведената на български език задача няма единствено решение.

Предложих задачата на деца от втори клас и ги предизвиках да продължат редицата наляво. Едно момченце съобрази, че думата преди ШПАГАТ трябва да е със седем букви, да започва със "С"и да завършва на "М". Избързах с мое решение (СЪБАРЯМ), но неговата незабавна реакция бе: "Имам друго решение – СЪБИРАМ!". Признах го за победител в този рунд с надеждата, че мога все пак да стана краен победител. Краен ли? До колкобуквена дума можете да стигнете вие? Помислете, преди да продължите с четенето. Един американски математик стигна до 17-буквена дума във варианта на английски език. В опит за подобряване на рекорда му на български проведохме забавен диалог с неколцина приятели (математици и информатици) във Фейсбук. Първата реакция бе ОБОЖАВАМ. Докато мислех, че става дума за отношение към логически задачи, разбрах, че въпросната дума би могла да предхожда СЪБИРАМ. Последваха (наляво естествено)

ДЕГЕНЕРАТ,
ДИСИДЕНТЪТ,
ЕЛЕКТОРАТЪТ,
ДРУГОСЕЛЕЦЪТ.

Имаше дискусия дали думите трябва да са само съществителни имена и може ли да са членувани. Но освен, че в условието нямаше ограничителни условия, самото присъствие на определителния член THE показваше, че могат да участват думи, които са в речника или поне биха могли да бъдат...

ТЕЛЕГРАФИСТЪТ,
ЧОРАПОГАЩНИКЪТ,
ПОЛУПРОВОДНИКЪТ,
ШУМОЗАГЛУШИТЕЛЯТ

ни доближиха до американския рекорд. Изравняването му дойде с две достойни предложения:

СВЕТЛООТРАЗИТЕЛЯТ и
СВРЪХИЗТРЕБИТЕЛЯТ.

В опит да подобря рекорда предложих засега несъществуваща дума (но пък кой би ми попречил да я вмъкна в някой фантастичен разказ):

ОСЕМНАДЕСЕТОНОГИЯТ.

Малко по-реалистично предложение бе ОЛИОПРОИЗВОДТИЕЛЯТ (щом има месопроизводител...). Последваха ДРЕВНОМЕСОПОТАМСКИЯТ, а след него ДЕЗОКСИРИБОНУКЛЕИНОВО (и ДОСТОЛЕПНОПРЕМЕНЕНОТО). Моето скромно ДВАНАЙСЕТОПРЪСТНИЧЕНЦЕ отстъпи на ДАЛЕКОПЪТЕШЕСТВЕНИЦИТЕ или на ДРЕБНОСОБСТВЕНИЧЕСКИТЕ, които могат да се срещнат и в речника.

Естествено, в процеса на търсене се запитахме има ли смисъл думата древновизантийският, след като самото понятие Византия се появява едва в XVI век, може ли да се каже органолептически или самоорганолептичен е правилно и какво точно значи...

Така или иначе стигнахме до 22-буквена дума, а 22 според един ученик било *най-гадното число.* Защо пък? – изненадах се аз. *Защото мразя двойката* – гласеше отговорът. *Ами в 22 има само две двойки, тогава 222 не е ли по-гадно?* – упорствах аз. *Как не разбираш – в 22 има 2 двойки!!!*

Очаквам от вас не само продължение, но и по-хубави предложения за някои от нашите решения.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ РУСКИ ОЛИМПИАДИ

4. клас

46. Миша ходил за риба. Той отишъл пеша до реката, а се върнал с велосипед. За отиване и връщане му били нужни общо 40 минути.

На следващия ден Миша на отиване и на връщане от реката се движил с велосипед, за което му били нужни общо 20 минути.

За колко минути Миша пеша ще отиде и ще се върне от реката?

47. Три картички и четири плика струват 18 лв., а шест картички и пет плика струват 27 лв. Колко струва една картичка?

48. Две училища купили на една и съща цена 14 учебни табла. Едното училище платило 30 лв., а другото платило 40 лв. Колко табла е купило всяко училище?

49. Рис може да изяде 600 кг месо за 6 часа, а тигър може да изяде тази порция 2 пъти по-бързо. За колко време рисът и тигърът заедно могат да изядат това месо?

5. клас

50. В училище има 33 кабинета, като в $\frac{2}{3}$ от тях има по 12 чина, а в останалите – по 13. До всеки чин има два стола, като 50% от столовете имат по три крака, а останалите – по четири. Всеки чин, освен 7 специални, има по 4 крака, а специалните чинове имат по 6 крака. Общо колко крака имат чиновете и столовете в това училище?

51. Петър има повече от 150, но по-малко от 200 книги. От тях 20% са романи, а $\frac{1}{7}$ са с поезия. Колко книги има Петър?

52. Като отскочи от левия си крак, Кенгуруто скача 2 метра, от десния 4 метра, а с двата крака скача 7 метра. Най-малко с колко скока Кенгурутo ще измине точно 300 метра?

53. Царят на джуджетата пази съкровищата си в три сандъка до стената. В единия са скъпоценните камъни, във втория златните монети, а в третия – магическите книги. Той помни, че червеният сандък е вдясно от съпоценните камъни, а магическите книги са вдясно от червения сандък. Какъв е цветът на сандъка с магическите книги, ако зеленият сандък е вляво от синия?

6. клас

54. Половината от едно положително число умножили с 20% от същото число и получили 22,5. Намерете това число.

55. Ученик прочел една книга за 3 дни. Първия ден той прочел 20% от книгата и още 16 страници; втория ден прочел 30% от остатъка и още 20 страници, а на третия ден прочел 75% от новия остатък и последните 30 страници. Колко страници има тази книга?

56. Средното аритметично на шест числа е 17. Изтрили едно от числата и средното аритметично на останалите пет числа станало 19. Кое е изтритото число?

57. Две бутилки A и B са пълни донякъде с вода. Първо $\dfrac{1}{4}$ от водата в A прелели в B, а след това $\dfrac{1}{3}$ от водата в B прелели в A. По този начин количество вода в бутилките се изравнило. В какво отношение е било количеството вода в двете бутилки в началото?

7. клас

58. Получих кутия с три вида бонбони: карамелени, шоколадови и желета. Карамелените са с 8 по-малко от всички останали бонбони, а шоколадовите са с 14 по-малко от останалите бонбони. Колко са желетата?

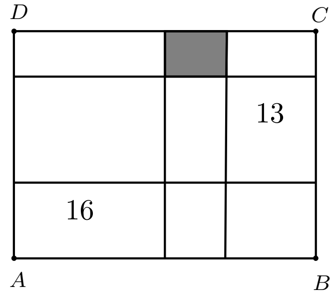
59. В едно кафене се срещнали 55 вълшебни същества: елфи и джуджета. Всеки си поръчал или чай, или кафе. Всички елфи казват истината, когато пият чай, и лъжат, когато пият кафе, а при джуджетата е обратното. На въпроса *Чай ли пиете?* се получили 44 отговора *Да*, а на въпроса *Вие джудже ли сте?* се получили 33 отговора *Да*. Колко от вълшебните същества пили чай и колко са били джуджетата?

60. Майката на Ваня се разхожда около кръгло езеро и обикаля езерото за 12 минути. Ваня кара тротинетка по същата алея в същата посока и настига майка си на всеки 12 минути. Ако Ваня се движи със същата скорост, но в обратната посока, през колко минути ще среща майка си?

за по-малките  решения

на задачите от бр. 3/2019

31. Правоъгълникът $ABCD$ на чертежа е с обиколка 40 см и е разделен чрез прави, успоредни на страните му, на девет по-малки правоъгълника. Ако числата в двата правоъгълника са равни на обиколките им в сантиметри, намерете обиколката на оцветения правоъгълник в сантиметри.



Решение. Обиколката на правоъгълника $ABCD$ е сбор на обиколките на оцветения правоъгълник и на двата правоъгълника, в които са записани съответните им обиколки. Затова обиколката на оцветения правоъгълник е $40 - (16 + 13) = 11$ см.

32. В намерената наскоро „Книга на тайните“ историци установили, че някои страници липсват – след страница 98 следва страница 107, а след страница 288 – 303 страница. Колко листа от тази древна книга са загубени завинаги, уви?

Решение. Загубени са $((106 - 98) + (302 - 288)) : 2 = 11$ листа.

33. Хари реши да се подготви за престоящото *Особено важно състезание* и изреши всички задачи от един неголям сборник. През първия ден той реши третината от всички задачи, през втория ден – само 18 задачи, през третия ден – половината от останалите задачи, през четвъртия ден – два пъти по-малко задачи, отколкото през петия ден, а през петия ден – последните 20 задачи. Колко задачи реши Хари през първия ден?

Решение. През четвъртия ден Хари е решил $20 : 2 = 10$ задачи, т.е. за последните два дни е решил 30 задачи. Следователно и на третия ден е решил 30 задачи. След първия ден са му останали $2.30 + 18 = 78$ задачи. Това са двете третини, останали след първия ден. Следователно през първия ден той е решил $78 : 2 = 39$ задачи.

34. Таралежът Ежко събрал ябълки за зимата и ги подредил на слоеве по следния начин – в първия слой поставил 35 ябълки, подредени във формата на правоъгълник с 5 реда и 7 стълба, след това във всяка дупчица, образувана от четири съседни ябълки, поставил по една ябълка и така се получил вторият слой. Продължил, докато това било възможно. Колко ябълки общо е подредил Ежко?

Решение. Ежко е подредил $5.7 = 35$ ябълки на първия слой; $4.6 = 24$ ябълки на втория; $3.5 = 15$ ябълки на третия; $2.4 = 8$ ябълки на четвъртия и $1.3 = 3$ ябълки на петия слой. Ябълките са $35 + 24 + 15 + 8 + 3 = 85$.

35. Да се намери броят на четирицифрените числа $\overline{abcd}$, които се делят на 36 и за които $c = d + 1$.

Решение. От признака за делимост на 4 и условието $c = d+1$ следва, че последните две цифри на търсените числа може да са 32 или 76.

Числата от вида $\overline{ab32}$, които се делят на 9, се получават при $a + b = 4$ (4 числа) или $a + b = 13$ (6 числа); общо са 10 числа.

Числата от вида $\overline{ab76}$, които се делят на 9, се получават при $a + b = 5$ (5 числа) или $a + b = 14$ (5 числа); общо са 10 числа.

Търсеният брой е 20.

36. Всички пирати разделили плячката по равно. Първият взел 100 жълтици и една десета от останалото, след което вторият взел 200 жълтици и една десета от останалото и т.н. Колко са пиратите на кораба?

Решение. Първите двама са взели равен брой жълтизи. Значи една десета от останалото, след като вторият пират взел 200 жълтици, е със 100 жълтици по-малко от една десета от останалото, след като първият пират взел 100 жълтици. Това означава, че останалото, след като вторият пират взел 200 жълтици, е с 1000 жълтици по-малко от останалото, след като първият пират взел 100 жълтици. Това пък значи, че след като първият пират взел 100 жълтици, една десета от останалото е $1000 - 200 = 800$, т.е. са останали 8000 жълтици.

Общо жълтиците са били 8100 и първият е взел $100+800 = 900$, значи пиратите са били $8100 : 900 = 9$.

37. Да се намери неизвестното число x в равенството

$$\frac{(3 - 22.0{,}05)\,.\frac{1}{10}}{9 : 180 + x} = 0{,}05.$$

Решение. Числителят е равен на $(3-22.0{,}05).\dfrac{1}{10} = (3-1,1).0,1 = 0,19$ и тъй като $9 : 180 = 0,05$, намираме неизвестния делител

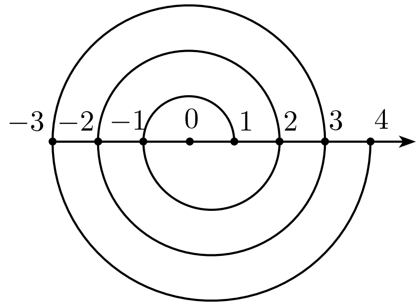
$$0,05 + x = 0,19 : 0,05, \quad \text{т.е.} \quad 0,05 + x = 3,8 \quad \text{и} \quad x = 3,8 - 0,05 = 3,75.$$

38. Вървях към парка със скорост 1,5 м/сек. Когато до парка оставаха 200 м, оттам се появи куче и се отправи право срещу мен. След 12 секунди, когато кучето се намираше на 80 м от мен, се шмугна в храст. С каква скорост е бягало кучето?

Решение. За 12 секунди дистанцията между човека и кучето се е скъсила с $200 - 80 = 120$ метра. Значи сборът на скоростите на човека и кучето е $120 : 12 = 10$ м/сек, а оттук скоростта на кучето е $10 - 1,5 = 8,5$ м/сек.

39. Колко са целите числа x, изпълняващи условията

$$x > -3{,}4 \quad \text{и} \quad 1\frac{1}{3} < |x| \leqq 5 \quad ?$$



Решение. Търсените числа са -3; -2; 2; 3; 4; 5; общо 6 на брой.

40. Да се намери дължината на спиралата.

Решение. Дължината на спиралата е сбор от дължините на полуокръжности с радиус 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 и е $\pi(1+1,5+2+2,5+3+3,5) = 13,5\pi$.

41. Цилиндрична чаша има радиус 4 см, който е 25% от височината ѝ. До каква височина може да се налее натурален сок така, че когато в него се постави топка сладолед с радиус, равен на $\frac{3}{4}$ от радиуса на основата на чашата, сокът в нея да не прелее?

Решение. Височината на чашата е $4 : 0,25 = 16$ см. Радиусът на топката е 3 см. Обемът на топката е $\frac{4}{3}\pi.3^3 = 36\pi$ и е равен на обема на цилиндър с радиус 4 см и височина $36 : 16 = 2,25$ см. Следователно може да се налее сок до височина $16 - 2,25 = 13,75$ см.

42. След две последователни намаления стока, която струва 800 лв., е продадена за 480 лв. Ако първото намаление е 25%, колко процента е второто намаление?

Решение. След първото намаление стоката струвала $75\%.800 = 600$ лв. Второто намаление е $\dfrac{600 - 480}{600} = 20\%$.

43. Сборът на три естествени числа е 100. Като разделим първото число на второто, се получава частно 1 и остатък, равен на третото число. Второто число е с 10 по-голямо от третото. Да се намери произведението на трите числа.

Решение. Нека първото число е x, второто е y, а третото е z. Имаме

$$x + y + z = 100, \qquad x = y + z, \qquad y = z + 10.$$

Оттук лесно намираме, че $x = y + z = 50$, $y = 30$ и $z = 20$, а търсеното произведение е 30000.

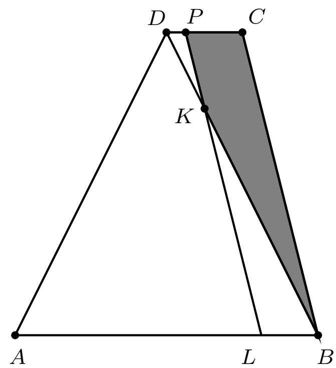
44. От София за Бургас тръгват едновременно две коли – Пежо и Опел, като първата се движи по–бавно от втората. Един час по–късно от София в същата посока тръгва Мерцедес. Два часа след тръгването си той се намира между другите две коли, като разстоянието между Мерцедеса и Пежото е два пъти по–малко от първоначалното, между Мерцедеса и Опела е три пъти по–малко от първоначалното. Да се намери отношението на скоростите на Опела и Пежото.

Решение. Ако означим мерцедеса с М. и скоростите по съответния начин, изразяваме разстоянията между колите при тръгването на М. и два часа след това.

Разстояние	При тръгването на М.	Два часа след тръгването на М.
М. – Пежо	$v_{\text{пежо}}$	$2v_{\text{М}} - 3v_{\text{пежо}}$
М. – Опел	$v_{\text{опел}}$	$3v_{\text{опел}} - 2v_{\text{М}}$

Имаме
$$2v_{\text{М}} - 3v_{\text{пежо}} = \frac{1}{2}v_{\text{пежо}} \iff 4v_{\text{М}} = 7v_{\text{пежо}},$$
$$3v_{\text{опел}} - 2v_{\text{М}} = \frac{1}{3}v_{\text{опел}} \iff 4v_{\text{опел}} = 3v_{\text{М}}.$$
Тогава $v_{\text{опел}} : v_{\text{пежо}} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{4}{7} = \dfrac{21}{16}$.

45. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точка K е от диагонала BD и
$$DK : KB = 1 : 3.$$
През точка K е построена права, успоредна на BC, която пресича DC в точка P. Ако $AB = 4$ и $CD = 1$, да се намери отношението на лицата на четириъгълниците $BCPK$ и $ABCD$.



Решение. Нека $KP \cap AB = L$. Да означим $S_{DKP} = x$. Имаме
$$S_{BKP} : S_{DKP} = BK : KD = 3 \Longrightarrow S_{BKP} = 3x.$$
Тъй като $LBPD$ е трапец, то $S_{DKL} = S_{BKP} = 3x$ и имаме
$$S_{BKL} : S_{DKL} = BK : KD = 3 \Longrightarrow S_{BKL} = 9x.$$
Тъй като $LBCP$ е успоредник, то $S_{PCB} = S_{LBP} = 12x$. Получаваме, че $S_{BCPK} = 15x$.

Тъй като $AB = 4$ и $CD = 1$, то $S_{ABD} = 4S_{BCD}$. Следователно
$$S_{ABCD} = 5S_{BCD} = 5.16x = 80x.$$
Тогава $S_{BCPK} : S_{ABCD} = 15 : 80 = 3 : 16$.

ОТНОВО ЗАДАЧИ С КАРТИНКИ

И в този брой ще споделим с вас някои от прекрасно илюстрираните от **Тоня Горанова** задачи, които изровихме от старите броеве на списание *Математика*.

Президентски избори (от *Математика* 1990/4)

В предстоящите президентски избори ще участват няколко кандидати. Съгласно конституцията, втори тур на изборите няма да се провежда, ако един от кандидатите още на първия тур спечели с абсолютно болшинство (т.е. получи повече от половината гласове). Но ако това не стане, ще се проведе втори тур, в който ще участват само първите двама кандидати, получили най-много гласове в първия тур.

Ако според броя на получените гласове кандидатите могат да се подредят в списък, в който на всеки пореден номер съответстват два пъти помалко гласове от тези на предишния, ще има ли нужда от втори тур на изборите?

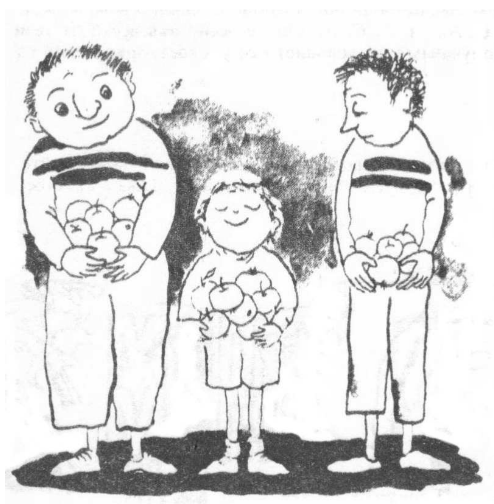
Мокрите точки (от *Математика* 1989/10)

Да предположим, че на отсечката $[0;1]$ от абсцисната ос пада дъжд. За да защитим точките от дъжда, постъпваме по следния начин. Разделяме отсечката $[0;1]$ на три равни части и издигаме над средната част палатка с форма на равностранен триъгълник. Тя ще защити всички точки, намиращи се между $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. След това всяка от останалите две части $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ отново разделяме на три и средната от тях покриваме с палатка.

Ако този процес продължи неограничено, ще останат ли под дъжда други точки, освен краищата на палатките?

Досетливото момче (от *Математика* 1989/1)

Трима братя получили 24 ябълки, като на всеки се паднали толкова ябълки, на колкото години е бил преди три години. Най-младият, много досетливо момче, предложил на братята си такава смяна на ябълките:



Аз – казал той – *си оставям само половината от ябълките, които имам, а другите ще ви разделя по равно; след това нека средният ни брат си остави половината, а другите ябълки да даде на мен и най-големия ни брат по равно, а после и най-големият ни брат нека си остави половината от всички ябълки, които има, а другите да раздели поравно между мен и средния ни брат.*

Братята, без да подозират хитрина в това предложение, се съгласили да удовлетворят желанието на най-малкия. В резултат всички получили по равен брой ябълки. На колко години било момчето и всеки от братята му?

От разказа на Стендал (от *Математика* 1988/7)

Френският писател Стендал разказва в автобиографията си за дълбокото впечатление, което му е направило в ученическите години решението на една несложна задача. *Това беше* – казва той – *за мен откритие, защото именно при решаването на тази задача разбрах що е математика и какво може да се постигне с нейните средства и методи.*

А задачата наистина е лесна – убедете се сами.

Две селянки донесли на пазара 100 яйца – едната селянка повече, другата по-малко. Когато се връщали вкъщи и разговаряли по пътя, оказало се, че двете са успели да продадат яйцата си за една и съща сума. И тогава първата селянка казала: *Ако имах твоите яйца, щях да взема за тях 15 крайцера (дребна монета).* А втората казала: *А аз щях да взема за твоите яйца само* $6\dfrac{2}{3}$ *крайцера.*

По колко яйца е имала всяка от селянките?

Задача на Нютон (от *Математика* 1979/3)

Двама пощенски раздавачи A и B, намиращи се на разстояние 59 мили, всяка сутрин тръгват един срещу друг. Раздавачът A преминава за 2 часа 7 мили, а раздавачът B за 3 часа преминава 8 мили. При това B тръгва един час по-късно от A. Колко мили ще измине A до срещата си с B?

Санчо Панса губернатор (от *Математика* 1989/9)

Санчо Панса трябваше и този ден да влезе в ролята си на съдник. Като най-напред пред него се яви един пришълец, не жител на градчето, който в присъствието на домоуправителя и останалите подчинени му зададе следния въпрос.

– Сеньор, пълноводна река разделя на две земите на едно владение... Внимавайте добре, Ваша милост, защото въпросът е важен и доста труден. Над тази река има мост, а на края му се издига бесилка и до нея нещо като съдилище, в което стоят обикновено четирима съдии и следят за изпълнение на закона, издаден от

владетеля на реката, на моста и на земята. Той гласи така: *ако някой иска да мине по моста от единия бряг до другия, трябва да заяви под клетва къде отива и по каква работа. Ако каже истината, да бъде пуснат да мине, а ако излъже, да бъде качен без всякаква милост на бесилката до моста.* Откакто станаха известни суровите постановления на закона, минаваха мнозина и щом се разбереше, че казват под клетва истината, съдиите ги пускаха да продължат свободно пътя си. Яви се веднъж човек, който положи клетва и заяви – в потвърждение на клетвата си – че е дошъл, за да умре на тази бесилка и никъде другаде. Съдиите обсъдиха така положената клетва и казаха: *Ако пуснем този човек да мине свободно, ще излезе, че е дал лъжлива клетва и съгласно закона трябва да умре, ако пък решим да го обесим, той заяви под клетва, че ще умре на тази бесилка, значи не е излъгал и съгласно същия закон, трябва да го пуснем на свобода.* От Ваша милост, сеньор губернатор, се иска да кажете как трябва да постъпят с този човек съдиите, защото те и досега още се колебаят.

Спомняте ли си как разреши този казус Санчо Панса? А какво бихте отговорили вие, ако случаят беше такъв:

Владетелят на реката и моста има красива неомъжена дъщеря. Веднъж до моста идва човек, който съгласно закона казва къде и по каква причина отива и в уверение на това полага клетва. Какви са били думите му, ако в резултата на тях съдиите трябвало да го пуснат да мине по моста, а владетелят бил принуден да му да даде дъщеря си за жена?

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ

от бр. 3/2019 г.

1. Г); **2.** А); **3.** В); **4.** А); **5.** Б).

6. Полагаме $2^x = y > 0$. След повдигане в квадрат уравнението е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} y^2 - (8+a^2)y + 16 + a^2 = 0 \\ 4 - y \geq 0 \\ y > 0. \end{array} \right.$$

Решенията на квадратното уравнение са $y_{1,2} = \dfrac{8 + a^2 \pm a\sqrt{a^2+12}}{2}$ и очевидно съществуват за всички a.

а) При $a = 2$ получаваме $y_1 = 2$, което е решение на горната система, и оттук $x = 1$. $y_2 = 10$ не дава решение.

б) Нека $f(y) = y^2 - (8+a^2)y + 16 + a^2$. Изискването за корен x между 1 и 2 води до изискването уравнението $f(y) = 0$ да има корен между 2 и 4, т.е. трябва

$$2 \leq \frac{8 + a^2 \pm a\sqrt{a^2+12}}{2} \leq 4.$$

Получаваме $-a^2 - 4 \leq \pm a\sqrt{a^2+12} \leq -a^2$. Знакът "+" е невъзможен. Остава

$$-a^2 - 4 \leq -a\sqrt{a^2+12} \leq -a^2 \text{ или } a^2 + 4 \geq a\sqrt{a^2+12} \geq a^2$$

и след повдигане в квадрат $0 \leq a^2 \leq 4$, т.е. $a \in (0, 2]$.

До решението може да се стигне и чрез изследване на функцията $f(y)$. Най-малката ѝ стойност (върхът на параболата) се достига за $y_0 = \dfrac{8+a^2}{2} > 4$, което показва, че само по-малкият корен може да е между 2 и 4. Това води до системата $\left| \begin{array}{l} f(2) \geq 0 \\ f(4) \leq 0. \end{array} \right.$

7. а) Тъй като BB_1 е диаметър, ъглите $\sphericalangle BDB_1$ и $\sphericalangle BFB_1$ са прави. Сега $\sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle FDB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\sphericalangle BDF = 90^\circ - \sphericalangle FDB_1 = \gamma$, т. е. $\triangle FBD$ и $\triangle ABC$ имат равни ъгли. Понеже $\sphericalangle DB_1B = \alpha$ ($= \sphericalangle DFB$), то

$$BD = h \sin\alpha = h\sin(\beta+\gamma).$$

Също така $BC = \dfrac{h}{\sin\gamma}$, откъдето $\dfrac{BD}{BC} \sin\gamma \sin(\beta+\gamma)$.

б) Тъй като $f(\gamma) = \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos(\beta + 2\gamma))$, най-голямата ѝ стойност се достига за $\cos(\beta + 2\gamma) = -1$, т. е. $\beta + 2\gamma = \pi$ или $\gamma = \frac{\pi - \beta}{2} (= \alpha)$.

Разбира се, до същия извод може да се стигне и с използване на производни.

в) Когато $\triangle ABC$ е равнобедрен ($\gamma = \alpha$), $DF \parallel AC$ и получаваме $S_{BDB_1F} = \frac{1}{2}DF.BB_1 = \frac{1}{2}h^2 \sin\beta$. От друга страна,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.BC \sin\beta = \frac{1}{2}\frac{h^2 \sin\beta}{\sin\gamma \sin(\beta + \gamma)}$$

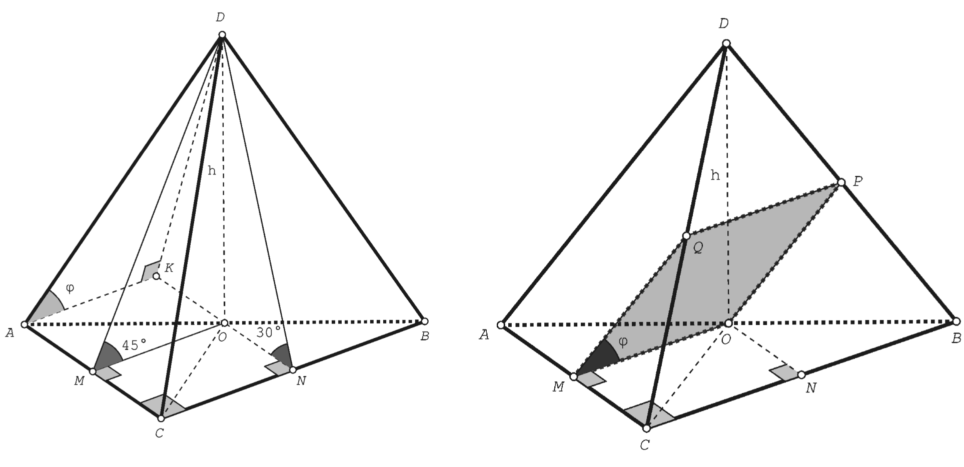
и търсеното отношение е $\sin\gamma \sin(\beta + \gamma)$.

Интересно (и поучително) е да се проследят горните изводи, когато например ъгъл γ е тъп.

8. а) Прекарваме перпендикуляри OM и ON съответно към катетите AC и BC на $\triangle ABC$. Тогава $\sphericalangle OMD = 45^\circ$ и $\sphericalangle OND = 30^\circ$. Получаваме последователно $BC = 2OM = 2h$, $AC = 2ON = 2h\sqrt{3}$ и $AB = 4h$.

б) За да построим търсения ъгъл, през точката A построяваме успоредна на BC права. Към нея прекарваме перпендикуляр NK. Тогава $\sphericalangle KAD = \varphi$. В $\triangle KAD$ имаме, че $\sphericalangle AKD$ е прав (защо?), $AK = CN = h$, $KD = DN = 2h$ и $AD = h\sqrt{5}$. Оттук $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

в) Ясно е, че точката O е от ρ. Нека ρ пресича ръбовете BD и CD съответно в точките P и Q. Тъй като $OM \parallel BC \parallel PQ$ и $MQ \parallel AD \parallel OP$, то сечението $MOPQ$ е успоредник с $\sphericalangle OMQ = \varphi$ и страни $OM = h$ и $MQ = \frac{1}{2}AD = \frac{h\sqrt{5}}{2}$. Сега $S_{сеч} = OM.MQ \sin\varphi = h^2$.



И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: `spisaniematematika2019@gmail.com`

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 15.05.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.