

Мате мати ка

БРОЙ
2011 г.
ГОДИНА
L

1

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
С ПРОТОКОЛ 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — ПЪРВА СТЕПЕН

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Доц. Руси Русев – главен редактор

Акад. Стефан Додунеков

Чл. кор. дмн Генчо Скордев

Ст.н.с. II ст. д-р Емил Колев

Доц. д-р Иван Тонов

Доц. д-р Марин Маринов

Александър Иванов

Снежана Чочева

Пенка Кирилова — коректор

Ст.н.с. II ст. дмн Петър Бойваленов — изпълнителен директор

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия
на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД

ISSN 0204-6881

Н О В И Н И

✓ ОТ 14 ДО 20 ЯНУАРИ в гр. Алмати (Казахстан) се проведе 6-тата Жаутиковска олимпиада по математика, информатика и физика. България се представи с два отбора (СМГ и МГ Варна). В състезанието по математика златен медал спечели Виктор Вълов (СМГ), със сребърни медали са Виктория Христова (МГ Варна), Радослав Кафов (СМГ) и Даниел Добрев (СМГ), а Виктор Радивчев (МГ Варна) остана с бронзов медал.

Резултатите на всички участници могат да бъдат намерени на сайта на олимпиадата — <http://izho.kz/>.

✓ РЕЗУЛТАТИ, имената на победителите и задачите от Есенния турнир по математика, който се проведе на 28.11.2010 г., можете да намерите в статия в този брой.

✓ ЗИМНИТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ бяха отложени поради грипната ваканция. До редакционното приключване на броя нови дати не са обявени.

✓ ЗИМНАТА СЕСИЯ на Ученическия Институт по Математика и Информатика се проведе от 14 до 16 януари 2011 г. в Пловдив. Повече информация можете да намерите на сайта на УчИМИ — <http://www.math.bas.bg/hssi/>.

✓ КОНКУРСИТЕ НА СПИСАНИЕ МАТЕМАТИКА за 4-7 и 8-12 клас ще бъдат подкрепени съответно от Американска Фондация за България и фирма „Мехатроника“ (Габрово), като това ще се отрази сериозно на наградния фонд. Повече информация можете да намерите на стр. 46 и стр. 49.

за кандидат ? студенти

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1: СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПРОФ. КЕРОПЕ ЧАКЪРЯН

Задача 1. Да се реши уравнението $\cos^2 x + 2 \sin x = 1$.

Задача 2. Да се реши неравенството $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 < 0$.

Задача 3. Да се пресметне лицето на правоъгълник с периметър $P = 14$, вписан в окръжност с радиус $R = 2,5$.

Задача 4. Даден е триъгълникът ABC със страни $AB = 16$, $BC = 10$ и $AC = 8$. Точката D лежи на страната AB и лицата на триъгълниците ACD и BCD се отнасят както $1 : 3$. Да се намерят дължините на отсечките AD , BD и CD .

Задача 5. Да се намери най-малката стойност на функцията

$$f(x) = x^2 + 2|x + 2|.$$

Задача 6. Да се реши неравенството $\sqrt{2^x - 2} \leq 4 - 2^x$.

Задача 7. Нека точката O е началото на правоъгълна координатна система в равнината. Да се намери възможно най-малкото разстояние от O до точка, лежаща върху графиката на функцията $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Задача 8. Да се пресметне обемът на триъгълна пирамида $ABCD$ с ръбове $AB = 16$, $CD = 18$ и $AC = BC = AD = BD = 17$.

Задача 9. В триъгълника ABC ($AC < BC$) с периметър $P = 45$ точките M и O са съответно медицентър и център на вписаната окръжност. Отсечката MO има дължина 1 и е успоредна на страната AB . Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Задача 10. Да се намерят всички двойки реални числа a и b , такива че равенството $\sin(ax + b) = a \sin x + b$ е изпълнено за всяко x .

ТЕМА 2: ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ДОЦ. Д-Р М. МАРИНОВ

Първа част

1. Ако $a = 8^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{2}{3}}$, то числото a е равно на:
А) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{15}{4}$ В) $\frac{4}{15}$ Г) $\frac{3}{4}$ Д) $\frac{4}{3}$
2. Ако $b = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и $c = \left(\sin \frac{\pi}{12}\right)^{1-\sqrt{1}}$, то изразът $\frac{\sqrt[3]{64b^3}}{\sqrt[3]{(c+5)^6}}$ е равен на:
А) 1 Б) $\frac{4}{25}$ В) 12 Г) $\frac{1}{36}$ Д) $\frac{\pi}{3}$
3. Сборът от корените на уравнението $x^2 - 21x + 80 = 0$ е равен на:
А) 70 Б) 80 В) 21 Г) 101 Д) 59
4. Ако $3^{a-5} = 9^{-2a}$, то числото a е равно на:
А) 4 Б) 1,5 В) 8 Г) 1 Д) 5
5. Сборът от модата и средното аритметично на извадката 5, 7, 1, 5, 10, 2 е:
А) 11 Б) 10 В) 8 Г) 7 Д) 5
6. Ако за аритметична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_2 + a_4 = 64$ и $a_5 - a_1 = 24$, то първият член на прогресията е равен на:
А) 10 Б) 14 В) 16 Г) 18 Д) 20
7. Ако за геометрична прогресия с общ член a_n е известно, че $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$, то частното на прогресията е равно на:
А) 4 Б) 3 В) $\frac{1}{3}$ Г) 2 Д) $\frac{1}{2}$
8. От 12 различни химикалки се образуват комплекти от по 6 химикалки. Броят на всички възможни такива комплекти е равен на:
А) 720 Б) 924 В) 495 Г) 220 Д) 120
9. НЕ е вероятност на случайно събитие числото:
А) $\sin \frac{3\pi}{8}$ Б) $\cos \frac{5\pi}{8}$ В) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ Г) $\lg 3$ Д) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

10. Ако $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \alpha$ е равно на:

- А) 2 Б) $\sqrt{2}$ В) $2\sqrt{2}$ Г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Д) 3

11. Ако $a = \frac{\cos 48^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 18^\circ}$, то a е равно на:

- А) -1 Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Д) 2

12. Ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията $y = \sqrt{2x+1}$ в точката от нея с абсциса $x = 1$ е равен на:

- А) $2\sqrt{3}$ Б) $\frac{11}{\sqrt{3}}$ В) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ Г) $\sqrt{3}$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. Най-малката стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ в затворения интервал $[0, 5; 3]$ е равна на:

- А) 10 Б) 11 В) 8,76 Г) 8,75 Д) 0,5

14. Ако $a = \sqrt[6]{32}$, $b = \sqrt[3]{2}$, то числото $\log_a b$ е равно на:

- А) 0 Б) $\frac{2}{5}$ В) $\frac{5}{2}$ Г) 2 Д) $\frac{3}{2}$

15. Точката P е център на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ и $\sphericalangle ACB = 36^\circ$. Големината на $\sphericalangle APB$ в градуси е:

- А) 96 Б) 108 В) 136 Г) 140 Д) 145

16. Даден е успоредникът $ABCD$ с диагонал $AC = 32$ см. Разстоянието от точката B до този диагонал е 4 см. Лицето на успоредника е:

- А) 64 cm^2 Б) 128 cm^2 В) 36 cm^2 Г) 72 cm^2 Д) 96 cm^2

17. Дадени са $\triangle ABC$ с дължини на страните $AB = 7$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см и $\triangle DEF$, за който $DF = 8$ см, $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$. Дължината на отсечката DE е:

- А) 2 см Б) $3\frac{2}{3}$ см В) 4 см Г) 5 см Д) $4\frac{2}{3}$ см

18. Катетите на правоъгълен триъгълник са 12 см и 16 см. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

- А) 4 см Б) 5 см В) 6 см Г) 7 см Д) 8 см

19. Дадена е правилна четириъгълна пирамида, в която всички ръбове са равни. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е равно на $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Дължината на основния ръб на пирамидата е:

- А) 1 cm Б) 2 cm В) 3 cm Г) 4 cm Д) $3\sqrt{2} \text{ cm}$

20. Даден е кубът $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ръб $AB = 6 \text{ cm}$. Разстоянието между кръстосаните прави AD и BD_1 е равно на:

- А) $\sqrt{2} \text{ cm}$ Б) $2\sqrt{2} \text{ cm}$ В) $3\sqrt{2} \text{ cm}$ Г) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ Д) $2\sqrt{3} \text{ cm}$

Втора част

21. Да се реши уравнението $5\sqrt{x} = 3x - 12$.

22. Да се намери дефиниционната област на функцията $f(x) = \sqrt{2 - \log_4 x}$.

23. Да се намери най-големият корен на уравнението

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = 0.$$

24. Да се реши неравенството $\frac{2x - x^2}{x^2 - 4} \geq 0$.

25. Да се намери множеството от стойности на функцията

$$f(x) = 2\sin^2 x - \sin x.$$

26. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ в затворения интервал $[-3; -1]$.

27. Даден е равнобедрен триъгълник с основа 10 cm и бедро 13 cm. Да се намери разстоянието между ортоцентъра на триъгълника и центъра на вписаната в него окръжност.

28. Цената на телевизор е увеличена с 25%. С колко процента трябва да се намали новата цена, за да се получи първоначалната цена на телевизора?

29. В кутия има 12 различни молива с еднаква форма. От тях 3 са с твърдост Н, 4 са с твърдост НВ, а останалите са с твърдост В. По случаен начин от кутията се изважда един молив. Да се намери вероятността този молив да НЕ е с твърдост Н.

30. Лицето на основата на прав кръгов цилиндър е S , а лицето на основото сечение на цилиндъра е Q . Да се намери обемът на цилиндъра.

**ТЕМА 3: УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ — СОФИЯ**

доц. Вл. Тодоров, гл. ас. П. Стоев

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = 4^x + 2(2a + 1)2^x + 4a^2 - 3,$$

където a е реален параметър.

- а) Да се реши неравенството $f(x) > 0$ при $a = 0$.
- б) Да се намери, ако съществува, най-малката стойност на $f(x)$ в зависимост от a .
- в) Да се намерят стойностите на a , при които неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x .

Задача 2. В окръжност с радиус 1 е вписан трапец с периметър 4 и бедро x .

- а) Да се докаже, че диагоналят на трапеца е

$$d = \sqrt{h^2 + (2 - x)^2},$$

където h е височината на трапеца.

- б) Да се докаже, че лицето на трапеца е

$$S = \frac{x(2 - x)^2}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

- в) За коя стойност на x лицето S е най-голямо?

Задача 3. В правилната четириъгълна пирамида $ABCDM$ частното на височината MO и основния ръб е $\sqrt{2}$.

- а) Да се докаже, че центърът на вписаната сфера дели MO в отношение $3 : 1$, считано от M .
- б) През точката A , успоредно на BD , е прекарана равнина ρ , допираща се до вписаната в пирамидата сфера. Да се докаже, че косинусът на ъгъла между ρ и равнината на основата е $\frac{3}{5}$.
- в) Ако основният ръб на пирамидата е 1, да се намери разстоянието между правата MO и пресечницата на равнините ρ и (ABM) .

ТЕМА 4: ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„П. ХИЛЕНДАРСКИ“

ДОЦ. П. РАНГЕЛОВА

Първа част

Зачертайте с $\times$ буквата на единствения верен отговор на задачите от 1 до 12. За всеки верен отговор се получава 1 точка, в останалите случаи – 0 точки.

1. Ако $9a + 7 = 37$, то изразът $36a - 80$ е равен на:

- А) 30 Б) 44 В) 40 Г) 38

2. След опростяване на изказа $\frac{x^{-5}\sqrt[7]{x}}{x^{-2} \cdot x^{-2\frac{6}{7}}}$ ($x \neq 0$), се получава:

- А) x Б) x^2 В) $\frac{1}{x}$ Г) 1

3. Всички цели стойности на параметъра a , за които уравнението

$$(a - 15)x^2 - 2(a - 15)x + 3 = 0$$

няма реални корени са:

- А) 16 и 17 Б) 15, 16 и 17
В) 16, 17 и 18 Г) 15, 16, 17 и 18

4. Дефиниционната област на функцията $y = \log_3 |x^2 - 5x + 6|$ е:

- А) $x \in (-\infty, \infty)$
Б) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
В) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$
Г) $x \in (2, 3)$

5. Периметърът на правоъгълник с дължина a и ширина b е 30 cm, а дължините на страните му се отнасят както 1 : 5. Коя от системите **НЕ** съответства на условието на задачата?

- А) $\begin{cases} a + b = 15 \\ b : a = 1 : 5 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2a + 2b = 30 \\ b : a = 1 : 5 \end{cases}$
В) $\begin{cases} 2(a + b) = 30 \\ 5b = a \end{cases}$ Г) $\begin{cases} a - b = 15 \\ 5a = b \end{cases}$

6. За трапеца $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O и на продълженията на бедрата P е известно, че $DO : OB = 2 : 5$. Отношението $AD : DP$ е равно на:

- А) 3 : 2 Б) 2 : 3 В) 5 : 2 Г) 5 : 3

7. Функцията $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **НЕ** е дефинирана при x равно на:

- А) 3 Б) -3 В) -2 Г) 4

8. Границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(2+x)}{1-2x+x^2}$ е равна на:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) -1

9. Дадена е аритметичната прогресия $\{a_n\}$. Ако S_n е сумата от първите n члена и $a_3 = 3a_2$, $S_n = 40a_3$, то n е равно на:

- А) 10 Б) 40 В) 12 Г) 14

10. Хипотенузата на правоъгълен триъгълник е 10, а дължините на катетите се отнасят както 3 : 4. Лицето на триъгълника е:

- А) 24 Б) 48 В) 12 Г) 26

11. Средната основа на трапец е 10 и дели лицето на трапеца в отношение 3 : 5. Дължините на основите са:

- А) 12 и 8 Б) 11 и 9 В) 15 и 5 Г) 14 и 6

12. Триъгълната пирамида $ABCD$ има за основа равностранния триъгълник ABC със страна 3. Околният ръб $AD = 4$ е перпендикулярен на основата. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е:

- А) $\frac{3}{4}(8 + \sqrt{91})$ Б) $\frac{3}{4}(16 + \sqrt{91})$ В) $\frac{1}{4}(4 + \sqrt{91})$ Г) $\frac{39}{4}$

Част втора

Попълнете в съответните празни рамки отговорите на задачите. За всеки верен отговор се получават 2 точки, за неверен — 0 точки.

13. Най-малката цяла стойност на параметъра k , за която неравенството

$$(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 1 > 0$$

е в сила за всяко x , е:

14. Решенията на неравенството $\frac{1}{5x-1} > \frac{1}{1-5^{x-1}}$ са:

15. Решенията на уравнението $\cos^2 2x - 5 \sin^2 x + 1 = 0$ са:

16. Катетът AC на правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) служи за диаметър на окръжност, която пресича хипотенузата AB в точката D . Ако $AC = b$ и $\sphericalangle ABC = \beta$, то лицето на триъгълника CDB е:

17. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Диагоналът AC разполовява $\sphericalangle BAD$ и пресича диагонала BD в точката O , като $AC \perp BD$. Ако $DC = 4$ и $AO = 6$, то дължината на AC е:

Част трета

Разпишете подробно и обосновайте решенията на задачите. Максималният брой точки за всяка задача е 6.

18. Да се реши уравнението $\log_2 \left(\frac{1}{|x-1| - 1} \right) = 1$.

19. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които локалният минимум на функцията $g(x) = x^2 - 6ax + a$ е по-малък от локалния минимум на функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

20. Средната основа на трапеца $ABCD$ ($AB > CD$, $AB \parallel CD$) и височината му имат равни дължини. Центърът O на описаната около трапеца окръжност разделя височината му в отношение $3 : 4$, считано от голямата основа и радиусът ѝ е $R = 10$. Да се намерят основите на трапеца.

ТЕМА 5: ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ — СОФИЯ

ДОЦ. Р.РУСЕВ

Първа част

Всяка от следващите 20 задачи има точно един верен отговор. Всеки верен отговор се оценява с 2 точки. За грешен или посочени повече от един отговор на една задача, точки не се дават и не се отнемат.

1. Ако за числата x_1 и x_2 е изпълнено $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1 x_2 = -5$, то x_1 и x_2 са корени на уравнението:

А) $x^2 - 2x - 5 = 0$ Б) $x^2 - 2x + 5 = 0$ В) $x^2 + 2x - 5 = 0$

Г) $x^2 + 2x = 0$ Д) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

2. Кое от неравенствата има за решение интервалът $[-2, 3]$:

А) $(x-2)(x-3) \leq 0$ Б) $(x+2)(x-3) \leq 0$ В) $(x-2)(x-3) < 0$

Г) $(x+2)(x+3) \geq 0$ Д) $(x+2)(x+3) > 0$

3. Решенията на уравнението $(x^2 + 3x + 2)\sqrt{x+2} = 0$ са:

А) -2 Б) -1 В) -1 и -2 Г) -1 и -3 Д) 1 и -1

4. Ако $a = \log_3 5$, стойността на израза $-3^a - \log_3 125$ е:

- А) $3 + 5a$ Б) $3 - 5a$ В) $5 + 3a$ Г) $5 - 3a$ Д) $-5 - 3a$

5. Ако $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, изразът $\frac{\operatorname{tg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha}{2(\cotg^4 \alpha - \cotg^2 \alpha)}$ е равен на:

- А) -16 Б) 16 В) 4 Г) -8 Д) 8

6. Коренът на уравнението $3 \log_3 x - 2 \log_9 x = 4$ е числото:

- А) 9 Б) 25 В) 27 Г) 81 Д) 36

7. За аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е дадено, че $a_5 + a_{18} = 20$. Сумата на първите 22 члена на прогресията е:

- А) 220 Б) 300 В) 420 Г) 280 Д) 210

8. Стойността на параметъра a , за която неравенството

$$5(a - 3)x + \frac{3}{4} \geq 5x + 2$$

няма решение, е:

- А) 2 Б) 0 В) 4 Г) 1 Д) $\frac{1}{2}$

9. Стойността на $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi \sin x}{x - \pi}$ е:

- А) π Б) -1 В) 1 Г) $-\pi$ Д) $\pi - 1$

10. Най-малкото цяло число, решение на неравенството $2^{x-2} > 16^{-\frac{1}{x}}$, е:

- А) 3 Б) 0 В) 4 Г) 1 Д) 2

11. Решенията на системата $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases}$ са двойките числа:

- А) $(2, 1)$ и $(-2, -1)$ Б) $(4, 1)$ и $(-2, 5)$ В) $(-4, 2)$ и $(2, -4)$
Г) $(-4, 5)$ и $(-2, -3)$ Д) $(6, 1)$ и $(1, 7)$

12. Неравенството $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > -3$ е изпълнено за стойности на x от интервала:

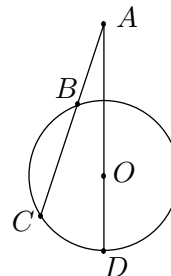
- А) $x \in (-\infty, 0)$ Б) $x \in (0, \infty)$ В) $x \in (0, 2)$
Г) $x \in (-3, 0)$ Д) $x \in (-\infty, \infty)$

13. Най-голямата стойност на функцията $y = x^4 - 8x^2 - 5$ в интервала $[-1, 2]$ е равна на:

- А) 7 Б) 8 В) -8 Г) -5 Д) -12

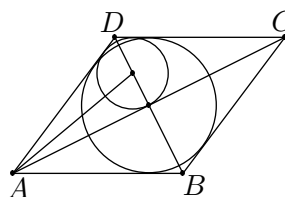
14. От точката A , външна за окръжност с център O , са прекарани секущите AC и AD ($O \in AD$), където $AB = 2$ (B е пресечната точка на AC с окръжността), $BC = 3,5$ и $AD = 11$. Радиусът OD на окръжността е:

- А) 4,5 Б) 5,5 В) 6
Г) 5 Д) 4



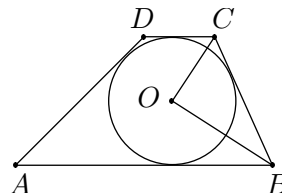
15. Даден е ромбът $ABCD$ с остър $\angle BAD = \alpha$. В ромба $ABCD$ и в триъгълника ACD са вписани окръжности. Отношението на радиусите на голямата и малката окръжност е равно на:

- А) $3\sin^2 \frac{\alpha}{4}$ Б) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$
В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Г) $\sqrt{2}$ Д) $2\cos^2 \frac{\alpha}{4}$



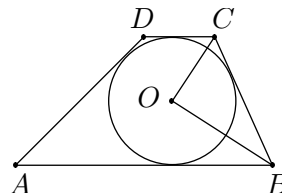
16. В триъгълната пирамида $VABC$, с основа ABC , точката M е средата на BC , а точката K е средата на околния ръб BV . Отношението на обема на пирамидата $VABC$ към обема на пирамидата $KABM$ е равно на:

- А) 4 Б) 1 В) 2
Г) 3 Д) 5



17. В трапеца $ABCD$ е вписана окръжност с център O . Ако $OC = 9$ и $OB = 12$, то височината на трапеца е:

- А) 5 Б) $\frac{72}{5}$ В) $\frac{23}{5}$ Г) 6 Д) $\frac{12}{5}$



18. За геометричната прогресия $\{b_n\}$ е дадено, че $q = 2$ и $S_4 = 75$. Третият член на прогресията е равен на:

- А) 12 Б) 20 В) 16 Г) 18 Д) 24

19. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC = BC$) с бедро $AC = 4\sqrt{5}$ cm и медиана $AD = 5$ cm ($D \in BC$). Дължината на основата AB в сантиметри е:

- А) $\sqrt{5}$ Б) $2\sqrt{2}$ В) 10 Г) $\sqrt{10}$ Д) $2\sqrt{5}$

20. Обемът на цилиндър е 16π . Ако околната му повърхнина е 8π , височината на цилиндъра е:

- А) 5 Б) 4 В) 3 Г) 2 Д) 1

Втора част

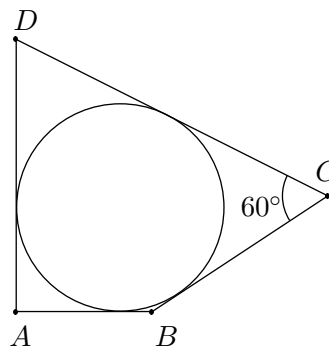
Следващите 5 задачи са без избираем отговор. Всеки верен отговор се оценява с по 3 точки. За грешен отговор, както и за посочени повече от един отговор, точки не се дават и не се отнемат.

21. Да се реши уравнението $(x^2 - 6x + 9)^2 + 2(x - 3)^2 - 3 = 0$.

22. Да се реши уравнението $\sqrt{3 \cdot 2^x - 23} = 9 - 2^x$.

23. Да се реши уравнението $1 - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0$.

24. Около окръжност е описан четириъгълникът $ABCD$. Да се намерят страните BC и CD , ако е дадено, че $AB = 5$, $AD = 12$, $\angle BAD = 90^\circ$ и $\angle BCD = 60^\circ$.



25. Основата на пирамида е ромб със страна 6. Две от околните стени на пирамидата са перпендикулярни към равнината на основата и сключват помежду си ъгъл 120° . Една от другите две околни стени образува с равнината на основата ъгъл 60° . Да се намери обемът на пирамидата.

Трета част

Представете решенията на следващите три задачи с необходимите обосновки в писмен вид. Пълното решение на всяка задача се оценява с 15 точки.

26. Да се реши неравенството $|x^2 - 8x + 15| \leq 15 - x^2$.

27. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) са прекарани ъглополовящите AE ($E \in BC$), BL ($L \in AC$) и CD ($D \in AB$). Точките L , E , D и C лежат на една окръжност. Ако $AC = BC = 6$, да се намери дължината на страната AB .

28. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб 1 и околна повърхнина $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Да се намери ъгълът между две околни стени на пирамидата.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО МАСОВ ЦЕНТЪР В ГЕОМЕТРИЯТА

АНГЕЛ ГУШЕВ, ВЕСЕЛИН ГУШЕВ¹

Статията запознава с някои понятия и твърдения от механиката, свързани пряко с геометрията на триъгълника, а именно понятието *масов център на система от материални точки* (вж. напр. [3], стр. 104–109). Тук ние ще дадем някои приложения на масовия център на система от материални точки, като с негова помощ ще намерим сравнително лесно барицентричните координати на някои забележителни точки в триъгълника.

1. МАСОВ ЦЕНТЪР НА СИСТЕМА ОТ МАТЕРИАЛНИ ТОЧКИ

В механиката под *материална точка* $[A, m]$ се разбира геометрична точка A , в която е съсредоточена маса от m единици. Равенството $[A, m_1] = [B, m_2]$ означава сливане на геометричните точки A и B и равенство на масите m_1 и m_2 . Съвкупност от материални точки се нарича *система от материални точки*. *Масов център* на системата от материални точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$ е точката C от отсечката AB такава, че $\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$, т.е. точката C дели отсечката AB в отношение, обратно пропорционално на масите на точките.

Ако вместо масите m_1 и m_2 на материалните точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$ разглеждаме техните тегла P_1 и P_2 , то по същия начин може да се дефинира понятието *център на тежестта* на две материални точки като точка C^* от отсечката AB , за която $\frac{AC^*}{C^*B} = \frac{P_2}{P_1}$. Сега от факта, че $P_1 = m_1 g$ и $P_2 = m_2 g$, където g е земното ускорение, имаме $\frac{AC^*}{C^*B} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}$, т.е. масовият център C и центърът на тежестта C^* съвпадат, тъй като делят отсечката AB в едно и също отношение.

Така видяхме, че понятията масов център и център на тежестта на система от две материални точки съвпадат, като при това тази точка $C \equiv C^*$ има определен механичен смисъл. Ако вземем нееластичен прът, масата на който пренебрегваме, и в краищата му съсредоточим масите m_1 и m_2 , то масовият център на двете материални точки е онази точка от пръта, в която, ако го подпрем, системата ще остане в безразлично равновесие (правилото на лоста).

¹Работата на автора е частично подпомогната от фонд НИ на СУ.

Досега разглеждахме масите на материалните точки като положителни числа, а материалната точка – като комплексен математически обект, състоящ се от геометрична точка и положително число. При решаване на редица задачи обаче се оказва полезно разглеждането на материална точка като комплексен математически обект, състоящ се от геометрична точка и „маса“ – произволно реално число. Изтласкването на потопен в течност предмет ни навежда на мисълта за тълкуване на материалната точка с отрицателна „маса“ като предмет, изплуващ на повърхността, при $m = 0$ – като предмет с относително тегло, равно на това на течността, и при $m > 0$ – като потъващ предмет. По аналогия с вече дадените определения се въвеждат и понятията масов център и център на тежестта за две материални точки A и B съответно с маси реалните числа m_1 и m_2 – като точка C , лежаща на ос с положително направление от първата към втората точка, която удовлетворява условието $m_1 \overline{AC} = m_2 \overline{CB}$.

г Така центърът на тежестта (масовият център) на двете материални точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$ ($m_1 \in \mathbb{R}$ и $m_2 \in \mathbb{R}$) ще бъде точка C , лежаща между двете точки A и B , когато масите им са с еднакъв знак, и извън отсечката AB , когато масите им са с различни знаци. Ако една от двете точки се явява ненатоварена, а другата материална точка има маса, отлична от нула, то техният център на тежестта ще съвпадне с геометричното място на натоварената материална точка.

Полезно за нашите разглеждания е и понятието обединение – *равнодействаща* на две материални точки. Това е материална точка, получена от съсредоточаването в центъра на тежестта им на маса, равна на сумата от масите на две други материални точки.

Така, когато двете материални точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$ заменим с точка $[C, m_1 + m_2]$, която има маса, равна на сумата от масите им, и положение, съвпадащо с положението на масовия им център, казваме, че *редуцираме* двете материални точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$ в точка $[C, m_1 + m_2]$. Тя се нарича *еквивалентна* на двете материални точки $[C, m_1 + m_2] = [A, m_1] + [B, m_2]$.

Нека сега имаме система от n материални точки $[A_1, m_1], [A_2, m_2], \dots, [A_n, m_n]$. Редуцираме точките $[A_1, m_1]$ и $[A_2, m_2]$ в една точка $[B_1, m_1 + m_2]$. Получената материална точка $[B_1, m_1 + m_2]$ и материалната точка $[A_3, m_3]$ редуцираме в материалната точка $[B_2, m_1 + m_2 + m_3]$ и т.н., докато изчерпим всичките материални точки. Така в резултат на тази процедура системата от материални точки се редуцира до една материална точка с маса, равна на сумата от всички маси на точките от системата, наречена *еквивалентна* на тази система. Геометричната точка, определяща положението на материалната точка $\left[B_{n-1}, \sum_{k=1}^n m_k\right]$, еквиалентна на системата от точки

$\left\{[A_k, m_k]\right\}_{k=1}^n$, наричаме *масов център на тази система*.

При редуцирането на система от материални точки в материална точка, еквивалентна на системата и определена от масовия им център и маса – сумата от масите на точките от системата, не е съществен редът, по който се редуцират отделните материални точки. Това, че масовият център на системата е една и съща геометрична точка при всевъзможни групировки при редуцирането, е съществено негово свойство, което може да бъде доказано например по метода на пълната математическа индукция по отношение на броя на материалните точки от системата.

2. БАРИЦЕНТРИЧНИ КООРДИНАТИ

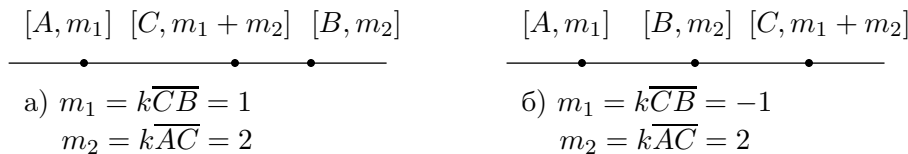
От теорията е известно, че за всяка точка X от правата AB съществуват такива реални числа α и β , че $\overrightarrow{OX} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ и $\alpha + \beta = 1$, а за всяка точка Y от равнината на $\triangle ABC$ съществуват такива реални числа λ , μ и ν , наречени барицентрични координати на точката Y , че $\overrightarrow{OY} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$, където O е произволна точка.

За да получим по-лесен начин за извеждане на тези векторни представяния на точките, лежащи върху една права или в една равнина, ще използваме механичния смисъл на понятието масов център (център на тежестта) на система от материални точки.

2.1. Векторно представяне на точките от правата

Нека на правата през точките A и B гледаме като на безкраен нееластичен прът, масата на който пренебрегваме.

Тогава за всяка точка C , лежаща на оста с положително направление от A към B , могат да се подберат подходящи маси m_1 и m_2 (напр. $m_1 = k \overrightarrow{CB}$ и $m_2 = k \overrightarrow{AC}$, където $k \neq 0$), които да съсредоточим съответно в точките A и B (ако някоя от масите е с отрицателен знак, ще считаме че силата на тежестта за тази точка действа обратно, т.е. точката не се привлича, а се отблъсква от земята) така, че ако подпрем този прът в точката C , системата да остане в безразлично равновесие, т.е. точката C да бъде масовият център на материалните точки $[A, m_1]$ и $[B, m_2]$.



Фиг. 1. Масов център на две точки

Така последователно имаме $m_1 \overline{AC} = m_2 \overline{CB}$, $m_1 \overrightarrow{AC} = m_2 \overrightarrow{CB}$,

$$m_1 (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m_2 (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \quad \text{или} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2},$$

където O е произволна точка. Сега ако $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ и $\alpha + \beta = 1$, получаваме $\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ и $\beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Например средата C_0 на отсечката AB може да се разглежда като масов център на материалните точки $[A, m]$ и $[B, m]$, където m е произволна ненулева маса, тогава $\overrightarrow{OC_0} = \frac{m \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{OB}}{m + m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

2.2. Векторно представяне на точките от равнината

Нека на равнината, съдържаща триъгълника ABC , гледаме като на безкраен нееластичен лист (напр. хартия или ламарина), масата на който пренебрегваме.

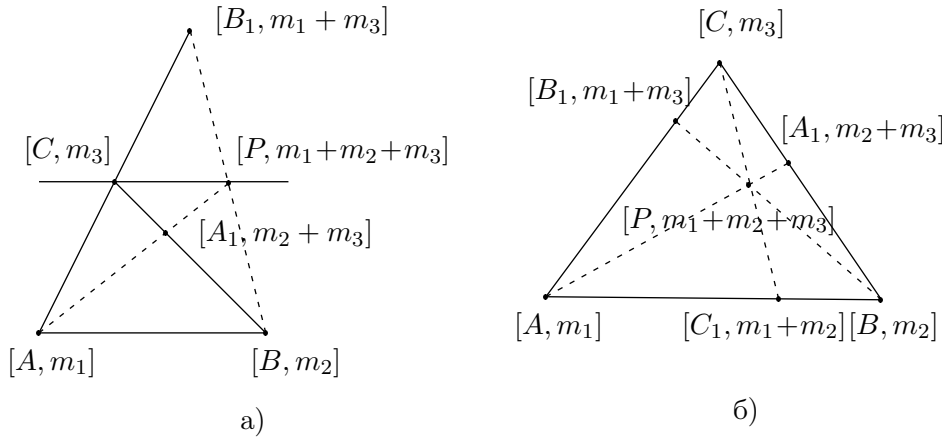
Тогава на точките от равнината на триъгълника ще гледаме като евентуални точки на равновесие, т.е. центрове на тежестта на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$, където съответните маси са реални числа.

1. Ще разгледаме първо случая, когато точката P лежи върху някоя от правите, съдържащи страните на триъгълника. Ако $P \in AB$, тогава тя е масов център на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, 0]$, където $m_1 = k \overline{PB}$ и $m_2 = k \overline{AP}$, за някое $k \neq 0$. Аналогично при $P \in BC$, P е масов център на системата от материални точки $[A, 0]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$, където $m_2 = l \overline{PC}$ и $m_3 = l \overline{BP}$, за някое $l \neq 0$, а при $P \in CA$, P е масов център на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, 0]$ и $[C, m_3]$, където $m_3 = s \overline{PA}$ и $m_1 = s \overline{CP}$, за някое $s \neq 0$, т.е.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

а O е произволна точка.

2. Да разгледаме случая, когато точката P лежи на права през C , успоредна на AB и $AP \cap BC = A_1$, $BP \cap CA = B_1$ (вж. фиг. 2 а)). Ще подберем трите маси m_1 , m_2 и m_3 така, че точката P да бъде масов център на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$. В точката C съсредоточаваме произволна маса m_3 , а в точките A и B – подходящи маси съответно m_1 и m_2 така, че да е в сила $[B, m_2] + [C, m_3] = [A_1, m_2 + m_3]$ и $[A, m_1] + [C, m_3] = [B_1, m_1 + m_3]$, т.е. $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{m_2}{m_3}$ и $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{m_1}{m_3}$.



Фиг. 2. Масов център на три точки

Центърът на тежестта на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$ не зависи от начина на редуциране на точките, следователно трябва да лежи на всяка от правите AA_1 и BB_1 , т.е. той ще бъде точката P .

Сега имаме $[P, m_1 + m_2 + m_3] = [A_1, m_2 + m_3] + [A, m_1]$, т.е.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + (m_2 + m_3) \overrightarrow{OA_1}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

където O е произволна точка. От друга страна,

$$[A_1, m_2 + m_3] = [B, m_2] + [C, m_3], \quad \text{т.е.} \quad \overrightarrow{OA_1} = \frac{m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_2 + m_3}$$

или окончателно

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + (m_2 + m_3) \overrightarrow{OA_1}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + (m_2 + m_3) \frac{m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_2 + m_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

3. Нека сега точката P не лежи върху никоя от правите, съдържащи страните на триъгълника или успоредни на тях и минаващи през срещуположния връх и $AP \cap BC = A_1$, $BP \cap CA = B_1$, а $CP \cap AB = C_1$ (вж. фиг. 2 б)). Ще покажем, че съществуват маси m_1 , m_2 и m_3 така, че точката P да бъде масов център на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$. За целта в точката B съсредоточаваме произволна маса m_2 , а в точките A и C – маси съответно m_1 и m_3 така, че да бъдат изпълнени

условията $[A, m_1] + [B, m_2] = [C_1, m_1 + m_2]$ и $[B, m_2] + [C, m_3] = [A_1, m_2 + m_3]$,
т.е. $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{m_2}{m_1}$ и $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{m_3}{m_2}$.

Центърът на тежестта на системата от материални точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$ не зависи от начина на редуциране на точките, следователно трябва да лежи на всяка от правите AA_1 и CC_1 , т.е. той ще бъде точката P . От друга страна, точките P , B и $[A, m_1] + [C, m_3]$ лежат на една права, т.е. точката, еквивалентна на $[A, m_1] + [C, m_3]$ лежи на правата BP , а също и на правата AC , така че остава да бъде B_1 , т.е. $[A, m_1] + [C, m_3] = [B_1, m_1 + m_3]$ или $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{m_1}{m_3}$.

Сега имаме $[P, m_1 + m_2 + m_3] = [C_1, m_1 + m_2] + [C, m_3]$, т.е.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_3 \overrightarrow{OC} + (m_1 + m_2) \overrightarrow{OC_1}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

където O е произволна точка. От друга страна,

$$[C_1, m_1 + m_2] = [A, m_1] + [B, m_2], \quad \text{т.е.} \quad \overrightarrow{OC_1} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}$$

или окончателно получаваме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{m_3 \overrightarrow{OC} + (m_1 + m_2) \overrightarrow{OC_1}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 \overrightarrow{OC} + (m_1 + m_2) \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

4. В крайна сметка получихме, че всяка точка P от равнината на триъгълника може да се разглежда като масов център на материалните точки $[A, m_1]$, $[B, m_2]$ и $[C, m_3]$, където m_1 , m_2 и m_3 са подходящи маси и

$$(\star) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Ако λ , μ и ν са барицентричните координати на точката P , то $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$, където $\lambda + \mu + \nu = 1$ или за λ , μ и ν получаваме

$$(\star\star) \quad \lambda = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

3. ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ТРИЪГЪЛНИКА

Сега ще дадем няколко примера за използване на описаната теория за намиране барицентричните координати на някои забележителни точки (вж. [1], [2]) в триъгълника, като натоварим неговите върхове с подходящи маси.

Нека в $\triangle ABC$ имаме стандартни означения: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$.

3.1. Медицентър

Медицентърът G на триъгълника може да се разглежда като масов център на материалните точки $[A, m]$, $[B, m]$ и $[C, m]$, където m е произволна ненулева маса. Тогава

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{OB} + m \overrightarrow{OC}}{m + m + m} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

3.2. Център на вписаната окръжност

От свойствата на ъглополовящите за центъра на вписаната окръжност I следва, че той е масов център на материалните точки $[A, m a]$, $[B, m b]$ и $[C, m c]$, където m е произволно ненулево число. Тогава

$$(2) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{m a \overrightarrow{OA} + m b \overrightarrow{OB} + m c \overrightarrow{OC}}{m(a + b + c)} = \frac{a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$

3.3. n -точка на триъгълника; точка на Лемоан

Аналогично получаваме, че системата от материални точки $[A, m a^n]$, $[B, m b^n]$ и $[C, m c^n]$ се редуцира до материалната точка $[P_n, m a^n + m b^n + m c^n]$, където P_n е n -точката на триъгълника за някое $n \in \mathbb{R}$, а m е произволно ненулево число, т.е. имаме

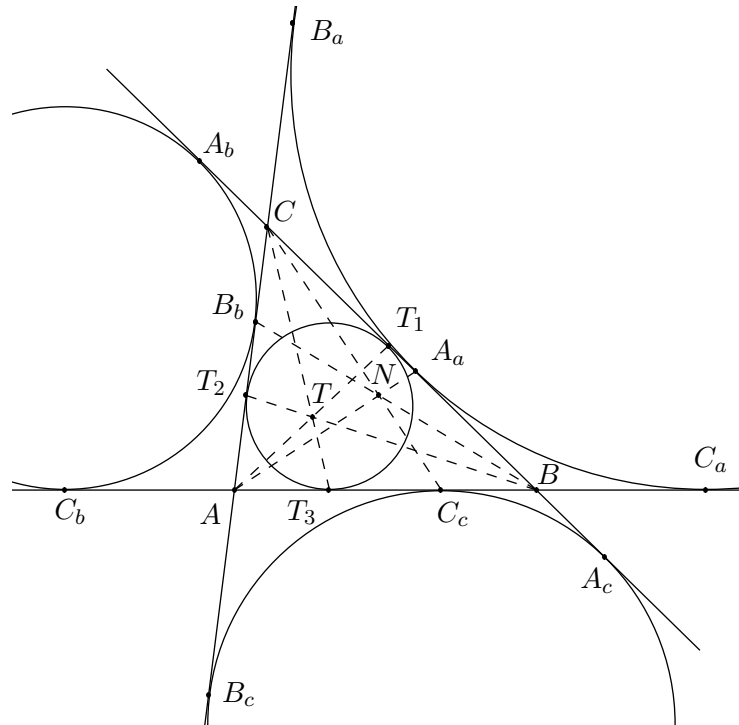
$$(3) \quad \overrightarrow{OP_n} = \frac{m a^n \overrightarrow{OA} + m b^n \overrightarrow{OB} + m c^n \overrightarrow{OC}}{m(a^n + b^n + c^n)} = \frac{a^n \overrightarrow{OA} + b^n \overrightarrow{OB} + c^n \overrightarrow{OC}}{a^n + b^n + c^n}.$$

В частност при $n = 0$ точката P_n съвпада с медицентъра G , при $n = 1$ – с центъра на вписаната окръжност I , а при $n = 2$ – с точката на Лемоан, за която получаваме

$$(4) \quad \overrightarrow{OP_2} = \frac{a^2 \overrightarrow{OA} + b^2 \overrightarrow{OB} + c^2 \overrightarrow{OC}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

3.4. Точки на Жергон и Нагел

Нека в триъгълника ABC да означим с T_1, T_2 и T_3 допирните точки на вписаната окръжност със страните BC, CA и AB ; с A_a, B_a и C_a – допирните точки на външно вписаната окръжност към страната BC със страната BC и продълженията на страните AC и AB ; с B_b, A_b и C_b – допирните точки на външно вписаната окръжност към страната AC със страната AC и продълженията на страните BC и AB , а с C_c, A_c и B_c – допирните точки на външно вписаната окръжност към страната AB със страната AB и продълженията на страните BC и AC (вж. фиг. 3).



Фиг. 3. Точки на Жергон и Нагел

От училищния курс по геометрия са известни равенствата

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & AT_2 = AT_3 = CB_b = CA_b = BC_c = BA_c = p - a; \\
 & BT_3 = BT_1 = AC_c = AB_c = CB_a = CA_a = p - b; \\
 & CT_1 = CT_2 = BA_a = BC_a = AC_b = AB_b = p - c; \\
 & AC_a = AB_a = BA_b = BC_b = CA_c = CB_c = p.
 \end{aligned}$$

От тези равенства и от Теоремата на Чева получаваме (вж. [1]), че правите AT_1, BT_2 и CT_3 се пресичат в една точка, наречена *точка на Жергон* (ще я бележим с T), а правите AA_a, BB_b и CC_c също се пресичат в една точка – *точка на Нагел* (ще я бележим с N).

1. От равенствата (5) следва, че ако подберем масите m_1^N , m_2^N и m_3^N , съсредоточени съответно в точките A , B и C като $m_1^N = m^N (p - a)$, $m_2^N = m^N (p - b)$ и $m_3^N = m^N (p - c)$, където m^N е произволно ненулево число, то ще бъдат в сила връзките

$$\begin{aligned} [A, m_1^N] + [B, m_2^N] &= [C_c, m_1^N + m_2^N], \\ [A, m_1^N] + [C, m_3^N] &= [B_b, m_1^N + m_3^N], \\ [B, m_2^N] + [C, m_3^N] &= [A_a, m_2^N + m_3^N], \end{aligned}$$

т.е. центърът на тежестта на системата от материални точки $[A, m_1^N]$, $[B, m_2^N]$ и $[C, m_3^N]$ лежи едновременно върху правите AA_a , BB_b и CC_c или по-точно съвпада с точката на Нагел и

$$(6) \quad \overrightarrow{ON} = \frac{m^N (p - a) \overrightarrow{OA} + m^N (p - b) \overrightarrow{OB} + m^N (p - c) \overrightarrow{OC}}{m^N ((p - a) + (p - b) + (p - c))}.$$

2. Аналогично, ако изберем масите m_1^T , m_2^T и m_3^T по следния начин

$$m_1^T = \frac{m^T}{p - a}, \quad m_2^T = \frac{m^T}{p - b} \quad \text{и} \quad m_3^T = \frac{m^T}{p - c},$$

където m^T е произволно ненулево число, то ще имаме

$$[A, m_1^T] + [B, m_2^T] + [C, m_3^T] = [T, m_1^T + m_2^T + m_3^T],$$

където T е точката на Жергон, т.е.

$$(7) \quad \overrightarrow{OT} = \frac{\frac{m^T}{p-a} \overrightarrow{OA} + \frac{m^T}{p-b} \overrightarrow{OB} + \frac{m^T}{p-c} \overrightarrow{OC}}{m^T \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right)}.$$

3. Ако избираме по подходящ начин константите m^N и m^T , ще получаваме еквивалентни представяния на векторите $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OT}$. Например при $m^N = 1$ и $m^T = (p - a) (p - b) (p - c)$ получаваме съответно

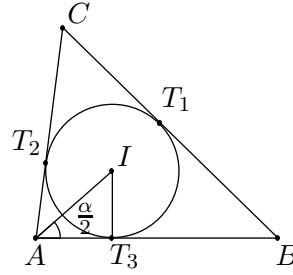
$$(6') \quad \overrightarrow{ON} = \frac{(p - a) \overrightarrow{OA} + (p - b) \overrightarrow{OB} + (p - c) \overrightarrow{OC}}{p} \quad \text{и}$$

$$(7') \quad \overrightarrow{OT} = \frac{(p - b) (p - c) \overrightarrow{OA} + (p - c) (p - a) \overrightarrow{OB} + (p - a) (p - b) \overrightarrow{OC}}{(p - b) (p - c) + (p - c) (p - a) + (p - a) (p - b)}.$$

От правоъгълния ΔAIT_3 (вж. фиг. 4) имаме $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{IT_3}{AT_3} = \frac{r}{p - a}$, т.е. $p - a = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ или $\frac{1}{p - a} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, където r е радиусът на вписаната

в $\triangle ABC$ окръжност. Аналогично получаваме $p-b = r \cotg \frac{\beta}{2}$, $\frac{1}{p-b} = \frac{1}{r} \tg \frac{\beta}{2}$, $p-c = r \cotg \frac{\gamma}{2}$ и $\frac{1}{p-c} = \frac{1}{r} \tg \frac{\gamma}{2}$.

След като заместим последните равенства в изразите за m_1^N , m_2^N , m_3^N , m_1^T , m_2^T и m_3^T и избегнем $m^N = \frac{1}{r}$, а $m^T = r$, достигаем до



Фиг. 4.

$$(6'') \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\cotg \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{OA} + \cotg \frac{\beta}{2} \overrightarrow{OB} + \cotg \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{OC}}{\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2}} \text{ и}$$

$$(7'') \quad \overrightarrow{OI} = \frac{\tg \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{OA} + \tg \frac{\beta}{2} \overrightarrow{OB} + \tg \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{OC}}{\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\gamma}{2}}.$$

3.5. Ортоцентър

Накрая ще изследваме ортоцентъра H на триъгълника. За разлика от останалите забележителни точки, които разглеждахме досега, за неговото разположение съществуват няколко възможности, които зависят от ъглите на $\triangle ABC$ (вж. фиг. 5). Ние ще се ограничим само със случая, при който триъгълникът не е правоъгълен.

Без ограничение на общостта можем да считаме, че ъглите α и β са остри, т.е. $\tg \alpha$ и $\tg \beta$ са положителни числа. Тогава от правоъгълните триъгълници ACC_H и BCC_H имаме

$$\tg \alpha = \frac{CC_H}{AC_H} \text{ и } \tg \beta = \frac{CC_H}{BC_H} \text{ или } \frac{\overline{AC_H}}{\overline{C_H B}} = \frac{\tg \beta}{\tg \alpha} = \frac{\frac{1}{\tg \alpha}}{\frac{1}{\tg \beta}}.$$

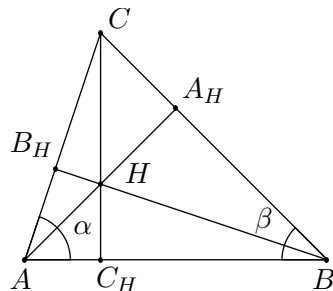
Ако и ъгъл γ е остър, то аналогично имаме и равенствата

$$\frac{\overline{AB_H}}{\overline{B_H C}} = \frac{\tg \gamma}{\tg \alpha} = \frac{\frac{1}{\tg \alpha}}{\frac{1}{\tg \gamma}} \text{ и } \frac{\overline{BA_H}}{\overline{A_H C}} = \frac{\tg \gamma}{\tg \beta} = \frac{\frac{1}{\tg \beta}}{\frac{1}{\tg \gamma}}.$$

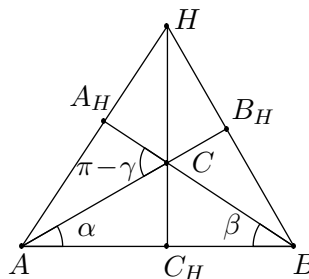
Ако обаче ъгъл γ е туп (вж. фиг. 5 б)), т.е. $\tg \gamma < 0$, то от правоъгълните триъгълници ABA_H и ACA_H имаме

$$\tg \beta = \frac{AA_H}{BA_H} \text{ и } -\tg \gamma = \tg (\pi - \gamma) = \frac{AA_H}{CA_H} \text{ или } \frac{\overline{BA_H}}{\overline{A_H C}} = \frac{\tg \gamma}{\tg \beta} = \frac{\frac{1}{\tg \beta}}{\frac{1}{\tg \gamma}},$$

аналогично получаваме и отношението $\frac{\overline{AB_H}}{\overline{B_H C}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}}$.



а) остроъгълен триъгълник



б) тъпоъгълен триъгълник

Фиг. 5. Ортоцентър

Така окончателно получихме, че пропорциите $\frac{\overline{AC_H}}{\overline{C_H B}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}}$,

$\frac{\overline{AB_H}}{\overline{B_H C}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}}$ и $\frac{\overline{BA_H}}{\overline{A_H C}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}}$ са изпълнени за произволен триъгълник ABC , т.е.

$$[A, m \operatorname{tg} \alpha] + [B, m \operatorname{tg} \beta] + [C, m \operatorname{tg} \gamma] = [H, m \operatorname{tg} \alpha + m \operatorname{tg} \beta + m \operatorname{tg} \gamma],$$

където m е произволно ненулево число и

$$(8) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \overrightarrow{OA} + \operatorname{tg} \beta \overrightarrow{OB} + \operatorname{tg} \gamma \overrightarrow{OC}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}.$$

Забележка. От равенство (8) чрез граничен преход се вижда, че то остава в сила дори ако някой от ъглите на триъгълника е прав.

Освен гореспоменатите приложения за намиране на барицентрични координати, теорията за масовия център на система от материални точки може широко да се използва в геометрията още за доказване на афинни зависимости в триъгълника, за проверка на инцидентност на точки с една права, както за проверка на инцидентност на прави с една точка и т.н. (вж. напр. [3], §14).

Литература

- [1] Гушев, А. , А. Гушев, В. Гушев, *Свойства на изотомичните елементи в триъгълника*, сп. „Математика“, бр. 6/2008, стр. 6–18.
- [2] Гушев, А. , А. Гушев, В. Гушев, *n-прави и n-точка на триъгълника*, сп. „Математика“, бр. 4/2007, стр. 7-11.
- [3] Гушев, А. *Теорема на Менелай и Чева*, Издателство „Техника“, София 1967. (http://www.pmgvt.org/projects/Menelai_e_book/index.html)

ЧЕТВЪРТИ ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

ЕМИЛ КОЛЕВ, ПЕТЪР БОЙВАЛЕНКОВ

На 26-28.11.2010 г. в София се проведе четвъртото издание на Есенния Математически Турнир (ЕМТ), организиран със съдействието на Американска Фондация за България (АФБ) и секция БАН-СУ на СМБ. Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Балканиадата по математика.

ЕМТ се проведе в 125 СОУ „Проф. Боян Пенев“, София, и в него взеха участие над 500 ученика. АФБ финансира работата на организационния комитет и на журито, както и част от таксите за правоучастие. Резултатите на всички участници са на сайта на турнира — <http://sites.google.com/site/esenenmt/rezultati>.

Състезанието беше закрито на 28.11.2010 г. в Института по математика и информатика на БАН. Директорът на ИМИ-БАН акад. Стефан Додунев и програмният директор на АФБ Алексей Христов връчиха грамоти, купи, медали и книги на победителите. Ето и имената на наградените:

Осми клас: Любен Личев (МГ, Плевен) – първа награда, Емилиян Рогачев (СМГ) – втора награда, Петър Скорчелиев (ПМГ, Силистра) – трета награда; отборно – СМГ, НПМГ, Бургас и др.

Девети клас: Нгуен Чи Зунг (СМГ) – първа награда, Павлена Ненова (СМГ), Кристиан Кирилов (МГ, Плевен) и Йордан Йорданов (МГ, Варна) – втора награда, Мария Николова (ПМГ, Бургас) – трета награда; отборно – СМГ, Варна, Бургас и др.

Десети клас: Радослав Комитов, (МГ, Ямбол) – първа награда, Кристиан Митов (ПМГ, Видин) – втора награда, Методи Рибнишки (СМГ) – трета награда; отборно – СМГ, Видин, Варна и др.

Единадесети клас: Богдан Станков (СМГ) – първа награда, Радослав Кафов (СМГ), Яница Пехова (МГ, Русе) Николай Каракехайов (ОМГ, Пловдив), Александрина Стоянова (МГ, Варна) и Давид Койчев (ПМГ, Бургас) – втора награда, Кристиан Кираджиев (АК) и Иван Мечков (НПМГ) – трета награда; отборно – Пловдив, Бургас, НПМГ и др.

Дванадесети клас: Живко Жечев (ПМГ, Шумен), Младен Вълков (ПМГ, Шумен) и Милен Иванов (НПМГ) – първа награда, Кубрат Данаилов (АК) и Мартин Попов (ПМГ, Монтана) – втора награда, Виктор Вълков (СМГ) – трета награда; отборно – Шумен, НПМГ, СМГ и др.

Подреждането в комплексното отборно класиране е СМГ, Варна, НПМГ, Бургас, Плевен, Пловдив, Враца, АК, Благоевград, Русе, Видин, Монтана и др.

Отговори и кратки решения на задачите

Задача 8.1. Да се реши уравнението

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) = (x+2)^2 + (x+4)^2 + (x+6)^2 + (x+8)^2 + 40.$$

Отговор. $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{17}$.

Задача 8.2. Точки E, F лежат съответно на страните AB, BC на правоъгълник $ABCD$, имащ лице 1. Средите на AE, EF, FC, CD, DA са съответно K, P, L, M, N . Средите на KL, PM, PN са съответно Q, R, T . Определете лицето на $\triangle QRT$.

Решение. Нека O е произволна точка. Имаме

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}),$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{CB}.$$

Така отсечките QR, QT са успоредни и равни на една четвърт съответно на AB, CB . Следователно триъгълникът QRT е правоъгълен и лицето му е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} AB \cdot \frac{1}{4} CB = \frac{1}{32}$.

Задача 8.3. Да се докаже, че числото $A = n^4 - 12n^2 + 4$ е съставно за всяко естествено число $n \geq 4$. В случая, когато числото A е произведение от две прости числа, да се докаже, че никое от тези прости числа не е равно на $2^{2^k} + 1$, където k е естествено число.

Решение. Числото A се разлага по следния начин:

$$A = n^4 + 4n^2 + 4 - 16n^2 = (n^2 + 2)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 4n + 2)(n^2 + 4n + 2).$$

Тъй като $n^2 + 4n + 2 \geq 1 + 4 + 2 = 7 > 1$ и $n^2 - 4n + 2 = n(n - 4) + 2 > 0 + 2 > 1$, заключаваме, че A е съставно.

Ако A е произведение на простите числа p и q , без ограничение на общността можем да считаме, че $p = n^2 - 4n + 2$ и $q = n^2 + 4n + 2$. Очевидно n е нечетно число и тогава не е трудно да се види, че $p \equiv q \equiv 7 \pmod{8}$, докато $2^{2^k} + 1 \equiv 5$ или $1 \pmod{8}$ съответно при $k = 1$ и $k \geq 2$.

Задача 8.4. В бахазката азбука има само две букви: А и Б и всяка дума е от поне една буква. Ако променим някоя буква в k -буквена бахазка дума и изтрием буквите след нея (ако има такива), получаваме последователност от букви, която е начало на друга дума с поне $k - 2$ букви (самата дума също е начало на себе си). В бахазкия език има деветбуквена дума. Какъв е най-малкият възможен брой бахазки думи?

Решение. Можем да считаме, че най-дългата дума е с 9 букви (ако на всяка дума изтрием буквите след деветата, условието остава в сила). Нека $f(n)$ е най-малкият възможен брой бахазки думи, ако най-дългата сред тях е с n букви. Явно $f(1) = 2$ и ако $n > m$, то $f(n) \geq f(m)$. Целта ни е да открием $f(9)$. Имаме $f(2) = 3$ (освен двубуквената дума трябва да осигурим думи при промяна на всяка от двете ѝ букви – ако например има дума АА, е необходимо и достатъчно да има АБ и БА). Аналогично $f(3) = 4$ (ако например има дума ААА, е необходимо и достатъчно да има ААБ, АБА и БАА).

Ако има n -буквена дума w , без ограничение нека първата ѝ буква да е А. Да разгледаме само думите, започващи с А. Ако изтрием това А, условието ще е спазено за получените скъсени думи и най-дългата сред тях е с $n - 1$ букви, така че най-малкият им възможен брой е $f(n - 1)$.

Ако променим първата буква в w на Б, получаваме начало на дума с поне $n - 2$ букви. Да разгледаме всички думи, започващи с Б; ако изтрием това Б, условието ще е спазено за полученото множество от думи, като най-дългата сред тях е с поне $n - 3$ букви, така че най-малкият им възможен брой е $f(n - 3)$.

И така $f(n) = f(n - 1) + f(n - 3)$. Пресмятаме последователно $f(4) = f(3) + f(1) = 4 + 2 = 6$, $f(5) = f(4) + f(2) = 6 + 3 = 9$, $f(6) = f(5) + f(3) = 9 + 4 = 13$, $f(7) = f(6) + f(4) = 13 + 6 = 19$, $f(8) = f(7) + f(5) = 19 + 9 = 28$ и $f(9) = f(8) + f(6) = 28 + 13 = 41$.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравненията $(a + 1)x^2 + x - 1 = 0$ и $ax^2 - 2x + 3 = 0$ имат общ корен.

Отговор. $a = -1$ и $a = -\frac{11}{16}$.

Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$, в който $\angle BAC = 15^\circ$ и $\angle CBA = 30^\circ$. Точката M е среда на AB . Да се намери $\angle ACM$.

Решение. *Първи начин.* Нека $AN \perp BC$, $N \in BC$. Тогава $\triangle ANC$ е равнобедрен и правоъгълен, а NM е медиана в правоъгълния $\triangle ANB$. Следователно $NA = NC = NM = AM$ и $\angle ANM = 60^\circ$. Тогава в окръжността с център N и радиус NC имаме $\angle ACM = \frac{1}{2} \angle ANM = 30^\circ$.

Втори начин. Нека точката D е симетрична на C относно симетралата на AB . Тогава $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ и $AB \parallel CD$. Оттук $\angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = \angle CBA - \angle CAB = 30^\circ - 15^\circ = \angle CAB = \angle DCA$, и

следователно $\triangle ACD$ е равнобедрен и $AD = DC$.

Нека точките E и F бъдат симетрични на D и C съответно относно правата AB . Тогава $BC = BF$, $\angle CBF = 2\angle CBA = 60^\circ$ и следователно $\triangle BCF$ е равностранен. Оттук получаваме, че $FC = CD = DE = EF$ и фигурата $CDEF$ е квадрат. Но тогава правите AB, CE и DF се пресичат в M и $\angle ACM = \angle DCM = \angle DCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n , за които $n^3 + 8^n$ е точна степен на просто число.

Решение. Нека $n^3 + 8^n = p^k$, където p е просто число и $k \in \mathbb{N}$. Тогава $(n + 2^n)(n^2 - n2^n + 2^{2n}) = p^k$. Двата множителя отляво са по-големи от 1: $n + 2^n \geq 3$ е очевидно, а $n^2 - n2^n + 2^{2n} = n^2 + 2^n(2^n - n) \geq n + 2^n$ следва от $2^n > n$, което се доказва лесно по индукция. Следователно $n + 2^n = p^m$ и $n^2 - n2^n + 2^{2n} = p^\ell$, където $m, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq m$.

Имаме $p^m | (n + 2^n)^2 - (n^2 - n2^n + 2^{2n}) = 3n2^n$ и следователно $p = 2$, $p = 3$ или p е делител на n . Последното и $n + 2^n = p^m$ дават отново $p = 2$.

Случай 1. При $p = 2$ имаме $2^n < n + 2^n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ и значи е невъзможно $n + 2^n$ да е точна степен на 2.

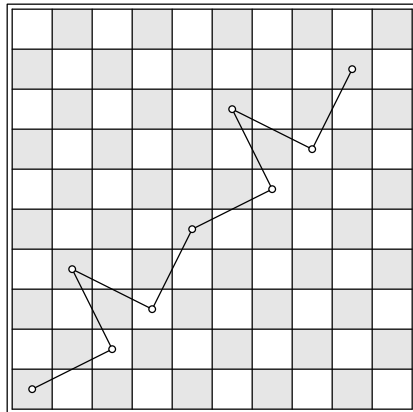
Случай 2. При $p = 3$ от $n + 2^n = 3^m$ следва, че $(n, 3) = 1$. Сега от $p^m | 3n2^n$ получаваме $m = 1$ и $n + 2^n = 3$ дава $n = 1$, което е единственото решение на задачата.

Задача 9.4. Няколко от полетата на една шахматна дъска $n \times n$, $n \geq 4$, са маркирани. Известно е, че никои две маркирани полета не се намират в един и същи ред или стълб, както и че шахматният кон може да тръгне от някое маркирано поле и с няколко скока да премине през всички маркирани полета точно по веднъж. Колко най-много могат да са маркираните полета?

Решение. Отговор: $n - 1$, ако $n \equiv 2 \pmod{4}$ и n в останалите случаи. Ясно е, че не можем да имаме повече от n маркирани полета. Да предположим, че маркираните полета са n на брой и $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. Да разгледаме стандартното шахматно оцветяване – полетата (i, j) , за които числото $i + j$ е нечетно, са черни, а останалите са бели. Да означим маркираните полета с $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{4k+2}, j_{4k+2})$. От условието за ходовете на коня и от факта, че конят мени цвета на полето си при всеки скок (от черен на бял и обратно), виждаме, че точно половината (т.е. $2k + 1$) от сумите $i_1 + j_1, i_2 + j_2, \dots, i_{4k+2} + j_{4k+2}$ трябва да бъдат нечетни. Оттук следва, че и сумата $i_1 + j_1 + i_2 + j_2 + \dots + i_{4k+2} + j_{4k+2} = 2(1 + 2 + \dots + (4k + 2))$ също трябва да бъде нечетно число – противоречие!

Рисунката показва един маршрут на коня в дъска 10×10 , който лесно може да се обобщи така, че да даде необходимия брой (n или $n - 1$ съответно при $n \not\equiv 2$ или $\equiv 2 \pmod{4}$) маркирани полета върху дъски с всякакви

размери, като една и съща последователност от четири хода се повтаря циклично. Например при $n = 4$, $n = 5$ и $n = 8$ имаме съответно ситуацията с дъската 4×4 , 5×5 и 8×8 долу вляво, а при $n = 7$ трябва да „отрежем“ един ред отдолу и два отгоре и аналогично за стълбовете.



Задача 10.1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^3 - 11|x - 1|} = 2x - 1$.

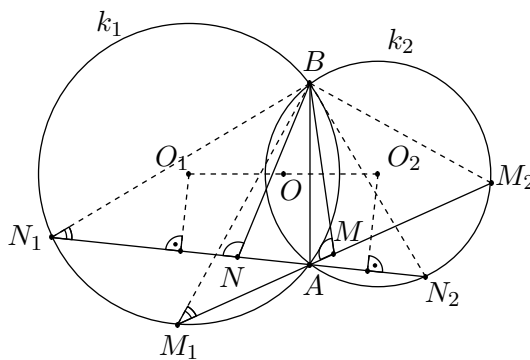
Отговор. $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Задача 10.2. Окръжностите k_1 и k_2 с центрове O_1 и O_2 се пресичат в две различни точки A и B . През A са прекарани две различни прави, които пресичат k_1 в точките M_1 и N_1 , а k_2 съответно в точките M_2 и N_2 . Нека M и N са средите на отсечките M_1M_2 и N_1N_2 . Да се докаже, че:

- точките M , N , A и B лежат на една окръжност;
- центърът на тази окръжност е среда на отсечката O_1O_2 .

Решение. а) Тъй като $\angle AM_1B = \angle AN_1B$ и $\angle AM_2B = \angle AN_2B$, то $\triangle M_1M_2B \sim \triangle N_1N_2B$. Следователно BM и BN са съответни медиани в подобни триъгълници и тъй като $\angle M_1MB = \angle N_1NB$, получаваме, че точките M , N , A и B лежат на една окръжност с център O .

б) От една страна O лежи на симетралата на AB , т.е. O лежи на O_1O_2 . От друга страна O_1 и O_2 лежат на симетралите на отсечките AN_1 и AN_2 съответно, а O лежи на симетралата на AN . Оттук лесно получаваме, че O е среда на O_1O_2 .



Забележка: Подточка б) може да се реши без предварително доказателство, че M , N , A и B лежат на една окръжност. Достатъчно е да докажем, че средата на O_1O_2 е на равни разстояния от A , B , M и N .

Задача 10.3. Естествените числа a, b, c, p, q и r са такива, че $a^2 + b^2 = c^2$ и $p^2 + q^2 = r^2$. Възможно ли е числото $ap + bq + cr$ да е просто?

Решение. Да допуснем, че числото $ap + bq + cr$ е просто. Тогава $(a, b, c) = 1$, т.е. $(a, b) = 1$ и $(p, q, r) = 1$, т.е. $(p, q) = 1$. Имаме

$$\begin{aligned}(ap + bq + cr)(ap + bq - cr) &= (ap + bq)^2 - c^2r^2 = \\ &= a^2p^2 + 2apbq + b^2q^2 - (a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = \\ &= -a^2q^2 + 2aqbp - b^2p^2 = \\ &= -(aq - bp)^2\end{aligned}$$

и следователно $ap + bq + cr$ дели $(aq - bp)^2$. Тъй като $ap + bq + cr$ е просто число, заключаваме, че $ap + bq + cr$ дели $aq - bp$.

Ако $aq - bp = 0$, то от $(a, b) = 1$ и $(p, q) = 1$ следва, че $a = p$, $b = q$. Но тогава $ap + bq + cr = a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$ не е просто число.

Ако $aq - bp \neq 0$, то

$$ap + bq + cr \leq |aq - bp| < \max\{aq, bp\} \leq \max\{a, b\} \max\{p, q\} < cr < ap + bq + cr,$$

и отново имаме противоречие.

Забележка: Задачата може да се реши и посредством общия вид на питагоровите тройки, като в началото отново предположим, че числото $ap + bq + cr$ е просто. Ако без ограничение на общността $(a, b, c) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$, то за втората питагорова тройка имаме две възможности: $(p, q, r) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ или $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$. Тъй като $(a, b, c) = 1$ и $(p, q, r) = 1$, то $(x, y) = 1$ и $(u, v) = 1$. Така получаваме съответно $ap + bq + cr = 2(xu + yv)^2$ или $(xu + yu + xv - yv)^2$ като и в двата случая достигахме до противоречие.

Задача 10.4. Симеон е намислил естествено число $n \leq 2010$. Бойко се опитва да го познае по следния начин: пита дали дадено естествено число е по-голямо от n и Симеон му отговаря с „да“ или „не“. Бойко печели играта, когато познае числото, и я губи, ако получи отговор „не“ за втори път и продължава да не знае числото. Колко най-малко въпроса са достатъчни на Бойко, за да е сигурен, че ще спечели?

Решение. Първо да забележим, че ако Бойко получи първи отговор „не“ в някакъв момент, това означава, че тогава той има информация от вида $n \in [n_1, n_2]$. Ако следващият му опит е число $x > n_1$, и получи отговор „не“, той губи, защото няма право на повече въпроси, а намисленото от Симеон число е измежду $n_1, n_1 + 1, \dots, x$. Следователно Бойко трябва да опита последователно $n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1$, а това са $n_2 - n_1$ въпроса.

Сега ще покажем, че Бойко винаги може да познае числото n с 63 опита, като задава на Симеон последователно числата:

$$63, 63 + 62, 63 + 62 + 61, \dots, 63 + 62 + \dots + 5 = 2006,$$

докато не получи отговор „не“. Ако това никога не се случи, т.е. винаги отговорът на Симеон е „да“, то след 59-ия опит, когато задава числото 2006, Бойко ще заключи, че $n \in [2007, 2010]$ и с 3 опита ще отгатне числото. Ако пък получи отговор „не“ на опит с число $63 + 62 + \dots + i$, то $n \in [63 + 62 + \dots + (i + 1) + 1, 63 + 62 + \dots + (i + 1) + i]$ и от казаното по-горе следва, че са му необходими най-много $(63 - i + 1) + i - 1 = 63$ опита.

Да допуснем, че Бойко има стратегия за определянето на n с не повече от 62 опита. На първия опит Бойко може да получи отговор „не“, което означава, че е казал на Симеон число, което не надминава 62. Ако пък получи отговор „да“, а при втория опит получи отговор „не“, то второто число не може да надминава $62 + 61 = 123$. Продължавайки със същите разсъждения, заключаваме, че числото на 62-ия опит не надминава $62 + 61 + \dots + 1 = 1953 < 2010$ и при отговор „да“ и на този опит Бойко не може да определи числото на Симеон, противоречие.

Задача 11.1. а) Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = 67$ и разлика $d = 28$. Да се докаже, че a_1 , a_{68} и a_{2011} образуват геометрична прогресия.

б) Да се намери броят на аритметичните прогресии с първи член a_1 и разлика d , където a_1 и d са естествени числа и за които a_1 , a_{a_1+1} и a_{2011} образуват в този ред геометрична прогресия.

Отговор. б) 14.

Задача 11.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, за който $2BC = AB + 2AC$. Ако $D \in AB$ е такава, че $AD = 3BD$, да се докаже, че $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle ADC$.

Решение. Нека I е центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$, а E е допирната точка на тази окръжност с AB . От условието следва, че $AE = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AB}{4}$. Понеже D и E са симетрични спрямо средата на AB , то D е допирната точка на външновписаната окръжност към страната AB . Ако F е диаметрално противоположната на E , то C , F и D лежат на една права (доказателството на това свойство може да се извърши с помощта на хомотетия с център C , която преобразува вписаната окръжност във външновписаната).

Сега триъгълниците AEI и DEF са подобни (правоъгълни са и катетите им се отнасят както 1 : 2). Следователно $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$.

Забележка. Доказателството може да се направи и с помощта на тригонометрични преобразувания.

Задача 11.3. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са положителни числа, за които е изпълнено равенството $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Да се докаже неравенството

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geq 2^n + n(x_1 + x_2 + \dots + x_n - n).$$

Решение. Разкривайки скобите в

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1),$$

ще получим сбор от 2^n събираеми, всяко от които е от степен n , като всяко x_i се появява в такова събираемо най-много на втора степен. Да разделим тези събираеми на две групи. В първа група да поставим всички събираеми, в които точно едно от неизвестните е на втора степен, а във втора група да поставим всички останали. Да означим с A и B сборът на събираемите съответно от първата и от втората група.

Да разгледаме събираемите, в които x_1 е на втора степен, а всички останали променливи са на първа степен. Лесно се вижда, че има точно $n - 1$ такива събираеми (получени са от $x_2 x_3 \dots x_n$ чрез премахване последователно на $x_2, x_3, \dots, x_n$). От неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$x_1^2 x_3 \dots x_n + x_1^2 x_2 x_4 \dots x_n + \dots + x_1^2 x_2 \dots x_{n-1} + 1 \geq n \sqrt[n]{x_1^{2n-2} x_2^{n-2} \dots x_n^{n-2}} = n x_1.$$

Аналогични неравенства получаваме и за x_i при $i = 2, 3, \dots, n$. Следователно $A + n \geq n(x_1 + \dots + x_n)$.

Да забележим, че изразът от останалите $2^n - n(n - 1)$ събираеми (това са точно събираемите от втората група) е симетричен спрямо всички неизвестни. Това означава, че тяхното произведение ще бъде едночлен, в който неизвестните ще са на една и съща степен, т.е. тяхното произведение е равно на 1. Следователно неравенството между средното аритметично и средното геометрично ни дава, че сборът на тези $2^n - n(n - 1)$ събираеми е по-голям или равен на $2^n - n(n - 1)$. Следователно $B \geq 2^n - n(n - 1)$.

Окончателно получаваме

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_n + x_1) + n = A + n + B \geq n(x_1 + \dots + x_n) + 2^n - n^2 + n,$$

което е еквивалентно на неравенството от условието.

Задача 11.4. Дадена е редицата $a_1, a_2, \dots$, зададена с равенствата $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n \geq 3$.

а) Да се докаже, че броят на различните начини, по които дъска $3 \times 2n$ може да се покрие с домина, е равен на a_n .

б) Да се докаже, че за всяко $n \geq 1$ числото a_n може да се представи във вида $a_n = x^2 + 2y^2$, където x и y са естествени числа.

Решение. а) Директно се проверява, че броят на различните начини, по които дъски 3×2 и 3×4 могат да се покрият с домина, е съответно 3 и 11. Да означим с b_n броят на начините, по които дъска $3 \times (2n + 1)$ без едно ъглово поле може да се покрие с домина. Да разгледаме горното дясно квадратче на дъска $3 \times 2n$.

Случай 1. Нека то е покрито с хоризонтално домино. Ако долното квадратче също е покрито с хоризонтално домино, за долните две квадратчета имаме единствена възможност и в този случай останалата част може да се покрие по a_{n-1} начина. Когато долното квадратче е покрито с вертикално, останалата част може да се покрие по b_{n-1} начина.

Случай 2. Нека това квадратче е покрито с вертикално домино. За долното дясно квадратче сега има единствена възможност да е покрито с хоризонтално домино и останалата част на дъската може да бъде покрита по b_{n-1} начина.

От горните ръзсъждения следва, че $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$.

Аналогично, разглеждайки дъска $3 \times 2n$ без горното дясно квадратче и начините, по които може да се покрие квадратчето под него, получаваме и връзката $b_n = a_n + b_{n-1}$. Изключвайки b_{n-1} от двете равенства, намираме $2b_n = 3a_n - a_{n-1}$ и тогава

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} = a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_{n-2}.$$

б) Да разгледаме вертикална права l , която разделя дъската на две равни части. Всяка от тези части представлява таблица $3 \times n$.

Когато $n = 2t + 1$ е нечетно число, при всяко покритие на голямата дъска, правата l ще се пресича от нечетен брой хоризонтални домина. Ако тези домина са три, всяка от двете останали части (дъска с размери $3 \times 2t$) може да се покрие по a_t начина. Следователно имаме точно a_t^2 начина да покрием цялата дъска. Когато има само едно хоризонтално домино, което пресича l , лесно се вижда, че то не може да е в средния ред. Когато то е в горния или долния ред всяка от двете останали части може да се покрие по точно b_t начина и следователно цялата дъска може да се покрие по $2b_t^2$ начина. Окончателно $a_n = a_t^2 + 2b_t^2$.

Когато $n = 2t$ е четно число, броят на хоризонталните домина, пресичащи l е четен, т.е. е нула или две. Броят на покритията на цялата дъска без пресичане на l е a_t^2 , а броят на покритията с точно две пресичания (лесно се вижда, че двете домина трябва да са едно до друго и това е възможно по точно два начина) е $2b_{t-1}^2$. В този случай получихме $a_n = a_t^2 + 2b_{t-1}^2$.

Задача 12.1. Да се намерят всички естествени числа k , такива че всяко реално число x удовлетворява равенството

$$\sin^k x \cos kx + \cos^k x \sin kx = \frac{3}{4} \sin(k+1)x.$$

Отговор. $k = 3$.

Задача 12.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които всяко решение на неравенството

$$(1) \quad (\log_2 x)^2 + (x - 2) \log_2 x \leq x - 1$$

е решение и на неравенството

$$(2) \quad 2^x + 2^{2-x} \leq a.$$

Решение. Неравенството (1) има смисъл при $x > 0$ и се преобразува във вида $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + x - 1) \leq 0$. Имаме $\log_2 x - 1 \leq 0$ при $0 < x \leq 2$, $\log_2 x - 1 \geq 0$ при $x \geq 2$ и $\log_2 x + x - 1 \leq 0 + 1 - 1 = 0$ при $0 < x \leq 1$, $\log_2 x + x - 1 \geq 0 + 1 - 1 = 0$ при $x \geq 1$. Сравнявайки знаците на двата множителя, заключаваме, че решенията на (1) са $x \in [1, 2]$.

Полагаме $y = 2^x > 0$ и (2) приема вида (3) $f(y) = y^2 - ay + 4 \leq 0$. Освен това $x \in [1, 2]$ е равносилно с $y \in [2, 4]$. Следователно всяко решение на (1) е решение и на (2) точно тогава, когато всяко число $y \in [2, 4]$ е решение на (3). За квадратното неравенство (3) това е равносилно с $f(2) \leq 0$, $f(4) \leq 0$. Оттук $a \geq 4$, $a \geq 5$ и следователно търсените стойности са $a \in [5, +\infty)$.

Задача 12.3. Нека $a_1, a_2, \dots$ е такава редица от положителни числа, че $2a_{n+1} \geq a_n + a_{n+2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че редицата с общ член $\frac{a_n}{n}$ е сходяща.

Решение. За $b_n = \frac{a_n}{n}$ условието приема вида

$$(*) \quad n(b_{n+1} - b_n) \geq (n+2)(b_{n+2} - b_{n+1}).$$

Ако $b_{k+1} \leq b_k$ за някое k , следва, че $b_{n+1} \leq b_n$ за всяко $n \geq k$. Значи редицата $(b_n)_{n \geq k}$ е намаляваща и ограничена отдолу (от 0), и следователно е сходяща.

Нека сега $b_{n+1} > b_n$ за всяко n . Това е еквивалентно на $b_n < c_n := a_{n+1} - a_n$. Понеже $c_{n+1} \leq c_n$, следва, че редицата (b_n) е растяща и ограничена отгоре, и следователно е сходяща.

Забележка. Може да се докаже, че редиците b_n и c_n имат обща граница, което следва и от теоремата на Шолц.

Задача 12.4. Описаната около $\triangle ABC$ окръжност k има диаметър 1. Да се докаже, че триъгълникът е равностранен тогава и само тогава, когато за всяка точка M от вътрешността на k ,

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} > 5.$$

Решение. Нека първо $\triangle ABC$ е равнобедрен. Лесно се вижда, че поне един от $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle CMA$ е не по-малък от 120° , например $\sphericalangle AMB$. Имаме, че

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} > \frac{4}{MA + MB} + 1.$$

Остава да съобразим, че $MA + MB \leq 1$, понеже

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos \sphericalangle AMB \\ &\geq MA^2 + MB^2 + MA \cdot MB \geq \frac{3}{4}(MA + MB)^2. \end{aligned}$$

Обратно, ако е в сила даденото неравенство, то е в сила и неравенството $\geq$ за всяка точка $M \in k$. Следователно е достатъчно да покажем, че ако γ е най-големият ъгъл и M е средата на дъгата AB (несъдържаща C), то

$$S = \frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \leq 5,$$

като равенство се достига при $\gamma = 60^\circ$. Имаме, че

$$MA = MB = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad MC = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ако $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$, то $MC > MA = MB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $S < 3\sqrt{2} < 5$. Иначе $\alpha - \beta \leq 3\gamma - \pi < \frac{\pi}{2}$ и следователно

$$S \leq \frac{2}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{3\gamma}{2}} = \frac{2}{t} + \frac{1}{t(3 - 4t^2)} = T,$$

където $t = \sin \frac{\gamma}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Неравенството $T \leq 5$ е еквивалентно на очевидното $(2t - 1)(10t^2 + t - 7) \leq 0$, като равенство се достига при $t = \frac{1}{2}$.

Задачите са предложени от: Иван Тонов – 8.1, 8.3; Ивайло Кортенов – 8.2, 8.4; Петър Бойваленов – 9.1, 9.3; Николай Белухов – 9.2, 9.4, 10.3; Стоян Боев – 10.1; Александър Макелов и Стоян Боев – 10.2, Александър Макелов – 10.4; Емил Колев – 11.1, 11.2; Александър Иванов – 11.3, 11.4; Киро Чакърян – 12.1, 12.2; Николай Николов – 12.3, 12.4.

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

ДИМИТЪР ДИМИТРОВ

На 11.12.2010 г. в София, Плевен, Варна, Русе, Пловдив, Гоце Делчев, Сандански, Кюстендил, Монтана, Ловеч, Ботевград, Разград, Ямбол, Бургас, Велико Търново, Димитровград, Перник и Сливен се проведе поредното Коледно математическо състезание, организирано от секция „Изток“ към СМБ.

Два месеца преди състезанието се състоя работна среща с експерти и изтъкнати учители от съответните райони, на която бяха обсъдени и редактирани състезателните теми.

Регламент на задачите от 4. до 6. клас. Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. „Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 — с по 5 точки, задачите от 7 до 9 — с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

Ето и задачите от 4. до 7. клас.

4. клас

1. Да се намери числената стойност на A , ако $A = 1730 + x$, където x е неизвестното число от равенството $x - 56 = 224$.

А) 1 898 Б) 4 530 В) 2 010 Г) друг отговор

2. Сборът от годините на двама приятели преди 5 години е бил 5. Какъв ще бъде сборът от годините им след 5 години?

А) 15 Б) 25 В) 10 Г) друг отговор

3. Бързият влак за Бургас тръгнал от София с 282 пътници. На първата спирка – гара Златица, слезли 35 души и се качили 47. На следващата спирка – гара Пирдоп, слезли 52 души и се качили 56. С колко пътници е продължил влакът след Пирдоп?

А) 266 Б) 472 В) 298 Г) друг отговор

4. Върху права линия са разположени точки, така че разстоянието между две съседни е 7 см, а разстоянието между крайните е 728 см. Да се намери броят на точките.

А) 14 Б) 15 В) 104 Г) друг отговор

5. Малкото братче на Митко се учило да пише и написало 215 букви една след друга така: МАМОТАТИМАМОТАТИМАМОТАТИМАМ..... Коя буква стои на 198-о място?

А) Т Б) О В) И Г) друг отговор

6. Ако увеличим дължината на даден правоъгълник с 3 см, а широчината му — с 5 см, ще получим квадрат с лице 81 кв. см. Да се намери лицето на правоъгълника.

- А) 15 кв. см Б) 24 кв. см В) 168 кв. см Г) друг отговор

7. В Москва в деня на зимното слънцестоене (23 декември) денят е с 10 часа по-къс от нощта. Да се определи кога изгрява Слънцето, ако то залязва в 15 часа 48 минути.

- А) 5 ч 48 мин Б) 6 ч 48 мин В) 7 ч 48 мин Г) друг отговор

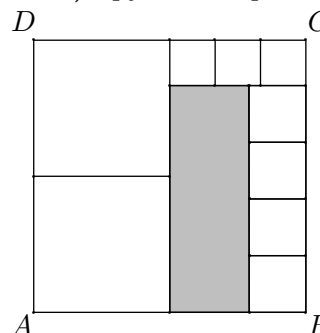
8. В една кутия има 70 топки за украса на коледна елха. От тях 20 са сини, 20 червени, 20 жълти и останалите 10 — бели и зелени. Какъв най-малък брой топки трябва да извадим от кутията, за да сме сигурни, че между тях има поне 10 от един и същи цвят?

- А) 38 Б) 40 В) 10 Г) друг отговор

9. В три бидона имало общо 30 литра мляко. След като от първия прелели във втория 4 л, от втория прелели в третия 2 л и от третия в първия 3 л се оказало, че в трите бидона има едно и също количество мляко. Да се намери по колко литра мляко е имало първоначално във всеки от трите бидона.

- А) 9, 12, 9 Б) 9, 8, 13 В) 11, 8, 11 Г) друг отговор

10. Даден е квадратът $ABCD$ със страна 24 см. Във вътрешността му са начертани последователно два еднакви квадрата, опиращи се до страната AD , три еднакви квадрата, опиращи се до страната CD , четири еднакви квадрата, опиращи се до страната BC . Обиколката на оцветения правоъгълник ли е по-голяма или обиколката на един от първите два квадрата?



Отговори. 1. В; 2. Б; 3. В; 4. Г (105 точки); 5. Г (буквата А); 6. Б; 7. Г (8 ч 48 мин); 8. А; 9. В.

10. Всеки от първите два квадрата има страна $24 : 2 = 12$ см и обиколка $4 \cdot 12 = 48$ см. Вторите три квадрата имат страна $12 : 3 = 4$ см. Тогава дължината на правоъгълника е $24 - 4 = 20$ см. Последните четири квадрата са със страна $20 : 4 = 5$ см. Тогава широчината на правоъгълника е $12 - 5 = 7$ см, а обиколката му е $2 \cdot 20 + 2 \cdot 7 = 54$ см. Тъй като $48 < 54$, то обиколката на квадрата е по-малка от обиколката на оцветения правоъгълник.

5. клас

1. Колко от резултатите $3,81 + 2,18 =$; $12,09 - 5,9 =$; $19,70,3 =$; $3,5 + 7,9 - 5,39 =$; $2,945 : 0,5 =$ са по-големи от 5,9 и по-малки от 6,1?
А) 2 Б) 4 В) 3 Г) друг отговор
2. Ако $5,795 - (x - 89,6) = 4,095$, то x е:
А) 91,3 Б) 9,13 В) 87,9 Г) друг отговор
3. През първия ден на поход Иванчо изминал 9,5 км, през втория ден – с 2,6 км повече от първия, а през третия – със 700 метра по-малко от втория ден. За трите дни Иванчо е изминал:
А) 23,5 км Б) 33 км В) 21,6 км Г) друг отговор
4. Сборът на 107 естествени числа е 108. Произведението на тези числа е:
А) 1 Б) 2 В) 105 Г) 106
5. Три кокошки за три дни снасят три яйца. Колко яйца ще снесат шест кокошки за шест дни?
А) 6 Б) 12 В) 18 Г) 36
6. От 4-метрова дъска са отрязани две парчета по 1,3 метра и още две с по 70 см по-малки. От четирите парчета е направена правоъгълна рамка, обиколката на която е:
А) 3,2 м Б) 3,8 м В) 2,5 м Г) друг отговор
7. Петър имал 30 монети по 10 ст. и по 20 ст. на обща стойност 4,10 лв. Той похарчил 2,30 лв., използвайки 15 монети. Колко монети по 20 ст. са му останали?
А) 4 Б) 2 В) 5 Г) друг отговор
8. Правоъгълник с обиколка 14 дм е разделен на четири квадрата. Лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е:
А) 10 кв.см Б) 120 кв.см В) 1200 кв. см Г) 784 кв.см
9. От Русе за Силистра тръгнала лодка със собствена скорост 9,4 км /ч. В същото време от Русе за Видин тръгнал кораб със собствена скорост 23,2 км/ч. На какво разстояние един от друг ще бъдат лодката и корабът след 3,4 часа, ако скоростта на течението е 2,5 км/ч?
А) 110,84 км Б) 1108,4 км В) 32,6 км Г) друг отговор
10. Дадени са пет пакета, за които се знае, че: първият и вторият тежат 120 кг, вторият и третият тежат 135 кг, третият и четвъртият тежат 115 кг, четвъртият и петият тежат 80 кг, а първият, третият и петият тежат 160 кг. Колко тежи всеки пакет?

Отговори. 1. В; 2. А; 3. Б; 4. Б; 5. Б; 6. Б; 7. Г (3); 8. Г; 9. А.

10. Означаваме теглото на петия пакет с x . Третият е с тегло $x + 35$, а първият — $x + 20$. От уравнението $3x + 55 = 160$ намираме $x = 35$. След заместване в условието се получават теглата на пакетите: 55 кг, 65 кг, 70 кг, 45 кг, 35 кг.

6. клас

1. От числото -60 извадете най-малкото цяло число, което е по-голямо от числото -2 , 6. Полученото число умножете с противоположното на $\frac{1}{29}$.

Числото, което се получава, е:

- А) $\frac{57}{29}$ Б) $\frac{62}{29}$ В) $\frac{63}{29}$ Г) друг отговор

2. Три дни фирма произвеждала чанти. През първия ден били изработени 750 чанти, а през втория — с 16% повече. Колко чанти е произвела фирмата през третия ден, ако $\frac{15}{16}$ от броят им е равен на броя на чантите, произведени през втория ден?

- А) 128 Б) 864 В) 928 Г) друг отговор

3. В резервоар с форма на куб и пълен до половината с вода се съдържат 4000 л вода. На колко квадратни метра е равно лицето на дъното на резервоара?

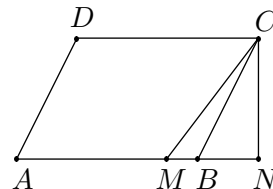
- А) 2 Б) 4 В) 16 Г) друг отговор

4. Точката M върху числовата ос е образът на най-голямото цяло двуцифрено отрицателно число, точката N е образът на най-малкото цяло двуцифрено положително число. Точката P е между точките M и N и дължината на отсечката MP е $\frac{3}{5}$ от дължината на отсечката PN . На кое число е образ точката P ?

- А) $-7,5$ Б) $-2,5$ В) 4 Г) друг отговор

5. На чертежа $ABCD$ е успоредник, а $ANCD$ е правоъгълен трапец, $AB = 2MN$ и лицето на $\triangle MNC$ е 5 cm^2 . На колко квадратни сантиметра е равно лицето на успоредника $ABCD$?

- А) 10 Б) 15
В) 20 Г) друг отговор



6. Стойността на израза $\frac{10^{2010}}{2^{2008} \cdot 5^{2009}} + \frac{2^9 + 2^3}{5 \cdot 13} - \frac{3^7 \cdot 9^{16}}{81^9}$ е:

- А) 1 Б) 9 В) 25 Г) друг отговор

7. В 10 часа двама велосипедисти тръгнаха един срещу друг от пунктове A и B . Всеки от тях се движил с постоянна скорост. Първият пристигнал в B в 13 часа, а вторият пристигнал в A в 13 часа и 45 минути. В колко часа велосипедистите са се срещнали?

- А) 11 часа и 5 мин. Б) 11 часа и 15 мин.
В) 11 часа и 30 мин. Г) друг отговор

8. Георги имал 160 еднакви кубчета с дължина на ръба 1 см. С част от тях той построил възможно най-голям куб. От останалите (може и не всички) отново построил възможно най-голям куб и го поставил върху първия. Да се намери лицето на повърхнината на полученото тяло.

- А) 170 cm^2 Б) 186 cm^2 В) 204 cm^2 Г) друг отговор

9. На три картончета са написани двуцифрените числа 37, 96 и x . Ако се съберат всички шестцифрени числа, които се получават при поставянето на картончетата в различен ред едно до друго, ще се получи сбор 3717168. Кое е числото x ?

- А) 26 Б) 36 В) 46 Г) друг отговор

10. Математическо списание излиза всеки месец по веднъж и публикува във всеки брой по 5 конкурсни задачи. Те се номерират последователно с числата 1, 2, 3, ... още от първия брой на списанието. В брой 8 от 1987 година са публикувани задачи с номера 1056, 1057, 1058, 1059 и 1060. През коя година е публикувана задача, чийто номер съвпада с годината на публикуване?

Отговори. 1. Г (2); 2. В; 3. Б; 4. Б; 5. В; 6. А; 7. Г (11 ч. 40 мин.); 8. Б; 9. Г (51).

10. До края на 1987 са публикувани още 20 задачи в оставащите 4 броя. Така брой 1, 1988 година ще започне с публикуването на задача $1060 + 20 + 1 = 1081$. Всяка година номерата на задачите се увеличава с $12.5 = 60$, а номерата на годините с 1. Ако от 1988 година отчетем n години, то номерата на задачите ще са увеличени от 1080 до $1080 + 60n$, а годините $1988 + n$. Тогава се търси такова n , за което $1080 + 60n$ е по-голямо от $1987 + n$. Чрез проверка за $n = 1, 2, \dots$ се установява, че за $n = 16$ е изпълнено $1080 + 60 \cdot 16 = 2040$ и е по-голямо от $1987 + 16 = 2003$. Това означава, че през 2003 година са публикувани задачите с номера от 1981 до 2040, а това включва и задачата с номер 2003.

Регламент. Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор от четири възможни. За част от задачите от 16 до 40 също са дадени четири възможни отговора. На останалите задачи не са дадени отговори и те трябва да се намерят. Всички отговори се попълват в листа за отговори. За всяка тестова задача се зачертава със знак „X“ отговорът, който се приема за верен. Отговорите на останалите задачи се записват на празните места в листа за отговори. Задачите от 1 до 15 се оценяват с по 1 точка, задачите от 16 до 30 — с по 2 точки, задачите от 31 до 40 — с по 3 точки. Неправилните решения и задачите без отговор се оценяват с по 0 точки.

Времето за решаване е 120 минути.

1. Броят на всички естествени числа, които са едновременно делители на числата 28 и 42, е равен на:

- А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

2. Многочленът $8a^3b^6 - c^3$ се разлага на множители по следния начин:

- А) $(4a^2b + c)(4ab^2 - c)$ Б) $(2ab - c^2)(4a^2 - c)$
В) $(2ab + c)(2ab - c^2)$ Г) $(2ab^2 - c)(4a^2b^4 + 2ab^2c + c^2)$

3. Лъчът OL разполовява $\sphericalangle AOB = 72^\circ$, а лъчът OC разделя $\sphericalangle AOB$ на два ъгъла, единият от които е с 10° по-голям от другия. Да се намери $\sphericalangle COL$.

- А) 15° Б) 5° В) 10° Г) 12°

4. Стойността на израза $2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{3}}}$ е равна на:

- А) $2\frac{2}{3}$ Б) $2\frac{7}{9}$ В) $3\frac{2}{7}$ Г) $2\frac{8}{11}$

5. Колко са целите числа x , за които изразът $x^2 - 5$ приема отрицателна стойност?

- А) 6 Б) 2 В) 5 Г) 1

6. Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник, а произведението на катетите му е 10. Ако обемът на пирамидата е равен на 30 cm^3 , нейната височина е равна на:

- А) 3 cm Б) 5 cm В) 6 cm Г) 18 cm

7. Турист изминал пътя от Симеоново до Княжево за 2 часа, а на връщане намалил скоростта си с 2 км/ч и изминал същото разстояние за 3 часа. Пътят от Симеоново до Княжево има дължина:

- А) 10 km Б) 12 km В) 11 km Г) 8 km

8. Стойността на израза $\frac{5^{6+n}}{5^{4+n}} - 2^{2+k} \cdot 2^{3-k}$ е:

- А) 7 Б) -7 В) 5 Г) -5

9. Ако единият от ъглите на триъгълник е равен на удвоения сбор на другите два ъгъла, то триъгълникът е:

- А) тъпоъгълен Б) правоъгълен
В) остроъгълен Г) равнобедрен

10. Колко са дробите със знаменател $2 \cdot 5 \cdot 11^2$, които са между $\frac{9}{11}$ и $\frac{10}{11}$?

- А) 99 Б) 105 В) 109 Г) 111

11. В две цистерни има по 120 л мляко. От едната продали 33 %, а от другата — 47% от млякото. Колко литра мляко е останало общо в двете цистерни?

- А) 96 л Б) 114 л В) 144 л Г) 108 л

12. Сборът от дължините на две от страните на триъгълник е 13 cm, а височините към тях са 12 cm и 14 cm. Да се намери лицето на триъгълника.

- А) 42 cm^2 Б) 168 cm^2 В) 156 cm^2 Г) 84 cm^2

13. Резултатът от разлагането на многочлена $(2a-b)^2 - 4b^2$ на множители е:

- А) $(2a-2b)(2a+2b)$ Б) $(2a+b)(2a-2b)$
В) $(2a-b)(a+2b)$ Г) $(2a-3b)(2a+b)$

14. Лицето на стената на куб е 25 cm^2 , а на стената на друг куб — 625 cm^2 . Обемите на двата куба се отнасят както:

- А) 1 : 125 Б) 1 : 25 В) 1 : 15 Г) 1 : 5

15. Колко са целите числа, за които $|x| \leq 3$?

- А) 3 Б) 4 В) 6 Г) 7

16. Да се намери стойността на израза

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{29}\right) \left(1 - \frac{1}{30}\right).$$

17. Най-малкото от числата 3^6 , 5^4 , 10^3 , 26^2 е:

- А) 3^6 Б) 5^4 В) 10^3 Г) 26^2

18. Три от стените на правоъгълен паралелепипед имат периметри 16 cm, 22 cm и 26 cm. Да се намери обемът на паралелепипеда.

19. Ако уравнението $x^2 - (a + 2)x + 5a - 1 = 0$ има корен $x = 1$, то стойността на параметъра a е:

- А) $-\frac{1}{3}$ Б) 0 В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{2}$

20. Разликата на квадратите на две числа е 175, а разликата на самите числа е 5. По-малкото число е:

- А) 8 Б) 15 В) 20 Г) 35

21. Дължините на страните на правоъгълник са цели числа, а лицето му е 20 cm^2 . Каква е най-малката възможна стойност на обиколката на правоъгълника?

- А) 18 cm Б) 24 cm В) 32 cm Г) 42 cm

22. Произведението на две естествени числа е равно на 192. Ако едното число се намали 4 пъти, а другото се увеличи с 18, стойността на произведението се запазва. Да се намери сборът на двете числа.

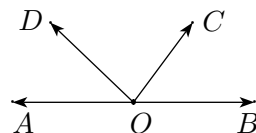
- А) 38 Б) 60 В) 28 Г) 40

23. Да се приведе в нормален вид изразът

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1).$$

24. На чертежа е дадено, че $\angle AOC = 130^\circ$ и $\angle BOD = 110^\circ$. Отношението $\angle AOB : \angle COD$ е:

- А) 11 : 6 Б) 2 : 1
В) 3 : 1 Г) 12 : 7



25. Да се намерят естествените делители на числената стойност на израза $33^2 - 14^2$.

26. За да може многочленът $8a^2 + ay - 72a + A$ да се разложи на произведение на двучлени чрез групиране, на мястото на A трябва да се постави изразът:

- А) $9y$ Б) $-9y$ В) $72y$ Г) $8y$

27. Два от ъглите в триъгълник се отнасят както 1 : 9, а третият ъгъл е $\frac{4}{5}$ от сумата им. Да се намерят външните ъгли на триъгълника.

28. Най-голямата стойност на израза $A = -x^2 - 2x + 5$ е:

- А) 0 Б) 4
В) 6 Г) няма най-голяма стойност

29. Правоъгълен паралелепипед с размери 4 cm, 6 cm и 8 cm е боядисан, след което е нарязан на кубчета със страна 1 cm. Колко от получените кубчета нямат боядисана стена?

- А) 88 Б) 114 В) 96 Г) 48

30. Диагоналът на даден квадрат е страна на друг квадрат. Отношението на лицата на двата квадрата е:

- А) 4 : 1 Б) 3 : 1 В) 3 : 2 Г) 2 : 1

31. Да се разложи изразът $a^2b - b + ab^2 - a$ на множители и да се намери стойността му за $a = -1\frac{5}{8}$, $b = -\frac{8}{13}$.

32. В математическо състезание Ангел и Васил получили заедно 40 точки, Васил и Милен – 50 точки, Милен и Георги – 90 точки, Георги и Делян – 100 точки, Делян и Ангел – 60 точки. Колко точки е получило всяко от момчетата?

33. Пита кашкавал има форма на правоъгълен паралелепипед с измерения 5 cm, 8 cm и 12 cm. Отрязано е парче с дебелина 3 cm, така че останалото парче да има най-голям обем. Какъв е обемът на останалото парче?

- А) 120 cm³ Б) 240 cm³ В) 360 cm³ Г) 400 cm³

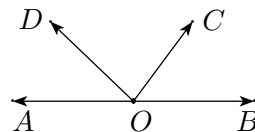
34. Да се определи знакът на числото b , ако за рационалните числа A и B се знае, че са с еднакви знаци и $A = (-11)^{2009}a^3b^5c^7$ и $B = (-2)^{2010}a^{11}b^6c^9$, където a , b и c са ненулеви рационални числа.

35. Ако $a * b = \frac{a^2 - b^2}{ab}$, то $(3a) * (3b)$ е равно на:

- А) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$ Б) $\frac{3a^2 - 3b^2}{ab}$ В) $\frac{a^2 - b^2}{3ab}$ Г) $\frac{9(a^2 - b^2)}{ab}$

36. На чертежа $\sphericalangle AOC = 110^\circ$, а $\sphericalangle BOD = 130^\circ$. Тогава отношението $\sphericalangle COD : \sphericalangle AOB$ е:

- А) 1 : 2 Б) 6 : 11
В) 7 : 12 Г) 1 : 3



37. Многочленът $x^4 + x^2 + 1$ се разлага на множители по следния начин:

- А) $(x^2 + 1)^2$ Б) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
В) $(x - 1)(x^3 + x + 1)^2$ Г) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

38. В тъждеството

$$54a^2b^3 - X = Y(9b^2 - 5a^2)$$

X и Y са неизвестни едночлени. Да се намери едночленът X .

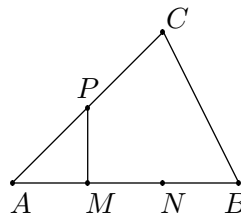
39. Даден е $\triangle ABC$. Точките M и N лежат на страната AB и $AM = MN = NB$, а точката P е средата на страната AC . Ако лицето на $\triangle AMP$ е 2 cm^2 , да се намери лицето на $\triangle ABC$.

А) 12 cm^2

Б) 9 cm^2

В) 6 cm^2

Г) 4 cm^2



40. Ако m и n са различни от 0 рационални числа с еднакви знаци, то изразът $m^3(3n + 1) - mn^2 + mn^2(3n + 1) - m^3$ приема:

А) само неотрицателни стойности

Б) само отрицателни стойности

В) положителни или отрицателни стойности, в зависимост от знаците на m и n

Г) само положителни стойности

Отговори. 1. Б; 2. Г; 3. Б; 4. Г; 5. В; 6. Г; 7. Б; 8. Б; 9. А; 10. В; 11. В; 12. А; 13. Г; 14. А; 15. Г; 16. 0, 3; 17. Б; 18. 120 cm^3 ; 19. Г; 20. Б; 21. А; 22. А; 23. $x^{16} - 1$; 24. В; 25. 1, 19, 47, 893; 26. Б; 27. $170^\circ, 90^\circ, 100^\circ$; 28. В; 29. Г; 30. Г; 31. $(ab - 1)(a + b)$, стойността е 0; 32. 20, 20, 30, 60, 40; 33. В; 34. $b < 0$; 35. А; 36. Г; 37. Г; 38. $30a^4b$; 39. А; 40. Г.

Бележка на редакцията. Отговорът на задача **38.** е непълен. Равенството

$$54a^2b^3 - X = Y(9b^2 - 5a^2) \iff 54a^2b^3 - X = Y \cdot 9b^2 - Y \cdot 5a^2$$

е възможно при:

Случай 1. $54a^2b^3 = Y \cdot 9b^2$ и $X = Y \cdot 5a^2$. Намираме $Y = 6a^2b$ и отгук $X = 30a^4b$.

Случай 2. $54a^2b^3 = -Y \cdot 5a^2$ и $X = -Y \cdot 9b^2$. Намираме $Y = -10, 8b^3$ и $X = 97, 2b^5$.



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

От учебната 2010/2011 г. сп. „Математика“ обявява **награди за победителите** в конкурса: за I. място 800 лв., за II. място 500 лв. и за III. място 200 лв. Наградите са предоставени от фирма „Мехатроника“ – Габрово. За тези награди могат да се състезават само абонати на списанието.

Дейността на **фирма „Мехатроника“ – Габрово** (www.kombis.net) е научно-изследователска, развойна, производствена и инженерингова в областта на технологии и технологично оборудване в електрониката, машиностроенето и системите за автоматизация. „Мехатроника“ изнася машините си в страни от Южна и Северна Америка, Африка, Азия и Европа. Основна ценност за фирмата са хората в нея: знаещи и можещи, с иновативни идеи.

Конкурсът се провежда при следните условия:

Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)

Институт по математика и информатика – БАН

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. За триъгълника ABC е известно, че съществуват точки M , N и P съответно върху AB , BC и CA такива, че вписаната окръжност в $\triangle MNP$ се допира до вписаните окръжности в $\triangle AMP$, $\triangle BMN$ и $\triangle CNP$.

а) Колко може да е $\angle BAC$?

б) Да се докаже, че правите AN , BP и CM се пресичат в една точка.

Задача 2. В една държава има 2011 града, някои от които са свързани с пътища. *Маршрут* между два града наричаме последователност от пътища (като всеки следващ започва от края на предишния), в крайщата на която са тези два града, която не минава два пъти през един и същ град. *Дължина на маршрут* наричаме броя на пътищата в него. Известно е, че за всеки два града маршрутът с най-малка дължина между тях е с нечетна дължина (ако въобще има маршрут между тях!). Един ден президентът решил да запише за всеки два града дължината на най-дългия маршрут между тях. Колко най-много различни числа е записал?

Задача 3. Едно число $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ще наричаме *добро*, ако е изпълнено поне едно от следните две условия:

(1) за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, съществува редица $\{a_i\}_{i=1}^n$, за която $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$ и $ka_i > k-1 + a_{i+1} + \dots + a_{i+k-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-k+1$.

(2) за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, съществува редица $\{b_i\}_{i=1}^n$, за която $1 > b_1 > b_2 > \dots > b_n > 0$ и $kb_i > 1 + (k-1)(b_{i+1} + \dots + b_{i+k-1})$ при $i = 1, 2, \dots, n-k+1$.

Да се намерят всички добри числа.

Срокът за представяне на решенията е 30.03.2011 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОТ БР. 5/2010 Г.

Задача 1. (*заета*) Да се намери необходимо и достатъчно условие за реалните параметри a , b и c , при което уравнението $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ няма решение.

Решение. (*Иван Бистеров, Враца*) При $a = 0$ уравнението става линейно $(b^2 - 1)x = -c(b + 1)$. Лесно се вижда, че то няма решение точно когато $b = 1$ и $c \neq 0$.

При $a \neq 0$ даденото уравнение има решение тогава и само тогава, когато има решение системата

$$(1) \quad \begin{cases} au^2 + bu + c = v \\ av^2 + bv + c = u. \end{cases}$$

Това е така, тъй като ако x_0 е решение на уравнението, то $(x_0, ax_0^2 + bx_0 + c)$ е решение на системата, а ако (u_0, v_0) е решение на системата, то u_0 е решение на даденото уравнение.

Като извадим уравненията в системата (1), получаваме равенството $a(u^2 - v^2) + (b+1)(u-v) = 0 \iff (u-v)(a(u+v) + b+1) = 0$. Следователно системата (1) е еквивалентна на обединението

$$\begin{cases} u = v \\ av^2 + bv + c = u \end{cases} \cup \begin{cases} a(u+v) + b+1 = 0 \\ av^2 + bv + c = u. \end{cases}$$

Първата система няма решение точно когато няма решение уравнението $av^2 + (b-1)v + c = 0$, т.е. при $(b-1)^2 - 4ac < 0$. При това условие и втората система няма решение, тъй като след изразяване $u = -\frac{b+1}{a} - v$ и заместване стигаме до уравнението $av^2 + (b+1)v + c + \frac{b+1}{a} = 0$ с дискриминанта $(b-1)^2 - 4ac - 4 < (b-1)^2 - 4ac < 0$. Така получихме, че даденото уравнение няма решение при $a = 0$, $b = 1$, $c \neq 0$ и при $a \neq 0$, $(b-1)^2 < 4ac$.

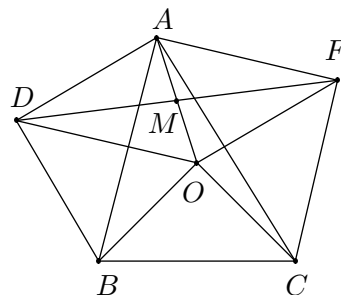
Задача 2. (Емил Карлов) В равнината са дадени точките B и C . Точката A се движи в едната от двете полуравнини, определени от правата BC . Точките D и E са такива, че триъгълниците ADB и AEC са правоъгълни, като $AD = DB$, $EA = EC$, D и C са в различни полуравнини спрямо AB ; B и E са в различни полуравнини спрямо AC . Точката M е средата на отсечката DE . Да се докаже, че правите AM минават през постоянна точка.

Решение. (Мима Настева, Казанлък) Нека точката O е такава, че триъгълникът BCO е правоъгълен и $BO = CO$, като O и A са в една и съща полуравнина относно правата BC . Тогава $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BO} = \sqrt{2}$ и $\angle OBD = \angle CBA$, следователно триъгълниците ABC и DBO са подобни с коефициент на подобие $\sqrt{2}$.

Оттук намираме $DO = \frac{CA}{\sqrt{2}} = AE$.

Аналогично, от подобие $\triangle ABC \sim \triangle EOC$ следва, че $EO = \frac{BA}{\sqrt{2}} = AD$.

От равенствата $DO = AE$ и $EO = AD$ следва, че четириъгълникът $DOEA$ е успоредник. Тогава средата M на DE лежи на AO , т.е. O е постоянната точка, през която минават правите AM при движението на точката A .



Задача 3. (зета) Триангулация на изпъкнал многоъгълник е разделяне на многоъгълника на триъгълници чрез построяване на непресичащи се във вътрешни точки диагонали. Да се определи броят на триангулациите на изпъкнал n -ъгълник, при които всеки триъгълник има обща страна с n -ъгълника.

Решение. (Йордан Йорданов, Варна) Нека многоъгълникът е $A_1 \dots A_n$ за $n \geq 3$ и да разгледаме триангулациите, които включват триъгълник $A_1 A_2 A_t$. Ще разгледаме два случая:

1. Точка A_t не е съседна на A_1 или на A_2 , т.е. $t \neq 3$ и $t \neq n$. Съществуват $n - 4$ такива точки. Тъй като всеки триъгълник от триангулацията има обща страна с многоъгълника, то в многоъгълник $A_s A_{s+1} \dots A_r$ е прекаран точно един от диагоналите $A_s A_{r-1}$ и $A_{s+1} A_r$. Оттук следва, че всички триангулации, удовлетворяващи условието на задачата и включващи триъгълник $A_1 A_2 A_t$ са точно $2^{t-4} 2^{n-t-1} = 2^{n-5}$. Тъй като за t имаме $n - 4$ възможности, то всички триангулации в този случай са $(n - 4) 2^{n-5}$.

2. Точка A_t съвпада с A_n или с A_3 . Аналогично на първия случай получаваме, че броят на търсените триангулации е равен на 2^{n-3} .

Окончателно търсеният брой е равен на

$$(n - 4) 2^{n-5} + 2^{n-3} = n 2^{n-5}.$$



КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2010 г. и бр. 1, 2 от 2011 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2011 г. Американска Фондация за България е определила награден фонд от 1000 лв. за победителите от очния кръг. За тези награди могат да се състезават само абонати на списанието. Условиата за задочния кръг са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

ст. н. с. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)

Институт по математика и информатика – БАН

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

или на e-mail: math_competition@abv.bg във формат pdf.

* * *

Задача 1. Да се намери броят на всички 2011-цифрени числа, кратни на 7, които се записват с помощта на 2010 на брой цифри 1 и една цифра 7.

Задача 2. На дъската са записани числата $4, 14, 24, \dots, 104$. След като изтрили едно от тези числа, сборът на останалите станал кратен на 11. Възможно ли е още веднъж да се изтрие някое от останалите числа така, че сборът на останалите отново да се дели на 11?

Задача 3. Известно е, че трицифрените числа $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ имат общ прост делител p .

а) Да се докаже, че p дели поне едно от числата $a + b + c$, $a - b + c$ и $a - c$.

б) Да се намерят всички възможни стойности на p при $a \neq c$.

Срокът за представяне на решенията е 30.03.2011 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ ОТ
БР. 5/2010 Г.

Задача 1. Да се реши ребусът.

(На различните букви отговарят различни цифри и никоя от буквите не отговаря на 7 или 9.)

C	Л	И	В	Е	Н
	Л	И	В	Е	Н
		И	В	Е	Н
+			В	Е	Н
				Е	Н
					Н
И	С	9	Л	7	Н

Решение. От сбора на единиците следва, че 6. Н завършва на Н. Това е изпълнено точно когато цифрата Н е четна. Най-големият възможен пренос към десетиците е 4 (при $6.8 = 48$), а сборът на този пренос и 5. Е завършва на 7. Следователно цифрата Е е нечетна и има пренос 2 от сбора на единиците. Оттук Н е 4.

Преносът от стотиците към хилядите е най-много 3, а сборът на този пренос и 3. И завършва на 9. Следователно за цифрата И има три възможности $И = 2, 3$ или 6. За тези възможности от сбора на стохилядите (с пренос 1 от десетохилядите) намираме съответно $С = 1, 2$ или 5. Да отбележим, че за да има пренос 1 от десетохилядите, $Л$ е най-малко 4.

Нека $I = 2$, $C = 1$. Тогава от сбора на хилядите няма пренос към десетохилядите и 2. Л завършва на 1, което е невъзможно.

Нека $I = 6$, $C = 5$. Тогава от сбора на хилядите има пренос 1 към десетохилядите и $1 + 2$. L завършва на 5. Следователно L е 2 или 7. Това е невъзможно, защото по условие никоя буква не е 7 и освен това отбелязахме, че L е най-малко 4.

Нека $I = 3$, $C = 2$. Тогава $L = 6$, $B = 1$ и $E = 5$.

И така, отговорът е СЛИВЕН = 263154.

Задача 2. Двучифрените числа от 10 до 99 са записани в някакъв ред $\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, \dots, \overline{a_{90}b_{90}}$. Да се намери числото $\overline{a_1b_1a_2b_2}$, ако $\overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + \dots + \overline{a_{90}b_{90}}$.

Решение. Сборът на всички двуцифрени числа е

$$10+12+\cdots+98+99 = (10+99)+(11+98)+\cdots+(54+55) = 109.45 = 4905.$$

Тогава

$$4905 = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + (\overline{a_3b_3} + \cdots + \overline{a_{90}b_{90}}) = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2}.$$

Като преобразуваме

$$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + 100.\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} = 101.\overline{a_1b_1} + 2.\overline{a_2b_2},$$

получаваме равенството

$$101.\overline{a_1b_1} + 2.\overline{a_2b_2} = 4905.$$

Тъй като $101.49 = 4949 > 4905$, то $\overline{a_1b_1}$ е най-много 48. От друга страна, събираемостта $2.\overline{a_2b_2}$ е четно и не надхвърля $2.99 = 198$, а сборът 4905 е нечетен. Това означава, че другото събираемо $101.\overline{a_1b_1}$ е нечетно и е по-голямо или равно на $4905 - 198 = 4707$. Оттук числото $\overline{a_1b_1}$ е нечетно и е по-голямо или равно на 47.

Следователно $\overline{a_1b_1} = 47$ и намираме $\overline{a_2b_2} = 79$. Числото е 4779.

Задача 3. Да се намерят всички нечетни прости числа p със следното свойство: сборът на всички несъкратими дроби със знаменател p , които са по-големи от 4 и по-малки от 6, е равен на 100.

Решение. Разглежданите дроби са с числител $4p + 1, 4p + 2, \dots, 5p - 1$ и $5p + 1, 5p + 2, \dots, 6p - 1$; тъй като p е просто число, всяка от тях е несъкратима. Сборът на числителите е равен на

$$(4p + 1) + (4p + 2) + \dots + (5p - 1) + (5p + 1) + (5p + 2) + \dots + (6p - 1) =$$

$$= (4p + 1 + 6p - 1) + (4p + 2 + 6p - 2) \dots + (5p - 1 + 5p + 1) = 10p(p - 1),$$

откъдето сборът на разглежданите дроби е

$$\frac{10p(p - 1)}{p} = 10(p - 1) = 100, \text{ следователно } p = 11.$$

ЗАДОЧНА ПОДГОТОВКА ЗА МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

От 2010/11 учебна година фирма „Олимпмат“ ЕООД на Съюза на Математиците в България организира индивидуално задочно обучение за ученици от 3. до 9. клас.

Обучението е ориентирано към ученици с изявени интереси по математика. Целта му е да задълбочи подготовката на участниците в зависимост от индивидуалните им постижения.

Обучението се провежда под формата на електронна кореспонденция, като всеки участник получава няколко (обикновено две) теми на месец. Темите включват теоретичен материал и задачи за самостоятелна работа, като техният брой и съдържание са съобразени с индивидуалния напредък на всеки участник. Участникът получава оценки и коментари на изпратените от него решения.

За повече информация се обръщайте на e-mail: zadchnashkola@gmail.com

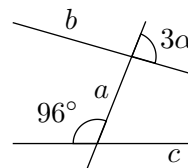
Задачите от 1 до 10 се оценяват с по 2 точки. Задачите от 11 до 25 се оценяват с по 3 точки, задачите от 26 до 28 – с по 5 точки и задачите 29 и 30 с по 10 точки.

ПЪРВИ МОДУЛ

1. Числената стойност на израза $(3a + 1)^2 - (3a - 1)^2$ при $a = \frac{1}{3}$ е:
А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4
2. Ако $M = 2x^2 - 3x + 4$ и $N = 2x^2 + 3x + 6$, то сборът $M + N$ е равен на:
А) $4x^2 - 6x + 10$ Б) $4x^2 + 10$ В) $4x^2 - 6x$ Г) $4x^2 + 6x + 9$
3. Кое от равенствата е тъждество:
А) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ Б) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$
В) $(2x - 1)^2 = 2x^2 - 4x + 1$ Г) $(2x + 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
4. Изразът $x^2 - (x - 1)(x + 1)$ е тъждествено равен на:
А) $x^2 - 1$ Б) $2x^2 - 1$ В) -1 Г) 1
5. Ако $12 - b = 13 - 3a$, то:
А) $a = \frac{1+b}{3}$ Б) $a = \frac{1-b}{3}$ В) $a = \frac{b-1}{3}$ Г) $a = \frac{-b-1}{3}$
6. Сборът на всички цели числа x , за които е вярно неравенството $-14 < x < 14$, е:
А) 6 Б) 10 В) 0 Г) 14
7. Всички решения на неравенството $4x + 5 \geq 0$ могат да се запишат във вида:
А) $x \in \left(-1\frac{1}{4}, \infty\right)$ Б) $x \in \left[-1\frac{1}{4}, \infty\right)$
В) $x \in \left[-1\frac{1}{4}, 0\right)$ Г) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{4}\right]$

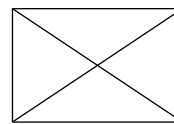
8. На чертежа правата a пресича правите b и c . При каква стойност на α правите b и c са успоредни?

- А) 32° Б) 45°
В) 28° Г) 60°



9. Диагоналите на правоъгълника от чертежа го разделят на триъгълници. Най-големият брой двойки еднакви триъгълници е:

- А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8



10. Даден е равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), в който $\sphericalangle BAD : \sphericalangle BCD = 5 : 7$. Ъглите на трапеца са равни на:

- А) 75° и 105° Б) 60° и 120° В) 50° и 130° Г) 65° и 115°

11. Произведението $(2x + y)(x^2 + xy - y^2)$ е:

- А) $2x^3 + 3x^2y - xy^2 - y^3$ Б) $x^3 + 2x^2y - xy^2 - y^3$
В) $x^3 + xy - y^3$ Г) $2x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3$

12. Многочленът $4x^2 + 4xy + y^2 - 4$ се разлага на множители по следния начин:

- А) $(2x + y + 4)(2x + y - 4)$ Б) $(2x + y - 2)(2x + y + 2)$
В) $(4x + y - 4)(4x + y + 1)$ Г) $(4x^2 + y)(y - 1)$

13. Един баща е с 21 години по-възрастен от сина си, а след три години ще бъде четири пъти по-възрастен от него. Сега годините на бащата са:

- А) 24 Б) 25 В) 26 Г) 27

14. Решението на уравнението $2(x - 1) + 4x - 2(1 - x) = 4$ е:

- А) $x = 0$ Б) $x = -1$ В) $x = 1$ Г) $x = 2$

15. Решение на неравенството $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < \frac{3}{2} - \frac{x}{3}$ е всяко число x , за което:

- А) $x \in \left(3\frac{4}{5}, \infty\right)$ Б) $x \in \left(-\infty, 3\frac{4}{5}\right)$
В) $x \in \left[0, 3\frac{4}{5}\right)$ Г) $x \in \left(0, 3\frac{4}{5}\right)$

16. Коренът на уравнението $|9x - 45| = 0$ е:

- А) $x = -5$ Б) $x = 5$ В) $x = \frac{1}{5}$ Г) $x = -\frac{1}{5}$

17. Кое от посочените уравнения е изпълнено за всяко x ?

А) $x(x+2) = x^2 - 2x$

Б) $x(x-2) = x^2 - 4$

В) $x(x-1) = x^2 - x$

Г) $4x = 0$

18. Решението на уравнението $\frac{2x}{3} - x = \frac{x+2}{4} + 3$ е:

А) $x = 5$

Б) $x = 6$

В) $x = -6$

Г) $x = -5$

19. Сборът на корените на уравнението $|x-2| = 7$ е:

А) 7

Б) 6

В) 5

Г) 4

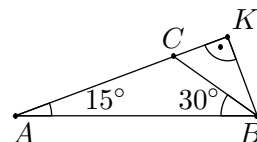
20. Даден е триъгълникът ABC с $\angle BAC = 15^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$. Построен е перпендикулярът BK към правата AC (точката K лежи на правата AC). Ако $BK = 6$ cm, отсечката CK е:

А) 5 cm

Б) 6 cm

В) 7,5 cm

Г) 8 cm



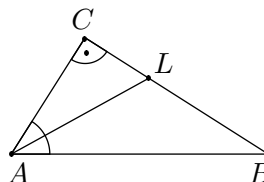
21. В правоъгълния триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) ъгъл BAC е равен на 60° . Построена е ъглополовящата AL ($L \in BC$). Тогава е вярно, че:

А) $CL = AL$

Б) $CL = 2 \cdot BL$

В) $3 \cdot CL = BL$

Г) $2 \cdot CL = AL$



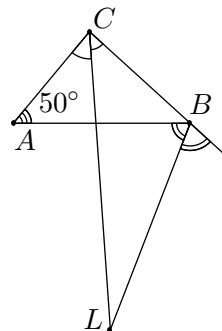
22. На чертежа CL е ъглополовяща на $\angle ACB$, а BL е ъглополовяща на външния ъгъл при върха B на триъгълника ABC . Ако $\angle BAC = 50^\circ$, то градусната мярка на $\angle CLB$ е:

А) 30°

Б) 45°

В) 25°

Г) 70°



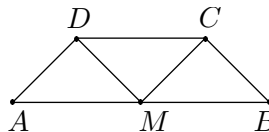
23. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2 \cdot CD$. Точката M е средата на отсечката AB . Ако $DM = CM = CD$, то градусната мярка на $\angle BAD$ е:

А) 65°

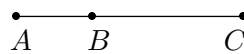
Б) 60°

В) 45°

Г) 30°



24. Две леки коли тръгнаха едновременно съответно от градовете A и B за град C (вж. чертежа).



Средната скорост на първата кола (която е тръгнала от A) е 80 km/h , а на втората — 70 km/h . След 4 часа първата кола настигна втората. Разстоянието между градовете A и B е:

- А) 30 km Б) 40 km В) 45 km Г) 50 km

25. Сборът на осем последователни естествени числа е 1716 . Най-малкото число от тях е:

- А) 211 Б) 220 В) 222 Г) 224

ВТОРИ МОДУЛ

Запишете само отговорите!

26. Цената на една стока е увеличена последователно два пъти с по 20% . С колко процента е увеличена първоначалната цена на стоката?

27. Дадено е уравнението $3(ax - 2) - 5 = 4ax$, където параметърът a е цяло число. Да се намери броят на стойностите на параметъра a , за които коренът на уравнението е естествено число.

28. Даден е ромбът $ABCD$. Построена е ъглополовящата на $\sphericalangle DAC$, която пресича страната DC в точката M така, че $AM = BD$. Да се намери големината в градуси на острия ъгъл на ромба.

Задачи, на които се изисква решение с обосновка

29. Да се реши уравнението $a(3x - 4) - 1 = 4a^2 + x$, в което a е параметър.

30. Точките P и Q са съответно средите на бедрата AC и BC на равнобедрения триъгълник ABC , а CM е височината в същия триъгълник. Нека $\sphericalangle BAC : \sphericalangle PMQ = 5 : 2$. Да се намери разстоянието от точката Q до правата MP , ако $AC = 8 \text{ cm}$.

Отговори

1. Г); 2. Б); 3. Б); 4. Г); 5. А); 6. В); 7. Б); 8. В); 9. Б); 10. А);
11. А); 12. Б); 13. Б); 14. В); 15. Б); 16. Б); 17. В); 18. В); 19. Г); 20. Б);
21. Г); 22. В); 23. Б); 24. Б); 25. А); 26. 44% ; 27. 2 ; 28. 72° ; 29. $x = \frac{(2a+1)^2}{3a-1}$
при $a \neq \frac{1}{3}$, няма решение при $a = \frac{1}{3}$; 30. 2 cm .

КРАТКИ РЕШЕНИЯ

29. Даденото уравнение записваме във вида

$$(3a - 1)x = 4a^2 + 4a + 1 \iff (3a - 1)x = (2a + 1)^2.$$

Ако $3a - 1 \neq 0$, т. е. $a \neq \frac{1}{3}$, то $x = \frac{(2a + 1)^2}{3a - 1}$.

Ако $3a - 1 = 0$, т. е. $a = \frac{1}{3}$, то уравнението приема вида $0x = \frac{25}{9}$. Това

уравнение няма решение. Следователно при $a = \frac{1}{3}$ даденото уравнение няма решение.

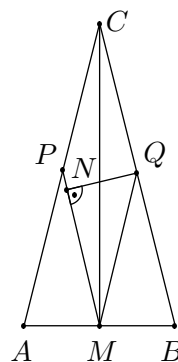
30. Отсечката MP е медиана към хипотенузата в правоъгълния $\triangle ACM$ и следователно го разделя на равнобедрените триъгълници AMP и CMP . Освен това очевидно $\triangle CMP \cong \triangle CMQ$, така че $\angle CMP = \frac{1}{2} \angle PMQ$. Тогава, ако $\angle PMQ = 2x$, $\angle BAC = 5x$, то $\angle CMP = x$, $\angle AMP = 5x$. Имаме

$$\angle AMP + \angle CMP = 5x + x = 90^\circ,$$

откъдето $x = 15^\circ$. Следователно $\angle PMQ = 30^\circ$.

Нека QN е перпендикулярът от Q към MP ($N \in MP$). От това, че $\angle PMQ = 30^\circ$, следва, че $\triangle MQN$ е правоъгълен с ъгъл 30° . Тогава $QN = \frac{1}{2}MQ$, а от друга страна $MQ = \frac{1}{2}BC$ като медиана към хипотенузата в правоъгълния $\triangle BCM$. Тъй като $BC = AC$, за търсеното разстояние QN получаваме

$$QN = \frac{1}{4}AC = 2 \text{ cm.}$$



На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Кое от следните числа е най-голямо:

- А) $\frac{2}{3}$ Б) 0,67 В) $\frac{9}{13}$ Г) 0,7?

2. Изразът $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{x + 1}$, при $x \neq -1$ и $x \neq -2$ е тъждествено равен на:

- А) $-\frac{1}{x + 2}$ Б) $-\frac{1}{x + 1}$ В) $\frac{1}{x + 2}$ Г) $-\frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2}$

3. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $2x^2 + x - 2$, то стойността на израза $2x_1 + 2x_2 - x_1x_2$ е:

- А) 2 Б) -1 В) 0 Г) -2

4. Кое от следните уравнения има корени с различни знаци:

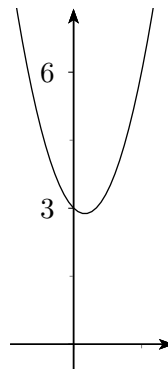
- А) $x^2 + 4x + 3 = 0$ Б) $x^2 + 3x - 1 = 0$
В) $x^2 - 3x + 1 = 0$ Г) $-x^2 + 3x - 1 = 0$?

5. Решенията на неравенството $2x^2 + 5x + 3 \leq 0$ са:

- А) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ Б) $\left[-\frac{3}{2}, -1\right)$
В) $[-1, \infty)$ Г) $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$

6. Параболата от чертежа е графика на функцията:

- А) $y = x^2 + x + 3$ Б) $y = 2x^2 - x + 3$
В) $y = 2x^2 + x + 1$ Г) $y = -x^2 - 3x - 2$



7. Първият член на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$, за която $a_3 = 4$ и $a_6 = 5,5$ е:

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5

8. Стойността на израза $\log_2 4 + \log_3 \frac{1}{9} + \log_4 1$ е равна на:

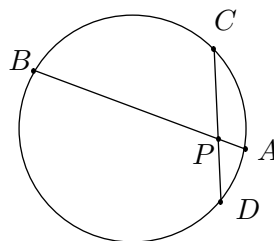
- А) 0 Б) 1 В) -1 Г) 3

9. Дефиниционната област на функцията $f(x) = \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2 + 4x + 3}$ е:

- А) $x \geq -3$ Б) $x \neq -3, x \neq -1$
В) $x > -3$ Г) $x > -3, x \neq -1$

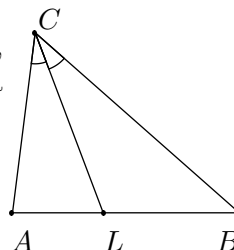
10. На чертежа хордите AB и CD се пресичат в точка P . Ако $AP = 2$ cm, $BP = 10$ cm, $CP > DP$ и $CD = 9$ cm, то отсечката CP има дължина:

- А) 5 cm Б) 4 cm
В) 8 cm Г) 9 cm



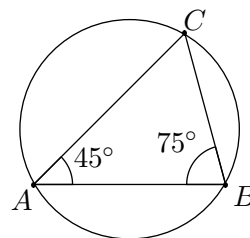
11. В триъгълник ABC е известно, че $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm и $CA = 4$ cm. Ако CL е ъглополовящата на $\angle ACB$, то дължината на отсечката AL е:

- А) 1 cm Б) $\frac{3}{2}$ cm
В) 2 cm Г) 3 cm



12. Радиусът на описаната окръжност на триъгълник ABC , за който $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 75^\circ$, е $R = 2\sqrt{3}$ cm. Дължината на страната AB е:

- А) $\sqrt{3}$ cm Б) $2\sqrt{3}$ cm
В) $3\sqrt{3}$ cm Г) 3 cm



13. В триъгълник ABC е известно, че $AC = 2$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm и $AB = 1$ cm. Ъгъл ACB е равен на:

- А) 45° Б) 60° В) 30° Г) 90°

14. Вероятността при хвърляне на зар да са падне число, което се дели на 2 е равна на:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{2}$

15. В геометрична прогресия петият член е 27 пъти по-голям от втория член. Ако третият член е равен на 18, то първият член на прогресията е равен на:

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 9

16. Ако $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \alpha$ е равен на:

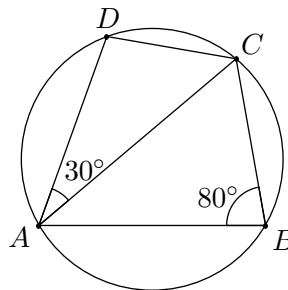
- А) $\frac{1}{5}$ Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{3}{4}$ Г) $\frac{3}{5}$

17. Вероятност на случайно събитие не може да бъде числото:

- А) $\frac{12}{13}$ Б) $\log_3 4$ В) $\sin 73^\circ$ Г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

18. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, като $\sphericalangle ABC = 80^\circ$ и $\sphericalangle DAC = 30^\circ$. Ъгъл ACD е равен на:

- А) 30° Б) 40°
В) 50° Г) 60°



19. Медианата на статистическия ред 1, 2, 2, 3, 5, 6, 7 е:

- А) 4 Б) 3
В) 5 Г) 6

20. По колко начина в три различни плика може да се сложи по една картичка, ако разполагаме с 5 различни картички?

- А) 120 Б) 60 В) 15 Г) 8

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Да се реши уравнението $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1) - 6 = 0$.

22. По колко различни начина от 6 момичета и 8 момчета може да се избере отбор от 2 момичета и 3 момчета?

23. Да се намери страната AB на триъгълник ABC , за който $AC = 3$ cm, $BC = 7$ cm и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

24. Ако $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha \in [0, \pi]$, да се намери α .

25. Сборът на първите три члена на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$ е равен на сбора на следващите два члена. Ако $a_1^2 = 2a_5$ да се намери a_{2011} .

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Да се намери бедрото на равнобедрен трапец $ABCD$ с основи AB и CD , за който $AB = 14$ cm, $CD = 4$ cm и $BD = 15$ cm.

27. Да се реши системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

28. Колко различни шестбуквени думи могат да се съставят от буквите а, б и в, така че всяка буква да се среща поне един път?

Отговори

1. Г); 2. А); 3. В); 4. Б); 5. Г); 6. Б); 7. Б); 8. А); 9. Г); 10. А); 11. В); 12. Г); 13. В); 14. Г); 15. Б); 16. Г); 17. Б); 18. В); 19. А); 20. Б); 21. $x = \pm 2$; 22. 840; 23. $AB = 8$ cm; 24. $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 25. $a_{2011} = 2014$; 26. 13 cm; 27. (1, 2), (-1, -2), (2, 1) и (-2, -1); 28. 540.

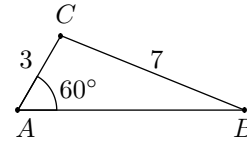
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 21 ДО 28

21. Полагаме $y = x^2 - 1$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 - y - 6 = 0$. Корените са $y_1 = 3$ и $y_2 = -2$. Оттук намираме $x^2 = 4$ или $x^2 = -1$. Тъй като $x^2 \geq 0$, то $x^2 = 4$, откъдето $x = \pm 2$.

22. От 6 момичета могат да се изберат две по $\binom{6}{2} = \frac{6.5}{1.2} = 15$ начина. От 8 момчета могат да се изберат три по $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$. От правилото за умножение следва, че 2 момичета и 3 момчета могат да се изберат по $15.56 = 840$.

23. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB.\cos \sphericalangle BAC.$$



След заместване $BC=7$, $AC=3$ и $\cos \sphericalangle BAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, получаваме $AB^2 - 3AB - 40 = 0$. Корените на квадратното уравнение $x^2 - 3x - 40 = 0$ са $x_1 = 8$ и $x_2 = -5$. Тъй като $AB > 0$, то търсеният отговор е $AB = 8$ cm.

24. *Първи начин.* От формулата $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ получаваме $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = 1$. Тъй като $\alpha \in [0, \pi]$, то $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Втори начин. Тъй като $\sqrt{2} > 1$, то $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$. Записваме равенството във вида $\sin \alpha = \sqrt{2} - \cos \alpha$. Повдигаме на квадрат и получаваме

$$(1) \quad \sin^2 \alpha = 2 - 2\sqrt{2} \cos \alpha + \cos^2 \alpha.$$

От тъждеството $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ изразяваме $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ и заместваме в (1). Получаваме квадратното уравнение $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$, където $x = \cos \alpha$.

То е еквивалентно на $(\sqrt{2}x - 1)^2 = 0$, откъдето $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Оттук намираме и $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и следователно $\alpha = 45^\circ$.

25. От формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$ за $n = 2, 3, 4, 5$ след заместване в

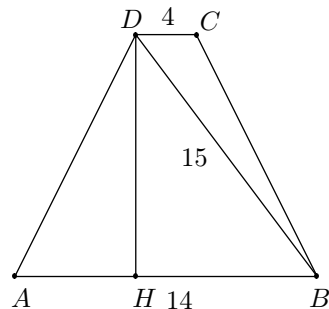
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5$$

намираме $3a_1 + 3d = 2a_1 + 7d$, т. е. $a_1 = 4d$. Сега от равенството

$$16d^2 = a_1^2 = 2(a_1 + 4d) = 16d$$

намираме $d = 1$. Следователно $a_1 = 4$ и $a_{2011} = a_1 + 2010d = 2014$.

26. Нека H е петата на височината от D към AB . Тъй като $AH = \frac{14-4}{2} = 5$, то $HB = 9$. От правоъгълния триъгълник BHD намираме $DH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm. От правоъгълния триъгълник AHD получаваме $AD = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm.



27. Имаме

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2(x^2 + y^2) - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \cdot 5 - 8 = 2. \end{cases}$$

От второто уравнение имаме $x = \frac{2}{y}$ и след заместване в първото уравнение, намираме

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Решенията на полученото биквадратно уравнение са $y = \pm 1$ и $y = \pm 2$. Следователно решенията на системата са $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ и $(-2, -1)$.

28. Има три думи, съставени от по една буква (думите **аааааа**, **бббббб** и **вввввв**).

От принципа за умножение на възможностите следва, че има $2^6 = 64$ думи, съставени от буквите **а** и **б**. В този брой са включени и думите **аааааа** и **бббббб**. Следователно има $2^6 - 2 = 62$ думи съставени от буквите **а** и **б**, като всяка от буквите **а** и **б** се среща поне един път.

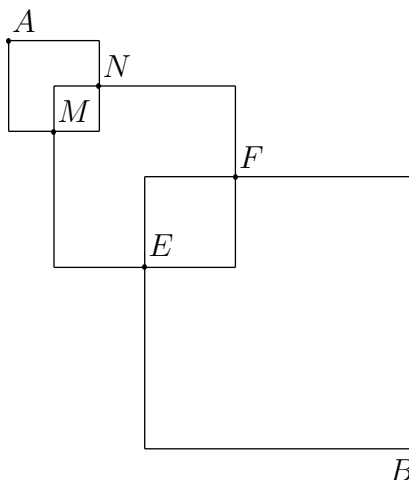
Всички шестбуквени думи, съставени от 3 букви, са $3^6 = 729$. От тях изваждаме 3.62 думи, съставени от по две букви, когато всяка буква се среща поне веднъж и още 3 думи, съставени от по една буква. Получаваме $729 - 186 - 3 = 540$ думи.



МАРИЯ ДЕНКОВА, ЦВЕТАНКА ВАСИЛЕВА

4. клас

- Сборът на две числа е 817. Цифрата на единиците в едното събираемо е три. Ако зачеркнем тази цифра, остава число, еднакво с другото събираемо. Да се намерят тези числа.
- Ако $P = 459 : 3 + 40.99 - 339 : 4$, а $Q = 171 - 374 : 34$, да се намери колко пъти числото P е по-голямо от числото Q .
- На състезание по безопасност на движението първите четири места в класирането заели четвъртокласниците Иван, Марина, Галя и София. Ако в класирането след Галя има поне един човек, мястото на София е четно число, а на Иван – нечетно число и София е по-напред в класирането от Иван, определете класирането в това състезание.
- На фигурата са изобразени три различни квадрата, страните на които са четни числа. Сборът от периметрите им е 56 см. Квадратите се пресичат така, че точките M и N са среди на страните на най-малкия квадрат, а точките E и F са среди на страните на средния по големина квадрат. Мравката Мъри се намира в точка A и трябва да стигне до точка B , като може да пълзи само по страните на квадратите или по части от тях. Колко сантиметра е най-краткият път на мравката?



5. клас

- Да се намери неизвестното число x :

$$((2 - x) : 1,5 + 17,4 : 29) : (25.0, 16) - 0,05 = 0,4.$$
- Периметърът на квадрат е 12,8 метра. Правоъгълник, една от страните на който е 6,4 м, има същото лице. Да се намери периметърът на правоъгълника. Коя фигура има по-голям периметър?

7. От градовете A и B , разстоянието между които е 329,4 км, тръгна-ли един срещу друг автобус и лека кола. Автобусът тръгнал от град A и се движил със скорост 72 км/ч. Леката кола тръгнала 1,2 ч по-късно от автобуса и се движила 1,25 пъти по-бързо от него. Да се намери на какво разстояние от град B са се срещнали автобусът и леката кола.

8. Може ли правоъгълник с размери 4 см и 1,5 см да се разреже на две части така, че от тях да се получи развивка на куб? Да се обоснове отговорът.

_____ 6. клас _____

9. Да се намери неизвестното число x в равенството:

$$6,86 : x - 3\frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 10,3.$$

10. а) Да се пресметне $a = \frac{|-3.5^2| - |1 - 3^3|}{-2 \cdot (-4) - 3^2}$ и $b = \frac{(-6)^4 \cdot 2^3}{5^2} : \frac{(-3)^4 \cdot 2^6}{(-5)^3}$.

б) Да се изобразят върху числовата ос числата $\frac{1}{7} \cdot a$ и $2 \cdot b$ и да се намери разстоянието между тях.

11. Точките A_1 , B_1 и C_1 са симетрични спрямо ординатната ос съответно на точките $A(5; 2)$, $B(1; 4)$ и $C(3; 6)$. Точката V лежи на ординатната ос и ординатата ѝ е сбор от средните аритметични числа на координатите на всяка от точките A , B и C . Да се намери лицето на фигурата $OABCVC_1B_1A_1$ (точката O е центърът на координатната система).

12. В картонена кутия с форма на правоъгълен паралелепипед има 1,2 л мляко. Ако кутията се постави да легне върху едната стена, височината на млякото в нея ще бъде 24 см. Ако се постави върху втората стена, височината на млякото ще се намали със 75%, а ако се постави върху третата стена, нивото на млякото в кутията ще се намали с още 12,5%.

а) Колко литра трябва да се налят, за да се допълни кутията?

б) Ще прелее ли млякото, ако в кутията поставим метален цилиндър с възможно най-голям обем?

13. Даден е изразът $B = \frac{a-9}{4}x + \frac{a+2}{3}x^2 - x^3$.

а) Ако стойността на B при $x = -2$ е 16, да се намери a .

б) Да се намери стойността на B при $x = \frac{12^6 \cdot 7^{2010} \cdot 28}{3^6 \cdot 2^{18} \cdot 7^{2011}}$.

14. За триъгълника ABC е дадено, че $\angle ACB = \angle CAB + 90^\circ$. Прекарани са вътрешната ъглополовяща BD и външната ъглополовяща BE на $\angle ABC$ ($D, E \in AC$). Да се докаже, че $BD = BE$.

15. а) Да се намерят x и y , за които е изпълнено равенството

$$49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 13 = 0.$$

б) Да се намери най-малката стойност на израза

$$A = 49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 16.$$

за по-малките решения

от бр. 6/2010

76. Едно число се нарича *красиво*, ако е записано с различни цифри и произведението от цифрите му е 6. Намерете разликата между най-малкото красиво трицифрено число и най-голямото красиво двуцифрено число.

Решение. Най-малкото красиво трицифрено число е 123, най-голямото красиво двуцифрено число е 61, а разликата е $123 - 61 = 62$.

77. Ако 16 плода манго струват 2 лева, а 100 горски ябълки струват 3 лева, то колко горски ябълки можем да получим срещу 6 манго?

Решение. По условие 16 плода манго струват 2 лева. Ако направим два пъти по-малка покупка, ще купим 8 плода манго за 1 лв. Тогава за 3 лв. можем да купим $3 \cdot 8 = 24$ плода манго. Тъй като 100 ябълки също струват 3 лв., то 24 плода манго струват колкото 100 ябълки. Следователно 6 плода манго струват колкото 25 ябълки.

78. Кошница с ябълка тежи 180 грама, а кошница с 5 ябълки тежи 500 грама. Колко тежи кошницата без ябълка?

Решение. Разликата в теглото на кошница с една ябълка и кошница с пет ябълки се дължи на четирите ябълки повече във втората

кошница. Следователно четири ябълки тежат $500 - 180 = 320$. Тогава една ябълка тежи $320 : 4 = 80$. Ако махнем тази ябълка от първата кошница, ще получим празна кошница и тя ще тежи $180 - 80 = 100$.

79. Ани има кантарче с по една теглилка от 1 грама, 2 грама, 3 грама, 4 грама и 5 грама. По колко различни начина Ани може да отмери 10 грама?

Решение. Начините са три: $1+2+3+4 = 1+4+5 = 2+3+5 = 10$.

80. Пресметнете $239.79 + 97.239 + 761.176$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 239.79 + 97.239 + 761.176 &= 239.(79 + 97) + 761.176 = \\ &= 239.176 + 761.176 = 176.(239 + 761) = 176.1000 = 176\,000. \end{aligned}$$

81. Обиколката на правоъгълник е 86 см. Ако една от страните му се увеличи два пъти, обиколката ще стане 122 см. С колко квадратни сантиметра ще се увеличи лицето му?

Решение. Ако страната a на правоъгълник се увеличи два пъти, обиколката на правоъгълника се увеличава с $2a$. Следователно разликата на обиколките е $122 - 86 = 2a$, откъдето намираме $a = 18$ см. Другата страна на правоъгълника е $86 : 2 - 18 = 25$ см. При удвояване на страната се удвоява и лицето на правоъгълника, т.е. то се увеличава с $18 \cdot 25 = 450$ кв.см.

82. Разстоянието от дома на Иван до училището му е 1200 метра. Една сутрин той тръгва към училище със скорост 4 метра в секунда. Две минути по-късно, кучето му се затичва след него със скорост 10 метра в секунда. На колко метра от училище кучето ще настигне Иван?

Решение. До тръгването на кучето Иван е вървял 2 минути, т.е. 120 секунди, и е изминал $4 \cdot 120 = 480$ м. Тъй като за една секунда кучето изминава $10 - 4 = 6$ м повече от Иван, то ще „стопа“ преднината на Иван за $480 : 6 = 80$ секунди. За това време Иван ще е изминал още $4 \cdot 80 = 320$ м и ще се намира на $1200 - (480 + 320) = 400$ м от училище.

83. Измежду стоте рицари на крал Артур 40 са верни, 50 са смели и 60 са силни. Едновременно смели и силни са 15, верни и силни са 20, смели и верни са 17. Колко рицари са едновременно смели, верни и силни?

Решение. Измежду верните рицари не са смели $40 - 17 = 23$; измежду смелите рицари не са силни $50 - 15 = 35$; измежду силните рицари не са верни $60 - 20 = 40$. Тъй като $23 + 35 + 40 = 98$, броят на рицарите, които са едновременно смели, силни и верни, е $100 - 98 = 2$.

84. Да се намери неизвестното число x от равенството

$$\frac{(3 - 22.0,05) \cdot \frac{1}{19}}{9 : 180 + x} = 0,05.$$

Решение. Пресмятаме

$$(3 - 22.0,05) \cdot \frac{1}{19} = (3 - 1,1) \cdot \frac{1}{19} = 1,9 \cdot \frac{1}{19} = 0,1 \quad \text{и} \quad 9 : 180 = 0,05.$$

Тогава уравнението става

$$\frac{0,1}{0,05 + x} = 0,05 \implies 0,1 : (0,05 + x) = 0,05 \implies 0,05 + x = 0,1 : 0,05$$

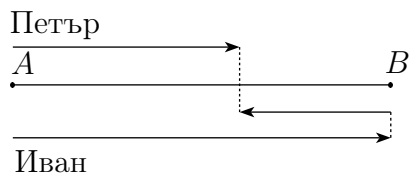
и получаваме $x = 2 - 0,05$, т.е. $x = 1,95$.

85. Колко килограма тежи златно кюлче с 42 % съдържание на злато, ако златото в него се равнява на златото в кюлче с тегло 14 кг и с 30 % съдържание на злато?

Решение. Теглото на чистото злато в двете кюлчета е едно и също, т.е. $30 \% \cdot 14 = 42 \% x$. Оттук намираме, че теглото на първото кюлче е $x = 10$ кг.

86. Иван изминава по 8 километра на ден, а Петър по 2 километра на ден. Двамата тръгнаха заедно от A към B , разстоянието между които е 100 километра. След като стига до B , Иван тръгва обратно. На колко километра от B той среща Петър?

Решение. До момента на своята среща Иван и Петър изминават общо два пъти разстоянието от A до B , т.е. 200 км.



Тъй като за един час те изминават общо $2 + 8 = 10$ км, то до срещата си те вървят $200 : 10 = 20$ ч. За това време Петър изминава $20 \cdot 2 = 40$ км от A , следователно срещата е на $100 - 40 = 60$ км от B .

87. Колко са четирицифрените числа, които се делят на 5, и в запис на всяко от тях няма повтарящи се цифри?

Решение. Цифрата на единиците на търсените числа е 0 или 5.

Нека цифрата на единиците е 0. Цифрата на хилядите може да се избере по 9 начина (от цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). След като е избрана, остават 8 възможности за цифрата на стотиците и след това 7 възможности за цифрата на десетиците. Следователно четирицифрените числа с цифра на единиците 0, записани с различни цифри, са $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Нека цифрата на единиците е 5. Цифрата на хилядите може да се избере по 8 начина (от цифрите 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9). След като е избрана, остават 8 възможности за цифрата на стотиците (включва се и цифрата 0). Накрая цифрата на десетиците може да се избере по 7 начина. Следователно четирицифрените числа с цифра на единиците 5, записани с различни цифри, са $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

Общо търсените числа са $448 + 504 = 952$ на брой.

88. След колко дни човек, който получава за ден и половина 15 лв. и харчи за един ден по 20 % от дневната си заплата, ще спести 200 лв.?

Решение. Дневната заплата е 10 лв. От нея $20\% \cdot 10 = 2$ лв. се харчат и 8 лв. се спестяват. След $200 : 8 = 25$ дни човекът ще спести 200 лв.

89. Точките A , B и C лежат на една права, като B е между A и C . Ако $AC = 24$ см и $AB : BC = 1 : 2$, да се намери разстоянието между средите на AB и AC .

Решение. Тъй като $AB : BC = 1 : 2$, то $AB = \frac{1}{3}AC = 8$ см, а $BC = 16$ см. Тогава средата на AB се намира на 4 см от A , а средата на AC – на 12 см от A . Разстоянието между тези среди е $12 - 4 = 8$ см.

90. Крал и свитата му се движат от крепостта A към крепостта B със скорост 5 км/час. Кралят през час изпраща вестonosци към крепостта B , които се движат с 20 км/час. През колко минути пристигат вестonosците в B ?

Решение. За един час вестonosец се отдалечава на $20 - 5 = 15$ км от свитата. Следователно дистанцията между двама поредни вестonosци е 15 км. В момента, в който един вестonosец пристига в крепостта, следващият е на 15 км от нея. Следователно следващият вестonosец ще пристигне в крепостта след $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ часа, т.е. 45 минути.

8. клас

1. Да се намери числената стойност на израза

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} - 2\sqrt{3} + 3 = 0.$$

2. Около триъгълника ABC ($AC > BC$) е описана окръжност. Симетралата на AB пресича окръжността в точката $D \in \widehat{AC}$, несъдържаща точката B . Права през D , перпендикулярна на AC , я пресича в точката E . Да се докаже, че $AE = BC + CE$.

3. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) с $\angle ACB = 120^\circ$ е прекарана височината CD ($D \in AB$). Върху CD е взета точката E така, че $CE : ED = 1 : 2$. Правата AE пресича BC в точката F . Ако $CF = 3$ cm, да се намери дължината на височината CD .

9. клас

4. Да се пресметне изразът

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}.$$

5. Да се реши уравнението

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$$

6. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC = BC$) с основа $AB = 8$ cm. Основата AB е хорда в окръжността, допираща се до бедрата на триъгълника в точките A и B . Да се намери радиусът на тази окръжност, ако височината CD ($D \in AB$) е равна на 3 cm.

10. клас

7. Да се намери стойността на израза

$$x \cdot \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}}{2 - \sqrt{x+4}} + \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}}.$$

8. Да се реши уравнението

$$\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}.$$

9. Да се намери отношението на основата към бедрото на равнобедрен триъгълник с ъгъл при основата 72° .

11. клас

10. Да се докаже тъждеството

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}.$$

11. Да се реши уравнението

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84.$$

12. Общата хорда на два кръга стяга дъги съответно от 60° и 120° . Да се намери отношението на лицата на тези кръгове.

12. клас

13. Да се намерят стойностите на m , за които неравенството

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

е вярно за произволни реални стойности на x .

14. Да се реши системата

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3. \end{cases}$$

15. В кръг с център O и радиус R е прекарана хорда AB , а на радиуса AO като на диаметър е построена окръжност с център O_1 . Да се докаже, че лицата на двата сегмента, които хордата AB отсича от двата кръга, се отнасят както $4 : 1$.

(Частта от кръга, която отсича хорда, се нарича сегмент).

на задачите от бр. 6/2010 г.

76. Възрастта на един човек през 1959 година е равна на сумата от цифрите на годината на неговото раждане. Ако човекът е роден през XX век, да се намери годината, през която е роден.

Решение. Нека годината на неговото раждане е $1900 + 10x + y$, където x и y са цели числа и $0 \leq x \leq 5$ и $0 \leq y \leq 9$. Тогава имаме, че $59 - 10x - y = 1 + 9 + x + y \iff 49 = 11x + 2y$.

Ако $x = 1$, тогава $38 = 2y$, откъдето $y = 19$, което е невъзможно.

Ако $x = 2$, тогава $27 = 2y$, което също е невъзможно, защото y е цяло число.

Ако $x = 3$, получаваме $2y = 16$, откъдето $y = 8$.

При $x \geq 4$ получаваме стойности за y , които са недопустими.

Следователно годината, в която е роден човекът, е 1938.

77. Да се реши неравенството

$$\left| 2kx - \frac{3k-1}{2} \right| > (k-1)x^2 + 5$$

за стойности на k , които са решения на уравнението $\frac{x+1}{x-2} = 1 - \frac{9}{x+2}$.

Решение. Допустимите стойности на x в уравнението са $x \neq \pm 2$. Освобождаваме се от знаменателите и получаваме

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 - 4 - 9x + 18 \iff x = 1.$$

Заместваме $k = 1$ в даденото неравенство и получаваме

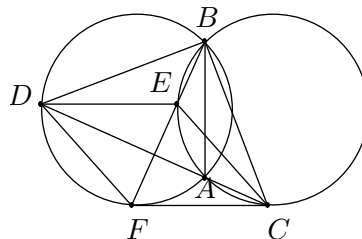
$$|2x - 1| > 5 \iff 2x - 1 > 5 \cup 2x - 1 < -5 \iff x > 3 \cup x < -2.$$

Тогава неравенството се удовлетворява за всяко $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

78. Две окръжности с равни радиуси се пресичат в точките A и B . През A е прекарана права, пресичаща окръжностите в точките C и D , а през B — права, перпендикулярна на CD , която пресича окръжностите в точките E и F . Да се докаже, че C , D , E и F са върхове на ромб.

Решение. Тъй като $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \frac{\widehat{AB}}{2}$, то $\triangle BDC$ е равнобедрен и BE разполовява отсечката CD . Освен това $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ECA = \frac{\widehat{AE}}{2}$.

Но $\angle ABE = \angle EDA = \frac{\widehat{AE}}{2}$ и $\angle FCA = \angle ABF = \frac{\widehat{AE}}{2}$. Следователно $\angle EDA = \angle ECA = \angle ACF = \angle FDA$. Като вземем предвид, че $CFDE$ е успоредник и диагоналят EF е перпендикулярен на диагонала CD и го разполовява, заключаваме, че $CFDE$ е ромб. Следователно точките C, D, E и F са върхове на ромб.



79. Да се реши уравнението $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Решение. Полагаме $\sqrt{3} = a$ и получаваме

$$x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0 \iff xa^2 + (2x^2 + 1)a + (x^3 - 1) = 0.$$

Решаваме полученото уравнение относно a (тук $x \neq 0$) и получаваме

$$a_{1,2} = \frac{-(2x^2 + 1) \pm (2x + 1)}{2x}.$$

Тогава

$$1. a = 1 - x, \text{ т. е. } x = 1 - a \text{ или } x_1 = 1 - \sqrt{3}.$$

$$2. a = -\frac{x^2 + x + 1}{x} \text{ или } x^2 + (a + 1)x + 1 = 0, \text{ откъдето намираме}$$

$$x_{2,3} = \frac{-\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt[4]{12}}{2}.$$

80. Да се реши неравенството $\sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}} \geq \frac{1}{4 - x}$.

Решение. Допустимите стойности на x в даденото неравенство се определят от условията $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) > 0$ и $x \neq 4$, т. е. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 4) \cup (4, \infty)$.

При $x > 4$ лявата страна на неравенството е положителна, а дясната е отрицателна. Следователно стойностите $x > 4$ са решения на даденото неравенство.

Ако x принадлежи на дефиниционното множество и $x < 4$, то неравенството е равносилно на $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq 4 - x$, т. е. на неравенството

$$x^2 + 2x - 3 \leq x^2 - 8x + 16 \iff 10x \leq 19,$$

откъдето $x \leq \frac{19}{10}$.

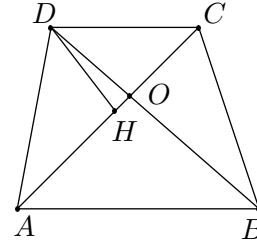
Получихме, че решенията в този случай на даденото неравенство в дефиниционното множество са $x < 4$ и $x \leq \frac{19}{10}$. Следователно решение на даденото неравенство е всяко $x \in (-\infty, -3) \cup \left(1, \frac{19}{10}\right] \cup (4, \infty)$.

81. Диагоналите AC и BD в трапеца $ABCD$ се пресичат в точката O . Лицата на триъгълниците DOC и AOB са равни съответно на 9 и 16. Да се намери лицето на трапеца.

Решение. В триъгълниците AOB и DOC ъглите при върха O са равни и $\angle OAB = \angle OCD$, следователно те са подобни. Тогава $S_{ABO} : S_{DOC} = AO^2 : OC^2$, т. е. $AO : OC = 4 : 3$. Триъгълниците AOD и DOC имат обща височина DH ($H \in AC$), следователно $S_{AOD} : S_{COD} = 4 : 3$, откъдето $S_{AOD} = \frac{4}{3}S_{COD}$. Тогава $S_{AOD} = 12$.

Триъгълниците ABD и ABC имат обща основа и равни височини, следователно $S_{ABD} = S_{ABC}$. Имаме

$$S_{BOD} = S_{ABC} - S_{ABO} = S_{ABD} - S_{ABO} = S_{AOD}.$$



Търсеното лице на трапеца $ABCD$ е $16 + 9 + 2 \cdot 12 = 49$.

82. Да се реши неравенството $\log_{\frac{2-x}{1-x}}(4-x) \leq 2$.

Решение. Областта D на допустимите стойности x на даденото неравенство се определя от условията $\frac{2-x}{1-x} > 0$, $\frac{2-x}{1-x} \neq 1$ и $4-x > 0$, откъдето намираме, че $x < 1$, $2 < x < 4$, т.е. неравенството има смисъл при $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 4)$.

Случай 1. Ако $x < 1$, то $\frac{2-x}{1-x} > 1$ и неравенството е равносилно на

$$4-x \leq \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 \iff (x^2-2x+1)(x-4) \geq -x^2+4x-4 \iff$$

$$x^3-5x^2+5x \geq 0 \iff x(x^2-5x+5) \geq 0.$$

Полученото неравенство е вярно при всяко $x \in [0, 1)$.

Случай 2. Ако $2 < x < 4$, то $0 < \frac{2-x}{1-x} < 1$ и неравенството е равносилно на

$$4-x \geq \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 \iff x(x^2-5x+5) \geq 0,$$

откъдето $x_1 \leq x \leq x_2$, където $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

В този случай множеството от решенията на неравенството е сечение на интервала $(2, 4)$ и интервала $[x_1, x_2]$, където $x_1 < 2$, $2 < x_2 < 4$, и търсеното множество от решенията е интервалът $\left(2, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Решенията на даденото неравенство са $x \in [0, 1) \cup \left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$.

83. Окръжност с радиус 6 минава през върха C на триъгълника ABC и пресича страните му AC и BC съответно в точките E и F . Центърът O на окръжността лежи на страната AB и $\angle OCB = \angle CBO + \angle EOA$, $AO = 12$, $BO = 10$.

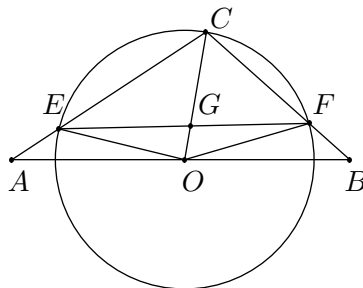
а) Да се намери в какво отношение правата CO дели отсечката EF .

б) Да се намери радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност.

Решение. Построяваме отсечката OF . Имаме $\angle OBF + \angle BOF = \angle OFC$. Като вземем предвид, че $\angle OFC = \angle OCB$ и условието $\angle OCB = \angle CBO + \angle EOA$, заключаваме, че $\angle BOF = \angle EOA$.

Следователно дъгите, които отсичат тези ъгли от окръжността, са равни, откъдето заключаваме, че $EF \parallel AB$. Тогава $\triangle EFC$ е хомотетичен на $\triangle ABC$ с център на хомотетията C и коефициент k . Означаваме пресечната точка на EF и CO с G . Тогава $EG = 12k$, $GF = 10k$ и $BG = 6k$. Следователно $EG : GF = 6 : 5$.

Означаваме с H пресечната точка на окръжността с правата CO .



$$CG \cdot GH = EG \cdot GF \iff 6k(12 - 6k) = 12k \cdot 10k,$$

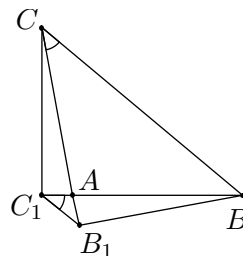
откъдето $k = \frac{6}{13}$. Следователно радиусът на окръжността, описана около $\triangle ABC$, е равен на $\frac{6}{k} = 13$.

84. Около триъгълник с височина BB_1 ($B_1 \in AC$) и CC_1 ($C_1 \in AB$) е описана окръжност с радиус 6. Да се намерят радиусите на окръжностите, описани около триъгълниците BB_1C и AB_1C_1 , ако $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$.

Решение. Тъй като $\angle BB_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$, то четириъгълникът BC_1B_1C е вписан в окръжност с диаметър BC .

а) От $\cos \angle A = -\frac{1}{3}$ получаваме $\sin \angle A = \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме

$$R_{BB_1C} = \frac{BC}{2} = R_{ABC} \sin \angle BAC = 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}.$$



б) От подобните триъгълници AB_1C_1 и ACB (понеже $\angle ACB = \angle AC_1B_1$) с коефициент k имаме $k = \frac{AB_1}{AB} = \cos \angle B_1AB = \frac{1}{3}$, откъдето $R_{AB_1C_1} = k \cdot R_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

85. Да се пресметне стойността на израза $A = 1 + 5 \sin 2\alpha - 3 \cos^{-1} 2\alpha$, ако $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Решение. Преобразуваме израза A и получаваме

$$\begin{aligned} A &= 1 + 5 \sin 2\alpha - 3 \cos^{-1} 2\alpha = 1 + 5 \sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha} = \\ &= 1 + \frac{10 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{3}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 1 + \frac{10 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{3 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{10(-2)}{1 + 4} - \frac{3 + 3}{1 - 4} = 1 - \frac{20}{5} + \frac{15}{3} = 2. \end{aligned}$$

86. Да се реши уравнението $\frac{\sin 4x}{|\sin 2x|} = 1$.

Решение. а) Ако $\sin 2x > 0$, то имаме $|\sin 2x| = \sin 2x$ и даденото уравнение приема вида

$$\begin{aligned} \sin 4x - \sin 2x &= 0 \iff 2 \sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0 \iff \\ \sin 2x(2 \cos 2x - 1) &= 0 \iff 2 \cos 2x - 1 = 0 \iff \cos 2x = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

откъдето $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Условието $\sin 2x > 0$ се удовлетворява за стойностите

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

б) Ако $\sin 2x < 0$, то $|\sin 2x| = -\sin 2x$. От даденото уравнение получаваме $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откъдето $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Условието $\sin 2x < 0$ се удовлетворява за стойностите $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Тъй като $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ могат да се обединят в $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ще отбележим, че ако $n = 2k$, то от последното равенство получаваме $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, а при $n = 2k - 1$, получаваме $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

87. Дадена е триъгълната пирамида $VBCD$. Известно е, че $\sphericalangle VCD = \sphericalangle VDC = \sphericalangle BCD$ и $\cos \sphericalangle VCD = \cos \sphericalangle CBD = \frac{4}{5}$. Да се намери дължината на ръба VB , ако обемът на пирамидата е 144.

Решение. Означаваме $BC = a$, $CD = b$, $\sphericalangle VCB = \sphericalangle CBD = \alpha$ и $\sphericalangle VCD = \sphericalangle VDC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \beta$. Тогава $BD = BC = a$.

От еднаквостта на триъгълниците CVD и CBD (по страна и два ъгъла) следва, че $VD = VC = a$ и $\sphericalangle CVD = \alpha$. Освен това $\triangle VCB \cong \triangle VDB$

(по три страни). Тези триъгълници са еднакви с $\triangle DBC$. От $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ намираме $\beta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ и $b = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$.

Нека K е средата на ръба CD , тогава равнината, минаваща през точките V , B и K , е перпендикулярна на равнината на основата BCD . Ето защо височината на пирамидата VH ($CH \in BK$) принадлежи на тази равнина и $VH \perp BK$.

От $\triangle VKB$ имаме

$$(1) \quad VK^2 = VH^2 + KH^2, \quad VB^2 = VH^2 + BH^2.$$

Като вземем предвид, че $VK = BK = a \sin \beta = a \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3a}{\sqrt{10}}$ и $VB = b = \frac{2a}{\sqrt{10}}$ от (1) следва $VK^2 = (BK - BH)^2 + VB^2 - BH^2$, т.е. $2BH \cdot BK = VB^2$,

откъдето $BH = \frac{a\sqrt{10}}{15}$. Следователно $VH = \frac{4a}{2\sqrt{5}}$. Тогава

$$V_{BCD} = \frac{1}{6}CD \cdot BK \cdot VH = 144, \text{ т.е. } \frac{1}{6} \cdot \frac{2a}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3a}{\sqrt{10}} \cdot \frac{4a}{3\sqrt{5}} = 144,$$

откъдето $a = 6\sqrt{5}$. Тогава $b = 6\sqrt{2}$.

88. Да се реши уравнението $\sqrt[3]{2^{x^2+2x-3} + (x^2+1)^5} = \sqrt[3]{2^{x^2+2x-3} - (x^2-3)^5}$.

Решение. Като повдигнем двете страни на даденото уравнение на трета степен, получаваме

$$2^{x^2+2x-3} + (x^2+1)^5 = 2^{x^2+2x-3} - (x^2-3)^5 \iff (x^2+1)^5 = -(x^2-3)^5 \\ (x^2+1)^5 = (3-x^2)^5 \iff x^2+1 = 3-x^2 \iff x^2 = 1,$$

откъдето намираме $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

89. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които уравнението $||x| - 3 + a| = 4$ има точно три корена.

Решение. Като вземем предвид определението за модул, от даденото уравнение получаваме $|x| - 3 + a = 4$ или $|x| - 3 + a = -4$, т.е.

$$(1) \quad |x| = 7 - a$$

или

$$(2) \quad |x| = -1 - a$$

Уравнението $|x| = t$ има два корена (ако $t > 0$), един корен (ако $t = 0$) и няма корени (ако $t < 0$). Даденото уравнение ще има точно три корена,

когато (1) има 1 корен, а уравнението (2) — два корена или уравнението (1) има два корена, а уравнението (2) — един корен

$$\left| \begin{array}{l} 7 - a = 0 \\ -1 - a > 0 \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} 7 - a > 0 \\ -1 - a = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} a = 7 \\ a < -1 \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} a < 7 \\ a = -1 \end{array} \right|.$$

Следователно $a = -1$.

90. В триъгълника ABC е прекарана височината BH ($H \in AC$). Центърът на окръжността, вписана в триъгълника ABH , съвпада с пресечната точка на медианите на триъгълника ABC . Да се намери отношението на лицата на триъгълниците ABC и ABH .

Решение. Нека AA_1 и BB_1 са медиани в $\triangle ABC$ ($B_1 \in AC$ и $A_1 \in BC$) и $\sphericalangle ABH = 2\varphi$. Тъй като центърът на окръжността, вписана в $\triangle ABH$, съвпада с пресечната точка на медианите на $\triangle ABC$, отсечката AA_1 е и ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, следователно даденият триъгълник е равнобедрен и $AB = AC$. Тогава отношението на лицата на триъгълниците ABH и ABC е

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB} = \sin 2\varphi.$$

От правоъгълния триъгълник B_1BH , като вземем предвид свойството на ъглополовящите BB_1 , получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_1H}{BH} = \frac{AB_1}{AB} = \frac{1}{2},$$

тъй като B_1 е среда на страната AC . Следователно

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{4}{5}.$$

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

НОВИНИ	2
ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ	3
ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО МАСОВ ЦЕНТЪР В ГЕОМЕТРИЯТА, <i>А. Гушев, В. Гушев</i>	14
ЧЕТВЪРТИ ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР, <i>Е. Колев, П. Бойваленков</i>	25
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ, <i>Д. Димитров</i>	36
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ	46
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	49
ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА СЕДМИ КЛАС, ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ, <i>Р. Русев</i>	52
ТЕСТ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ, <i>Е. Колев</i>	57
ЗАДАЧИ ЗА МАЛКИТЕ, <i>М. Денкова, Ц. Василева</i>	62
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПО-МАЛКИТЕ	64
ЗАДАЧИ	68
РЕШЕНИЯ	70

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70x100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 30.01.2011 г.
Печат „Дементра“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.