МАТЕМАТИКА

БРОЙ 5
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

 ISSN 0204-6881

59. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков (ИМИ–БАН), Емил Колев (ИМИ–БАН),

Александър Иванов

От 4 до 14 юли в Клуж-Напока, Румъния, се проведе 59. Международна олимпиада по математика за ученици. Участваха 595 ученика от 107 страни. България беше представена от **Кирил Бангачев** (12. клас, СМГ, учител Румяна Караджова), **Константин Гаров** (12. клас, ППМГ Бургас, учител Динко Раднев), **Атанас Динев** (12. клас, ППМГ Бургас, учител Магдалена Янева), **Иван-Александър Мавров** (11. клас, СМГ, учител Петя Тодорова), **Борислав Антов** (11 клас, СМГ, учител Петя Тодорова) и **Кристиян Василев** (11. клас, ПЧМГ, учител Таня Стоева). Ръководители на отбора бяха проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ-БАН) и проф. дмн. Емил Колев (ИМИ-БАН), а като научен консултант на отбора участва Александър Иванов.

Подготовката на отбора беше проведена на два етапа – традиционният в Пампорово от 10 до 30 юни и втори в Бущени (Румъния) до 30 юни до 6 юли, където тя беше съвместна с отборите на Румъния и САЩ. Подготовката и участието бяха подпомогнати от Американска Фондация за България, Фондация Георги Чиликов и МОН.

Нашият отбор се представи отлично, като спечели един златен, три сребърни и един бронзов медала и една почетна грамота, 21-то място по точки в неофициалното отборно класиране (16-то по медали). Резултатите на българските участници по задачи са следните:

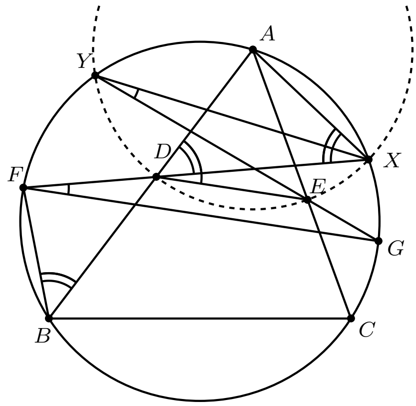
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Общо**	**Медал**
Кирил Бангачев	7	3	0	7	7	1	25	сребърен
Константин Гаров	7	7	0	7	6	2	29	сребърен
Атанас Динев	7	4	0	7	1	0	19	бронзов
Иван-Александър Мавров	7	7	0	7	7	2	30	сребърен
Борислав Антов	7	7	2	7	7	1	31	златен
Кристиян Василев	7	2	0	0	1	2	12	грамота
Общо	42	30	2	35	29	8	146	

Резултатите на всички участници, заедно с интересна статистика, са на официалния сайт на международните олимпиади www.imo-official.org.

Предлагаме ви задачите с решения и кратки коментари.

Задача 1. Нека Γ е описаната около остроъгълен триъгълник ABC окръжност. Точките D и E лежат съответно върху отсечките AB и AC така, че $AD = AE$. Симетралите на BD и CE пресичат малките дъги AB и AC от Γ съответно в точки F и G. Да се докаже, че правите DE и FG са успоредни или съвпадат.

Решение. Нека $FD \cap \Gamma = \{F, X\}$ и $GE \cap \Gamma = \{G, Y\}$. Тогава от вписания четириъгълник $AFBX$ следва, че



$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle AXD.$$

От $\triangle BFD$ имаме $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FDB$. Следователно

$$\sphericalangle ADX = \sphericalangle AXD,$$

което означава, че $AX = AD$. Аналогично получаваме, че $AE = AY$, т.е. $AX = AD = AE = AY$. Следователно точките X, E, D и Y лежат на една окръжност.

Сега от вписания четириъгълник $XYDE$ следва, че $\sphericalangle EDX = \sphericalangle EYX$, а тъй като точките F, G, X и Y лежат върху Γ, то $\sphericalangle GFX = \sphericalangle EYX$. Следователно $\sphericalangle XDE = \sphericalangle XFG$, което означава, че $DE \| FG$.

Решение 2. Нека правата FG пресича правите AB и AC в точки M и N съответно. Твърдението на задачата е еквивалентно на $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM$. От $\triangle AMF$ следва, че $\sphericalangle AMN = \sphericalangle AFM + \sphericalangle MAF$, а от това, че точките A, F, C и G лежат върху Γ следва, че $\sphericalangle MFA = \sphericalangle ACG$. Получихме равенството $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ACG + \sphericalangle FAB$.

Аналогично $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ABF + \sphericalangle GAC$. Освен това,

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle FDB \quad \text{и} \quad \sphericalangle ACG = \sphericalangle GEC.$$

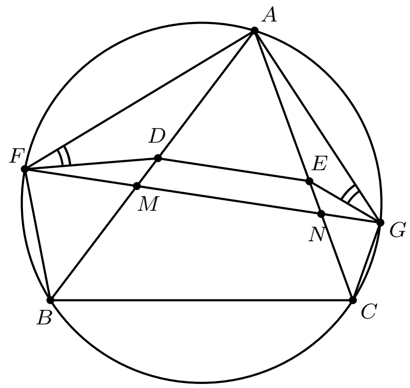
От $\triangle AFD$ получаваме, че $\sphericalangle FDB = \sphericalangle FAD + \sphericalangle DFA$ и аналогично от $\triangle GEA$ следва, че $\sphericalangle GEC = \sphericalangle GAC + \sphericalangle EGA$. Тогава

$$\begin{aligned} \sphericalangle AMN &= \sphericalangle ACG + \sphericalangle FAB \\ &= \sphericalangle GEC + \sphericalangle FAB \\ &= \sphericalangle GAE + \sphericalangle AGE + \sphericalangle FAB \end{aligned}$$

и аналогично

$$\sphericalangle ANM = \sphericalangle FAB + \sphericalangle DFA + \sphericalangle GAC.$$

Оттук следва, че исканото е еквивалентно на $\sphericalangle AFD = \sphericalangle AGE$.



От синусова теорема в $\triangle AEG$ следва, че $\dfrac{AG}{\sin\sphericalangle AEG} = \dfrac{AE}{\sin\sphericalangle AGE}$, а от синусова теорема в $\triangle AGC$ имаме $\dfrac{AG}{\sin\sphericalangle AGE} = 2R$, където R е радиусът на Γ (тук използвахме, че $\sphericalangle GEA = 180^\circ - \sphericalangle GEC = 180^\circ - \sphericalangle GCE$). Следователно $\dfrac{AE}{\sin\sphericalangle AGE} = 2R$ и аналогично $\dfrac{AD}{\sin\sphericalangle AFD} = 2R$. Накрая, тъй като $AD = AE$, то $\sin\sphericalangle AFD = \sin\sphericalangle AGE$ и понеже и двата ъгъла са остри, имаме $\sphericalangle AFD = \sphericalangle AGE$, което искахме да докажем.

Коментар. Нашият отбор очаквано представи 6 пълни решения на тази лесна геометрична задача.

Задача 2. Да се намерят всички цели числа $n \geq 3$, за които съществуват реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ такива, че $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за $i = 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Условието е еквивалентно на $a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2$. Сумирайки по i от 1 до n, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

От друга страна, имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i (a_{i+1} a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3}.\end{aligned}$$

Следователно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

което е възможно само при $a_i = a_{i+3}$ за всички $i = 1, 2, \cdots, n$.

Ако n се дели на 3, редицата, дефинирана с $a_{3k+1} = a_{3k+2} = -1$, $a_{3k} = 2$, върши работа. Ако n не се дели на 3, получаваме, че всички числа в редицата са равни (на a например) и тогава $a^2 - a + 1 = 0$, което е невъзможно.

Коментар. Никой от нашите ученици не намери горното кратко решение по време на състезанието. Представените три пълни решения разглеждаха случаи – първо се доказва, че в редицата не може да има 0, както и две последователни положителни числа, после, че алтернативно сменящи се знаци са невъзможни и накрая, че моделът $--+-+$ е невъзможен. Получените частични резултати също дойдоха от този подход.

Задача 3. Равностранен триъгълен масив от числа се нарича *анти-Паскалов*, ако притежава следното свойство: всяко число, което не е в последния ред, е равно на абсолютната стойност на разликата на двете числа непосредствено под него. Пример за анти-Паскалов триъгълник с четири реда с целите числа от 1 до 10 е показан на фигурата.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Съществува ли анти-Паскалов триъгълник с 2018 реда, който съдържа всяко цяло число от 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Решение. Да разгледаме задачата в общия случай (т.е. с n вместо 2018).

За анти-Паскалов триъгълник с n реда въвеждаме понятията *гръбнак*, *прешлен* и *крайник*. Числото във върха е най-горният прешлен. Всеки следващ прешлен е на долния ред спрямо предходния прешлен и е по-голямото от двете числа непосредствено под него. По-малкото от тези две числа пък ще наричаме *крайник*. Множеството от всички прешлени и крайници е *гръбнак* (на триъгълника).

Да наречем прешлена на най-долния ред *голям*. От дефиницията за анти-Паскалов триъгълник следва, че всеки прешлен е сума на прешлена над него и крайника в неговия ред. Оттук следва, че големият прешлен е сума от най-горния прешлен и всички крайници. Това са общо n различни естествени числа, което означава, че сумата им е поне $n(n+1)/2$. От друга страна, най-голямото число в триъгълника е точно $n(n+1)/2$. Следователно големият прешлен е равен на $n(n+1)/2$, а най-горното число и крайниците са точно числата от 1 до n.

Нека големият прешлен и крайникът в най-долния ред (те са един до друг) са на позиции m и $m+1$ в реда. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. Нека $m = 1$ или $m = n-1$, като без ограничение на общността можем да считаме, че $m = 1$.

Да разгледаме равностранния триъгълник със страна от останалите $n-2$ числа в най-долния ред. Този триъгълник също е анти-Паскалов. Следователно в него можем да направим прешлени, крайници и гръбнак по същия начин, както и можем да направим същите изводи. Тъй като в новия триъгълник липсват числата от гръбнака на стария, неговият голям прешлен е поне $(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-2) = (3n^2-7n+2)/2$. От друга страна, най-голямото число в новия триъгълник е $n(n+1)/2-1$. Следователно

$$\frac{3n^2-7n+2}{2} \leqq \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

което води до $n \leqq 3$.

Случай 2. Нека $1 < m < n-1$, т.е. в най-долния ред има числа и от двете страни на големия прешлен и най-долния крайник.

В този случай разглеждаме два вторични анти-Паскалови триъгълника, дефинирани съответно от първите $m-1$ и последните $n-m-1$ числа в най-долния ред. Тъй като тези триъгълници имат общо два най-големи прешлена и $n-4$ крайника, с аналогично на горното разсъждение заключаваме, че сумата на големите им прешлени е поне $(3n^2-7n+2)/2$. Но двете най-големи числа на разположение в тези триъгълници са $n(n+1)/2-1$ и $n(n+1)/2-2$. Следователно

$$\frac{3n^2-7n+2}{2} \leqq n^2+n-3,$$

което води до $n \leqq 8$.

Получихме, че анти-Паскалов триъгълник с n реда, който съдържа целите числа от 1 до $1+2+\cdots+n$, не съществува при $n > 8$. В частност, отговорът на поставения в задачата въпрос е отрицателен.

Коментар. Резултатът на нашия отбор върху тази задача е, меко казано, неудовлетворителен. Само Борислав Антов намери вярното тръгване и така спечелените две точки след това се оказаха решаващи за златния му медал.

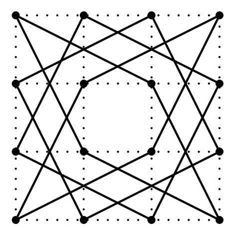
Задача 4. Точка $(x; y)$ в равнината, където x и y са естествени числа, ненадминаващи 20, се нарича възел.

Първоначално всичките 400 възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, поставяйки намъни във възлите, като Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя нов червен камък в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъни, да не е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на ход, той поставя син камък в незает възел. (Възел, зает от син камък, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта свършва, когато никой от играчите не може да направи ход.

Да се намери максималното число K, за което Мария може да постави поне K червени камъка, както и да играе Иван.

Решение. Ще докажем, че $K = 100$. Да оцветим възлите шахматно. Ясно е, че има 200 бели и 200 черни възела. При това, ако два възела са на разстояние $\sqrt{5}$, те са оцветени в различен цвят. Нека Мария слага червени камъни само в белите възли. Тази стратегия осигурява на Мария поставяне на поне 100 камъка, защото Иван може да заеме най-много 100 от белите възли.

Ще докажем, че Иван може да играе така, че Мария да не може да постави повече от 100 камъка.



Да разделим всички 400 възела на 25 квадратни части с размери 4×4. Всяка такава квадратна част разделяме на четири ромба по следния начин:
$(1, 1), (2, 3), (4, 4), (3, 2)$, $\quad (1, 4), (4, 1), (2, 2), (3, 3)$,
$(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)$ и $\quad (1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 1)$.

Когато Мария постави камък в някой възел, Иван поставя камък в противоположния връх на съответния ромб. По този начин във всеки ромб Мария може да постави най-много един камък. Следователно във всаки квадрат Мария не може да постави повече 4 камъка, т.е. тя може да постави най-много 100 камъка.

Коментар. Идеята за решение на тази задача е добре позната от задачите за разполагане на коне върху шахматна дъска.

Задача 5. Нека $a_1, a_2 \dots$ е безкрайна редица от естествени числа. Известно е, че съществува цяло число $N > 1$ такова, че за всяко $n \geqq N$ числото

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

е цяло. Да се докаже, че съществува естествено число M такова, че $a_m = a_{m+1}$ за всяко $m \geqq M$.

Решение. За всяко $n \geqq N$ числото

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)-\left(\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)=$$

$$=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1} \tag{1}$$

е цяло, тъй като е разлика на две цели числа.

Ще използваме, че ако сборът на две несъкратими дроби е цяло число, то двете дроби имат равни знаменатели.

Да допуснем, че числата a_1 и a_n имат прост делител p. Ако p не дели a_{n+1}, то p няма да дели и $a_{n+1}-a_n$. Тогава знаменателят на дробта $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$, представена в несъкратим вид, ще се дели на p, докато знаменателят на дробта $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ не се дели на p, противоречие. Следователно p дели a_{n+1}.

Аналогично ще получим, че p дели всички членове на редицата след a_n. Сега можем да съкратим на p, като условието (1) продължава да е изпълнено. Тъй като a_1 е фиксирано естествено число, можем само краен брой пъти да делим на някакво просто число.

Следователно съществува такова P, че при $n \geqq P$ числото a_1 е взаимнопросто с a_n. Тогава $(a_1, a_{n+1}) = 1$ и сборът $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ е цяло число само когато и двете събираеми са цели числа. Това означава, че a_{n+1} дели a_n за всяко $n \geqq P$, т.е. $a_n \geqq a_{n+1} \geqq a_{n+2} \geqq \dots$. Така получаваме монотонно намаляваща редица от естествени числа и следователно от известно място всички членове ще станат равни.

Задача 6. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който

$$AB.CD = BC.DA.$$

Точка X е вътрешна за $ABCD$ и е такава, че

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \text{ и } \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Да се докаже, че $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$.

Решение. Нека точка E е такава, че $\triangle XCD$ е подобен на $\triangle XBE$. Тогава имаме $\triangle XBC \sim \triangle XED$, като условието $AB.CD = AC.BD$ е еквивалентно на

$$\frac{AB.BE}{BX}=\frac{AD.DE}{DX}.$$

Следователно е достатъчно да докажем, че точките A, X и E лежат на една права. Да допуснем противното и нека $\sphericalangle AXB + \sphericalangle BXE > 180^\circ$. Ще докажем, че

$$\frac{AB.BE}{BX} > AE > \frac{AD.DE}{DX}.$$

Нека правата AX пресича описаната около $\triangle BXE$ окръжност в точка P. Тогава $\triangle ABP \sim \triangle BXE$ и следователно

$$\frac{AB.BE}{BX} = AP.$$

Аналогично, ако правата EX пресича описаната около $\triangle AXD$ окръжност в точка Q, то

$$\frac{AD.DE}{DX} = EQ.$$

Да фиксираме точките A, X и E и да движим точките B и D така, че $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XBE$ и $\sphericalangle XED = \sphericalangle XDA$. Тъй като $\sphericalangle APE = \sphericalangle EBX$, то AP има най-малка дължина, тогава и само тогава, когато $\sphericalangle XAB$ е възможно най-голям. Но $\sphericalangle XAB$ е най-голям когато AB е допирателна към описаната около $\triangle BXE$ окръжност. Това е вярно, когато $\triangle AXB \sim \triangle BXE$.

Аналогично, EQ има най-голяма дължина, когато $\sphericalangle XDA$ е най-голям, т.е. когато $\triangle AXD \sim \triangle DXE$. Достатъчно е да разгледаме тези крайни случаи. Тогава $ABED$ е вписан хармоничен четириъгълник и X е среда на BD, т.е. $BE > ED$. Лесно се вижда, че $\sphericalangle AEP = 180^\circ - \sphericalangle BDE$, откъдето

$$\frac{AP}{AE} = \frac{\sin \sphericalangle AEP}{\sin \sphericalangle APE} = \frac{\sin \sphericalangle BDE}{\sin \sphericalangle DBE} = \frac{BE}{ED} > 1.$$

Аналогично $\dfrac{EQ}{EA} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{EB} < 1$, откъдето $AP > AE > EQ$, което трябваше да се докаже.

ОТНОВО ПОБЕДА НА 35. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков (ИМИ–БАН),
Станислав Харизанов (ИМИ–БАН),
Олег Мушкаров (ИМИ–БАН)

От 7 до 12 май 2018 г. в гр. Белград, Сърбия, се проведе 35-тата Балканска олимпиада по математика. Българският отбор беше в състав Кирил Бангачев (12 клас, СМГ), Евгени Кайряков (10 клас, СМГ), Борислав Антов (11 клас, СМГ), Константин Гаров (12 клас, ППМГ Бургас), Кристиян Василев (11 клас, ПЧМГ), Атанас Динев (12 клас, ППМГ Бургас), проф. Петър Бойваленков (ИМИ-БАН) – ръководител, гл. ас. Станислав Харизанов (ИМИ/ИИКТ-БАН) – заместник-ръководител и чл.-кор. Олег Мушкаров (ИМИ-БАН) – научен консултант.

В БОМ участваха балканските страни Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния, Сърбия, Турция и Черна Гора, както и отбори-гости от Азербайджан, Великобритания, Италия, Казахстан, Саудитска Арабия, Туркменистан и втори отбор на Сърбия.

Нашите състезатели спечелиха три златни и три сребърни медала и за втора поредна година оглавихме отборното класиране с общ резултат от 230 точки. Втори се класира отборът на Румъния (223 точки), а трети – този на домакините от Сърбия (193 точки). Със златни медали са **Кирил Бангачев** ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки), **Евгени Кайряков** ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки) и **Борислав Антов** ($10 + 10 + 10 + 10 = 40$ точки), а сребърни медали получиха **Кристиян Василев** ($10 + 10 + 8 + 10 = 38$ точки), **Константин Гаров** ($10+6+10+10 = 36$ точки) и **Атанас Динев** ($10 + 10 + 10 + 6 = 36$ точки).

Състезателната тема бе сравнително лесна, поради което златен медал се взима само с пълен сбор точки. Прави впечатление, че сумарно отборът ни е загубил едва 10 точки (което е една задача) по темата, като найниския актив по задача е 6 точки. С други думи, всички задачи са били във възможностите на всеки от състезателите ни, като единствено липса на концентрация и недобро изпипване на детайлите в решенията е довело до частична загуба на точки. За сравнение, румънският отбор (заел второ място в отборното класиране) има пълен актив на първите три задачи, но двама от състезателите му не са се ориентирали по последната задача, където са останали съответно с 2 и 1 точки.

Благодарим на Министерството на образованието и науката и на генералния спонсор на отбора – Американска фондация за България, както и на фондация „Георги Чиликов“, които подпомогнаха нашето участие на състезанието. Благодарим на всички колеги, участвали активно в подготовката на отбора, провела се в ИМИ-БАН в периода 17-23 април. Благодарим на **К. Василев** (задачи 1 и 3), **К. Бангачев** (задача 2) и автора на задача 4 **Станислав Димитров** (ФМИ-СУ) за оформянето на решенията в настоящата статия. По-долу ви предлагаме условията и решенията на задачите от Балканиадата.

Задача 1. (*Емил Стоянов, България*) Даден е четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност k, като $AB > CD$ и AB не е успоредна на CD. Нека M е пресечната точка на диагоналите му AC и BD. Нека E е петата на перпендикуляра от M към AB. Да се докаже, че ако ME разполовява $\sphericalangle DEC$, то AB е диаметър на k.

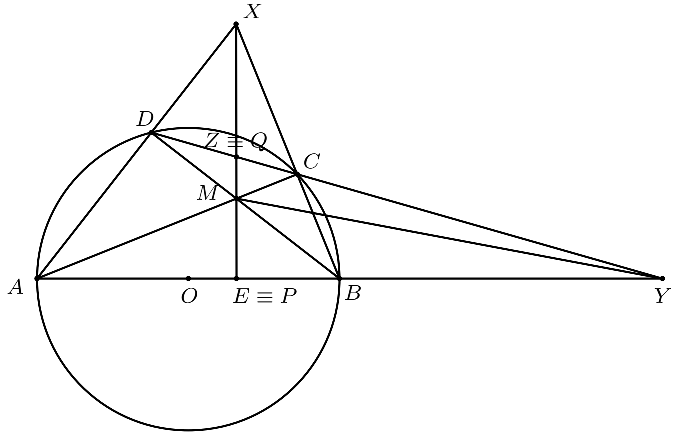
Решение. Нека $AD \cap BC = X$ и $AB \cap CD = Y$(по условие никоя от тези двойки прави не са успоредни). Нека $ME \cap CD = Z$. Тогава т.к $\sphericalangle ZED = \sphericalangle ZEC$ и $\sphericalangle ZEY = 90^\circ$, то

$$(D, C; Z, Y) = -1.$$

Нека сега $XM \cap AB = P$ и $XM \cap CD = Q$. Следователно от основно свойство на хармоничните четворки следва, че

$$(A, B; P, Y) = -1$$

(за триъгълника ABX чевианите AC, BD, XP се пресичат в една точка, а $CD \cap AB = Y$).



Сега да проектираме през X хармоничната четворка $(A, B; P, Y)$ върху правата CD. Така получаваме, че

$$(D, C; Q, Y) = -1 = (D, C; Z, Y).$$

Следователно $Z \equiv Q$, което означава, че точките X, Z, M, E лежат на една права. Сега от теоремата на Брокар за четириъгълника $ABCD$ следва, че центърът O на k е ортоцентър на $\triangle XMY$. Но YE е височина в $\triangle XMY$, което означава, че $O \in AB$, т.е AB е диаметър в k.

Забележка. След получаване на $XM \perp AB$ задачата може да се завърши и с теорема на Чева за $\triangle ABX$ и точките D, E и C и тригонометрия с въвеждане на $\sphericalangle XAB$, $\sphericalangle ABX$ и $\sphericalangle ADB$, като $\sphericalangle ADB$ се гледа като неизвестно.

Задача 2. (*Джереми Кинг, Великобритания*) Нека q е положително рационално число. Две мравки едновременно тръгват от точка X в равнината. На n-тата минута $(n = 1, 2, \dots)$ всяка от тях избира посока измежду Север, Изток, Юг или Запад и след това преминава разстояние от q^n метра в тази посока. След някакво цяло число минути двете мравки се оказали в една и съща точка (не задължително X),въпреки че изминали различни пътища. Да се определят възможните стойности на q.

Решение. Ясно е, че $q = 1$ работи (пътищата север - запад и запад-север водят до една и съща точка). Да допуснем, че $q \neq 1$.

Нека $x_A^{(n)}$ (съответно $x_B^{(n)}$) са x-координатите на позицията на първата (съответно втората) мравка след n минути. Тогава

$$x_A^{(n)} - x_A^{(n-1)} \in \{q^n, -q^n, 0\}.$$

Следователно $x_A^{(n)}, x_B^{(n)}$ са полиноми на q с коефициенти в $-1, 0, 1$. Но тогава при срещата на мравките след n минути

$$0 = x_A^{(n)} - x_B^{(n)} = P(q),$$

където P е ненулев полином от степен не по-голяма от n и с коефициенти измежду $\{-2, -, 1, 0, 1, 2\}$. Тогава ако $q = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, следва, че $a|2$ и $b|2$, тоест $q \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Ще докажем, че $q = \dfrac{1}{2}$ не е решение. Нека двете мравки за пръв път поемат по различен път след $k-$тата минута. Тогава

$$|x_B^{(k+1)} - x_A^{(k+1)}| + |y_B^{(k+1)} - y_A^{(k+1)}| = 2q^k \tag{1}$$

Но също така,

$$|x_A^{(l+1)} - x_A^{(l)}| + |y_A^{(l+1)} - y_A^{(l)}| = q^l \tag{2}$$

за всяко $l \geqq k+1$. От неравенство на триъгълника и (2) приложено многократно следва, че:

$$|x_A^{(n)} - x_A^{(k+1)}| + |y_A^{(n)} - y_A^{(k+1)}| \leqq q^{k+1} + q^{k+2} + \cdots + q^{n-1} \tag{3}$$

От (1), (3) и неравенство на триъгълника следва, че:

$$|x_B^{(n)} - x_A^{(n)}| + |y_B^{(n)} - y_A^{(n)}| \geqq 2q^k - 2(q^{k+1} + q^{k+2} + \cdots + q^{n-1}),$$

като последното е винаги положително за $q = \dfrac{1}{2}$ (Защо?). Следователно мравките не могат да се озоват в една и съща точка за $q = \dfrac{1}{2}$ и това не е решение на задачата.

Да допуснем сега, че $q = 2$ е решение. Нека мравките да стигат от точка X до точка Y за n минути. При хомотетия с коефициент $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ и център Y, получаваме два различни пътя от Y до X за $q = \dfrac{1}{2}$. Но вече показахме, че $\dfrac{1}{2}$ не е решение и следователно 2 също не е.

Единствено решение остава $q = 1$.

Задача 3. (*Димитрис Кристофидис, Кипър*) Ани и Боби играят следната игра: Дадени са две купчини с по a и b монети съответно. Редувайки се, като Ани играе първа, този, който е на ход избира някоя купчина с четен брой монети в нея и премества половината от тях в другата купчина. Този, който няма ход губи. Да се намерят всички стойности на (a, b), такива че Боби има печеливша стратегия (стратегия Ани да загуби).

Решение. Както винаги с $v_2(x)$ ще означаваме най-голямата степен на двойката, деляща x. Първо ще покажем, че ако $\min\{v_2(a), v_2(b)\}$ е нечетно число, то Ани има печеливша стратегия. Нека без ограничение на общността $v_2(a) \leqq v_2(b)$. Тогава на първия си ход Ани ще играе с купчинката с a монети. Новата двойка купчинки ще са с по $a' := \dfrac{a}{2}$ и $b' := b + \dfrac{a}{2}$ монети, съответно, като $v_2(a') = v_2(b')$ е четно число. От тук нататък след всеки ход (на всеки от играчите) степента на двойката и в двете купчини ще намалява с 1. И т.к. в този момент тя е четно число, то след четен брой ходове ще стане 0, когато на ход ще е Боби. Нека сега $v_2(a) < v_2(b)$ и $v_2(a)$ е четно. Ясно е, че Ани няма да играе с купчина a, защото такъв ход би вкарал играта в горния случай, но с разменени роли на играчите и тя ще загуби.

Аналогично, Боби също няма да играе с купчина a, докато $v(a) < v(b)$ и $v(a)$ – четно. Така ходовете и на двамата във всеки един момент са предопределени. Да забележим, че след всеки ход $\min\{v_2(a), v_2(b)\}$ не се променя и освен това $\max\{v_2(a), v_2(b)\} > \min\{v_2(a), v_2(b)\}$ (последното се проверява непосредствено). Следователно в този случай играта продължава безкрайно. Остана случаят, когато $v_2(a) = v_2(b) = 2k$, за някое $k \in \mathbb{N}_0$. След първия ход на Ани вече $\min\{v_2(a), v_2(b)\} = 2k - 1-$ нечетно число и попадаме в първия случай с разменени позиции на играчите, следователно Боби има печеливша стратегия. Така окончателно отговорът е, че Боби печели само когато $v_2(a) = v_2(b) = 2k$.

Задача 4. (*Станислав Димитров, България*) Да се намерят всички прости p и q, за които $3p^{q-1} + 1$ дели $11^p + 17^p$.

Решение. Ще докажем, че единствено $(p, q) = (3, 3)$ е решение. При $p = 2$, $3.2^{q-1} + 1$ трябва да дели 410. Директни проверки ни дават, че няма решение в този случай. Следователно, $p > 2$.

Тъй като $N = 11^p + 17^p \equiv 4 \pmod 8$, имаме че $8 \nmid 3p^{q-1} + 1 > 4$. Да разгледаме произволен нечетен прост делител r на $3p^{q-1} + 1$. Очевидно $r \notin \{3, 11, 17\}$ и по Безу съществува цяло b, такова че $17b \equiv 1 \pmod r$. Следователно $r | b^p N \equiv a^p + 1 \pmod r$, където $a = 11b$, и значи $r | a^{2p} - 1$, но $r \nmid a^p - 1$. С други думи, $ord_r(a) \in \{2, 2p\}$. Случаят $ord_r(a) = 2$ води до $r | 28b \Rightarrow r = 7$. За всички останали прости делители имаме $ord_r(a) = 2p$ и $2p | r - 1$, съгласно малката теорема на Ферма. Следователно,

$$3p^{q-1} + 1 = 2^\alpha 7^\beta p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}, \tag{4}$$

където $\alpha \leqq 2$ и $p_i \notin \{2, 7\}$ е просто число, сравнимо с 1 по модул $2p$. Също така

$$\frac{11^p + 17^p}{28} = 11^{p-1} - 11^{p-2}17 + 11^{p-3}17^2 - \cdots + 17^{p-1} \equiv p4^{p-1} \pmod 7$$

и значи $\beta \leqq 1$.

Ако $q = 2$, то (4) се преобразува до

$$3p + 1 = 2^\alpha 7^\beta p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k},$$

като $p_i \geqq 2p + 1$. Това е възможно само при $\gamma_i = 0$ за всяко i и

$$3p + 1 = 2^\alpha 7^\beta \in \{2, 4, 14, 28\},$$

което не води до решение.

Следователно $q > 2$, от където $4 | 3p^{q-1}$ и $\alpha = 2$. Дясната страна на (4) е сравнима с 4 или 28 по модул p, което води до $p = 3$. Накрая, $3^q + 1 | 11^3 + 17^3 = 6244$ и единствената възможност за q е $q = 3$. Директно се проверява, че $(p, q) = (3, 3)$ е решение.

XXII МЛАДЕЖКА БАЛКАНИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Ивайло Кортезов[1], Емил Карлов[2], Мария Томова[2]

Двадесет и втората Младежка балканска олимпиада по математика (МБОМ) за ученици до 15,5 години се проведе на о-в Родос (Гърция) от 19-ти до 24-ти юни 2018. В нея взеха участие ученици от 18 държави: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Казахстан (гост), Македония, Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Сърбия, Туркменистан (гост), Турция, Филипини (гост), Франция (гост), Хърватска (гост) и Черна гора. Разширеният отбор на България за МБОМ беше избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Зимните математически състезания (за 8 и 9 клас), Пролетните математически състезания (за 7, 8 и 9 клас) и Националния кръг на олимпиадата по математика (за 7, 8 и 9 клас). Отборът на България за МБОМ беше определен от участниците в Разширения отбор въз основа на сбора от точките от двете проведени контролни работи (условията и решенията са дадени по-долу). Първите 6 участници според това класиране сформираха отбора на България за МБОМ 2018: Борислав Кирилов (ПЧМГ), Десислава Николова (СМГ), Милко Бакалов (СМГ), Мартин Копчев (ПМГ Габрово), Валери Ванков (СМГ) и Андон Тодоров (СМГ). Отборът беше ръководен от доц. д-р Ивайло Кортезов от ИМИ – БАН и Емил Карлов и Мария Томова от СМГ. Беше проведена сериозна 13-дневна подготовка, включваща типично по 6 часа лекции плюс математически бой (10 задачи за 2 ча̀са), в която взеха дейно участие много от ръководителите на отбори за БОМ и МОМ в предни години, утвърдени учители и бивши състезатели (някои покриващи по няколко категории). Бяха проведени и две големи контролни работи при условията на МБОМ. Състезателите показаха решимост и издръжливост и докрай се стараха да следват амбициозната програма, която им даде много знания и умения не само за МБОМ, а и за много по-нататъшни състезания.

Състезанието се състоя на 21 юни 2018 (задачите и решенията са дадени по-долу). Нашите състезатели се представиха достойно: **златни медали** спечелиха Борислав Кирилов (ПЧМГ) и Десислава Николова (СМГ), а **сребърни медали** спечелиха Милко Бакалов (СМГ), Мартин Копчев (ПМГ Габрово), Валери Ванков (СМГ) и Андон Тодоров (СМГ). Знаменателен е фактът, че нашият отбор беше единственият, в който всички

[1]Институт по математика и информатика, Българска академия на науките
[2]Софийска математическа гимназия „Паисий Хилендарски"

състезатели спечелиха златни или сребърни медали – компактните резултати във високата част на класирането традиционно са индикация за добре сформиран и обигран екип. В неофициалното отборно класиране отборът ни зае второ място със 177 т. Като цяло отборът ни отбеляза напредък спрямо МБОМ 2017, спечелвайки (при това на чужда територия) един златен медал повече, намалявайки разликата с първия отбор (отново Румъния) и увеличавайки разликата пред останалите. Състезателите се справиха отлично и показаха, че идват сериозни попълнения за отборите ни при по-големите. Бихме искали да изкажем благодарността си на Александър Иванов, Боянка Савова, Васил Василев, Велина Иванова, Емил Колев, Йордан Табов, Петър Бойваленков, Стоян Боев, Станислав Димитров (Стенли), Станислав Харизанов и Станислав Чобанов за безценната помощ при подготовката, както и на Мирослав Маринов за съставянето на най-идейната задача в шортлиста на тази МБОМ, която по естествен начин попадна в темата (Задача 3).

Контролни работи за определяне отбора за МБОМ:
София, 12-13 май 2018

Задача 1. В четириъгълник $ABCD$ имаме $\sphericalangle BCD = 130^\circ$ и $AB = AD = 1$ см. Намерете дължината на диагонала AC на четириъгълника.

Указание. Построяваме ΔA_1BD с $BA_1D = 50^\circ$, така че A_1 и C да са в различни полуравнини относно правата BD. Около четириъгълника A_1BCD може да се опише окръжност, защото сумата от срещулежащите му ъгли е равна на 180°. Център на тази окръжност е точката A, защото $\sphericalangle A = 100^\circ$ и $= D$=1 см. Следователно $AC = 1$ см като радиус.

Задача 2. Докажете, че ако $a, b > 0$, то $\dfrac{a^2+b^2}{2a^5b^5} + \dfrac{81a^2b^2}{4} + 9ab > 18$.

Указание. От САСГ имаме $\dfrac{a^2+b^2}{2a^5b^5} \geqq \dfrac{2ab}{2a^5b^5} = \dfrac{1}{a^4b^4}$ (равенство при $a = b$), $\dfrac{1}{a^4b^4} + \dfrac{81a^2b^2}{4} \geqq 2\sqrt{\dfrac{81a^2b^2}{4a^4b^4}} = \dfrac{9}{ab}$ (равенство при $(ab)^3 = \dfrac{2}{9}$) и $\dfrac{9}{ab}+9ab \geqq 2\sqrt{\dfrac{81ab}{ab}} = 18$ (равенство при $ab = 1$). Равенствата не се достигат едновременно, така че $\dfrac{a^2+b^2}{2a^5b^5} + \dfrac{81a^2b^2}{4} + 9ab > 18$.

Задача 3. Намерете всички естествени числа n, за които числото $n^6 + 5n^3 + 4n + 116$ е произведение на две или повече последователни естествени числа.

Указание. От теоремата на Ферма $n^6 \equiv n^2 \pmod 5$, така че даденият израз е сравним с $n^2 + 4n + 6 = (n+2)^2 + 2$ по модул 5, и в частност не се дели на 5. Следователно представяне като произведение от 5 или повече последователни числа е невъзможно.

Ако $n^6+5n^3+4n+116=a(a+1)(a+2)(a+3)$ за естествено число a, то $n^6+5n^3+4n+117=(a^2+3a+1)^2$. За $n \geqq 6$ имаме

$$(n^3+3)^2>n^6+5n^3+4n+117>(n^3+2)^2,$$

а за $n=1,\ldots,5$ лявата страна не е точен квадрат.

Ако $n^6+5n^3+4n+116=a(a+1)(a-1)=a^3-a$ за естествено a, то за $n \geqq 4$ имаме

$$(n^2+1)^3-(n^2+1)>n^6+5n^3+4n+116>(n^2)^3-n^2,$$

а за $n=1,2,3$ числото $n^6+5n^3+4n+116$ не е произведение на три поредни естествени числа.

Ако $n^6+5n^3+4n+116=a(a+1)$, то $4n^6+20n^3+16n+465=(2a+1)^2$. За $n=1,2,4,5$ лявата страна не е точен квадрат, за $n=3$ е квадрат на 63, а иначе имаме неравенствата $(2n^3+6)^2>4n^6+20n^3+16n+465>(2n^3+5)^2$. Така единственото решение е $n=3$.

Задача 4. Всяко поле на безкрайна (във всички посоки) квадратна таблица е оцветено в един от n дадени цвята. Полетата във всеки правоъгълник 2×3 (и 3×2) са в 6 различни цвята. Намерете най-малката възможна стойност на n.

Указание. Нека обозначаваме позициите на полетата с двойка цели числа $(i;j)$, където i е номерът на реда, а j – на колоната. Можем да се справим с 8 цвята, ако оцветим:

$\triangleright$ в цвят 1 полетата $(2k;2m)$, за които $k+m$ е четно,
$\triangleright$ в цвят 2 полетата $(2k;2m)$, за които $k+m$ е нечетно,
$\triangleright$ в цвят 3 полетата $(2k+1;2m)$, за които $k+m$ е четно,
$\triangleright$ в цвят 4 полетата $(2k+1;2m)$, за които $k+m$ е нечетно,
$\triangleright$ в цвят 5 полетата $(2k;2m+1)$, за които $k+m$ е четно,
$\triangleright$ в цвят 6 полетата $(2k;2m+1)$, за които $k+m$ е нечетно,
$\triangleright$ в цвят 7 полетата $(2k+1;2m+1)$, за които $k+m$ е четно,
$\triangleright$ в цвят 8 полетата $(2k+1;2m+1)$, за които $k+m$ е нечетно.

Наистина, във всеки правоъгълник 2×3 има само две двойки различни полета, имащи еднаква четност на редовете и на колоните си, като едните им координати съвпадат, а другите им се различават с 2, поради което имат различна четност на изчисляваното в края $k+m$ и следователно са разноцветни.

Да допуснем, че сме се справили със 7 цвята. Тогава седемте полѐта $(i;j)$, $(i+1;j-1)$, $(i+1;j)$, $(i+1;j+1)$, $(i+2;j-1)$, $(i+2;j)$, $(i+2;j+1)$ трябва да са в седемте цвята, понеже всеки две от тях попадат в някакъв правоъгълник 2×3. По същите причини седемте полѐта $(i+1;j-1)$, $(i+1;j)$, $(i+1;j+1)$, $(i+2;j-1)$, $(i+2;j)$, $(i+2;j+1)$, $(i+3;j)$ трябва да са в седемте цвята, понеже всеки две от тях попадат в някакъв правоъгълник 2×3. Но тогава полѐта $(i;j)$ и $(i+3;j)$ трябва да са едноцветни за всеки i, j. Аналогично полѐта $(i;j)$ и $(i;j+3)$ трябва да са едноцветни за всеки i, j. Тогава трябва да имаме отделен цвят за всяка двойка остатъци при деление на 3, за което са ни нужни $3.3=9$ цвята: абсурд.

Задача 5. За всеки две реални числа a, b означаваме

$$f(a,b)=\sqrt{a^2+b^2+26a+86b+2018}.$$

Намерете най-малката стойност на израза.

Указание. Имаме $f(a,b)=\sqrt{(13+a)^2+(43+b)^2}$. Ще използваме, че за всеки две реални числа е вярно неравенството

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}\geqq\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2},$$

което може да се докаже с двукратно повдигане на квадрат и използване на тъждеството $\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=(xz+yt)^2+(xt-yz)^2$. Равенство се достига точно когато $xt=yz$ и едновременно с това $xz+yt\geqq0$. Имаме

$$f(a,b)+f(-a,-b)\geqq\sqrt{(13+13)^2+(43+43)^2}=2\sqrt{2018}$$

и

$$f(a,-b)+f(-a,b)\geqq\sqrt{(13+13)^2+(43+43)^2}=2\sqrt{2018}.$$

За да се достигне равенство, е необходимо $(13+a)(43-b)=(13-a)(43+b)$ и $(13-a)(43-b)=(13+a)(43+b)$, т.е. $86a=26b=-86a$ и съответно $a=b=0$. Явно това условие е и достатъчно за равенство. И така, търсената стойност е $4\sqrt{2018}$.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща AA_1. Точка P лежи на отсечката AA_1. Точка M е среда на страната BC. Точка Q е върху правата PM, като M е среда и на отсечката PQ. Правата BQ пресича правата AC в точка D. Правата CQ пресича правата AB в точка E. Докажете, че $CD=BE$.

Указание. Ако докажем, че лицата $S_{BEP}=S_{CDP}$ ще следва, че отсечките BE и CD са равни, защото точка P е от ъглополовящата и е равноотдалечена от правите AC и AB. Тъй като M е среда на PQ, $S_{BEP}+S_{BEQ}=2S_{BEM}$ (защо?) и $S_{PCD}+S_{QCD}=2S_{MCD}$. От друга страна $2S_{BEM}=S_{BEC}$ и $2S_{MCD}=S_{BCD}$. Така получаваме, че $S_{BEP}=S_{BEC}-S_{BEQ}=S_{BCQ}$ и $S_{PCD}=S_{BCD}-S_{QCD}=S_{BCQ}$. Следователно $S_{BE}=S_{CD}$ и $CD=BE$.

Задача 7. Намерете всички двойки цели числа x, y, за които

$$x^2(y-1)+x=y^2(x-1)+y+30.$$

Указание. Уравнението е равносилно на $(x-1)(y-1)(x-y)=30$. Сборът на втория и третия множител е равен на първия, така че са възможни следните разлагания:

$$30=6.1.5=6.5.1=(-1).(-6).5=(-1).5.(-6)=(-5).(-6).1=(-5).1.(-6)$$

$$30=5.2.3=5.3.2=(-3).2.(-5)=(-3).(-5).2=(-2).(-5).3=(-2).3.(-5)$$

Съответно $(x;y)=(7;2)$, $(7;6)$, $(0;-5)$, $(0;6)$, $(-4;-5)$, $(-4;2)$, $(6;3)$, $(6;4)$, $(-2;3)$, $(-2;-4)$, $(-1;-4)$, $(-1;4)$.

Задача 8. Дадени са реални числа $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\cdots\leq a_{672}$, такива че $a_1+a_2+a_3+\cdots+_{672}=2018$. За всяко естествено $n\leq 672$ съществуват n от тези числа, чийто сбор е цяло число. Коя е най-малката възможна стойност на a_{672}?

Указание. Ако $a_1=a_2=\cdots=a_{224}=3$ и $a_{225}=a_{226}=\cdots=a_{672}=3\dfrac{1}{224}$, условието е спазено. Действително, ако $n=224q+r$, където $0\leqq q\leqq 2$ и $1\leqq r\leqq 224$, можем да изберем r пъти 3 и $224q$ пъти $3\dfrac{1}{224}$.

Да допуснем, че $a_{672}<3\dfrac{1}{224}$. По условие има 224 числа, чийто сбор е цяло число; то е по-малко от $224\cdot 3\dfrac{1}{224}=673$, т.е. е най-много 672. Сборът на останалите числа е по-малък от $448\cdot 3\dfrac{1}{224}=1346$, така че $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{672}<672+1346=2018$: абсурд. Така най-малката възможна стойност на a_{672} е $3\dfrac{1}{224}$.

Състезателната тема: МБОМ, 21.06.2018

Задача 1. Намерете всички двойки $(m;n)$ от цели числа, за които $m^5-n^5=16mn$.

Указание. Явно $(0;0)$ е решение. Иначе нека $d=\text{НОД}(m;n)$, $m=da$, $n=db$, $\text{НОД}(a;b)=1$. Уравнението се свежда до $d^3a^5-d^3b^5=16ab$. Тук $a|d^3$, $b|d^3$ и $\text{НОД}(a;b)=1$, така че $d^3=abr$ за цяло r. Оттук $r(a^5-b^5)=16$. Изследвайки делителите на 16, получаваме само решението $(a;b)=(-1;1)$, съответно $(m;n)=(-2;2)$. Маркинг-схемата изискваше проверка, че при естествено x, $(x+1)^5-x^5=5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\geqq 31$.

Задача 2. Дадени са n трицифрени числа със следните свойства:
(1) Никое число не съдържа цифрата 0.
(2) Сборът от цифрите на всяко число е 9.
(3) Всеки две числа имат различна цифра на единиците.
(4) Всеки две числа имат различна цифра на десетиците.
(5) Всеки две числа имат различна цифра на стотиците.
Намерете най-голямата възможна стойност на n.

Решение. Сборът на използваните цифри е $9n \geq 3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$, откъдето $n \leq 5$. Пример за $n = 5$ е 144, 252, 315, 423, 531.

Задача 3. Нека $k > 1$ и $n > 2018$ са естествени числа, като n е нечетно. Ненулевите рационални числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са не всичките равни и изпълняват условията

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = \cdots = x_{n-1} + \frac{k}{x_n} = x_n + \frac{k}{x_1}.$$

а) Изразете произведението $x_1 x_2 \cdots x_n$ чрез k и n.

б) Намерете най-малкото k, за което съществуват $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$, изпълняващи дадените условия.

Решение. а) Имаме

$$x_1 - x_2 = k\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3} = k^2 \frac{x_3 - x_4}{(x_2 x_3)(x_3 x_4)} = \cdots = k^n \frac{x_1 - x_2}{(x_2 x_3)(x_3 x_4) \ldots (x_1 x_2)}.$$

Ако $x_i = x_{i+1}$ за някое i (приемаме, че $x_{n+1} = x_1$), то според дългото равенство всички x_i са равни: противоречие. Така $x_1 \neq x_2$ и след деление на разликата им имаме $x_1 x_2 \cdots x_n = \pm\sqrt{k^n} = \pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}$. Едната от тези стойности се получава от другата със смяна на знака на всички x_i.

б) Понеже n е нечетно, последната формула сочи, че k е точен квадрат, така че $k \geqq 4$. За $k = 4$ нека $n = 2019$ и $x_{3j} = 4$, $x_{3j-1} = 1$, $x_{3j-2} = -2$ за $j = 1, 2, \ldots, 673$.

Задача 4. Триъгълникът ABC е остроъгълен и A', B', C' са симетричните точки на A, B и C съответно при отражение относно BC, CA и AB. Описаните окръжности за триъгълниците ABB' и ACC' се пресичат за втори път в точка A_1. По аналогичен начин дефинираме точки B_1 и C_1. Докажете, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Решение. Щом $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle CAC' = 2\sphericalangle BAC$, намираме вписаните ъгли $\sphericalangle AA_1B = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle AA_1C'$, така че A_1 лежи на правата BC'. Ако O е центърът на описаната окръжност за $\triangle ABC$, то $\sphericalangle OAC = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BC'C = \sphericalangle A_1C'C = \sphericalangle A_1AC$, така че O лежи на правата AA_1. Аналогично O лежи и на правите BB_1 и CC_1.

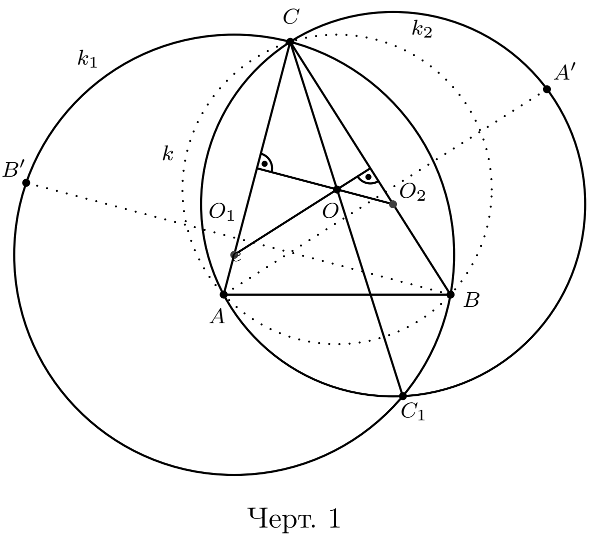
ОКОЛО ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ПОСЛЕДНАТА МЛАДЕЖКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА В РОДОС, ГЪРЦИЯ

Емил Карлов

Може би най-трудната задача в олимпиадата бе геометричната задача, предложена от домакина Гърция. Тук ще покажем авторовото решение и още няколко според нас интересни решения.

Задача 4. Точките A' и B' са симетрични на върха A и върха B на остроъгълния $\triangle ABC$ съответно спрямо правата BC и правата AC. Описаните окръжности около $\triangle ACA'$ и $\triangle BCB'$ се пресичат повторно в точка C_1. По същия начин се дефинират точките A_1 и B_1. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Първо решение. Означаваме с O_1 центъра на окръжност k_1, описана около $\triangle BCB'$, с O_2 – центъра на описаната окръжност k_2 около $\triangle ACA'$ и с O – центъра на описаната окръжност около $\triangle ABC$. Центърът O_1 лежи на правата CA, а центърът O_2 лежи на правата CB (защо?).



Черт. 1

Перпендикулярът от точката O_1 към правата BC е симетрала на страната BC и минава през центъра O на $\triangle ABC$, като същевременно е височина в $\triangle O_1O_2C$ (защото $O_2 \in AC$) и следователно минава през ортоцентъра на този триъгълник.

Същото се отнася и за перпендикуляра през точка O_2 към правата AC. Той е симетрала на страната AC и минава през центъра O и същевременно е височина в $\triangle O_1O_2C$. Но двете височини на $\triangle O_1O_2C$ се пресичат в ортоцентъра на триъгълника и това очевидно е точката O, която принадлежи и на двата перпендикуляра.

Правата CC_1 съдържа третата височина на $\triangle O_1O_2C$, защото като обща хорда е перпендикулярна на централата O_1O_2 на двата кръга k_1 и k_2. Следователно CC_1 минава през центъра O на описаната окръжност около $\triangle ABC$. Същото се отнася и за правите AA_1 и BB_1.

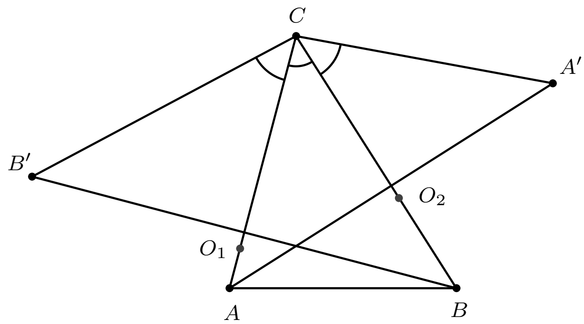
Тази красива *двойственост* на правите O_1O и O_2O, които са симетрали в $\triangle ABC$ и височини в $\triangle O_1O_2C$, решава задачата.

Второто решение се опира на факта, че $\triangle O_1O_2C$ е подобен на $\triangle ABC$. Двата триъгълника имат общ ъгъл,

$$1)\quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle O_1CO_2$$

(защото точките O_1 и O_2 лежат съответно на правата CA и правата CB).

От друга страна, отсечките CO_1 и CO_2 са радиуси на описаните окръжности съответно около равнобедрения $\triangle BB'C$ и около равнобедрения $\triangle AA'C$ (вж. черт. 2).



Черт. 2

Двата равнобедрени триъгълници $AA'C$ и $BB'C$ са подобни и следователно

$$2)\quad \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

От 1) и 2) следва, че $\triangle O_1O_2C \sim \triangle ABC$.

Знаем също, че ако AH_a и BH_b са височините на $\triangle ABC$, то $\triangle H_aH_bC$ е подобен на $\triangle ABC$ и

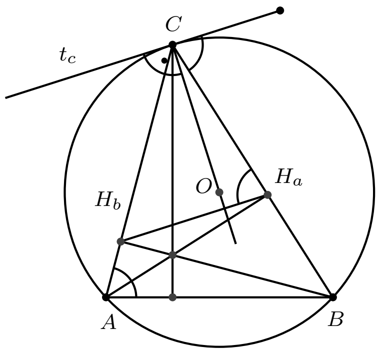
$$\frac{CH_b}{CH_a} = \frac{a}{b}.$$

Оттук и от 2) следва, че $H_aH_b \| O_1O_2$.

С други думи, общата хорда CC_1 на окръжностите k_1 и k_2, която е перпендикулярна на централата O_1O_2, е перпендикулярна на отсечката H_aH_b.

Остава да уточним, че права през върха C на $\triangle ABC$, перпендикулярна на правата H_aH_b, определена от петите на двете му височини, минава през центъра O на описаната около триъгълника окръжност.

Построяваме допирателна t_c в точка C към описаната около $\triangle ABC$ окръжност (черт. 3). Допирателната t_c е перпендикулярна на радиуса OC.



Черт. 3

От подобните $\triangle H_aH_bC$ и $\triangle ABC$ следва, че $\sphericalangle H_bH_aC = \sphericalangle CAB = \alpha$.

От друга страна $\sphericalangle TCB = \sphericalangle CAB = \alpha$, защото се измерват с една и съща дъга $\overset{\frown}{CB}$ от окръжността, описана около триъгълника, и оттам $\sphericalangle TCB = \sphericalangle H_bH_aC$. От равни кръстни ъгли следва, че $t_c \| H_aH_b$, следователно $OC \perp H_aH_b$.

За да разкажем третото решение са ни нужни едно определение и една лема.

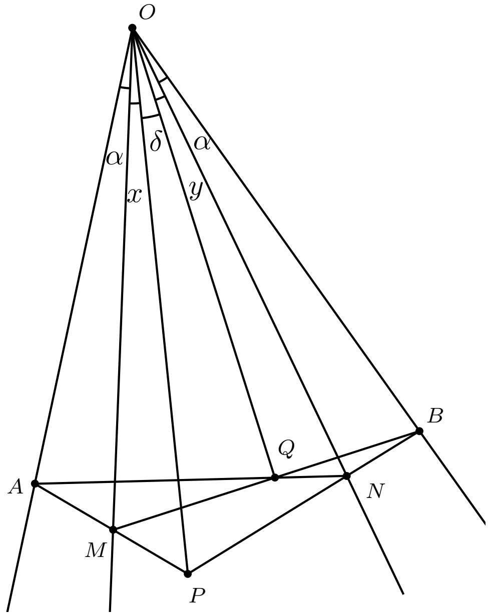
Определение. Даден е $\sphericalangle AOB$ с ъглополовяща OL и две прави OM и ON през точката O. Правите OM и ON наричаме *изогонално спрегнати прави* спрямо $\sphericalangle AOB$, ако OM и ON са симетрични прави спрямо ъглополовящата OL.

Ъглополовящата OL на $\sphericalangle AOB$ съвпада със своята изогонално спрегната спрямо $\sphericalangle AOB$.

Очевидно за всеки $\triangle ABC$ височината му CH_c и радиусът CO на описаната около ABC окръжност са изогонално спрегнати. (Пресметнете $\sphericalangle ACH_c$ и $\sphericalangle OCB$ на черт. 3.)

Лема. Даден е $\sphericalangle AOB$ и две изогонално спрегнати спрямо ъгъла прави OM и ON (точките A, B, M и N са произволни точки от съответно лъчите

OA, OB, OM и ON). Нека правата AM пресича правата BN в точка P и правата AN пресича правата BM в точка Q (черт. 4). Да се докаже, че правите OP и OQ са изогонално спрегнати спрямо $\sphericalangle AOB$.



Черт. 4

Доказателство. Теоремата на Менелай за $\triangle MPB$ и правата AN е

$$\frac{PN}{NB} \cdot \frac{BQ}{QM} \cdot \frac{MA}{AP} = 1.$$

Означаваме $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BON = \alpha$ и $\sphericalangle MOP = x$, $\sphericalangle NOQ = y$, $\sphericalangle POQ = \delta$ и изразяваме отношенията

$$\frac{PN}{NB} = \frac{S_{OPN}}{S_{ONB}} = \frac{OP.ON\sin(\delta + y)}{ON.OB\sin\alpha} = \frac{OP\sin(\delta + y)}{OB\sin\alpha}$$

и аналогично $\dfrac{BQ}{QM} = \dfrac{OB\sin(\alpha + y)}{OM\sin(\delta + x)}$, $\dfrac{MA}{AP} = \dfrac{OM\sin\alpha}{OP\sin(\alpha + x)}$.

Като заместим в теоремата на Менелай и съкратим, получаваме

$$\sin(\delta + y)\sin(\alpha + y) = \sin(\delta + x)\sin(\alpha + x).$$

Оттук $\cos(\delta - \alpha) - \cos(\alpha + \delta + 2y) = \cos(\delta - \alpha) - \cos(\alpha + \delta + 2x)$, т.е. $x = y$, което искахме да докажем.

Трето решение. Спрямо $\sphericalangle A'CB'$ правите CA и CB са изогонално спрегнати. Очевидно AA' и BB' се пресичат в точка H – ортоцентър на $\triangle ABC$. Ще покажем, че правите AB' и BA' се пресичат в точка C_1.

Нека правата BA' пресича правата AB' в точка C_1'. Ще покажем, че точката C_1' съвпада с точката $C_1 = k_1 \cap k_2$ (вижте означенията от първото решение и чертеж 1).

Изразяваме ъглите в $\triangle ABC_1'$ чрез $\sphericalangle CAB = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. Тогава $\sphericalangle ABC_1' = 180^\circ - 2\beta$, $\sphericalangle BAC_1' = 180^\circ - 2\alpha$ и $\sphericalangle AC_1'B = 180^\circ - 2\gamma$, т.е. около четириъгълника $AC_1'A'C$ може да се опише окръжност и тя е k_1, а около четириъгълника $B'C_1'BC$ също може да се опише окръжност и тя е k_2. Получихме, че C_1' съвпада с C_1.

Сега от лемата следва, че височината CH и правата CC_1 са изогонално спрегнати спрямо $\sphericalangle A'CB'$, а следователно и спрямо $\sphericalangle ACB$. Но знаем, че CH и радиусът CO са изогонално спрегнати спрямо $\sphericalangle ACB$, следователно CC_1 минава през центъра O на описаната окръжност.

Третото решение на задачата позволява да ѝ направим обобщение. Ето как изглежда то.

Задача. За остроъгълния $\triangle ABC$ е построена външната ъглополовяща t_c на $\sphericalangle ACB$. Продължението на височината AH_a и продължението на височината BH_b пресичат ъглополовящата t_c съответно в точки A' и B'. Нека точката C_1 е пресечна точка на правите BA' и AB'. Аналогично се дефинират точките A_1 и B_1. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Четвърто решение. В третото решение стана дума, че точките B', A и C_1 лежат на една права. Имаме

$$\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle C_1B'B$$

(погледнете черт. 1 – двата ъгъла се измерват с една и съща дъга $\overset{\frown}{BC_1}$ от окръжността k_1). Пресмятаме $\sphericalangle C_1B'B = \sphericalangle ABB' = 90^\circ - \alpha$.

От друга страна за центъра O на описаната окръжност знаем, че $\sphericalangle OCB = 90^\circ - \alpha$, следователно точката O лежи на правата CC_1.

БЕЛЕЖКА ПО ЕДНА ОТ ЗАДАЧИТЕ ЗА СЕЛЕКЦИЯ НА ОТБОРА ЗА МБОМ 2018

Валери Ванков, СМГ

На контролните за селекция на отбора на България за МБОМ, проведени на 12–13 май, беше дадена следната задача:

Задача. Докажете, че ако a, $b>0$, то $\dfrac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\dfrac{81a^2b^2}{4}+9ab>18$.

Ще покажем, че в сила е и по-силен резултат, а именно:

$$\text{Ако } a,\ b>0, \text{ то } \frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab>20.$$

Доказателство. Имаме

$$a^2+b^2\geqq 2ab \ \Rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{2a^5b^5}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab\geqq\frac{1}{a^4b^4}+\frac{81a^2b^2}{4}+9ab.$$

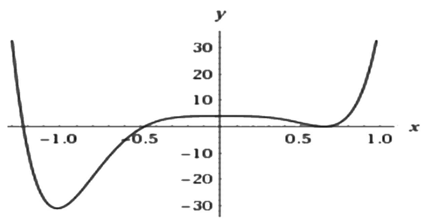
Нека $x=ab>0$. Ще докажем, че $\forall\ x\in(0,+\infty)$:

$$\frac{1}{x^4}+\frac{81x^2}{4}+9x>20 \iff 81x^6+36x^5-80x^4+4>0.$$

Ще покажем, че при локалните минимуми, както и при $x\to 0$ и $x\to+\infty$, $f(x)=81x^6+36x^5-80x^4+4$ приема положителни стойности, което ще докаже и твърдението ни. Границата на $f(x)$ при $x\to 0$ е 4, а при $x\to+\infty$ е $+\infty$. Освен това $f'(x)=486x^5+180x^4-320x^3=486x^3(x-\alpha)(x-\beta)$, където $\beta=\dfrac{-5-\sqrt{505}}{27}<0<\alpha=\dfrac{\sqrt{505}-5}{27}$.

Получаваме, че:

* $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty,\beta)$;
* $f'(x)=0$ при $x=\beta$;
* $f'(x)>0$ при $x\in(\beta,0)$;
* $f'(x)=0$ при $x=0$;
* $f'(x)<0$ при $x\in(0,\alpha)$;
* $f'(x)=0$ при $x=\alpha$;
* $f'(x)>0$ при $x\in(\alpha,+\infty)$.



Следователно β е локален минимум, 0 е локален максимум и α е локален минимум[3]. Тъй като x е в интервала $(0,+\infty)$, то е достатъчно да покажем, че $f(\alpha)>0$. Наистина,

$$f(\alpha)=81\left(\frac{\sqrt{505}-5}{27}\right)^6+36\left(\frac{\sqrt{505}-5}{27}\right)^5-80\left(\frac{\sqrt{505}-5}{27}\right)^4+4=0{,}00455\dots>0.$$

Резултатът следва.

[3] На чертежа е показана графиката на функцията $f(x)$. Тя формално не е нужна за решението, но спомага да се онагледи ситуацията. Ползвана е Wolfram Alpha.

9. ФЕСТИВАЛ НА МЛАДИТЕ МАТЕМАТИЦИ

Емил Колев (ИМИ–БАН), Динко Раднев (ППМГ, Бургас),
Невена Събева (ИМИ–БАН)

В началото на септември, от 2. до 9., Созопол за девети пореден път събра приятелите на математиката на Фестивала на младите математици. Участваха 50 отбора, разделени в три възрастови групи: 6.–7. клас (22 отбора), 8.–9. клас (17 отбора) и 10.–12. клас (11 отбора).

Математическите боеве се проведоха в 4 кръга и финал. Сутринта на всеки кръг отборите решаваха състезателната тема от осем задачи. Следобед започваха боевете – най-емоционалната част от състезанието. При директните срещи на два отбора те се предизвикваха, излагаха решенията си и ги защитаваха пред опонентите и Журито. В повечето случаи и двата отбора пристъпваха към боевете добре подготвени с много верни задачи и решаващ за победата бе правилният избор на стратегия.

В оспорвана битка победител във възрастовата група 6.–7. клас стана отборът СМГ 7–1 (**Мария Дренчева, Мария Русинова. Марин Христов, Енислав Николов, Симеон Дочев**). Победител във възрастовата група 8.–9. клас е отборът на СМГ 895 (**Георги Димитров, Калоян Дочев, Георги Динков, Стефан Иванов, Самуил Петков, Димитър Митов**), а във възрастовата група 10.–12. клас победи отборът на СМГ

Математическа романтика: със задачите на плажа
(на снимката е отборът *Цаков и компания*)

12–1 (**Георги Паскалев, Борислав Антов, Иво Зерков, Пламен Иванов, Борис Барбов**).

В почивния ден на състезанието учениците посетиха аквапарка в Равадиново и се включиха в Иранската геометрична олимпиада или в отборното състезание „30 задачи на 30 езика“.

Предлагаме Ви някои от най-интересните задачи и техните решения.

Задачи за 6.–7. клас

Задача 1. Отбор по волейбол се състои от десет състезатели, A_1, $A_2, \ldots, A_{10}$, като във всеки момент на полето играят 6 състезатели. По време на волейболна среща състезателите прекарали на полето съответно $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ минути, като A_1 играл през цялото време. Ако

$$a_1 : \frac{a_2+a_3}{2} : \frac{a_4+a_5+a_6}{3} = 3 : 2 : 1,$$

намерете $\dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{a_7+a_8+a_9+a_{10}}$.

Решение. От условието следва, че ако $\dfrac{a_4+a_5+a_6}{3} = x$, то имаме $\dfrac{a_2+a_3}{2} = 2x$ и $a_1 = 3x$. Тогава

$$a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6) = 3x + 4x + 3x = 10x.$$

От друга страна, тъй като A_1 е играл през цялото време и $a_1 = 3x$, то общото време на всички състезатели е $6.3x = 18x$. Следователно

$$a_7+a_8+a_9+a_{10} = 18x - (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) = 18x - 10x = 8x,$$

откъдето намираме $\dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{a_7+a_8+a_9+a_{10}} = \dfrac{4x+3x}{8x} = \dfrac{7}{8}$.

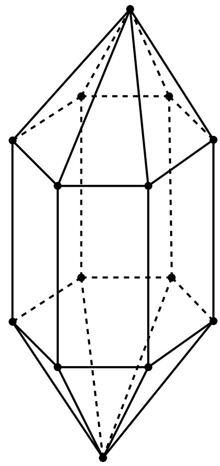
Задача 2. Хари Потър прелетял на дракон над совата на Рон, летяща в противоположаната посока. След половин минута Хари скочил от дракона, хукнал да гони совата и я настигнал 4,5 минути след срещата им. Ако скоростта на совата е с $k\%$ по-малка от скоростта на Хари, а скоростта на дракона с $k\%$ по-голяма от скоростта на Хари, намерете k.

Решение. Ако скоростта на Хари е x, скоростта дракона е $(1+k\%)x$, а на совата е $(1-k\%)x$. За 4 минути Хари изминал разстояние, което е сбор от пътя на совата за 4,5 минути и пътя на дракона за 0,5 минути, т.е.

$$4x = 4,5(1-k\%)x + 0,5(1+k\%)x.$$

Оттук $k\% = 0,25$, т.е. $k = 25$.

Задача 3. Тялото на чертежа е сглобено от две шестоъгълни пирамиди и призма. Муха тръгва от найгорния връх A и се движи хоризонтално или надолу по ребрата на тялото, като през всеки връх минава не повече от веднъж, докато стигне най-долния връх B.



а) По колко различни маршрута мухата може да стигне от A до B?

б) В два върха (различни от A и B) мога да поставя лепило и да хвана мухата. Как трябва да избера тези два върха така, че вероятността да хвана мухата да е най-голяма?

Решение. а) От A миухата може да се спусне в равнината на горния шестоъгълник по 6 начина. Може веднага да се спусне надолу, а може и да направим $1, 2, 3, 4$ или 5 хода наляво или надясно; това са $1 + 5.2 = 11$ възможности.

След като слезе в равнината на долния шестоъгълник, отново има 11 възможности за хоризонтално движение, преди да се спусне до B. Получихме $6.11.11 = 726$ маршрута.

б) Ще разгледаме пет случаи. Ако двата върха с лепило са:

– от различни шестоъгълници, но не са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $5.4.5 = 100$;

– от различни шестоъгълници и са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $5.5.5 = 125$;

– от един шестоъгълник и са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $4.4.11 = 176$;

– от един шестоъгълник и са през един, маршрутите, които не минават през тях, са $(1 + 3.3).11 = 110$;

– от един шестоъгълник и са диаметрално противоположни, маршрутите, които не минават през тях, са $4.2.11 = 88$.

В последния случай мухата има най-малко спасителни маршрути. Следователно трябва да сложим лепило в два диаметрално противоположни върха на един шестоъгълник.

Задача 4. Торбата на Али Баба се пълни догоре с 200 кг злато или с 40 кг скъпоценности. На пазара 1 кг злато струва 20 динара, а 1 кг скъпоценности струват 60 динара. Али Баба може да вдигне и носи наймного 100 кг. Колко злато и колко скъпоценности трябва да вземе, че да получи най-много динари на пазара?

Решение. Нека Али Баба е натоварил G кг злато и J кг скъпоценности. От това, че може да носи най-много 100 кг, следва, че

$$G + J \leqq 100,$$

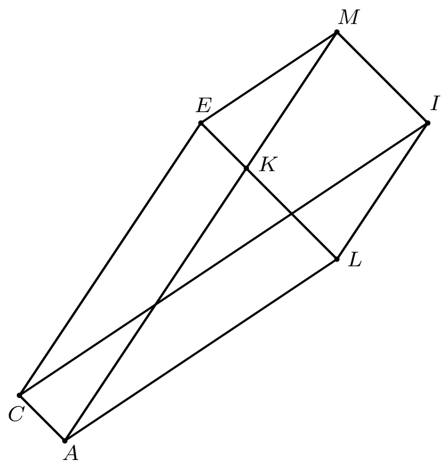
а от това, че торбата му събира 200 кг злато или 40 кг скъпоценности, следва, че

$$\frac{G}{200} + \frac{J}{40} = 1 \iff G + 5J = 200.$$

Искаме $20G + 60J$ да е максимално. Като съберем неравенството и равенството, получаваме $2G + 6J \leqq 300$, след което умножаваме по 10. Получаваме $20G + 60J \leqq 3000$.

Пример, който изпълнява всички условия, е 75 кг злато и 25 кг скъпоценности.

Задача 5. Успоредниците $CAKE$ и $MILK$ на чертежа имат равни лица и K е пресечната точка на AMи EL. Да се докаже, че:
а) $MEAL$ е трапец;
б) $MICE$ е трапец.



Решение. а) Ако означим лицето на $CAKE$, което е лице и на $MILK$, с S, то

$$S_{AKE} = S_{LKM} = \frac{1}{2}S,$$

откъдето следва, че $AL \| EM$.

б) Тъй като $AM \| CE$, то $S_{CEM} = S_{CKE} = \dfrac{1}{2}S$. По същия начин, от $EL \| MI$ следва, че $S_{IEM} = S_{IKM} = \dfrac{1}{2}S$. Получихме равенството $S_{CEM} = S_{IEM}$, откъдето следва, че $CI \| EM$.

Задача 6. В Прекрасния нов свят има алфи, бети, гами и делти, общо 1000 индивиди. Повечето от тях винаги казват истината, но някои са дефектни и винаги лъжат. На всеки индивид задали четири въпроса:
1. *Ти алфа ли си?* 2. *Ти бета ли си?* 3. *Ти гама ли си?* 4. *Ти делта ли си?*
На първия въпрос *Да* казали 450 индивиди, на втория въпрос *Да* казали 350, на третия въпрос *Да* казали 190, на четвъртия въпрос *Да* казали 110.

а) Колко процента от индивидите са дефектни?

б) Сред индивидите от кой вид (алфи, бети, гами или делти) разликата между броя нормални и дефектни е най-голяма и на колко е равна тя?

в) Известно е, че сред индивидите от един вид нормалните са 8 пъти повече от дефектните. Определете този вид и броя на индвидите от него.

Решение. а) Всеки дефектен индивид дава 3 отговора *Да*, а всеки нормален – един отговор *Да*. Дефектните индивиди са

$$\frac{(450 + 350 + 190 + 110) - 1000}{2} = 50,$$

т.е. 5% от общия брой.

б) На първия въпрос *Да* казали нормалните алфи (x на брой) и дефектните бети, гами и делти. Ако дефектните алфи са y на брой, броят на дефектните бети, гами и делти е $50 - y$. Следователно

$$x + 50 - y = 450 \iff x - y = 400.$$

Нормалните алфи са с 400 повече от дефектните.

При бетите, гамите и делтите тази разлика е съответно 300, 140 и 60.

в) Разликата между броя нормални и дефектни индивиди от търсения вид се дели на 7. От б) следва, че това са гамите и те са 180.

Задача 7. Дадено е естествено число k. Разполагаме с по два еднакви бутона във всеки от цветовете $1, 2, \ldots, k$. Искаме да ги натиснем в общо три *стъпки* – на всяка стъпка натискаме поне един бутон, като никои два не са от един цвят. По колко начина може да стане това?

Решение. Двата бутона от всеки цвят може да се натиснат на първа и втора стъпка; първа и трета стъпка или втора и трета стъпка. Това означава, че има три възможности за натискане на бутоните от първия цвят; 3 възможности за натискане на бутоните от втория и т.н. Получаваме 3^k начина за натискане на бутоните от k цвята.

Тук обаче са броени и възможностите на някоя стъпка от трите стъпки да не е натиснат нито един бутон; те са 3. Затова отговорът е $3^k - 3$.

Задачи за 8.–9. клас

Задача 1. Едно естествено число n се нарича „добро“, ако съществува естествено число m за което числата mn и $m + n$ са точни квадрати.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри числа.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно числа, които не са добри.

Решение. а) Ще използваме, че има безбройно много тройки (a, b, c) от естествени числа, за които $a^2 + b^2 = c^2$. Ако $n = a^2$ можем да изберем $m = b^2$, като тогава $mn = (ab)^2$ и $m + n = a^2 + b^2 = c^2$.

б) Ще докажем, че простите числа то вида $4k + 3$ не са добри. Да допуснем, че $p = 4k + 3$ е добро. Тогава $p + m = a^2$ и $pm = b^2$, откъдето след заместване $m = a^2 - p$ във второто равенство, получаваме

$$pa^2 = p^2 + b^2.$$

Оттук следва, че p дели b (нека $b = pb_0$) и получаваме: $a^2 = p + pb_0^2$. Сега p дели a (нека $a = pa_0$) и получаваме $pa_0^2 = 1 + b_0^2$.

Простото число p е от вида $4k + 3$ и дели $1^2 + b_0^2$. Следователно p дели 1, което е противоречие.

Задача 2. На празник всяко момче дало на всяко момиче по един бонбон, а всяко момиче дало на всяко момче по един сладкиш. След това всяко момче изяло два от сладкишите си, а всяко момиче изяло три от бонбоните си. Оказало се, че всички общо изяли една четвърт от общото количество на бонбоните и сладкишите. Колко най-много деца са присъствали на празника?

Решение. Нека момчетата са x, а момичетата y. От условието следва, че $2xy = 4(3y + 2x)$, което може да се запише във вида $(x - 6)(y - 4) = 24$. Оттук лесно следва, че най-голямата стойност на $x + y$ е 35.

Задача 3. Две естествени числа се наричат подобни, ако едното се получава от другото с размяна на две от цифрите му (ако в числото има 0 тя не може да се разменя с първата цифра; могат да се разменят и еднакви цифри). Да се намери най-голямото естествено число N, което се дели на 13, но всяко число, което е подобно на N не се дели на 13.

Решение. Ако в числото $N = \overline{a_k \dots a_1 a_0}$ сменим местата на цифрите a_i и a_j, ще получим число M, като

$$M - N = (10^j - 10^i)(a_i - a_j).$$

Ако 13 дели M, то 13 дели $M - N$, което означава, че или $a_i = a_j$ или 6 дели $i - j$ (защото $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$).

Ако N има повече от 7 цифри можем да разменим местата на първата и седмата цифри и новото число ще се дели на 13. Следователно N има най-много 7 цифри, при това ако цифрите са точно 7, то не трябва да е възможно да разменим първата и седмата. Това означава, че първата цифра е равна на 0, откъдето получаваме $N \leq 9876540$. Първите три числа, които са по-малки или равни на 9876540 и се делят на 13 са $9876490, 9876360$ и 9876230.

Първите две числа имат равни цифри и не изпълняват условието на задачата. Следователно търсеното число е $N = 9876230$.

Задача 4. Дадено е естествено число k. Разполагаме с по два еднакви бутона във всеки от цветовете $1, 2, \dots, k$. Искаме да ги натиснем в общо четири *стъпки* – на всяка стъпка натискаме поне един бутон, като никои два не са от един цвят. По колко начина може да стане това?

Решение. В задача 7 за 6. - 7. клас намерихме, че в три стъпки бутоните може да се натиснат по $3^k - 3$ начина.

Двата бутона от всеки цвят се натискат по един на стъпка, а две от 4 стъпки могат да се изберат по 6 начина. Следователно има 6 начина за натискане на бутоните от всеки цвят и получаваме 6^k начина за натискане на бутоните от k цвята.

Тук обаче са броени и възможностите на някоя стъпка да не е натиснат нито един бутон. Ако бутоните са натиснати в три стъпки, има 4 начина за избор на *празната* стъпка и $3^k - 3$ начина бутоните да се натиснат в останалите три стъпки; това са $4(3^k - 3)$ начина. Ако бутоните са натиснати в две стъпки, тези две от четирите стъпки може да изберем по 6 начина. Следователно търсеният брой начини е

$$6^k - 4(3^k - 3) - 6 = 6^k - 4.3^k + 6.$$

Задача 5. В компания от най-малко четирима души е вярно следното твърдение: ако кои да е четирима от компанията седнат на кръгла маса по произволен начин, винаги има някой, който познава съседите си или и двамата му съседи не го познават. Докажете, че компанията може да се раздели на две групи (едната от които може да е празна), така че в едната всички да се познават, а в другата никои двама да не се познават. (Ако A познава B, то B също познава A.)

Решение. Разглеждаме всички възможни групи, в които всички се познават. От тези групи избираме една с възможно най-големия брой хора. (Тя съдържа поне един човек.) Нека тя е X.

Ще докажем, че X и групата, състояща се от останалите хора, отговарят на условието. Достатъчно е да докажем, че всички хора извън X не се познават.

Да допуснем, че A и B са извън X и се познават. Тъй като X е възможно най-голямата група, X съдържа човек A_0, който не познава A, както и човек B_0, който не познава B.

Ще докажем, че A_0 и B_0 могат да се изберат така, че да са различни. Ако не, в X има само една личност, която A и B не познават. Следователно всички в X познават A и B. Тогава в множеството $(X \backslash C) \cup \{A, B\}$ всички се познават и то е по-голямо от X, противоречие.

Така че можем да приемем, че A_0 и B_0 са различни лица; те се познават, тъй като са в X.

Ако сега A, B, B_0, A_0 седнат в този ред на кръгла маса, всеки ще познава точно един от съседите си; противоречие.

Задача 6. За дадено естествено число n намерете всички положителни числа x, за които

$$nx^2 + \frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{x+n} = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

Решение. Записваме $\dfrac{(k+1)^2}{x+k} = k+1+(1-x)\dfrac{k+1}{x+k}$ и лявата част на равенството става

$$nx^2 + \frac{n(n+3)}{2} + (1-x)\left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n}\right).$$

Оттук уравнението се преобразува до

$$(1-x)\left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n}\right) = nx - nx^2$$

и очевидно $x = 1$ е решение. Равенството

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n} = nx$$

е невъзможно при $x \neq 1$, тъй като при $x > 1$ имаме

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n} < \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n+1} = n < nx,$$

а при $0 < x < 1$ имаме

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n} > \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n+1} = n > nx.$$

Следователно $x = 1$ е единственото решение.

Задача 7. Намерете всички двойки естествени числа (a, b), за които $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ е степен на 2.

Решение. Ще докажем, че търсените двойки са $(2^k, 2^k)$, $(2^k, 3.2^k)$ и $(3.2^k, 2^k)$, където k е неотрицателно цяло число.

Нека първо $(a, b) = 1$. Имаме $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3 = (a+b)(-a^2+4ab-b^2)$.

Поне едно от числата (a, b) е нечетно, следователно

$$4ab - a^2 - b^2 \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod 4.$$

Тъй като $4ab - a^2 - b^2$ е степен на 2, то $4ab - a^2 - b^2 = 2$.

Ако $a + b$ се дели на 8, то $b = 8m - a$ и получаваме

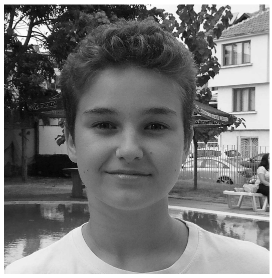
$$1 = -3a^2 + 24ma - 32m^2,$$

което е невъзможно по модул 8. Следователно $a + b = 2$ или $a + b = 4$. В първия случай получаваме $(1; 1)$, а във втория $(3; 1)$.

Ако $(a, b) = d$, то d е степен на двойката и $\left(\dfrac{a}{d}; \dfrac{b}{d}\right)$ е взаимнопросто решение на задачата, т.е. е $(1; 1), (1; 3)$ или $(3; 1)$.

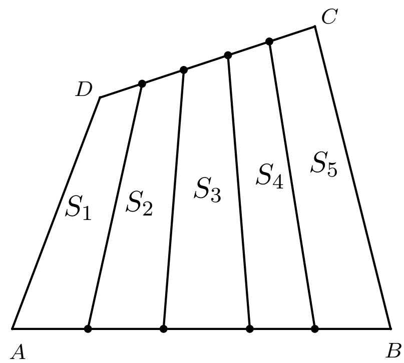
ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ЛИЦА

Ангел Антонов Христов (6. клас, ППМГ, Бургас)



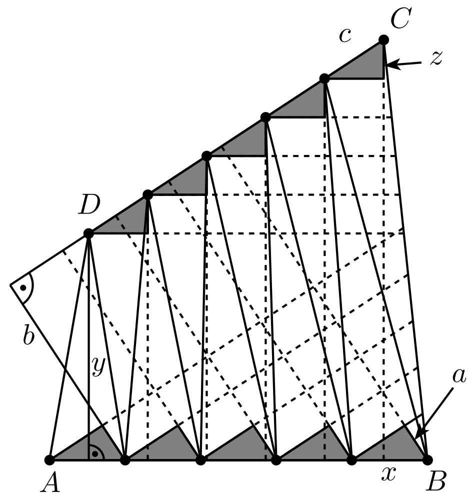
На четвъртия кръг на Фестивала на младите математици в Созопол решавах следната задача:

Задача 1. Страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$ са разделени на 5 равни части, както е показано на чертежа. Ако $S_2 = 2$ и $S_5 = 5$, намерете лицето на $ABCD$.



Решение. Всяко от лицата S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 е сбор от лицата на два триъгълника (които се получават, като построим диагонал в съответния четириъгълник). За да изразя тези лица, правя следните допълнителни построения.

Нека през D и през всяка от четирите точки, които разделят отсечката CD на пет равни части, построим прави, успоредни на AB, както и прави, перпендикулярни на AB. По този начин получаваме правоъгълни триъгълника, оцветени на чертежа. Те имат хипотенузи, равни на $c = \dfrac{1}{5}CD$, както и равни ъгли; следователно са еднакви. Да означим катетите им, перпендикулярни на AB, с z. Тогава ако D се намира на разстояние y от AB, то точките, които разделят CD на пет равни части, се намират на разстояния съответно $y+z$, $y+2z$, $y+3z$ и $y+4z$ от AB.



По същия начин, през A и през всяка от четирите точки, които разделят отсечката AB на пет равни части, построяваме прави, успоредни на CD, както и прави, перпендикулярни на CD – през четирите точки и B. Така получаваме още пет еднакви правоъгълни триъгълника с хипотенузи, равни на $x = \frac{1}{5}AB$. Да означим катетите им, перпендикулярни на CD, с a. Тогава ако най-близката до A разделна точка се намира на разстояние b от CD, то останалите разделни точки и B се намират на разстояния съответно $b+a$, $b+2a$, $b+3a$ и $b+4a$ от CD.

Сега във всеки от дадените в условието четитриъгълници построяваме диагонал (виж чертежа). Лицето на всеки четириъгълник изразяваме като сбор от лицата на два триъгълника:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{cb+xy}{2} \\
S_2 &= \frac{c(b+a)+x(y+z)}{2} = 2 \\
S_3 &= \frac{c(b+2a)+x(y+2z)}{2} \\
S_4 &= \frac{c(b+3a)+x(y+3z)}{2} \\
S_5 &= \frac{c(b+4a)+x(y+4z)}{2} = 5
\end{aligned}$$

Образуваме отношението

$$\frac{S_2}{S_5} = \frac{c(b+a)+x(y+z)}{c(b+4a)+x(y+4z)} = \frac{2}{5}$$

и като умножим на кръст и разкрием скобите, получаваме

$$5cb + 5ca + 5xy + 5xz = 2cb + 8ca + 2xy + 8xz \iff 3cb + 3xy = 3ca + 3xz$$

$$\text{т.е.} \quad cb + xy = ca + xz.$$

Но това означава, че

$$S_2 - S_1 = \frac{ca + xz}{2} = \frac{cb + xy}{2} = S_1,$$

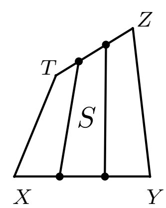
т.е. $S_2 = 2S_1$, откъдето $2 = 2S_1$ и намираме $S_1 = 1$.

Тогава $S_3 - S_2 = \dfrac{ca + xz}{2} = 1$, т.е. $S_3 = 3$ и по същия начин получаваме $S_4 - S_3 = 1$, откъдето $S_4 = 4$.

Така намерихме $S_{ABCD} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Бележка на редакцията. Решението на Ангел Христов лесно може да се обобщи, като страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$ се разделят на произволен брой равни части. (Опитайте!) Освен това, то е значително по-впечатляващо от предложеното от автора на задачата. Убедете се сами!

Решение на автора. Ще използваме известния факт, че ако страните XY и ZT на четириъгълник $XYZT$ са разделени на три равни части, както е показано на чертежа вдясно, то $S = \dfrac{1}{3}S_{XYZT}$.



Оттук в дадената задача следват равенствата

$$4 = S_1 + S_3, \quad 2S_3 = 2 + S_4, \quad 2S_4 = S_3 + 5.$$

От тях лесно намираме $S_1 = 1, S_3 = 3$, $S_4 = 4$, т.е. $S_{ABCD} = 15$.

WMTC ВЪВ ВАРНА

От 21 до 25 ноември 2018 г. във Варна ще се проведе World Mathematics Team Championship (WMTC). Това международно състезание гостува ежегодно на различни градове по света. Първото му издание е през 2010 г. в Пекин.

Състезанието се провежда на три нива: Junior Level за ученици, родени през или след 2006 г., Intermediate Level за ученици, родени през или или след 2003 г. и Advanced Level за ученици, родени през или след 2000 г.

Всеки отбор се състои от 6 ученици и се състезава в три кръга: индивидуален кръг (в две части, 15 задачи за 15 минути и 8 задачи за 40 минути); щафета в три кръга (за 24 минути) и отборен кръг (14 задачи за 30 минути).

По-подробно за историята на състезанието, регламента, програмата и наградите може да прочетете на сайтовете

`http://wmtc.international/` и `http://wmtc-varna2018.com/`.

Предлагаме Ви избрани задачи от щафетата и отборния кръг през 2017 г.

Junior Level, щафета

1. Нека $\dfrac{a-b}{c+d}$ е естествено число и a, b, c и d са различни прости числа, по-малки от 100. Намерете максималната стойност на $\dfrac{a-b}{c+d}$.

2. Нека T е числото, което сте получили на предишната задача.

Естественото число N има следните свойства:

1) произведението на цифрите на N е равно на 320,

2) N се дели на T.

Намерете най-малката възможна стойност на N.

Отговори. 18; 14454

Intermediate Level, щафета

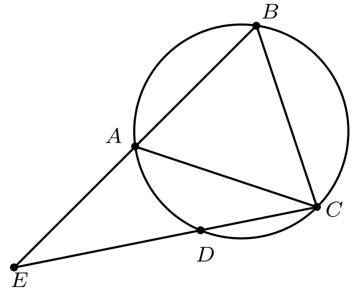
1. Нека a и b са различни реални корени на уравнението

$$(x^3-20x+17)^2-2(x^3-20x+17)(x^3-21x+18)+1(x^3-21x+18)^2-23=0.$$

Намерете a^2+b^2.

2. Нека T е числото, което сте получили на предишната задача.
На чертежа $\sphericalangle AED = T^\circ$ и $AB = BC = CD$.
Намерете $\sphericalangle ACD$.

Отговори. 48; 9°



Advanced Level, щафета

1. Ако $r_1 = \{(x;y) \mid |x|+|y| \leqq 20\}$ и $r_2 = \{(x;y) \mid |x|-|y| \leqq 17\}$, намерете лицето на областта $r_1 \cap r_2$.

2. Нека T е числото, което сте получили на предишната задача.

Положителните реални числа x, y, z и отрицателното цяло число k са такива, че $\log(xyz)$ е цяло число и

$$\log x \cdot \log y + \log z \cdot \log(xy) = k \text{ и } \log^2 x + \log^2 y + \log^2 z = T.$$

Намерете най-голямата възможна стойност на k.

Отговори. 791; -31

Junior Level, отборен кръг

В кутия са сложени 200 еднакви топки, на всяка от които е записано различно естествено число от 1 до 200. Алиса без да гледа, вади топки от кутията. Най-малко колко топки трябва да извади тя, за да е сигурно, че произведението на числата върху извадените от нея топки се дели на 15?

Отговор. 161

Intermediate Level, отборен кръг

Намерете броя на триъгълниците с дължини на страните прости числа, които са делители на 1155 (не задължително различни).

Отговор. 14

Advanced Level, отборен кръг

На едно състезание има 5 задачи. Верен отговор носи 3 точки, непопълнен отговор носи една точка, а при грешен отговор резултатът се намалява с една точка. Ани с еднаква вероятност дава верен, грешен и непопълнен отговор. Вероятността резултатът на Ани да е 7 точки е $\frac{p}{q}$, където p и q са взаимнопрости естествени числа. Намерете $p+q$.

Отговор. 32

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

Емил Колев (ИМИ–БАН), Невена Събева (ИМИ–БАН)

На 23 юни 2018 в Института по математика и информатика на БАН се проведе финалният (присъствен) кръг на конкурса на списание „Математика“. За участие в състезанието бяха поканени учениците от 5, 6 и 7 клас, които се представиха най-добре в задочния етап на конкурса.

Победителите в присъствения кръг на конкурса са:
Александър Мургин (5. клас, ППМГ, Видин),
Мария Дренчева (6. клас, СМГ),
Марин Христов (6. клас, СМГ),
Ясен Пенчев (6. клас, ПМГ, Габрово),
Александра Ветова (6. клас, МГ, Плевен),
Любен Карбанов (6. клас, ППМГ, Стара Загора),
Любомир Коцев (7. клас, СМГ),
Мирослав Минчев (7. клас, ППМГ, Стара Загора),
Георги Тончев (7. клас, МГ, Плевен),
Ясмин Ердим (7. клас, МГ, Плевен),
Йоан Василев (7. клас, МГ, Плевен) и
Станислав Матев (7. клас, МГ, Плевен).

Предлагаме Ви условията и решенията на задачите от конкурса.

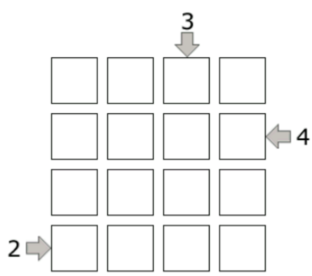
ТЕМА ЗА 5. КЛАС

Задача 1. Четири вида небостъргачи са означени с 1, 2, 3 и 4 според височината си. Във всяко квадратче на схемата поставете небостъргач 1, 2, 3 или 4 така, че:

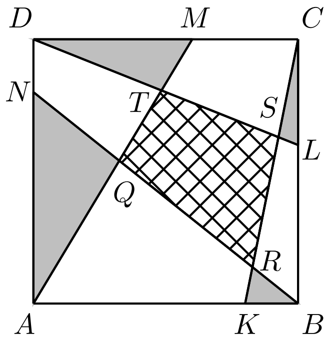
• Във всеки ред и стълб да има по един небостъргач от всеки вид;

• Числата около мрежата да показват колко небосъргача могат да се видят от съответната позиция в посоката, показана със стрелка;

• По-нисък небостъргач не се вижда, ако се намира зад по-висок.



Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1. На страните му са отбелязани точките K, L, M, N и са построени отсечките AM, BN, CK, DL, както е показано на чертежа.



А) Ако K, L, M, N са среди на съответните страни на квадрата, докажете, че лицето на защрихования четириъгълник $QRST$ е равно на сбора на лицата на оцветените триъгълници AQN, BRK, CSL и DTM.

Б) Ако лицето на защрихования четириъгълник $QRST$ е равно на сбора на лицата на оцветените триъгълници AQN, BRK, CSL и DTM, докажете, че

$$AK + BL + CM + DN = 2.$$

Задача 3. В Хогуортс пристигнали 2018 нови ученици. Разпределителната шапка изпратила всеки от тях в Слидерин, Рейвънклоу, Хафълпаф или Грифиндор.

Оказало се, че новите ученици в Грифиндор са с 25% по-малко от тези в Рейвънклоу и с 25% повече от тези в Хафълпаф.

Най-малко колко ученици са изпратени в Слидерин?

Задача 4. Интересно е всяко четирицифрено число $\overline{a_0a_1a_2a_3}$ със следните свойства:

- сборът на цифрите $a_0 + a_1$ е равен на общия брой нули и единици в записа на числото;
- сборът на цифрите $a_2 + a_3$ е равен на общия брой двойки и тройки в записа на числото.

Колко са интересните числа?

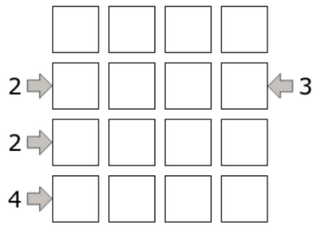
ТЕМА ЗА 6. КЛАС

Задача 1. Четири вида небостъргачи са означени с 1, 2, 3 и 4 според височината си. Във всяко квадратче на схемата поставете небостъргач 1, 2, 3 или 4 така, че:

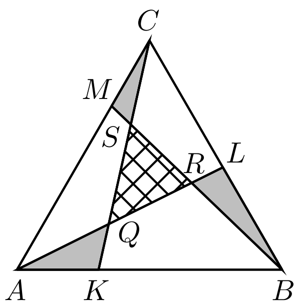
• Във всеки ред и стълб да има по един небостъргач от всеки вид;

• Числата около мрежата да показват колко небосъргача могат да се видят от съответната позиция в посоката, показана със стрелка;

• По-нисък небостъргач не се вижда, ако се намира зад по-висок.



Задача 2. Даден е равностранен триъгълник ABC със страна 3. На страните му са отбелязани точките K, L, M и са построени отсечките AL, BM, CK, както е показано на чертежа.



А) Ако $AK = BL = CM = 1$, докажете, че лицето на защрихования триъгълник QRS е равно на сбора на лицата на оцветените триъгълници AKQ, BLR и CMS.

Б) Ако лицето на защрихования триъгълник QRS е равно на сбора на лицата на оцветените триъгълници AKQ, BLR и CMS, докажете, че

$$AK + BL + CM = 3.$$

Задача 3. В Хогуортс пристигнали 2018 нови ученици. Разпределителната шапка изпратила всеки от тях в Слидерин, Рейвънклоу, Хафълпаф или Грифиндор. Оказало се, че момичетата са разпределени по домовете (в горния ред) в отношение $1 : 2 : 3 : 4$, а момчетата в отношение $5 : 6 : 7 : 8$. Оказало се, че в един от домовете постъпили 555 нови ученици. Колко момичета са постъпили в Хогуортс?

Задача 4. Интересно е всяко шестцифрено число $\overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5}$ със следните свойства:

• сборът на цифрите $a_0 + a_1$ е равен на общия брой нули и единици в записа на числото;

• сборът на цифрите $a_2 + a_3$ е равен на общия брой двойки и тройки в записа на числото;

• сборът на цифрите $a_4 + a_5$ е равен на общия брой четворки и петици в записа на числото.

Колко са интересните числа?

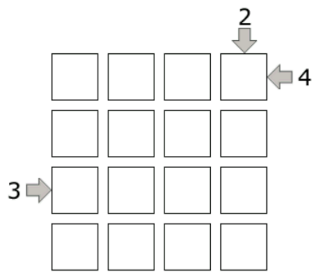
ТЕМА ЗА 7. КЛАС

Задача 1. Четири вида небостъргачи са означени с 1, 2, 3 и 4 според височината си. Във всяко квадратче на схемата поставете небостъргач 1, 2, 3 или 4 така, че:

• Във всеки ред и стълб да има по един небостъргач от всеки вид;

• Числата около мрежата да показват колко небосъргача могат да се видят от съответната позиция в посоката, показана със стрелка;

• По-нисък небостъргач не се вижда, ако се намира зад по-висок.



Задача 2. Колко двойки естествени числа $(a; b)$, където $a < b$, удовлетворяват равенството

$$ab + 120 = 7\ \text{НОК}(a; b) + 5\ \text{НОД}(a; b)\ ?$$

Задача 3. Даден е правилен петоъгълник $ABCDE$. Точката F от страната е такава, че четириъгълникът $BCEF$ има 2 пъти по-голямо лице от триъгълника CDE.

А) Докажете, че $AE + AF = AD$.

Б) Намерете $\sphericalangle FCD$.

Задача 4. Интересно е всяко осемцифрено число $\overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ със следните свойства:

• сборът на цифрите $a_0 + a_1$ е равен на общия брой нули и единици в записа на числото;

• сборът на цифрите $a_2 + a_3$ е равен на общия брой двойки и тройки в записа на числото;

• сборът на цифрите $a_4 + a_5$ е равен на общия брой четворки и петици в записа на числото;

• сборът на цифрите $a_6 + a_7$ е равен на общия брой шестици и седмици в записа на числото.

Колко са интересните числа?

РЕШЕНИЯ

5.1. *Отговор*

3	2	1	4
4	3	2	1
2	1	4	3
1	4	3	2

5.2. А) Лицето на всеки от триъгълниците ABN, BCK, CDL, DAM е 0,25, следователно сборът от лицата им е равен на лицето на квадрата $ABCD$:

$$S_{ABN} + S_{BCK} + S_{CDL} + S_{DAM} = S_{ABCD}.$$

От друга страна, имаме

$$S_{ABN}+S_{BCK}+S_{CDL}+S_{DAM} = S_{ABCD}-S_{QRST}+S_{ANQ}+S_{BKR}+S_{CLS}+S_{DMT},$$

откъдето следва, че $S_{QRST} = S_{ANQ} + S_{BKR} + S_{CLS} + S_{DMT}$.

Б) От равенството $S_{QRST} = S_{ANQ} + S_{BKR} + S_{CLS} + S_{DMT}$ следва, че

$$S_{ABN} + S_{BCK} + S_{CDL} + S_{DAM} = S_{ABCD},$$

т.е. $\frac{1}{2}AN + \frac{1}{2}BK + \frac{1}{2}CL + \frac{1}{2}DM = 1$. Оттук $AN + BK + CL + DM = 2$, т.е. $AK + BL + CM + DN = P_{ABCD} - 2 = 2$.

5.3. *Отговор* 44. Ако учениците в Грифиндор са $15x$, в Рейвънклоу са $15x : 75\% = 20x$, а в Хафълпаф са $15x : 125\% = 12x$; дотук общо $47x$. Тъй като $2018 = 47.42 + 44$, в Слидерин има поне 44 ученици.

5.4. *Отговор* 8. Ясно е, че интересното число се записва с цифри, по-малки от 4. Това означава, че и четирите цифри на интересното число са 0, 1, 2 или 3. Следователно сборът $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, равен на общия брой цифри 0, 1, 2 и 3 в записа му, е точно 4. Оттук лесно намираме интересните числа: 3001, 3010, 2110, 2101, 2020, 2002, 1210, 1201.

6.1. *Отговор*

4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4

6.2. А) Лицето на всеки от триъгълниците AKC, ABL, CBM е равно на$\frac{1}{3}S_{ABC}$, следователно $S_{AKC} + S_{BLA} + S_{CMB} = S_{ABC}$. От друга страна

$$S_{AKC} + S_{BLA} + S_{CMB} = S_{ABC} - S_{QRS} + S_{AKQ} + S_{BLR} + S_{CMS},$$

Следователно $S_{QRS} = S_{AKQ} + S_{BLR} + S_{CMS}$.

Б) От равенството $S_{QRS} = S_{AKQ} + S_{BLR} + S_{CMS}$ следва, че

$$S_{AKC} + S_{BLA} + S_{CMB} = S_{ABC}, \text{ т.е. } \frac{h}{2}AK + \frac{h}{2}BL + \frac{h}{2}CM = \frac{h}{2}.3,$$

където h е височината на равностранния триъгълник. Това означава, че $AK + BL + CM = 3$.

6.3. *Отговор* 380. От условието следва разпределението в таблицата:

	Слидерин	Рейвънклоу	Хафълпаф	Грифиндор	Общо
Момичета	x	$2x$	$3x$	$4x$	$10x$
Момчета	$5y$	$6y$	$7y$	$8y$	$26y$
Общо	$x+5y$	$2x+6y$	$3x+7y$	$4x+8y$	2018

Оттук $10x + 26y = 2018 \Leftrightarrow 5x + 13y = 1009$. Броят на новите ученици в Рейвънклоу и в Грифиндор е четен, а в Слидерин е

$$x + 5y < \frac{10x + 26y}{5} = \frac{2018}{5} < 404.$$

Следователно в Хафълпаф са постъпили 555 ученици и $3x + 7y = 555$. Тогава

$$x = \frac{13(3x + 7y) - 7(5x + 13y)}{4} = \frac{13.555 - 7.1009}{4} = 38.$$

В Хогуортс са постъпили 380 момичета.

6.4. *Отговор* 11. Ясно е, че интересното число се записва с цифри, по-малки от 6. Следователно сборът на цифрите му, равен на общия брой 0, 1, 2, 3, 4 и 5 в записа му, е точно 6. Оттук лесно намираме интересните числа: 500010, 500001, 410010, 410001, 312000, 310200, 221100, 140010, 140001, 132000, 130200.

7.1. *Отговор*

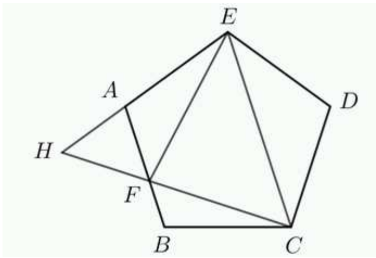
4	3	2	1
2	1	3	4
1	2	4	3
3	4	1	2

7.2. *Отговор* 3. Ако НОК$(a;b) = x$, НОД$(a;b) = y$, то $ab = xy$ и y/x. Тогава

$$xy + 120 = 7x + 5y \Leftrightarrow (7 - y)(x - 5) = 85.$$

Оттук, като вземем предвид, че y/x, получаваме двойките естествени числа $(x; y) = (90; 6)$, $(22; 2)$. От първата получаваме решенията $(a; b) = (15; 18)$, $(6; 90)$, а от втората $(a; b) = (2; 22)$.

7.3. В правилния петоъгълник да означим страната с a, диагонала с l, а с h разстоянието от върха C до AB; то е равно на разстоянието от C до DE. В равнобедрения триъгълник CDE имаме $\sphericalangle D = 108^\circ$, $\sphericalangle ECD = \sphericalangle CED = 36^\circ$, следователно $\sphericalangle BCE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Оттук $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCE = 180^\circ$, т.е. $AB \parallel CE$. Това означава, че $BCEF$ е трапец.



А) От условието $S_{BCEF} = 2S_{CDE}$ следва, че $\dfrac{h}{2}(BF + CE) = 2.\dfrac{h}{2}DE$, т.е. $a - AF + l = 2a \Leftrightarrow a + AF = l$, което искахме да докажем.

Б) Да нанесем на продължението на AE отсечка $AH = AF$. От А) следва, че $EH = l$. В равнобедрения $\triangle HCE$ имаме $\sphericalangle HEC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, $\sphericalangle EHC = \sphericalangle ECH = 54^\circ$. В равнобедрения триъгълник AHF имаме $\sphericalangle HAF = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, $\sphericalangle AHF = \sphericalangle AFH = 54^\circ$. От $\sphericalangle AHF = \sphericalangle EHC$ следва, че $F \in HC$ и $\sphericalangle FCD = \sphericalangle HCD = \sphericalangle HCE + \sphericalangle ECD = 54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$.

7.4. *Отговор* 24. Ясно е, че интересното число се записва с цифри, по-малки от 8. Следователно сборът на цифрите му, равен на общия рой 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 в записа му, е точно 8. Общият брой нули и единици в записа на числото е поне 4, следователно $a_0 + a_1$ е 4, 5, 6 или 7.

Оттук намираме интересните числа (общо 24):

∗ 70000010, 70000001,

∗ от 61000010 се получават 4 числа (заедно с 61000001, 16000010, 16000001),

∗ от 42101000 се получават 2.2.2=8 числа,

∗ 33110000,

∗ от 32300000 се получават 4 числа,

∗ от 32120000 се получават 4 числа,

∗ 22220000.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2018 г. и бр. 1, 2 от 2019 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (присъствен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. В 10:10 часа електронният часовник на Алиса показва 9:57. За да го свери, Алиса разполага с два бутона: единият увеличава часа с 9 минути, а другият го намалява с 20 минути. Най-малко колко пъти трябва да натисне бутоните Алиса, за да свери часовника?

Задача 2. Една крайна редица от букви наричаме *добра*, ако изпълнява следните условия:

- Всяка буква в редицата е М, О, Р или Е.
- Измежду първите три букви няма еднакви.
- Измежду последните три букви няма еднакви.
- Първата, втората, четвъртата и петата буква са две по две различни.

Колко са добрите редици с дължина 6 букви?

Задача 3. Една крайна редица от букви наричаме *строга*, ако изпълнява следните условия:

- Всяка буква в редицата е А или М.
- Ако разделим редицата на подредици от еднакви букви (като съседните подредици са съставени от различни букви), то подредиците с А съдържат четен брой букви, а подредиците с М – нечетен брой букви.

Например, АА, М, ААМАА са строги редици, а МАМА не е. Колко са строгите редици с дължина 14 букви?

Срокът за представяне на решенията е 30.11.2018 г.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Нека $a > 1$ е естествено число. Редицата естествени числа $\{a_n\}$ е определена по следния начин: $a_1 = a$ и за всяко $n \geqq 1$, a_{n+1} е най-големият прост делител на $a_n^2 - 1$. Да се намери най-малката стойност на a, за която всеки две от числата $a_1, a_2, \ldots, a_7$ са различни.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с $AB = 10$, $AC = 11$ и радиус на описаната окръжност 6. Точките D и E са върху описаната около ABC окръжност и триъгълникът ADE е равностранен. Отсечките DE и BC се пресичат в точка X. Да се намери $BX : XC$.

Задача 3. Мишо е в долния ляв ъгъл на мрежа 6×6; в точката $(0, 0)$. В мрежата има две устройста за еднократно телепортиране, разположени в $(2, 2)$ и $(3, 3)$: първия път, когато Мишо попадне в една от тези точки, той незабавно се телепортира до другата точка и устройствата изчезват. Ако Мишо може да се движи само нагоре или надясно, да се намери по колко различни начина той може да стигне до точката $(5, 5)$.

Срокът за представяне на решенията е 31.12.2018 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 3/2018 г.

Задача 1. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$. На страната BC е избрана точка M, а на страната CD – точка N така, че $\sphericalangle MAN = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$. Да се докаже, че $MN = BM + ND$.

Решение. Нека R е симетричната точка на B относно AM. От равенствата $AD = AB$ и $\sphericalangle MAN = \sphericalangle NAD + \sphericalangle MAB$ следва, че R е симетричната на D точка относно AN. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан, следователно $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$, откъдето $\sphericalangle ARM + \sphericalangle ARN = 180^\circ$, т.е. точките M, R и N лежат на една права. Тогава $BM + ND = MR + NR = MN$.

Задача 2. Петър има 10^9 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб с ръб 10^3 с изцяло бяла повърхност. Най-малко колко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър?

Решение. Достатъчно е Емил да оцвети по две противоположни стени на $1000^3 - 7$ кубчета. Тогава едно от осемте ъглови кубчета на големия куб ще бъде с две противоположни оцветени стени и задължително една от тях ще бъде външна.

Ако са оцветени по-малко от $2.1000^3 - 14$ стени, кубчетата с не повече от една оцветена стена са поне 8. Петър ги разполага в ъглите на големия куб (като скрива, ако е необходимо, по една оцветена стена на кубче). Кубчетата с не по-малко от три оцветени стени са не повече от $\dfrac{2.1000^3}{3} < 998^3$. Следователно Петър може да ги скрие във вътрешността на големия куб. Останалите кубчета трябва да се разположат по ръбовете и вътре в стените на големия куб. Петър слага всяко от тях така, че оцветените стени (най-много две), да не са външни.

Следователно Емил трябва да оцвети поне $2.1000^3 - 14$ стени.

Задача 3. Безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ е образувана по правилото: $a_1 = 1$ и за всяко $n > 1$ ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, а ако този остатък е 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Да се докаже, че всяко естествено число се среща безкраен брой пъти в редицата. (Редицата започва с 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3,...)

Решение. Ще докажем по индукция за m, че $a_{2^m-1} = 1$. Лесно се проверява, че при $m = 1$, 2 и 3 имаме $a_1 = a_3 = a_7 = 1$.

Нека за някое m имаме $a_{2^m-1} = 1$. Тъй като най-големият нечетен делител на 2^m е 1, то $a_{2^m} = a_{2^m-1} + 1 = 2$.

Да разгледаме как се получават a_{2^m+k}, където $1 \leqq k \leqq 2^m - 1$.

При $k \neq 2^{m-1}$, в представянето $k = 2^s.q$, където q е нечетно, имаме $s \leqq k-2$. Тогава $2^m + k = 2^m + 2^s.q = 2^s(2^{m-s} + q)$ и тъй като $m - s \geqq 2$, то най-големият нечетен делител на $2^m + k$ е $2^{m-s} + q$ и той дава същия остатък при деление на 4, както и q – най-големият нечетен делител на $k = 2^s.q$.

При $k = 2^{m-1}$ получаваме $2^m + k = 3.2^{m-1}$ с най-голям нечетен делител 3, докато най-големият нечетен делител на 2^{m-1} е 1. Това означава, че разликата $a_{2^{m+1}-1} - a_{2^m}$ е с 2 по-малка от разликата $a_{2^m-1} - a_0$ (приемаме $a_0 = 0$). Като използваме индукционното предположение, намираме

$$a_{2^{m+1}-1} = a_{2^m} + a_{2^m-1} - a_0 - 2 = 1.$$

По-нататък ще докажем, че ако r е член на редицата, то $r + 2$ също е член на редицата. Оттук ще следва, че в редицата се срещат всички естествени числа (тъй като 1 и 2 са нейни членове).

Нека $r = a_k$ и $k < 2^m$. Както в а), получаваме $a_{2^{m+1}+k} - a_{2^{m+1}} = a_k - a_0$, откъдето следва, че $a_{2^{m+1}+k} = r + 2$.

Да допуснем, че естественото число r се среща краен брой пъти в редицата. След неговото последно появяване редицата не може да достигне по-голяма от r стойност, защото при намаляването ѝ към 1 отново ще се срещне r. Противоречие.

Външно оценяване по математика, 23 май 2018 г.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Коя е стойността на израза $(-0{,}5 - x)^2$ при $x = -\dfrac{1}{2}$?

А) $-\dfrac{1}{16}$ **Б)** 0 **В)** $\dfrac{1}{16}$ **Г)** $\dfrac{1}{8}$

2. Изразът $a^3 - a^2 - a + 1$ е тъждествено равен на израза

А) $(a+1)(a-1)^2$ **Б)** $(a-1)(a+1)^2$

В) $(a-1)(a^2+1)$ **Г)** $(a+1)(a^2+1)$

3. Коренът на уравнението $(x-3)(x+3) - x^2 + 4x = 1$ е

А) -2 **Б)** $2{,}5$ **В)** 3 **Г)** $3{,}5$

4. Решенията на неравенството $-4x + 8 \leqq 0$ са числата от интервала

А) $[2; +\infty)$ **Б)** $(-\infty; 2]$ **В)** $[-2; +\infty)$ **Г)** $(-\infty; -2]$

5. Сборът на корените на уравнението $|x-2| = 3$ е

А) -1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 5

6. В турнир по спортна стрелба участват x отбора. Във всеки отбор има по момчета и 2 пъти по-малко момичета. С кой от следващите изрази може да се определи броят на играчите, които участват в турнира?

А) $xy + \dfrac{y}{2}$ **Б)** $xy + 2y$ **В)** $x(y + 2y)$ **Г)** $x\left(y + \dfrac{y}{2}\right)$

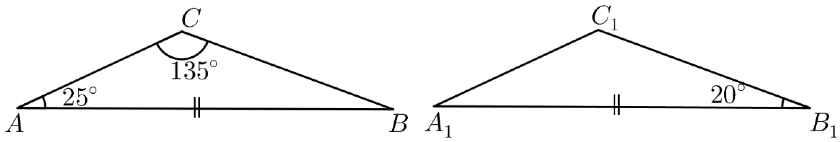
7. Камион и лека кола тръгват едновременно един срещу друг от два пункта, които са на разстояние 400 km един от друг. Ако превозните средства се движат с постоянна скорост, съответно 60 km/h и 90 km/h , те ще се срещнат след:

А) 2 h **Б)** 2 h 20 min **В)** 2 h 36 min **Г)** 2 h 40 min

8. Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $5(3-x) > 13 - 4x$ е:

А) -1 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

9. По данните от чертежа $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, ако:

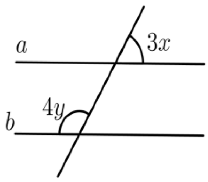


А) $\sphericalangle A_1C_1B_1 = 135°$ **Б)** $AB = A_1C_1$

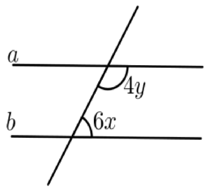
В) $AC = B_1C_1$ **Г)** $\sphericalangle A_1C_1B_1 = 25°$

10. Ако $x = 10°$ и $y = 30°$, на кои от чертежите правите a и b са успоредни?

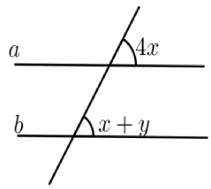
чертеж 1



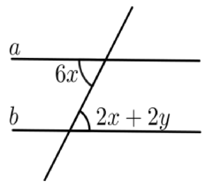
чертеж 2



чертеж 3

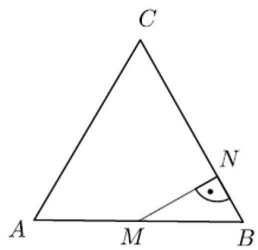


чертеж 4



А) 1 и 2 **Б)** 1 и 4 **В)** 3 и 4 **Г)** 2 и 3

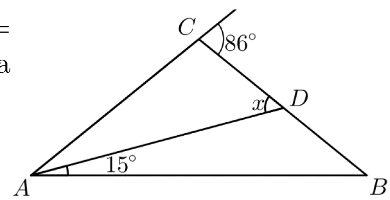
11. За равностранния $\triangle ABC$ точката M е средата на AB и $MN \perp BC$. Ако $AB = 24$ cm, то дължината на CN е:



А) 20 cm **Б)** 18 cm

В) 16 cm **Г)** 12 cm

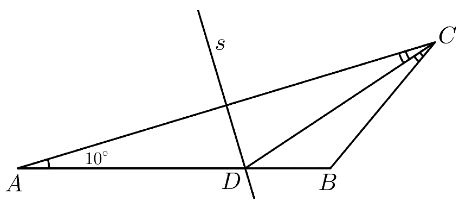
12. На чертежа $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$). Външният ъгъл при върха C е равен на $86°$ и $\sphericalangle DAB = 15°$. Мярката на x е:



А) 94° **Б)** 58°

В) 43° **Г)** 28°

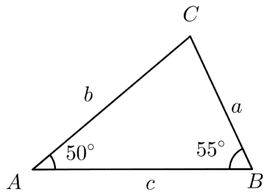
13. На чертежа е даден $\triangle ABC$. Ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ и симетралата на страната AC се пресичат в точка D ($D \in AB$). Ако $\sphericalangle BAC = 10°$, то мярката на $\sphericalangle ABC$ е:



А) 90° **Б)** 120°

В) 150° **Г)** 160°

14. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC = 50^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 55^\circ$. Кое от неравенствата е вярно?



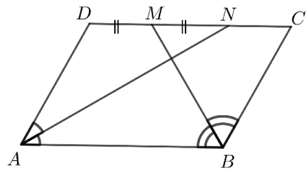
А) $a < b < c$ **Б)** $a < c < b$

В) $b < c < a$ **Г)** $c < b < a$

15. За ъглите α, β и γ на триъгълник е изпълнено $\alpha = \beta = \dfrac{\gamma}{2}$. Мярката на ъгъл γ е

А) 45° **Б)** 60° **В)** 72° **Г)** 90°

16. На чертежа AN и BM са ъглополовящи на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ABC$ на успоредника $ABCD$. Ако $DM = NM$, периметърът на успоредника е 60 cm и $BM = 12$ cm, то мярката на $\sphericalangle BAD$ е:



А) 15° **Б)** 30°

В) 60° **Г)** 75°

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. Търговец транспортира ежедневно картофи и царевица от зеленчукова борса. За превоза на картофи разходите му са 100 лв. първоначално и по 20 лв. на всеки тон. За царевицата разходите му са 80 лв. първоначално и по 15 лв. на всеки тон. В понеделник е превозил 3 тона картофи и 4 тона царевица, а във вторник – x тона картофи и два пъти по-голямо количество царевица от картофите.

А) Пресметнете разходите на търговеца, които е направил в понеделник.

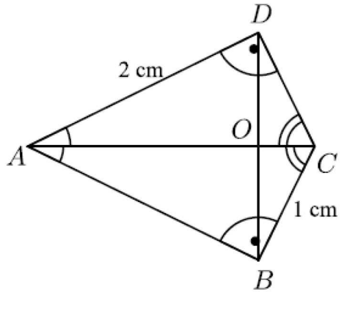
Б) Запишете с израз в нормален вид разходите на търговеца, които е направил във вторник.

В) Колко тона общо е превозил търговецът във вторник, ако разходите му във вторник са с 80 лв. повече, отколкото тези в понеделник?

18. А) Разложете на множители израза $A = x^2y - 16y$.

Б) Пресметнете стойността на израза A, ако $x = 8$ и $y = 2{,}5$.

19. На чертежа диагоналите на четириъгълника $ABCD$ ($AB \neq BC$) се пресичат в точка O. Диагоналът AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$ и на BCD Намерете и запишете:



А) отсечката, която е равна на отсечката AD;

Б) мярката на $\sphericalangle AOD$;

В) обиколката на четириъгълника $ABCD$;

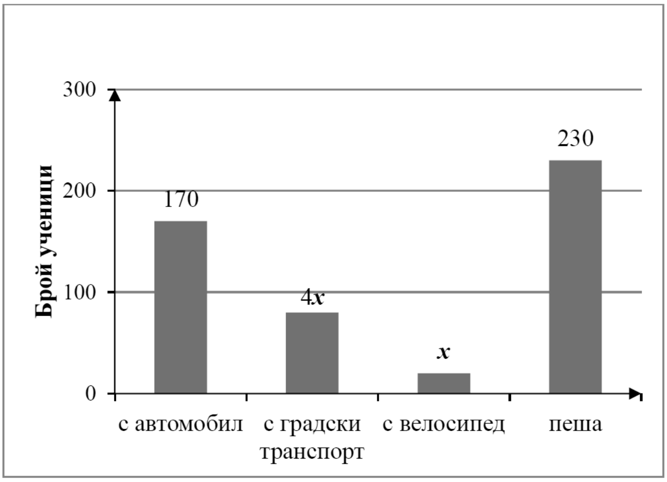
Г) лицето на четириъгълника $ABCD$;

20. За всяко от уравненията запишете номера на съответното му решение.

А)	$2(x-5)=x-5$	**(1)**	$x_1=0,\ x_2=10$
Б)	$2(x-5)=2x-10$	**(2)**	$x=5$
В)	$x^2=16$	**(3)**	уравнението няма корени
Г)	$\lvert x-5\rvert=5$	**(4)**	всяко число е корен
Д)	$\lvert x-5\rvert+5=0$	**(5)**	$x_1=-4,\ x_2=4$

ВТОРИ МОДУЛ

21. Проведена е анкета с 500 ученици в едно училище относно начина на придвижване на учениците до училище. Отговорите са представени на следната диаграма:



А) Намерете колко процента от всички ученици отиват пеша до училище.

Б) Седемдесет от анкетираните ученици, които отиват до училище с автомобил, се прибират вкъщи с градския транспорт. Всички останали се прибират по начина, по който са стигнали до училище. Колко процента от анкетираните ученици се прибират с градския транспорт?

22. А) Филип и Дора получили хонорар за написаната от тях книга. Филип написал 6 части от цялата книга, а Дора – останалите 4 части. Те се договорили да разделят пропорционално на броя на написаните от тях части от книгата. Намерете колко лева трябва да получи всеки от тях, ако хонорарът им за книгата е общо 12 000 лева.

Б) Филип иска да похарчи част от хонорара за ваканция във Флорида. Намерете най-много колко щатски долара (с точност до 1 долар) може да закупи за 3000 лева, ако обменният курс е 1 лев = 0,62301 щатски долар.

В) Дневната температура във Флорида се измерва в градуси по Фаренхайт (°F), докато в България – по Целзий (°C). Формулата, по която се изчисляват градусите от Фаренхайт към Целзий, е

$$°\mathrm{C} = \frac{5.(°\mathrm{F} - 32)}{9}.$$

В таблицата са представени измерените температури по Фаренхайт в дните от седмицата.

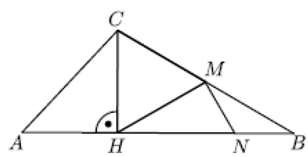
Намерете и запишете най-високата и най-ниската температура за седмицата по Целзий (°C), както и средноаритметичната им стойност по Целзий (°C).

Ден от седмицата	Понеделник	Вторник	Сряда	Четвъртък	Петък	Събота	Неделя
Температура	68°F	77°F	86°F	84°F	80°F	82°F	85°F

Запишете пълното решение на задачи 23 и 24 с необходимите обосновки.

23. Решете неравенството $(x-1)(x^2+x+1) - x(x-2)^2 > (2x-3)(2x+3)$ и уравнението $x(x+a) = (x-1)^2 - 5 + a^2$, където a е параметър. Намерете стойностите на параметъра a, за които най-голямото цяло число, което е решение на неравенството, е решение и на уравнението.

24 В $\sphericalangle ABC$ отсечката CH е височина и точка H е вътрешна за отсечката AB. Точката M е средата на BC и $AH = CH = HM$. Точката N е от отсечката HB и е такава, че $HN = MN + NB$.



А) Намерете мярката на $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$.
Б) Намерете отношението $HN : BN$.
В) Намерете отношението на лицата $S_{\triangle NMH} : S_{\triangle CMH}$.

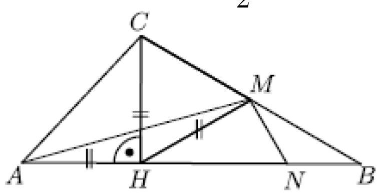
Отговори и решения

1. Б; **2** А; **3** Б; **4** А; **5** В; **6** Г; **7** Г; **8** Б; **9** А; **10** Г; **11** Б; **12** Б; **13** В; **14** А; **15** Г; **16** В;
17. А) разходите в понеделник са 300 лв.; Б) $(180 + 50x)$ лв.; В) 12 т.
18. А) $A = y(x-4)(x+4)$; Б) $A = 120$.
19. А) $AD = AB$; Б) $\sphericalangle AOD = 90°$; В) 6 cm; Г) 2 cm^2.
20. А) (2); Б) (4); В) (5); Г) (1); Д) (3);

21. А) 46%; Б) 30%.
22. А) Филип – (12000 : 10).6 = 7200 лв., Дора – (12000 : 10).4 = 4800 лв.; Б) 1869 щатски долара; В) Най-високата температура по Целзий е °C $= \dfrac{5.(86-32)}{9} = 30$°C; Най-ниската температура по Целзий е °C $= \dfrac{5.(68-32)}{9} = 20$°C; Средноаритметична стойност е $\dfrac{30°\mathrm{C} + 20°\mathrm{C}}{2} =$ 25°C.
23. За неравенството прилагаме формулите за съкратено умножение и разкриваме скобите $(x^3-1)-x(x^2-4x+4) > (4x^2-9)$. Извършваме приведение и достигаме до неравенството $-4x+8=0$. $-4x+8>0|(-1)$, $\iff$ $4x<8$. Получаваме $x<2$.

Имаме $x(a+2) = (a+2)(a-2)$. При $a \neq -2$ получаваме, че $x = \dfrac{a^2-4)}{a+2} = a-2$. При $a=-2$ получаваме уравнението $0.x = 0$ и следователно всяко x е решение.

Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството е $x=1$. Намираме $a=3$ и $a=-2$.
24. А) Триъгълникът ACH е равнобедрен и правоъгълен и $\sphericalangle BAC = 45°$. В правоъгълния $\triangle BCH$ имаме $HM = \dfrac{BC}{2} = CH$, значи $\sphericalangle ABC = 30°$.



Построяваме точка $P \in HN$, такава, че $MN = NP$. Тогава $\triangle PNM$ е равнобедрен и $HN = NP + NB = BP$, т.е. $HP = NB$.

Имаме $\triangle HPM \cong \triangle BNM$, като

1. $\sphericalangle MHP = \sphericalangle MBN$ ($\triangle MNB$ е равнобедрен)
2. $HP = NB$ (по доказателство)
3. $HM = MB$ (HM е медиана в $\triangle CHB$)

Тогава $PM = MN$, триъгълникът NPM е равностранен и $\sphericalangle PNB = 60°$. Но той е външен ъгъл за $\triangle BNM$. Тогава $\sphericalangle NMB = 30°$ и $\triangle NMB$ е равнобедрен. Следователно $NM = NB$. Тогава $HN : BN = 2:1$.

В) Нека HT е височина в $\triangle CHM$. В правоъгълния $\triangle HTB$ с $\sphericalangle HBT = 30°$ получаваме $HT = \dfrac{HB}{2} = \dfrac{3MN}{2}$. Тогава

$$S_{CHM} = \frac{CM.HT}{2} = \frac{3}{4}CM.MN \text{ и } S_{NHM} = \frac{HM.MN}{2} = \frac{CM.MN}{2}.$$

Оттук $S_{NMH} : S_{CMH} = 2:3$.

Държавен зрелостен изпит по математика, 29.05.2018 г.

Модул 1

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Най-голяма е стойността на израза:

А) $\sqrt[3]{16}$ **Б)** $\log_2 16$ **В)** $\sqrt{17}$ **Г)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

2. Числената стойност на израза $A = \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (2^{-2})^{-3} \cdot 2^0}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-9} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}}$ е:

А) $-\dfrac{9}{16}$ **Б)** 0 **В)** $\dfrac{9}{16}$ **Г)** $\dfrac{16}{9}$

3. Изразът $A = \dfrac{2x-1}{x^2\sqrt{x-3}}$ е дефиниран за всяко:

А) $x \neq 0$ **Б)** $x > 0,\ x \neq 3$ **В)** $x \neq 3$ **Г)** $x > 3$

4. Множеството от решенията на неравенството $x^2 > 4x$ е:

А) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ **Б)** $(4; \infty)$

В) $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$ **Г)** $(0; 4)$

5. Стойността на израза $\left(\log_3 \sqrt{3}\right)^{-2}$ е:

А) -1 **Б)** $\dfrac{1}{4}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** 4

6. Множеството от решенията на уравнението $x - 2\sqrt{x} = 3$ е:

А) $\{-1; 3\}$ **Б)** $\{9; 1\}$ **В)** $\{3\}$ **Г)** $\{9\}$

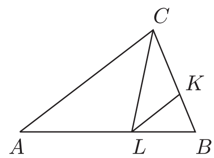
7. Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $2x^2 - x - 6 = 0$, намерете стойността на израза $B = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

А) $-2\dfrac{1}{12}$ **Б)** $-\dfrac{7}{12}$ **В)** $\dfrac{23}{12}$ **Г)** $2\dfrac{1}{12}$

8. Стойността на израза $4\cos^2 \dfrac{\pi}{12}$ е:

А) $\dfrac{1}{8}$ **Б)** $2 - \sqrt{3}$ **В)** 3 **Г)** $2 + \sqrt{3}$

9. В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща. Ако $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm и $KL \parallel AC$ ($K \in BC$), то отношението $CK : BK$ е равно на:



А) 3:2 **Б)** 5:3 **В)** 2:1 **Г)** 8:5

10. В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) $AC = 5$, $BC = 12$, а M е средата на AB. Стойността на $\sin \sphericalangle ACM$ е:

А) $\frac{12}{13}$ **Б)** $\frac{5}{12}$ **В)** $\frac{5}{13}$ **Г)** 1

11. В правоъгълна координатна система с единична мярка 1 cm разстоянието от върха на параболата $y = x^2 - 6x$ до абсцисната ос е:

А) 0 cm **Б)** 3 cm **В)** 6 cm **Г)** 9 cm

12. Осмият член на крайна аритметична прогресия е неин среден член и е равен на 7,5. Сборът от членовете на прогресията е:

А) 15 **Б)** 60 **В)** 112,5 **Г)** 225

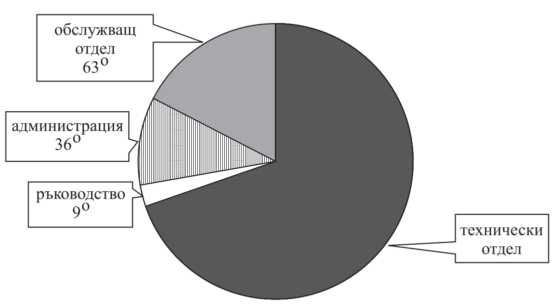
13. За намаляваща геометрична прогресия е известно, че $a_1 = -3$ и $S_5 - S_4 = -48$. Частното на прогресията е:

А) -2 **Б)** $\frac{1}{2}$ **В)** 2 **Г)** 4

14. Ако $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то стойността на израза $\cos\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$ е:

А) $-\frac{5\sqrt{5}}{6}$ **Б)** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ **В)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **Г)** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

15. На кръговата диаграма е представено разпределението на личния състав на една фирма, която има 720 служители в различни отдели. Според даденото на диаграмата, определете броя на служителите от техническия отдел.



А) 108 **Б)** 216 **В)** 252 **Г)** 504

16. Спортен отбор получава комплекти нови екипи, като в тях има по две различни якета, по три модела панталони и по пет различни блузи. По колко различни начина може да се облече отборът с еднакви екипи, които се състоят от яке, панталон и блуза.

А) 10 **Б)** 30 **В)** 15 **Г)** 60

17. Дължините на две от страните на един триъгълник са 7 cm и 8 cm и ъгълът между тях е 120°. Намерете дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

А) 13 cm **Б)** $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$ cm **В)** $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ cm **Г)** $\sqrt{19}$ cm

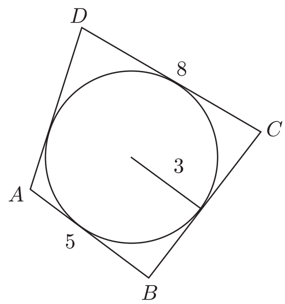
18. От точка C на окръжност k са построени хордите CA и CB с дължини съответно 17 cm и 21 cm. Средите им са свързани с отсечка, чиято дължина е 5 cm. Дължината на радиуса на окръжността е:

А) $\dfrac{85}{8}$ cm **Б)** 24 cm **В)** 48 cm **Г)** 84 cm

19. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с радиус 3 cm. Ако $AB = 5$ cm и $CD = 8$ cm, то лицето му е:

А) 26 cm^2 **Б)** 37 cm^2

В) 39 cm^2 **Г)** 40 cm^2



20. За правоъгълника $ABCD$ е дадено, че $AB : AC = 4 : 5$. Ако $MNPQ$ е квадрат с диагонал $10\sqrt{6}$ cm и $S_{ABCD} = S_{MNPQ}$, то периметърът на $ABCD$ е:

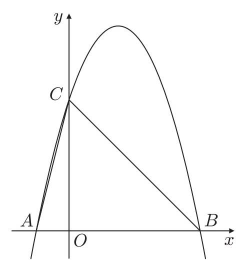
А) 90 cm **Б)** $40\sqrt{3}$ cm **В)** 70 cm **Г)** $20\sqrt{3}$ cm

Модул 2

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете допустимите стойности на израза $A = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x^2-49} + \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{x+1}}$.

22. На чертежа е показана графиката на квадратната функция $y = -x^2 + 3x + 4$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, който има за върхове пресечните точки на параболата с координатните оси.



23. Дадени са редиците, чиито общи членове се задават с формулите $a_n = 12n - 4$ и $b_n = 3n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Намерете най-малкото число n, за което е изпълнено неравенството $a_n \leqq b_n$.

24. Средната месечна температура на връх Вежен, измерена в градуси по Целзий, за една година по месеци е дадена в таблицата. Каква е средната температура за цялата година на връх Вежен?

месец	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
t°	-7°	-8°	-6°	-3°	3°	6°	8°	9°	5°	2°	-3°	-6°

25. Ако $\triangle ABC$ е с дължини на страните 24, 26 и 10, намерете дължината на медианата към най-голямата страна.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Решете уравнението $\dfrac{2}{y^2-1} + \dfrac{1}{y+1} - \dfrac{5}{y-1} = 1$ и намерете стойностите на x, за които $y = x^2 - 4x$.

27. Решете неравенството $\dfrac{2}{x^2-3x+2} \geqq \dfrac{3}{x^2-4x+3} - \dfrac{2}{x^2-6x+9}$ и проверете дали числото $\log_2 6$ е негово решение.

28. Около окръжност k с център O и радиус $r = \sqrt{3}$ cm е описан трапец $ABCD$ ($AB \| CD$, $AB > CD$)с лице 18 cm^2. Намерете дължините на страните и мерките на ъглите на трапеца, ако $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$.

ОТГОВОРИ

1. Г	**2.** В	**3.** Г	**4.** В	**5.** Г
6. Г	**7.** А	**8.** Г	**9.** Б	**10.** А
11. Г	**12.** В	**13.** В	**14.** А	**15.** Г
16. Б	**17.** В	**18.** А	**19.** В	**20.** В

21. $x \in [5; 7) \cup (7; +\infty)$;

22. $S_{tABC} = \dfrac{1}{2}(1+4).4 = 10$ кв.ед.;

23. 4;

24. 0°;

25. 13;

26. Дефиниционното множество на уравнението е $DM: y \neq \pm 1$. Тогава

$$\frac{2}{y^2-1} + \frac{1}{y+1} - \frac{5}{y-1} = 1 \iff y^2 + 4y + 3 = 0,$$

т.е. $y_1 = -3 \in DM$, $y_2 = -1 \notin DM$. От $y = -3$ намираме $x^2 - 4x = -3$, т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

27. Записваме даденото неравенство във вида

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)} \geqq \frac{3}{(x-1)(x+3)} - \frac{2}{(x-3)^2}.$$

Определяме ДС $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$. Получаваме неравенството

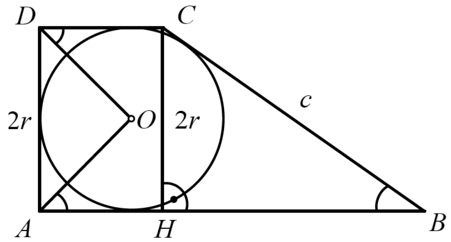
$$\frac{x^2 - 3x + 4}{(x-1)(x-2)(x-3)} \geqq 0 \Rightarrow (x^2 - 3x + 4)(x-1)(x-2)(x-3)^2 \geqq 0.$$

Имаме $x^2 - 3x + 4 > 0 \ \forall \ x$. Намираме решенията на неравенството $x \in (-\infty; 1) \cup [2; 3] \cup [3; \infty)$ и понеже $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$. Тъй като $2 < \log_2 6 < 3$, то $\log_2 6$ е решение на неравенството.

28. В трапеца $ABCD$ отсечките AO и DO са ъглополовящи на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle D$. От $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ и $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$ следва, че $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ и $AD = 2r$. Означаваме $BC = c$ и от $AB + CD + BC + 2r + c = p$ (свойство на описания четириъгълник) и

$$S = pr \iff 18 = (2r + c)r \iff (2\sqrt{3} + c)\sqrt{3} = 18$$

намираме $c = 4\sqrt{3}$ cm.



Построяваме височината $CH = 2r$ и от триъгълника BHC намираме: $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{36} = 6$; $\sin \sphericalangle B = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$ и $\sphericalangle B = 30^\circ$ или $\sphericalangle B = 150^\circ$. Но $AB > CD$ следователно $\sphericalangle B = 30^\circ$.

От $BH = AB - CD = 6$ и $AB + CD = 2r + c = 6\sqrt{3}$ получаваме $AB = 3\sqrt{3} + 3$ и $CD = 3\sqrt{3} - 3$. Страните на трапеца са

$$AB = 3(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}, \ CD = 3(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}, \ AD = 2\sqrt{3} \text{ cm}, \ BC = 4\sqrt{3} \text{ cm},$$

а ъглите са

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ, \ \sphericalangle B = 30^\circ, \ \sphericalangle C = 150^\circ.$$

МАТЕМАТИЧЕСКА РАЗХОДКА ... В ДАНИЯ

Датските математически състезания са известни със забавните си и интересни задачи. Предлагаме Ви да опитате силите си с някои от тях.

Да попълним схемата. По колко различни начина може да се запишат естествени числа на мястото на $\heartsuit$, Δ, $\circledast$ и $\diamondsuit$ така, че да са изпълнени и четирите равенства в схемата?

$$\begin{array}{ccccc}
\heartsuit & - & \Delta & = & 5 \\
+ & & + & & \\
\circledast & - & \diamondsuit & = & 3 \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \\
17 & & 9 & &
\end{array}$$

Решение. Забелязваме, че е достатъчно да изберем само числата Δ и $\diamondsuit$ така, че да е изпълнено вертикалното равенство

$$\Delta + \diamondsuit = 9.$$

Наистина, ако знаем Δ и $\diamondsuit$, ще изберем $\heartsuit = \Delta + 5$ и $\circledast = \diamondsuit + 3$ и двете хоризонтални равенства в схемата ще са изпълнени. Тогава четвъртото равенство също ще е изпълнено, защото

$$\heartsuit + \circledast = \Delta + \diamondsuit + 5 + 3 = 9 + 5 + 3 = 17.$$

Събираемите в равенството $\Delta + \diamondsuit = 9$ са естествени числа и могат да се изберат по 8 начина: $1 + 8$; $2 + 7$; $3 + 6$; $4 + 5$; $5 + 4$; $6 + 3$; $7 + 2$; $8 + 1$.

Следователно схемата може да се попълни по 8 начина.

Галвоблъсканица с години. Преди три години майката на Роза била на 5 пъти повече години от Роза. Тогава се оказало, че възрастта на майката на Роза е същата, на която е била бабата на Роза, когато е родила майката на Роза.

В момента бабата на Роза е на 7 пъти повече години от Роза.

На колко години е майката на Роза в момента?

Решение. Да разгледаме ситуацията преди три години. От второто изречение в условието разбираме, че бабата на Роза е била 2 пъти по-възрастна от майката на Роза. Тъй като майката на Роза е била 5 пъти по-голяма от Роза, то Роза е била $2.5 = 10$ пъти по-малка от баба си.

Нека преди 3 години Роза е била на x години, а баба и е била на $10.x$ години.

Сега те са съответно на $x+3$ и $10.x+3$ години. Тъй като сега бабата на Роза е 7 пъти по-възрастна от нея, то $10.x + 3 = 7.x + 21$. Оттук $3.x = 18$, т.е. $x = 6$.

Това означава, че преди 3 години Роза е била на 6, а майката на Роза – на $5.6 = 30$. В момента майката на Роза е на $30 + 3 = 33$ години.

Да преброим числата. Едно трицифрено число ще наричаме *красиво*, ако цифрата на стотиците е равна на сбора на другите две цифри.

Например, 514 и 505 са красиви числа, а 415 не е красиво.

Колко са красивите трицифрени числа?

Решение. Ако цифрата на стотиците е 1, има само **две** красиви числа: 110 и 101.

Ако цифрата на стотиците е 2, красивите числа са **три**: 202, 211 и 220.

Ако цифрата на стотиците е 3, красивите числа са **четири**: 303, 321, 312 и 330.

Може да предположим, че ако цифрата на стотиците е 4, красивите числа ще са **пет** и т.н. Това наистина е така: ако цифрата на стотиците е 4, цифрата на десетиците може да е 0, 1, 2, 3 или 4, а това са точно 5 възможности. При всяка от тях получаваме цифрата на единиците като разлика на първите две цифри.

Досещате ли се *защо* се получава, че каквато и цифра на стотиците да изберем, броят на красивите числа е с 1 повече от нея? Навярно ще кажете: *Заради нулата!* и това е съвсем вярно.

Наистина, ако цифрата на стотиците е n, цифрата на десетиците може да е всяко от числата от 1 до n (това са n възможности), а също може да е 0 (още една възможност). Общо получаваме $n+1$ начина да изберем цифра на десетиците (след което дописваме подходящата цифра на единиците).

Например, ако цифрата на стотиците е 9, ще получим $9 + 1 = 10$ красиви числа.

И така, красивите числа са общо $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (2 + 10) + (3 + 9) + (4 + 8) + (5 + 7) + 6 = 4.12 + 6 = 54$.

Колко тежи фалшивата монета. Стефан има 18 монети, които тежат общо 214 грама. Сред монетите има 17 еднакви и една фалшива, която е по-лека от тях.

Стефан отделил две монети и претеглил останалите 16 монети. Оказало се, че те тежат общо 192 грама.

Колко тежи фалшивата монета?

Решение. Двете отделени монети тежат общо $214 - 192 = 22$ грама. Те или и двете са истински, или едната е истинска, а другата – фалшива.

Ако двете монети са истнски, теглото на една истинска монета е $22 : 2 = 11$ грама. Тогава фалшивата тежи $214 - 17.11 = 214 - 187 = 27$ грама.

Това обаче е невъзможно, тъй като фалшивата монета е по-лека от истинската.

Следователно едната от двете отделени монети е фалшива. Това означава, че 16 истински монети тежат 192 грама и теглото на истинската монета е $192 : 16 = 12$ грама. Фалшивата монета тежи $22 - 12 = 10$ грама.

Забележка. Ако приемем, че теглото на монетите е цяло число грамове (не е, например, 12 грама и половина), може да решим задачата и без да знаем теглото на 16-те монети. Тъй като $214 = 17.12 + 10$ и фалшивата монета е по-лека от истинската, то истинската тежи 12 грама, а фалшивата – 10 грама.

Рицари и лъжци. На един остров живеят рицари и лъжци. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. В една компания от четирима рицари и един лъжец се провел следният разговор.

A: *Всеки лъжец носи обувки номер 40.*

B: *Всеки, който носи обувки номер 40, има златна рибка.*

C: *Всеки, който има златна рибка, е лъжец.*

D: *Аз нося обувки номер 40.*

E: *Аз имам златна рибка.*

Кой от петимата е лъжецът?

Решение. Да предположим, че C е рицар и казва истината. Значи всеки, който има златна рибка, е лъжец. Тогава E не може да е рицар, но не може и да е лъжец (защото ще е казал истината).

Следователно лъжецът е C.

Забележка. Обърнете внимание, че останалите твърдения не си противоречат!

Колко са шампионите. Тридесет ученици решавали три задачи. Оказало се, че всеки е решил поне една задача, като десет ученици решили само по една една задача. Първа и втора задача решили 8 ученици, първа и трета задача решили 9 ученици, а втора и трета задача решили 11 ученици. Колко ученици са решили и трите задачи?

Решение. Ще наричаме *шампиони* тези ученици, които са решили и трите задачи.

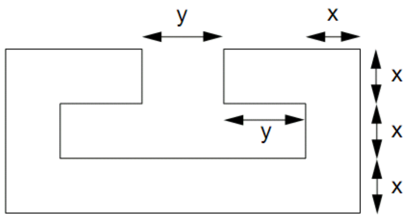
Първо може да намерим броя на учениците, които са решили поне две задачи. Те са $30 - 10 = 20$. Измежду тях има шампиони и ученици, решили точно по две задачи.

Шампионите са включени както в групата на тези осем, решили първа и втора задача, така и в групата на тези девет, решили първа и трета, а също и в групата на тези единадесет, решили втора и трета. Следователно в сбора $8 + 9 + 11 = 28$ шампионите са включени 3 пъти. В 20 те са включени веднъж. Затова разликата $28 - 20 = 8$ е два пъти броя на шампионите. Шампионите са $8 : 2 = 4$.

ЦЕЛИ ИЗРАЗИ:

ПРОВЕРЕТЕ СВОИТЕ ЗНАНИЯ!

1. Като използвате означенията на чертежа, изразете периметъра и лицето на фигурата. Получените многочлени запишете в нормален вид.



2. Определете нормалния вид на всеки от многочлените в таблицата.

	Многочлен	Нормален вид
1.	$(x+8)(x-8)-x(x-6)$	**А)** $6x-16$ **Б)** $6x+16$ **В)** $-6x-64$ **Г)** $6x-64$
2.	$(3x+2)(2x-1)-(5x-2)(x-4)$	**А)** $x^2-23x-10$ **Б)** $x^2+23x-10$ **В)** $x^2-21x+6$ **Г)** $x^2+21x+6$
3.	$(7y-2)^2-(7y-1)(7y+1)$	**А)** $-14y+5$ **Б)** $-14y+3$ **В)** $-28y+5$ **Г)** $-28y+3$
4.	$(4+x^2)(x-2)(x+2)$	**А)** x^2-16 **Б)** $16-x^2$ **В)** $16-x^4$ **Г)** x^4-16

	Многочлен	Нормален вид
5.	$(y-4)^2-(3-y)^2$	**А)** $2y-7$ **Б)** $7-2y$ **В)** $7+2y$ **Г)** $-2y-7$
6.	$(x-6)(x^2+6x+36)$	**А)** x^3+36 **Б)** x^3-36 **В)** x^3-216 **Г)** x^3+216
7.	$(a^2+2b^3)(a^4-2a^2b^3+4b^6)$	**А)** a^6-8b^9 **Б)** a^6-4b^9 **В)** a^6+8b^9 **Г)** a^6+4b^9

3. Стойността на израза $(x-4)^2+2(4+x)(4-x)+(x+4)^2$ при $x=-1,2$ е равна на:

А) 64 **Б)** 32 **В)** 48 **Г)** 72

4. Намерете $a+b$, ако равенството $(0,5x-3y^2)^2=0,25x^2+axy^2+by^4$ е тъждество.

А) 12 **Б)** 9 **В)** 6 **Г)** 0

5. За всеки многочлен в таблицата посочете разлагането му на множители.

	Многочлен	Разлагане
1.	m^2-n^2+m+n	**А)** $(m+n)(m-n+1)$ **Б)** $(m-n)(m+n+1)$ **В)** $(m-n)(m-n+1)$ **Г)** $(m+n)(m+n+1)$
2.	$7x^2-42x+63$	**А)** $7(x+3)^2$ **Б)** $7(x-9)^2$ **В)** $7(x-3)(x+3)$ **Г)** $7(x-3)^2$

	Многочлен	Разлагане
3.	$x^8 - x^6$	**А)** $x^6(x+1)^2$ **Б)** $x^6(x-1)$ **В)** $x^6(x-1)(x+1)$ **Г)** $x^6(x-1)^2$
4.	$3y^2 - 48$	**А)** $3(y-16)$ **Б)** $3(y-4)^2$ **В)** $3(y-4)(y+4)$ **Г)** $3y(y-16)$
5.	$81x^4 - 1$	**А)** $(3x-1)^2(3x+1)^2$ **Б)** $(3x-1)^4$ **В)** $(3x-1)(3x+1)(9x^2+1)$ **Г)** $(3x^2-1)(3x^2+1)(9x^2+1)$
6.	$(x^2-2)^2 - 4(x^2-2) + 4$	**А)** $(x-2)^2(x+2)^2$ **Б)** $(x^2-6)^2$ **В)** x^4 **Г)** $(x-4)^2$
7.	$x^2 - y^2 + 14y - 49$	**А)** $(x-y-7)(x+y+7)$ **Б)** $(x-y+7)(x+y-7)$ **В)** $(x-y+7)(x+y+7)$ **Г)** $(x-y-7)(x+y-7)$

6. Намерете многочлена M, за който равенството $y^3 - 64 = (y-4)M$ е тъждество.

А) $y^2 - 8y + 16$ **Б)** $y^2 + 8y + 16$

В) $y^2 - 4y + 16$ **Г)** $y^2 + 4y + 16$

7. В разлагането на многочлена $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4$ НЕ участва множител:

А) $3x - 4$ **Б)** $2x - 1$ **В)** $2x + 1$ **Г)** $3x + 4$

8. Множителят, който участва в разлагането на всеки от многочлените $x^2 - 4x - 5$ и $x^2 + 6x + 5$, е:

А) $x - 1$ **Б)** $x + 1$ **В)** $x - 5$ **Г)** $x + 5$

Отговори.

1. $P = 14x + 10y$; $S = 6x^2 + 5xy$. **2.** 1. Г; 2. Б; 3. В; 4. Г; 5. Б; 6. В; 7. В. **3.** А. **4.** В. **5.** 1. А; 2. Г; 3. В; 4. В; 5. В; 6. А; 7. Б. **6.** Г. **7.** Г. **8.** Б.

Само за седмокласници!

Случва се понякога човек да се чувства безнадеждно изгубен или отегчен до смърт в света на целите изрази. Навярно това интелектуално страдание е вдъхновило следното стихотворение (чийто автор желае да остане анонимен).

Авангард от сто задачи
срещу мен свирепо крачи.
Минус ме халосва здраво
и едва оставам права.
Ала *скобите разкрих*
и задачата сразих.

Ето другите във строй
идват срещу мен на бой.
Минуси, коварни *скоби*,
дълги разклонени *дроби*,
степени ме чакат там,
как ще се спася – не знам...

Може би ще ви е интересно да научите, че подобни страдания е споделил и младият Виктор Юго. По волята на баща си, той се подготвял за приемен изпит в Политехническия колеж. В хода на подготовката се оказало, че Виктор има математически заложби, но предпочита да чете и да пише стихове. В едно от стихотворенията му намираме красноречиво описание на емоциите, съпътствали математическата подготовка.

Тогава станах жертва на математиката.
Мрачни времена за младеж, развълнуван от поезията.
Жив ме предадоха на числата – черни палачи.
Хвърлиха ме в ужаса на алгебричните задачи.
Алгебрата ме повлече нагоре – надолу
из ужасяващите бездни на x и y...

Но житейската мъдрост казва: *и това ще мине!* Щом овладеете нужните умения да се справяте с целите изрази, ще излезете от тази *математическа пустиня* и пътешествието ви ще продължи в по-приятни и стимулиращи въображението области на математиката!

за по-малките задачи

4. клас

61. Колко числа между 1 и 1000 не съдържат в записа си цифрата 1?

62. Ани записала сто числа в редица. Първите две числа в редицата са 1 и 3, а всяко следващо е равно на сбора на предишните две. Началото на редицата е 1, 3, 4, 7, 11 ,... Коя е последната цифра на стотното число в редицата на Ани?

63. Ина записала числото 1 веднъж, числото 2 два пъти, числото 3 три пъти и т.н. и получила дълга редица:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

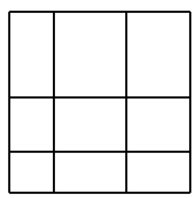
Стотното число в редицата Ина разделила на 5. Какъв остатък е получила?

64. Бени и Рени имат по 64 бонбона. Всеки ден един от двамата дава половината от своите бонбони на другия. След шест дни Бени имал 61 бонбони, а Рени 67. През колко от шестте дни Рени е давала бонбони на Бени?

5. клас

65. Входният билет в увеселителен парк струва обикновено 18 лв., но ако е дъждовен ден, се продава на половината от тази цена. Миналата седмица продадоха 800 билета за общо 8199 лв. Колко билети са продадени на половин цена?

66. Квадрат със страна 2010 е разделен на девет правоъгълника, както е показано на чертежа. Обиколките на деветте правоъгълника са девет последователни естествени числа. Намерете най-голямата от тези обиколки.



67. В голяма торба има повече от 100, но по-малко от 150 ябълки. Ако ябълките се разделят (честно) на 7 деца, остават две ябълки. Ако ябълките се разделят на 6 деца, остават три ябълки. Колко ябълки ще останат, ако разделим ябълките на 5 деца?

68. Ако добавите 36 към 37, ще получите 73, което се записва със същите цифри като 37, но в обратен ред. Колко двуцифрени числа имат това свойство: сборът им с 36 е число, записано със същите цифри, но в обратен ред?

6. клас

69. 5% от кое число е с 6% повече от 7?

70. Петър иска да запише седем числа в редица така, че сборът на всеки четири поредни числа да е 1. Най-много колко от седемте числа може да са по-големи от 13?

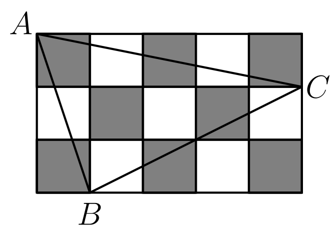
71. Сто ученици участвали в математическа олимпиада. Първа задача решили 90 участници, втора задача решили 80 участници и трета задача – 75 участници. Най-малко колко участници са решили и трите задачи?

72. Фермер има сено за храна на крава, кон и коза. То е достатъчно за храна на кравата и коня за 12 месеца, или за кравата и козата за 15 месеца, или за коня и козата за 20 месеца. За колко месеца сеното ще стигне за храна и на трите животни?

7. клас

73. Таня изиграла десет баскетболни мача през този сезон и средно отбелязала по 18 точки на мач. В шестия, седмия, осмия и деветия мач тя спечелила съответно 23, 14, 11 и 20 точки. Средният и резултат след деветия мач бил с 4 точки по-висок от средния и резултат след петия мач. Колко точки отбелязала Таня в десетия мач?

74. На чертежа правоъгълникът 3×5 е шахматно оцветен. Намерете каква част от лицето на триъгълника ABC е оцветена в черно.



75. Всяка сутрин в 8:00 часа г-н Янев тръгва с колата си за работа. Ако той (постоянно) шофира с 40 км/ч, закъснява с 3 минути за работа. Ако той кара с 60 км/ч, стига с 3 минути по-рано на работното си място. С каква скорост трябва да кара той, за да пристигне точно навреме?

за по-малките решения

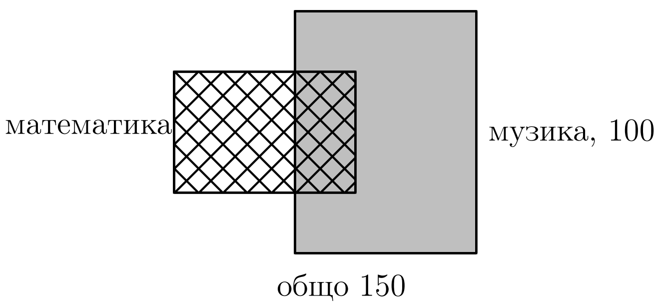
на задачите от бр. 4/2018

46. Господин Николов преподава на 15 ученици. Той оценявал тестовете им и забелязал, че преди да провери последния тест (на Ани), средната оценка на проверените тестове била 80. След като проверил теста на Ани, средната оценка станала 81. Колко точки е имала Ани на теста?

Решение. Сборът от оценките на първите 14 теста е $80.14 = 1120$, а сборът от оценките на всички тестове е $81.15 = 1215$. Следователно Ани е имала $1215 - 1120 = 95$ точки.

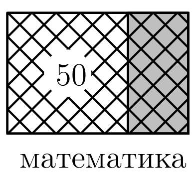
47. В училище учат 150 ученици, всеки от които обича музика или математика. Третината от тези, които обичат математика, обичат и музика, а 100 ученици обичат музика. Колко са тези, които обичат и математика, и музика?

Решение. На рисунката учениците, които обичат музика, са разположени в сивия правоъгълник, а тези, които обичат математика, са в защрихования правоъгълник.



От общо 150 ученици 100 обичат музика, значи $150 - 100 = 50$ ученици не обичат музика и обичат само математика. Те са в бялата част на защрихования правоъгълник.

Учениците, които обичат и математика, и музика, са в правоъгълника, който е едновременно сив и защрихован. Те са третината от обичащите математика, т.е. третината от защрихования правоъгълник.



Останалите 50 ученици са две третини от тези, които обичат математика. Следователнно една третина от обичащите математика са $50 : 2 = 25$ ученици. Получихме, че 25 ученици обичат и математика, и музика.

48. Десет заека за 10 минути изяждат 25 зелки. Колко зелки ще изядат 8 заека за 3 минути?

Решение. Два заека за 2 минути ще изядат $(25 : 5) : 5 = 1$ зелка. Осем заека за 2 минути ще изядат 4 зелки, значи за 1 минута ще изядат 2 зелки, а за 3 минути – 6 зелки.

49. Кики трябва да събере числата от 1 до X, но пропуснал едно число и получил сбор 159. Кое е пропуснатото число?

Решение. Тъй като $1 + 2 + \cdots + 17 = 153$ е по-малко от 159, а $1 + 2 + \cdots + 19 = 190$ е повече от $159 + 19 = 178$, то $X = 18$. Тогава пропуснатото число е

$$(1 + 2 + \cdots + 18) - 159 = (18.19) : 2 - 159 = 171 - 159 = 12.$$

50. Ани, Ния, Руми и Антон общо имат повече от 1000, но по-малко от 1500 календарчета. Ани, Ния и Руми имат съответно $\frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ от всичките календарчета. Колко календарчета има Антон?

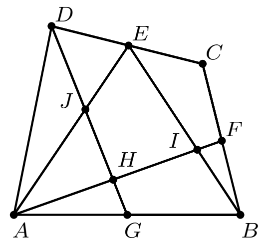
Решение. Броят на календарчетата се дели на 7, на 8 и на 9, следователно на тяхното най-малко общо кратно, което е 504. Между 1000 и 1500 има единствено число, което е кратно на 504 и това е 1008. Календарчетата са 1008 и Антон има

$$1008 - \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9}\right).1008 = 1008 - \frac{445}{504} \cdot 1008 = 1008 - 890 = 118.$$

51. Иво решавал тест. След като решил 25% от задачите и още 10 задачи, останало да реши 50% от задачите без 4 задачи. Колко са задачите в теста?

Решение. От условието следва, че $10 - 4 = 6$ задачи са $100\% - (50\% + 25\%) = 25\%$ от задачите. Следователно всички задачи в теста са 24.

52. Точките E, F и G са среди на съответните страни на четириъгълника $ABCD$ на чертежа. Ако лицето на $\triangle AHJ$ е 7, лицето на $\triangle JED$ е 6 и лицето на $GBIH$ е 19, колко е лицето на $IFCE$?



Решение. Тъй като E е среда на DC, то $S_{ACE} = \dfrac{1}{2}S_{ACD}$. Тъй като F е среда на BC, то $S_{AFC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$. Като съберем двете равенства, получаваме

$$S_{ACE} + S_{AFC} = \frac{1}{2}S_{ACD} + \frac{1}{2}S_{ABC}, \text{ т.е. } S_{AFCE} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Тъй като E е среда на DC, то $S_{BDE} = \dfrac{1}{2}S_{BDC}$. Тъй като G е среда на AB, то $S_{BDG} = \dfrac{1}{2}S_{ABD}$. Като съберем двете равенства, получаваме

$$S_{BDE} + S_{BDG} = \frac{1}{2}S_{BDC} + \frac{1}{2}S_{ABD}, \text{ т.е. } S_{GBED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Получихме, че $S_{AFCE} = S_{GBED}$, т.е. $7+S_{HIEJ}+S_{IFCE} = 6+S_{HIEJ}+19$, следователно $7 + S_{IFCE} = 6 + 19$, откъдето намираме $S_{IFCE} = 18$.

53. Да се намери най-малкото естествено число n, такова че сборът на остатъците при делението на това число с числата 5, 6, 7, 8 и 9 е равен на 30.

Решение. Понеже най-големият възможен сбор на остатъците при деление на едно число с 5, 6, 7, 8 и 9 е $5+6+7+8 = 30$, то търсеното число дава точно тези остатъци при деление със съответните числа. Следователно $n - 1$ се дели на $\text{НОК}(5, 6, 7, 8, 9) = 2520$. Най-малкото такова число е 2519.

54. Намислих число, прибавих към него 24, сбора намалих три пъти и получих намисленото число. Кое е то?

Решение. Ако намисленото число е x, имаме $\dfrac{x + 24}{3} = x$, откъдето намираме $x = 12$.

55. Ако $a = \dfrac{3^{10} + 4.3^9}{3^{10} - 2.3^9}$, да се пресметне стойността на израза

$$\frac{a^3.(-a^2)^5}{(-a)^2.(a^3)^3}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a^3.(-a^2)^5}{(-a)^2.(a^3)^3} = -\frac{a^3.a^{10}}{a^2.a^9} = -a^2.$$

При

$$a = \frac{3^{10} + 4.3^9}{3^{10} - 2.3^9} = \frac{3^9(3+4)}{3^9(3-2)} = 7$$

получаваме $-7^2 = -49$.

56. Николай имал 5 лв. Той дал на Олег 40% от парите си, след което Олег дал на Николай 40% от парите си. Ако накрая двамата имали поравно пари, колко лева е имал Олег в началото?

Решение. Нека Олег е имал x лв. Той е получил $0,4.5 = 2$ лв. от Николай и от своите $x + 2$ лв. е дал 40% на Николай. Това означава, че на Олег са останали 60% от $x+2$ лв и те са колкото останалите на Николай $(5-2) + 0,4(x+2)$ лв. Получаваме уравнението

$$0,6(x+2) = 3 + 0,4(x+2) \iff 0,2x = 2,6 \iff x = 13.$$

57. Прав кръгов конус с радиус $r = 4$ m и височина $h = 3$ m има лице на околната повърхнина, равно на 20π m^2. Намерете образуващата и обема на конуса.

Решение. Лицето на околната повърхнина е $\pi.4l = 20\pi$, откъдето $l = 5$ m. Обемът е $V = \dfrac{1}{3}\pi.4^2.3 = 16\pi$ m^3.

58. Да се намери общият корен на уравненията

$$|x + 21| = 14 \quad \text{и} \quad (x+4)^2 = 9.$$

Решение. Корените на $|x+21| = 14$ са решенията на уравненията $x + 21 = 14$ и $x + 21 = -14$ и са -7 и -35.

Корените на

$$(x+4)^2 = 9 \iff (x+4)^2 - 3^2 = 0 \iff (x+7)(x+1) = 0$$

са решенията на уравненията $x + 7 = 0$ и $x + 1 = 0$ и са -7 и -1.

Общият корен на дадените уравнения е -7.

59. В 10 часа от град А към В тръгнал автобус със скорост 75 km/h, а в 10 h 20 min по същия път от В към А отпътувал камион със скорост 90 km/h. Автобусът и камионът се срещнали, като до момента на срещата камионът изминал 20 km повече от автобуса. Да се намери в колко часа са се срещанали и колко километра е разстоянието от А до В.

Решение. Ако автобусът е пътувал x часа до срещата, камионът е пътувал $x - \frac{1}{3}$ часа. Получаваме

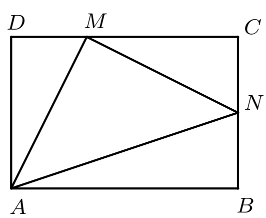
$$75x + 20 = 90\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

откъдето намираме $x = 3\frac{1}{3}$. Автобусът е пътувал 3 часа и 20 минути и е изминал 250 km. Срещата е станала в 13 часа и 20 минути, а разстоянието между А и В е $2.250 + 20 = 520$ km.

60. На страната CD на правоъгълника $ABCD$ е отбелязана точка M така, че $DM = 1$ cm, $CM = 2$ cm. На страната BC е отбелязана точка N така, че триъгълниците AMD и MNC са еднакви. Да се намерят ъглите на триъгълника AMN.

Решение. Еднаквите триъгълници AMD и MNC са правоъгълни и от равенството на хипотенузите им получаваме $AM = MN$. Следователно триъгълникът ANM е равнобедрен.

Катетът $DM = 1$ от първия триъгълник не е съответен на катета $CM = 2$ от втория, следователно равенствата на съответните елементи на еднаквите триъгълници са $DM = CN$, $AD = CM$, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CMN = \alpha$ и изразяваме $\sphericalangle AMD = \sphericalangle CNM = 90^\circ - \alpha$.



Оттук $\sphericalangle AMN = 180^\circ - (\sphericalangle AMD + \sphericalangle CMN) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha) = 90^\circ$. Следователно равнобедреният триъгълник ANM е правоъгълен; ъглите му са $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Математика“

Подготвя специалисти с фундаментални знания в класическите и съвременни математически направления. Завършилите успешно специалността могат да се реа-лизират като преподаватели и научни работници във висшите училища и научни институти. Същевременно тяхната солидна математическа подготовка им дава възможност за специализация в икономиката, банковото и застрахователно дело, физиката, биологията, философията и др.

Бакалавърска програма „Информатика“

Подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и ком-пании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531   email: pmf@swu.bg   факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 03.10.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.