МАТЕМАТИКА

БРОЙ 5
2019 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

Скъпи читатели,

Стартира абонаментната кампания на списание „Математика“ за 2020 година. И през следващата година списанието ще се стреми да запази своята актуалност, събирайки на страниците си всичко в областта на училищната математика, което представлява съществен интерес за ученици, преподаватели, родители и любители.

Списанието се фокусира върху:

- подготовката на учениците от 4.–12. клас за участие в математически състезания;
- подготовката на учениците от 4. клас за приемни изпити;
- подготовката на учениците от 7. и 10. клас за Национално външно оценяване;
- подготовката на учениците от 12. клас за матура и кандидат-студентски изпити.

Списанието публикува информация (задачи, решения, победители) за национални и международни математически състезания.

Цената на годишния абонамент е 30,00 лв. Възможни са следните отстъпки при групов абонамент:

- За 15 абонамента цената е $15 \times 240 = 360$ лв.
- За $15+N$ абонамента цената е $3600+N\times 20$ лв., т.е. за всеки абонамент над 15-ия плащате по 20 лв.
- Извън горните бройки можете да абонирате членове на Съюза на манематиците в България на цена 21 лв. за абонамент. При използване на тази опция молим да ни пращате списък с имената на съответните абонати и секцията на СМБ, в която членуват.

Събраната сума за абонамента може да преведете на:
ТБ Алианц България АД, София,
IBAN BG36BUIN95611000003610
BICBUINBGSF – „Списание Математика“ ЕООД.

Молим на вносната бележка да е ясно записано колко бройки и на какъв адрес (и телефон) да се изпраща списанието.

Срокът за груповите абонаменти е до 16 януари 2020 г.

60. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Станислав Харизанов (ИИКТ/ИМИ–БАН), Стоян Боев (НБУ), Петър Бойваленков (ИМИ–БАН)

От 11 до 22 юли 2019 г. в град Бат, Великобритания, се проведе 60-тата Международна олимпиада по математика (IMO 2019). В най-престижното за годината състезание по математика участваха 621 ученици от 112 страни, които решаваха по 3 задачи във всеки от двата състезателни дни (16–17 юли) – общо 6 задачи. Българският отбор бе в подмладен състав, но това не му попречи да се представи отлично, завоювайки 5 сребърни и един бронзов медал в изключително тежка конкуренция. Иво Петров, ученик в 11 клас на СМГ направи истински подвиг и в рамките на две седмици спечели два сребърни медала от международни олимпиади (първо, от тази по физика 7–15 юли Тел Авив, Израел, а след това и по математика). В отборното класиране България е в световния топ 20, заемайки 19-тото място със 152 точки.

България беше представена от **Кристиян Василев** (12. клас, ПЧМГ, учител Таня Стоева), **Евгени Кайряков** (11. клас, СМГ, учител Илиана Цветкова), **Кристиан Минчев** (11. клас, ППМГ Бургас, учител Гергана Николова), **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ, учител Ирина Шаркова), **Иво Петров** (11 клас, СМГ, учител Илиана Цветкова) и **Кьонг До** (10. клас, СМГ, учител Ваня Данова). Ръководители на отбора бяха доц. Станислав Харизанов (ИИКТ и ИМИ–БАН) и д-р Стоян Боев (НБУ), а като научен консултант на отбора участва проф. Петър Бойваленков (ИМИ–БАН).

Подготовката на отбора беше проведена на два етапа – традиционният в Пампорово от 16 до 29 юни и втори в Пиерфондс (Франция) от 7 до 14 юли, където тя беше съвместна с отборите на Франция и Румъния. Подготовката и участието бяха подпомогнати от Американска Фондация за България, Фондация Георги Чиликов и МОН.

Резултатите на българските участници по задачи са следните:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Общо**	**Медал**
Кристиян Василев	7	7	1	0	2	0	17	бронзов
Евгени Кайряков	7	6	1	7	7	0	28	сребърен
Кристиан Минчев	7	6	0	6	7	0	27	сребърен
Борислав Кирилов	7	6	0	7	7	0	27	сребърен
Иво Петров	7	6	0	7	7	0	27	сребърен
Кьонг До	7	6	0	7	7	0	27	сребърен
Общо	42	37	2	34	37	0	152	

Резултатите на всички участници, заедно с интересна статистика, са на официалния сайт на международните олимпиади www.imo-official.org.

Предлагаме ви задачите с решения и кратки коментари.

Задача 1. (*Южна Африка*) Нека $\mathbb{Z}$ е множеството от целите числа. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такива че, за всяка двойка цели числа a и b е в сила равенството

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Решение. Ще докажем, че единствените функции, удовлетворяващи условието, са $f(n) = 0$ и $f(n) = 2n + K$, където $K \in \mathbb{Z}$ е произволен цял параметър. Полагайки $a = 0, b = n + 1$, получаваме

$$f(f(n+1)) = f(0) + 2f(n+1),$$

а полагайки $a = 1, b = n$, получаваме

$$f(f(n+1)) = f(2) + 2f(n).$$

Следователно $f(0) + 2f(n+1) = f(2) + 2f(n)$ и значи

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)),$$

което е константа. Така, f трябва да е линейна фунцкия и можем да я запишем във вида $f(n) = Mn + K$. За да определим M и K, заместваме в условието на задачата и получаваме:

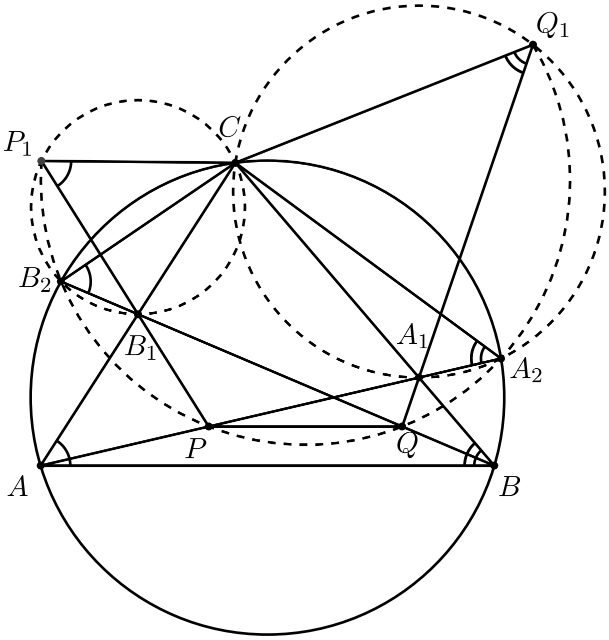
$$2Ma+k+2(Mb+K) = M(M(a+b)+K)+K \quad\Longrightarrow\quad (M-2)\big(M(a+b)+K\big) = 0.$$

Решенията на последното уравнение са: $M = 2$ или $M(a+b) + K = 0$ за всички стойности на $a + b$, т.е., $M = K = 0$.

Коментар. Нашият отбор очаквано представи 6 пълни решения на тази лесна алгебрична задача.

Задача 2. (*Украйна*) Даден е $\triangle ABC$ и нека A_1 и B_1 са произволни точки от страните BC и AC съответно, а P и Q са точки съответно върху отсечките AA_1 и BB_1, такива че PQ е успоредна на AB. Нека P_1 е точка от правата PB_1, така че B_1 е строго между P и P_1, и $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Аналогично, нека Q_1 е точка от правата QA_1, така че A_1 е строго между Q и Q_1, и $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$. Да се докаже, че точките P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност.

Решение. Нека k е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и правите AA_1 и BB_1 пресичат за втори път k в точките A_2 и B_2 съответно.



По условие $PQ \parallel AB$ и следователно $\sphericalangle B_2QP = \sphericalangle B_2BA = \sphericalangle B_2A_2A$, т.е. четириъгълникът PQA_2B_2 е вписан в окръжност ω. От друга страна,

$$\sphericalangle B_1P_1C = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BB_2C = \sphericalangle B_1B_2C,$$

т.е. четириъгълникът $B_1CP_1B_2$ е вписан и следователно

$$\sphericalangle B_2P_1B_1 = \sphericalangle B_2CB_1 = \sphericalangle B_2BA = \sphericalangle B_2QP,$$

т.е. P_1 лежи на ω. Аналогично Q_1 лежи на ω и доказателството е завършено.

Коментар. Въпреки тривиалното на пръв поглед решение, се оказа, че това е третата по трудност задача в темата, решена от едва една трета от състезателите. За радост нашият отбор постигна почти максимален резултат от 37 точки със шест решения, но губейки за съжаление 5 точки от неразглеждане на важен частен случай, което в предложеното синтетично решение не е необходимо.

Задача 3. (*Хърватска*) Една социална мрежа има 2019 потребителя, част от които са приятели в нея. Когато потребител A е приятел с потребител B, то и потребител B е приятел с потребител A. Събития от следния тип могат да се случват неколкократно, но никога едновременно:

> Три потребителя A, B, и C, такива, че A е приятел и с B и с C, но B и C не са приятели помежду си, изменят приятелските

си статуси така, че B и C стават приятели, докато A вече не е приятел нито с B, нито с C. Статусите на всички останали приятелства се запазват.

Първоначално, 1010 от потребителите имат по 1009 приятеля всеки, а 1009 от потребителите имат по 1010 приятеля всеки. Да се докаже, че съществува последователност от такива събития, след която всеки потребител е приятел с най-много един от останалите потребители.

Решение. Задачата тривиално се преформулира на езика на теория на графите, където потребителите са върхове, а приятелствата - ребра. Да отбележим, че първоначалният граф G е свързан, тъй като сумарната степен на всеки два от върховете му е поне 2018, т.е., те или са съседни или имат общ съсед. Така, G удовлетворява условието:

Условие (*): Всяка компонента на свързаност на G с поне 3 върха не е пълен граф и съдържа връх от нечетна степен.

Ще докажем, че ако граф G удовлетворява условие (*) и съдържа връх от степен поне 2, то съществува *разприятеляване* в G, което запазва условие (*). Тъй като всяко разприятеляване намалява с единица броя ребра в графа (две двойки приятелства се развалят, за сметка на създаването на само едно ново), последователност от такива събития ще доведе до граф с максимална степен на връх 1, с което ще сме решили задачата.

Да разгледаме произволна компонента на свързаност G' на граф G, удовлетворяващ условие (*), и да изберем връх A от степен поне 2. Тъй като никоя от компонентите на G с поне 3 върха не е пълен граф, можем да предположим, че не всички съседи на A са свързани с ребра помежду си. (Например, разглеждаме максималния пълен подграф K на G'. Някой от върховете на K задължително има съсед извън K и този връх от K ще означим с A.) Премахвайки A от G, ние разбиваме G' на по-малки компоненти на свързаност $G_1, \dots, G_k$ (като е възможно $k = 1$), като A е свързан с всяка от тях. Разглеждаме няколко случая:

Случай 1: $k \geq 2$ и A е свързан с някоя G_i посредством поне две ребра. Нека изберем връх $B \in G_i$, съседен на A и връх $C \in G_j$, $j \neq i$, съседен на A. Тогава върховете B и C не са съседни и премахвайки ребрата AB, AC и добавяйки реброто BC запазваме свързаността на G'. Лесно се вижда, че индуцираният граф изпълнява условие (*), тъй като операцията по разприятеляване не променя четностите на степените на върховете.

Случай 2: $k \geq 2$ и A е свързан с всяка G_i посредством точно едно ребро.
Нека разгледаме индуцирания подграф върху произволна компонента G_i. Тъй като A е от степен 1 в този подграф, а броят на върховете от нечетна степен трябва да е четен, съществува и друг връх A_i от нечетна степен.

Но за A_i степените в индуцирания подграф и в целия граф G са едни и същи, следователно A_i е от нечетна степен и спрямо G. Тогава, ако изберем два произволни съседа B и C на A, премахнем ребрата AB, AC и добавим реброто BC, ние разбиваме G' на две компоненти на свързаност, всяка от които удовлетворява условие (*) (стига да съдържа поне три върха!).

Случай 3: $k = 1$ и A е свързан с G_1 посредством поне три ребра. По допускане, A има съседи B и C, които не са свързани с ребро помежду си. Премахването на ребрата AB, AC и добавянето на реброто BC не нарушава свързаността на компонентата G' и използваме същите аргументи, като в Случай 1.

Случай 4: $k = 1$ и A е свързан с G_1 посредством точно две ребра. Нека B и C да са двата съседа на A. По допускане, те не са съседи помежду си. Премахването на ребрата AB, AC и добавянето на реброто BC води до разбиването на G' на две компоненти на свързаност, едната от които е тривиална (само върхът A), а другата съдържа връх от нечетна степен. Остава единствено да разгледаме случая, когато втората компонента е пълен граф от поне 3 върха. Тогава, G_1 е почти пълен граф, в който единствено реброто BC липсва. Следователно G_1 съдържа поне 4 върха, иначе G' щеше да е 4-цикъл и да не изпълнява условието (*) за съществуване на връх от нечетна степен. Нека D е трети връх от G_1. Премахвайки ребрата BA, BD и добавяйки реброто AD запазва свързаността на G_1 и използваме същите аргументи, като в Случай 1.

Задачата е решена.

Коментар. Резултатът на нашия отбор върху тази задача е, меко казано, неудовлетворителен. Само Евгени Кайряков и Кристиян Василев намериха части от работещ алгоритъм и спечелиха по една точка. При това повечето от състезателите ни са имали на разположение над два часа за работа по задачата. Трябва да се отбележи, обаче, че схемата за оценяване бе изключително консервативна и всеки положителен актив означаваше сериозен напредък. В крайна сметка, 520 участника получиха нули, 46 участника заработиха една точка, 27 участника взеха частичен кредит (2–6 точки) и 28 участника решиха напълно задачата.

Задача 4. (*Ел Салвадор*) Да се намерят всички двойки естествени числа (k, n), за които

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

Решение. (Борислав Кирилов) От формулата на Льожандър и от равенството от условието имаме

$$v_2(k!) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \cdots < \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \cdots = k,$$

$$v_2(k!)=v_2(2^n-1)+v_2(2^n-2)+\cdots+v_2(2^n-2^{n-1})=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

откъдето $k>\dfrac{n(n-1)}{2}$. Ще покажем, че при $n\geq 6$ е изпълнено неравенството $\dfrac{n(n-1)}{2}!>2^{n^2}$ по индукция. При $n=6$ имаме

$$15!=(15.14).(13.12).(11.10.9.8).(7.6.5.4).(3.2.1)>2^7.2^7.2^{12}.2^8.2^2=2^{36}.$$

Нека неравенството е вярно за някое $n\geq 6$. Имаме

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\cdots\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)>8.4^{n-1}=2^{2n+1}$$

и след умножение с индукционната хипотеза получаваме исканото за $n+1$ и неравенството е доказано. Така от очевидното

$$2^{n^2}>(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})$$

получаваме, че няма решения при $n\geq 6$. С директна проверка при $n\leq 5$ намираме решенията $(k,n)=(1,1)$ и $(3,2)$.

Коментар. Тази задача не затрудни нашите участници, които сравнително бързо и леко се справиха с нея. Техническа грешка при работа с цели части на Кристиан Минчев доведе до загубата на случая $n=6$ и до отнемането на една точка. Изключение е единствено Кристиян Василев, който не прочете добре условието и (също доста бързо и вярно) реши алтернативната задача, при която дясната част на тъждеството съдържа 2^{n-1} на брой множителя: $(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)(2^n-5)\cdots(2^n-2^{n-1})$. Общо около 10 ученика от всички участници се подведоха по същия начин, вероятно поради неизписването на 4 като 2^2 в условието. За съжаление, алтернативната задача позволява директно решаване, без необходимост от оценки за k и n, поради което решаването ѝ се оценява на нула точки. Малшанс, който ни коства влизането в топ 15.

Задача 5. (*САЩ*) Банката на Бат е издала серия монети, които имат H на едната си страна и T на другата страна. Хари разполага с n от тези монети, наредени в линия отляво надясно. Докато може, той извършва следната операция: ако точно $k>0$ от монетите са с H нагоре, Хари обръща k-тата монета отляво надясно; в противен случай всички монети са с T нагоре и той спира. Например, при $n=3$ процесът, стартиращ с конфигурацията THT изглежда така: $THT\to HHT\to HTT\to TTT$, и след три операции Хари спира.

(a) Да се докаже, че независимо от първоначалната конфигурация, Хари спира след краен брой операции.

(б) Нека за всяка начална конфигурация C означим с $L(C)$ броят извършени операции преди Хари да спре. Например, $L(THT) = 3$, а $L(TTT) = 0$. Да се намери средната аритметична стойност на $L(C)$ върху всички 2^n възможни начални конфигурации C.

Решение. (Кънг До) Ще разгледаме какво се случва в зависимост от това с какво започва и с какво завършва редицата.

- Ако конфигурация започва с H, последните $n-1$ монети се подчиняват на правилата, все едно са всички монети, докато станат всички T, след което и първата монета се обръща.
- Ако конфигурация завършва с T, последната монета няма да е обърната никога, и можем да допуснем, че първите $n-1$ монети са всъщност всички монети.
- Ако конфигурация започва с T и завършва с H, средните $n-2$ монети се обръщат така, все едно са всички монети. След като всички станат T, има още $2n-1$ хода (проверете!).

Ясно е сега, че нужните ходове не са безбройни за никоя редица (по индукция). Ще означим с $E_{AB}(n)$, където A и B са съответно началото и края (T, H или $*$), средния брой ходове за общо n монети. Горните разсъждения за $n > 2$ довеждат до:

- $E_{H*}(n) = E(n-1) + 1$.
- $E_{*T}(n) = E(n-1)$.
- $E_{HT}(n) = E(n-2) + 1$ (използвайки две разсъждения).
- $E_{TH}(n) = E(n-2) + 2n - 1$.

Знаем, че $E_{H*}(n) = \dfrac{1}{2}\left(E_{HH}(n) + E_{HT}(n)\right)$, следователно

$$E_{HH}(n) = 2E(n-1) - E(n-2) + 1.$$

Аналогично $E_{TT}(n) = 2E_(n-1) - E(n-2) - 1$. Тогава

$$E(n) = \frac{1}{4}(E_{HH}(n) + E_{HT}(n) + E_{TH}(n) + E_{TT}(n)) = E(n-1) + \frac{n}{2}$$

Имаме, че $E(0) = 0$ и $E(1) = \dfrac{1}{2}$, така че по индукция $E(n) = \dfrac{1}{4}n(n+1)$.

Алтернативно решение. (Кънг До) Забележете, че съществува полуинвариант, който на всеки ход намалява с 1 за всяка редица: броят H, събран с броя инверсии T, което стои пред някое H, умножен по две (незадължително непосредствено).

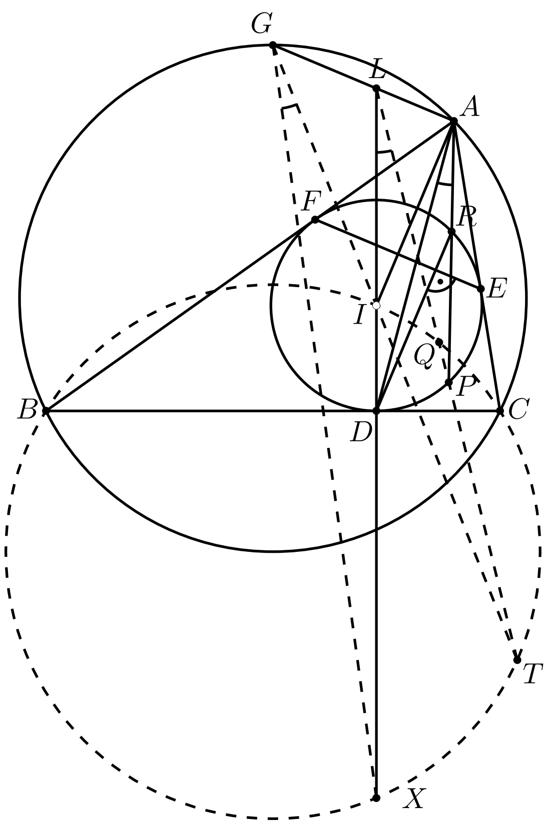
Полуинвариантът достига стойност 0, тогава и само тогава, когато редицата няма повече H, от което следва, че броят нужни ходове е равен на броя H събран с броя инверсии T, което стои пред някое H, умножен по две. Оттук отговорът може да се изчисли индуктивно.

Коментар. На база статистиката от МОМ, тази задача е със сходно ниво на трудност на задача 4. Това се подвърждава и от българските резултати, където отново имаме пет пълни решения и единствено Кристиян Василев не намери правилната рекурентна връзка, за да се справи с подточка б).

Задача 6. (*Индия*) Нека I е центърът на вписаната окръжност ω за остроъгълния триъгълник ABC, за който $AB \neq AC$. Окръжността ω се допира до страните BC, CA и AB, съответно в точките D, E и F. Правата през D, перпендикулярна на EF пресича ω за втори път в точката R. Правата AR пресича ω за втори път в точката P. Описаните окръжности около триъгълниците PCE и PBF се пресичат за втори път в точката Q.

Да се докаже, че правите DI и PQ се пресичат върху правата през A, перпендикулярна на AI.

Решение. Нека k е описаната окръжност около $\triangle ABC$, ω е описаната окръжност около $\triangle BIC$ и без ограничение на общността $AB > AC$.



Ако правата DI пресича правата през A, перпендикулярна на AI в точка L, то AL е външна ъглополовяща за $\triangle ABC$ при върха A и пресича k в средата G на дъгата $\overset{\frown}{BAC}$. Ще докажем, че L лежи на правата PQ.

Тъй като

$$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP + \sphericalangle CQP = \sphericalangle BFP + \sphericalangle CEP = \sphericalangle FRE = 180^\circ - \sphericalangle FDE =$$

$$= 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BIC,$$

то Q лежи на ω.

Нека правите ID и PQ пресичат за втори път ω в точките X и T съответно. Лесно можем да заключим, че $\triangle BIC \sim \triangle ERC$ и да разгледаме ротационна хомотетия ρ, при която

$$\rho(B) = F \text{ и } \rho(C) = E.$$

Тогава $\rho(D) = R$, $\rho(\omega) = k$, $\rho(X) = D$ и $\rho(G) = A$. Оказва се също така, че $\rho(T) = P$. От $\overset{\frown}{BT} = 2\sphericalangle BQT = 2\sphericalangle BFP = \overset{\frown}{FP}$ следва, че

$$\rho(T) = P.$$

От факта, че ротационната хомотетия запазва колинеарността, следва, че точките G, I и T лежат на една права, а от факта, че запазва ъглите следва, че $\sphericalangle XTI = \sphericalangle DPR$ и $\sphericalangle XGT = \sphericalangle DAP$. От друга страна

$$\sphericalangle DPR = \sphericalangle DER = 90^\circ + \frac{\gamma - \beta}{2} = \sphericalangle GLI,$$

т.е. $XTLG$ и $DPAL$ са вписани четириъгълници. Тогава

$$\sphericalangle DLP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle XGT = \sphericalangle XLT,$$

т.е. L лежи на правата PQ.

Коментар. Неслучайно това е най-трудната задача в темата, решена едва от 30 състезатели, които са използвали предимно метрични похвати като комплексни числа. Предложеното синтетично решение е по идея на един от румънските координатори по задачата, бивш олимпийски състезател, и се отличава значително от авторското по своята оригиналност и изящество. За съжаление, нашият отбор не успя да вземе точки по тази задача, предвид очаквано консервативната схема на оценяване. Най-добре се представи отборът на Китай с 36 от 42 възможни точки.

36. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Станислав Харизанов (ИИКТ/ИМИ–БАН),
Стефан Герджиков (ФМИ–СУ/ИИКТ–БАН)

От 30 април до 5 май 2019 г. в Кишинев, Молдова, се проведе 36. Балканска олимпиада по математика (BMO 2019). В престижното състезание взеха участие 107 ученици от 17 държави: Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Северна Македония, Молдова, Румъния, Сърбия, Турция и Черна Гора, както и отбори-гости от Азербайджан, Великобритания, Италия, Казахстан, Саудитска Арабия и Туркменистан. Традиционно, държавата домакин се представи с два отбора.

Българският отбор беше в състав **Кристиан Минчев** (11 клас, ППМГ Бургас), **Борислав Антов** (12 клас, СМГ), **Евгени Кайряков** (11 клас, СМГ), **Кьонг До** (10 клас, СМГ), **Кристиян Василев** (12 клас, ПЧМГ) и **Борислав Кирилов** (9 клас, ПЧМГ). Ръководители на отбора бяха доц. Станислав Харизанов (ИМИ/ИИКТ–БАН) – ръководител и гл.ас. Стефан Герджиков (ФМИ–СУ/ИИКТ–БАН) – заместник-ръководител.

Нашите състезатели спечелиха три сребърни и три бронзови медала и заеха четвърто място в отборното класиране с общ резултат от 153 точки. Първи се класира отборът на Сърбия (182 точки), втори е отборът на Румъния (180 точки), а трети – този на Турция (164 точки).

състезател	задача 1	задача 2	задача 3	задача 4	Общо	Медал
Борислав Антов	9	10	10	0	29	сребро
Евгени Кайряков	10	9	10	0	29	сребро
Кристиян Василев	10	9	10	0	29	сребро
Кристиан Минчев	10	4	10	0	24	бронз
Борислав Кирилов	10	2	10	0	22	бронз
Кьонг До	4	6	10	0	20	бронз

Със сребърни медали са Борислав Антов ($9+10+10+0=29$ точки), Евгени Кайряков ($10+9+10+0=29$ точки) и Кристиян Василев ($10+9+10+0=29$ точки), а бронзови медали получиха Кристиан Минчев ($10+4+10+0=24$ точки), Борислав Кирилов ($10+2+10+0=22$ точки) и Кьонг До ($4+6+10+0=20$ точки).

Състезателната тема бе сравнително трудна, основно поради наличието на задача 4. За златен медал бяха необходими 31 точки, което означаваше ненулев резултат по тази задача. Сумарно по задача 4 бяха спечелени 41 точки от всички участници в Балканиадата, като 26 от тях бяха на сметката на Сърбия, 7 – за държавата предложила задачата – Кипър, по 3 точки взеха Румъния и Турция, а последните 2 точки отидоха при Италия. Оттук е и изоставането ни спрямо сръбския отбор, докато разликата с румънците се дължи на почти перфектното им представяне по останалите три задачи, където те губят отборно едва 3 точки (на задача 2), а ние събрахме максимален актив единствено в геометрията.

Благодарим на МОН и на генералния спонсор на отбора – Американска фондация за България, които подпомогнаха нашето участие на състезанието. Благодарим на всички колеги, участвали активно в подготовката на отбора, провела се в ИМИ–БАН в периода 15–20 април. Благодарим на Борислав Кирилов (задача 2) и Кьонг До (задача 3) за оформянето на решенията в настоящата статия. По-долу ви предлагаме условията и решенията на задачите от Балканиадата.

Задача 1. (*Албания*) Нека означим с $\mathbb{P}$ множеството от всички прости числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, за които

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

е вярно за всеки две прости числа $p, q \in \mathbb{P}$.

Решение. Да допуснем, че $f(2) > 2$. Тогава числото

$$f(p)^{f(2)} = f(2)^{f(p)} + p^2 - 2^p$$

е четно за всяко просто число $p > 2$ и значи $f(p) = 2$ за всяко $p > 2$. Но тогава функционалното тъждество не е изпълнено например за двойката $(p, q) = (3, 5)$. Следователно $f(2) = 2$ и полагайки $q = 2$, получаваме

$$(*) \qquad 2^p - p^2 = 2^{f(p)} - f(p)^2.$$

Оттук $f(p) \neq 2$ при $p > 2$. От друга страна имаме $2^x - x^2 > 2^y - y^2$ за всяка двойка цели числа $x > y > 2$. Това се доказва лесно по индукция чрез неравенството $\left(2^{y+1} - (y+1)^2\right) - \left(2^y - y^2\right) = 2^y - 2y - 1 > 0$ за всяко $y \geqq 3$. Следователно $(*)$ води до $f(p) = p$. Директно се проверява, че тази функция наистина удовлетворява условието на задачата.

Задача 2. (*Румъния*) Реалните числа a, b, c, удовлетворяват условията $0 \leq a \leqq b \leqq c$ и $a + b + c = ab + bc + ca > 0$. Да се докаже, че

$$\sqrt{bc}(a+1) \geqq 2.$$

Да се намерят всички тройки числа (a, b, c), за които се достига равенството.

Първо решение. От класическото неравенство

$$3(ab+bc+ca) \leqq (a+b+c)^2 = (ab+bc+ca)^2$$

получаваме, че $ab+bc+ca \geqq 3$, което в комбинация с $bc \geqq ca \geqq ab$ води до $bc \geqq 1$. Да означим $\sqrt{bc} =: x \geqq 1$. Тогава, $b+c \geq 2\sqrt{bc} = 2x$ и значи

$$a = \frac{b+c-bc}{b+c-1} = 1 - \frac{bc-1}{b+c-1} \geqq 1 - \frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{x(2-x)}{2x-1}.$$

Равенство се достига тогава и само тогава, когато $b=c=x$.

Случай I: Ако $x \geqq 2$, то очевидно $(a+1)bc \geqq 2$, като равенство се достига за тройката $(a,b,c) = (0,2,2)$.

Случай II: Ако $1 \leqq x < 2$, то

$$(a+1)bc = ax + x \geqq \frac{x^2}{2x-1}(2-x) + x \geqq (2-x) + x = 2.$$

Равенство се достига при $b=c=x=1$ и $a = \dfrac{2x-x^2}{2x-1} = 1$, т.е., за тройката $(a,b,c) = (1,1,1)$.

Второ решение. (Борислав Кирилов) Първо ще докажем, че за произволни $0 \leqq x \leqq y \leqq z$, за които $yz > 0$, е изпълнено

$$\frac{\sqrt{yz}(x+y+z)(x^2+2xy+2xz+yz)}{(xy+yz+zx)^2} \geqq 2,$$

като равенство се достига тогава и само тогава, когато $x=y=z$ или $x=0$ и $y=z$.

Тъй като неравенството е хомогенно, Б.О.О. можем да считаме, че $yz=1$, значи $x \leqq 1$. Нека $u = y+z \geqq 2$. Тогава исканото е еквивалентно на

$$\frac{(x+u)(x^2+2xu+1)}{(xu+1)^2} \geqq 2 \iff 2x(1-x)u^2 + (3x-1)(x-1)u + x^3 + x - 2 \geqq 0.$$

Ако $x=0$, получаваме $u-2 \geqq 0$, което е изпълнено. Равенство се достига при $x=0$ и $y=z$.

Ако $x=1$, получаваме $0 \geqq 0$, което е изпълено. Равенство се достига при $x=y=z$.

Ако $x \in (0,1)$, имаме квадратна функция на u с ос на симетрия $\dfrac{3x-1}{4x} < \dfrac{3}{4}$ и положителен старши коефициент. Тъй като $u \geqq 2$, то минимумът на функцията се достига при $u=2$. Тогава получаваме $x(x-1)^2 \geqq 0$, което е изпълнено. Равенство не се достига.

Да се върнем към началната задача. Ако $bc = 0$, то $a = 0$ и получаваме противоречие с условието. Тогава $bc > 0$. От условието $\dfrac{a+b+c}{ab+bc+ca} = 1$ и

$$\sqrt{bc}(a+1) = \sqrt{bc}\left(\frac{a(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{bc}(a+b+c)(a^2+2ab+2ac+bc)}{(ab+bc+ca)^2}$$

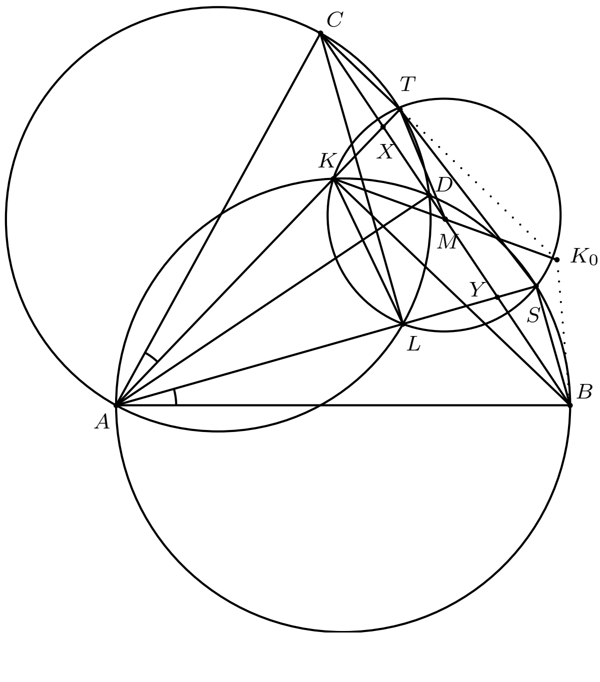
и исканото в задачата следва от доказаното по-горе. След заместване в условието за случаите на равенство, получаваме $(a,b,c) = (0,2,2), (1,1,1)$.

Задача 3. (*Гърция*) Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC. Несъвпадащите точки X и Y са вътрешни за отсечката BC и $\sphericalangle CAX = \sphericalangle YAB$. Ако K и S са петите на перпендикулярите от точката B към правите AX и AY, а T и L са петите на перпендикулярите от точката C към правите AX и AY, да се докаже, че KL и ST се пресичат върху правата BC.

Решение. (Кънг До) Означаваме $\sphericalangle XAB = \sphericalangle YAC = \beta, \sphericalangle CAX = \sphericalangle BAY = \alpha$. Четириъгълниците $ABSK$ и $ACTL$ са вписани, затова

$$\sphericalangle BSK + \sphericalangle BAK = 180^\circ = \sphericalangle BSK + \beta = \sphericalangle LAC + \sphericalangle LTC = \sphericalangle LTC + \beta,$$

следователно от правите ъгли имаме $\sphericalangle KSL = \sphericalangle KTL$. Оттук $KLST$ е вписан.



Нека M е средата на BC и K_0 е симетричната на K относно M. Тогава, $BKCK_0$ е успоредник, защото $BK \parallel CK_0$. Но също $BK \parallel CT$, защото и двете прави са перпендикулярни на AX. Следователно K_0 лежи на CT и понеже $\sphericalangle KTK_0 = 90^\circ$ и M е средата на KK_0, то $MK = MT$. Аналогично $MS = ML$. Центърът на $(KLST)$ е M.

Нека D е петата на височината от A до BC. Тогава D лежи както на $(ABKS)$, така и на $(ACLT)$. Имаме, че

$$\sphericalangle ADT + \sphericalangle ACT = 180^\circ = \sphericalangle ABS + \sphericalangle ADS \text{ и } \sphericalangle ACT = \sphericalangle ABS = 90^\circ - \alpha,$$

откъдето AD е ъглополовящата на $\sphericalangle SDT$. Понеже DM е перпендикулярна на AD, то DM е външната ъглополовяща на $\sphericalangle SDT$. Тогава от $MS = MT$ лесно следва, че $DMST$ е вписан.

Аналогично имаме, че $DMLK$ е също вписан. Радикалните оси на трите окръжности $(KLST)$, $(DMST)$ и $(DMKL)$ са ST, KL и DM и те се пресичат в една точка, с което желаното е доказано.

Задача 4. (*Кипър*) Дадена е целочислена решетка, състояща се от точките (m, n) с цели координати m и n, за които $|m| \leqq 2019$, $|n| \leqq 2019$ и $|m| + |n| < 4038$. Точките (m, n) от решетката, за които или $|m| = 2019$, или $|n| = 2019$, ще наричаме *гранични точки*. Четирите прави с уравнения $x = \pm 2019$ и $y = \pm 2019$ ще наричаме *гранични линии*. Две точки върху решетката ще наричаме *съседни*, ако са на разстояние 1 една от друга.

Ана и Боб играят следната игра.

В началото пул е поставен в точката $(0, 0)$. Първи на ход е Боб и двамата се редуват.

1) На всеки свой ход Боб *изтрива* не повече от 2 гранични точки върху всяка от граничните линии.

2) На всеки свой ход Ана извършва 3 последователни *стъпки*, като всяка *стъпка* се състои в преместването на пула в неизтрита точка, съседна на настоящата.

В момента, в който Ана постави пула в гранична (неизтрита) точка, играта свършва и тя печели.

Има ли Ана печеливша стратегия?

Първо решение (по идея на Jovan Toromanović). Ана няма печеливша стратегия. За първите 673 хода Боб може да изтрие граничните точките от вида $(3k, \pm 2019)$, $(\pm 2019, 3k)$. През това време Ана е изиграла 672 хода и нейният пул се намира в точка (i, j), откъдето тя трябва да мести. Ясно е, че $|i| \leqq 3.672 = 2016$ и $|j| \leqq 3.672 = 2016$ като ако $|i| = 2016$, $j = 0$ и ако $|j| = 2016$, то $i = 0$. В частност единствената гранична точка, която евентуално Ана може да достигне със своя 673-и ход е изтрита.

Сега да разгледаме ситуация непосредствено след t-тия ($t \geqq 673$) ход на Ана, при което пулът е в точка (i, j), играта не е свършила и Боб трябва да направи своя $(t+1)$-и ход. Ще покажем, че Боб може да гарантира, че Ана няма да спечели на $(t+1)$-ия си ход. Наистина да допуснем, че $(l, 2019)$ е гранична точка, която е достижима от (i, j) с три стъпки (един ход на Ана). Тогава тъй като играта не е свършила, $j < 2019$ и имаме три случая:

1. $j = 2016$, тогава единствената възможност за l е $l = i$.
2. $j = 2017$, тогава Ана трябва да направи две стъпки по вертикала и една по хоризонтала. Това означава, че $l = i - 1$ или $l = i + 1$.
3. $j = 2018$, тогава Ана трябва да направи една стъпка по вертикала и две по хоризонтала. Двете стъпки по хоризонтала или ще бъдат в една и съща посока, или ще бъдат в две различни посоки. Това означава, че $l = i - 2$, $l = i + 2$ или $l = i$ (ако една от стъпките е вляво, а другата вдясно).

В първите два случая Боб, имайки право да изтрие до две гранични точки от $y = 2019$, може да изтрие $(i, 2019)$ (в първия) и $\{(i-1, 2019), (i+1, 2019)\}$ (във втория). В третия случай да забележим, че $i-2, i, i+2$ дават различни остатъци при деление на 3, така че една от точките $(i-2, 2019), (i, 2019)$ и $(i+2, 2019)$ е изтрита при някой от първите 673 хода на Боб. Тогава на $(t+1)$-ия си ход, тъй като $t+1 > 673$, Боб може да изтрие и останалите най-много две от тези три точки.

Ясно е, че Боб може да играе аналогично и по останалите 3 гранични прави. Следователно Ана не може да спечели на $(t+1)$-ия си ход и по индукция следва, че Ана не може да спечели.

Второ решение (по идея на Aleksa Milojević). Ще докажем, че Ана няма печеливша стратегия. За целта да разгледаме модифицирана игра, при която Боб изтрива една или две клетки само от правата $y = -2019$ и Ана трябва да доведе пула си до точка $(x, -2019)$ с $|x| \leq 2018$. Ясно е, че ако Ана не може да спечели модифицираната игра, то тя няма печеливша стратегия и за оригиналната. Остава да докажем, че Ана няма печеливша стратегия в модифицираната игра.

Лема 1 *Нека B е множество от изтрити клетки от $y = -2019$. Нека Ана има печеливша стратегия, когато пулът се намира в точка $P = (i, j)$ и тя е на ход. Тогава, ако $Q = (i', j-1)$ като $i' \in \{-1, 1\}$ се намира на дъската, то Ана има печеливша стратегия и ако пулът се намира в точка Q.*

Твърдението е очевидно, ако $j - 1 = -2019$.

Да допуснем, че $j - 1 > -2019$. Да забележим, че ако Ана може да направи стъпка от $P = (i, j)$ до $P' = (i, j+1)$, то Ана може да направи стъпка от Q до $Q' = (i', j)$, а ако Ана може да направи стъпка от $P = (i, j)$ до $P' = (i, j-1)$, то от Q Ана може да направи стъпка до P'. Аналогично, ако Ана може да направи стъпка от P до $P' \in \{(i-1,j),(i+1,j)\}$, то от Q Ана може да направи стъпка до $Q' \in \{P', P'+(-1,-1), P'+(1,-1)\}$. Оттук следва, че ако Ана може да направи ход от P до P', то Ана може да направи ход от Q до $Q' \in \{P', P'+(-1,-1), P'+(1,-1)\}$.

С това наблюдение, твърдението следва с индукция. По-точно твърдението е такова. За всяко множество от изтрити клетки B и всяка точка P от дъската, за което Ана може да спечели за не повече от k хода, е вярно, че Ана може да спечели и от $Q \in \{P+(1,-1), P+(-1,-1)\}$ за не повече от k хода.

От лемата следва, че ако Ана може да спечели от точка $P=(i,j)$ и $Q=(i',j')$ е такава, че $i'+j' \equiv i+j \pmod 2$, $j' < j$ и $i'-j+j' \leqq i \leqq i'+j-j'$, то Ана има печеливша стратегия и от клетката Q. Следователно, ако Ана може да спечели от точка $(0,3j)$ и при изтрити клетки B, то тя може да спечели и от точка $(0,3j-3)$, ако тази точка е от дъската, или от една от двете клетки $(1,3j-2)$ или $(-1,3j-2)$ в противен случай.

Достатъчно е да докажем, че горното е невъзможно.

Наистина, в първите $673 = \dfrac{1}{3} \cdot 2016 + 1$ хода Боб изтрива клетките $[-672, 673]$ от правата $y=-2019$. Тогава Ана се намира в точката $(0,-3.672)=(0,-2016)$ и е тя на ход. Точката $(0,-2019)$ е изтрита и от горното разсъждение тя има печеливша стратегия от $(-1,-2018)$ или от $(1,-2018)$. В първия случай Боб изтрива $(-673,-2019),(-674,2019)$, а във втория $(-673,-2019),(674,-2019)$. Така и в двата случая Ана се намира в точка $(i,-2018)$ и $[i-673; i+673] \times \{-2019\}$ са изтрити. От горното наблюдение следва, че ако Ана има печеливша стратегия то тя трябва да се движи хоризонтално, освен ако не може да намали y-координата на пула. Сега при всеки ход на Ана, който увеличава x координата на пула, Боб изтрива поредните две клетки вдясно от $(0,-2019)$, а в противен случай поредните две вляво от $(0,-2019)$.

Лесно се пресмята, че при този ред на изтриване, Ана не може да доведе пула до $y=-2019$. Това е противоречие с допускането, че Ана има печеливша стратегия. Следователно Ана няма печеливша стратегия, откъдето следва, че Боб има такава.

НЯКОЛКО ПОЛЕЗНИ НЕРАВЕНСТВА ЗА ИЗПЪКНАЛИ И ВДЛЪБНАТИ ФУНКЦИИ

Петър Попиванов, ИМИ–БАН

В тази статия предлагаме няколко неравнства за изпъкнали (вдлъбнати) гладки функции в едномерния случай. Интересни приложения за оценка на функцията на Грийн за полихармоничните уравнения или към „делта пе“ Лапласовия оператор имат техните многомерни обобщения. Тогава обаче техническите трудности са по-големи и поради това ще се ограничим само със случая $n = 1$. Напомняме, че една непрекъсната функция f в интервала Δ се нарича изпъкнала, ако за всяка двойка $x, y \in \Delta$ е изпълнено неравенството

$$f(p_1 x + p_2 y) \leqq p_1 f(x) + p_2 f(y), \quad \text{като} \quad p_1 > 0, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1. \tag{1}$$

Ако в (1) стои неравенството $\geqq$, f наричаме вдлъбната функция. Нека f е непрекъснато диференцируема в Δ. Тогава f е изпъкнала (вдлъбната) точно когато f' е монотонно растяща (монотонно намаляваща). Най-сетне ако съществува f'', то f е изпъкнала тогава и само тогава, когато $f'' \geqq 0$ в Δ. Ако изпъкналата функция f достига max вътре в Δ, тя е константа.

Очевидно $f(x) = \log x$ е вдлъбната при $x > 0$, докато x^p е изпъкнала при $p \geqq 1$, $x > 0$. Най-сетне $|x|$, $|x|^p$, $p \geqq 1$ е изпъкнала навсякъде.

Нека f е изпъкнала и диференцируема в Δ, т.е.

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in (0,1).$$

Следователно при $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(y) &\geqq \frac{1}{\lambda} f((1-\lambda)x + \lambda y) - \frac{1-\lambda}{\lambda} f(x) \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}[f(x + \lambda(y-x)) - f(x)] + f((1-\lambda)x + \lambda y). \end{aligned}$$

При $\lambda \to 0$ получаваме, че

$$f(y) \geqq f'(x)(y-x) + f(x). \tag{2}$$

Прилагаме (2) към функцията $f(x) = x^p$, $x > 0$, $p > 1$ и заключаваме, че

$$y^p \geqq p x^{p-1}(y-x) + x^p, \quad y > 0. \tag{3}$$

Случаят $p = 1$ е тривиален.

Въпросът, който си поставяме, е може ли да се подобри (3) при $p > 2$, т.е. да добавим в дясно неотрицателен член при който неравенството да се запази. Отговорът се дава от следното предложение.

Предложение 1. При $y \geqq 0$, $x \geqq 0$, $p > 2$ е валидно следното неравенство:

$$y^p \geqq x^p + px^{p-1}(y-x) + \frac{|x-y|^p}{2^{p-1}-1}. \tag{4}$$

При $p = 2$ (4) е тъждество.

Доказателство. При $y = 0$ (4) е изпълнено за всяко $x \geqq 0$, защото $(1-p)+\dfrac{1}{2^{p-1}-1} < 0$. При $y \neq 0$ делим двете страни на (4) на y^p, означаваме $\alpha = \dfrac{x}{y} \geqq 0$ и намираме

$$1 \geqq \alpha^p + p\alpha^{p-1} + \frac{|\alpha-1|^p}{2^{p-1}-1} \equiv h(\alpha).$$

Ще разгледаме случаите (а) $0 \leqq \alpha \leqq 1$, (б) $\alpha \geqq 1$.

(а) $h(\alpha) = (1-p)\alpha^p + p\alpha^{p-1} + \dfrac{(1-\alpha)^p}{2^{p-1}-1} > 0$, $h(0) = \dfrac{1}{2^{p-1}-1} < 1$, $h(1) = 1$; при $\alpha \in (0,1)$:

$$h'(\alpha) = (1-\alpha)^{p-1}p(p-1)\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{p-2} - \frac{1}{(2^{p-1}-1)(p-1)}\right],$$

$h'(0) < 0$, $h'(1) = 0$. Означаваме

$$\left[\frac{1}{(p-1)(2^{p-1}-1)}\right]^{\frac{1}{p-2}} = k.$$

Очевидно $0 < k < 1$, $h'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \dfrac{k}{k+1} \in (0,1)$, $h'(\alpha) < 0$ при $0 \leqq \alpha < \dfrac{k}{k+1}$. Следователно $\max\limits_{[0,1]} h = 1$.

(б) $h'(\alpha) = p(1-p)(\alpha-1)^{p-1}\left[\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{p-2} + \dfrac{1}{(1-p)(2^{p-1}-1)}\right].$

$h'(\alpha) < 0$ при $\alpha > 1$, защото

$$\alpha^{p-2} > (\alpha-1)^{p-2} > \frac{(\alpha-1)^{p-2}}{(p-1)(2^{p-1}-1)}.$$

Значи $\max\limits_{[1,\infty)} h = 1$.

Следващото неравенство, което ще разгледаме, има вида

$$x^p + y^p \geqq 2\left(\frac{x+2}{2}\right)^p + 2\left|\frac{x-y}{2}\right|^p, \ x \geqq 0, y \geqq 0. \tag{5}$$

При $y = 0$, респективно $x = 0$, (5) е очевидно. Инак делим на $y > 0$ и имаме $1 + \alpha^p \geqq 2^{1-p}\left[(\alpha+1)^p + |1-\alpha|^p\right]$.

Без ограничение на общността считаме, че $0 \leqq x \leqq y$, т.е. $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

Трябва да докажем неравенството

$$1 \geqq 2^{-p+1}\left[(\alpha+1)^p + (1-\alpha)^p\right] - \alpha^p \equiv h(\alpha).$$

Очевидно $h(0) = 2^{2-p} < 1$, $h(1) = 1$, при $0 < \alpha < 1$

$$h'(\alpha) = p\alpha^{p-1}\left[2^{-p+1}\left[(\mu+1)^{p-1} - (\mu-1)^{p-1}\right] - 1\right],$$

където $\mu = \dfrac{1}{\alpha} > 1$. Разбира се, $h'(0) = 0$, $h'(1) = 0$. Означаваме $g(\mu) = 2^{-p+1}\left[(\mu+1)^{p-1} - (\mu-1)^{p-1}\right] - 1$, $\mu \geqq 1$, $g(1) = 0$. Проверете, че $g'(\mu) > 0$ при $\mu > 1$, т.е. $g(\mu) > g(1)$ при $\mu > 1$ и т.н. Значи $\max\limits_{[0,1]} h = h(1) = 1$.

Предложение 2. Нека $t \geqq 0$, $s \geqq \dfrac{1}{2}$. Тогава

$$\frac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \leqq 2(1 + |t-s|).$$

Каквато и да бъде константата $C > 0$ неравенството

$$\frac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \leqq C(1 + |t-s|), \ t > 0, s > 0$$

е невъзможно.

Доказателство. Поради вдлъбнатостта на $\log x$ каквато и да бъде $\alpha \geqq 1$, имаме:

$$\log(1+s) = \log\left(\frac{1}{\alpha}\cdot(1+\alpha s) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\cdot 1\right) \geqq \frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha s),$$

т.е. $\log(1+\alpha s) \leqq \alpha\log(1+s)$ при $\alpha \geqq 1$. При $0 < \alpha < 1$ очевидно

$$\log(1+\alpha s) \leqq \log(1+s).$$

Следователно за всяко $\alpha > 0$: $\dfrac{\log(1+\alpha s)}{\log(1+s)} \leqq 1 + \alpha$. Ако вземем $\alpha = \dfrac{t}{s} \Longrightarrow$

$$\frac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \leqq 1 + \frac{t}{s}. \tag{6}$$

Понеже $0 \leqq t = t - s + s \leqq |t-s| + s$ (6) добива вида при $s \geqq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \leqq 2(1 + |t-s|).$$

Ако $t = \dfrac{1}{n^k}$, $s = \dfrac{1}{n^l}$, $l > k > 0$, то $t \to 0$, $s \to 0$ при $n \to \infty$, докато $\dfrac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ако работим в многомерния случай, $x = (x_1, \dots, x_n)$ е вектор, а скаларното произведение $(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, $\|x\|^2 = (x, x)$. Тогава са валидни неравенствата

$$\|y\|^p \geqq \|x\|^p + p\|x\|^{p-2}(x, y-x) + \frac{\|x-y\|^p}{2^{p-1}-1}, \ p \geqq 2,$$

за всяко $x, y \in \mathbb{R}^n$ и

$$\|x\|^p + \|y\|^p \geqq 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p, \ p \geqq 2$$

за всяко $x, y \in \mathbb{R}^n$ (неравенство на Кларксон).

С това приключваме кратката статия. За любознателния читател отбелязваме, че при неравенството (3) допуща следното подобрение за $x > 0$, $y \geqq 0$:

$$y^p \geqq x^p + px^{p-1}(y-x) + \frac{3p(p-1)(x-y)^2}{16(x+y)^{2-p}}.$$

Може ли да го докажете сами?

В БЪЛГАРИЯ ИМА МОМИЧЕТА С МАТЕМАТИЧЕСКА ПОДГОТОВКА И КУЛТУРА НА СВЕТОВНО НИВО

Марин Маринов

Краят на август и началото на септември са дните, в които подготовката за новата учебна година кипи с пълна сила. Улисани в купуването на дрехи и учебни материали, често забравяме да погледнем на 15 септември през положителните примери. Примери, които показват, че в България има много умни и кадърни ученици. Примери, които доказват, че с постоянство се постигат успехи. Примери, които вдъхновяват.

Един такъв пример са българските млади дами, които участват на **Европейската олимпиада по математика за момичета (EGMO)**. По време на осмото издание на състезанието тази година в Киев българският отбор завърши на трето място от 50 държави. На индивидуално ниво резултатите са още по-впечатляващи: момичетата спечелиха един златен и три сребърни медала. **Михаела Гледачева**, която е ученичка в Първа частна математическа гимназия „Питагор“ в София, завоюва първото място, а със сребро се отличиха **Люба Конова** от Софийската математическа гимназия (СМГ), **Маргарита Стефанова**, пак от СМГ, и **Марина Бояджиева** от природоматематическата гимназия в Бургас.

Добрият пример

България е сред учредителките на **Европейската олимпиада по математика за момичета** – инициатива, която има за цел да стимулира младите дами да се занимават с математика, въпреки съществуващите все още предразсъдъци, че това не е предмет за момичета. Подготовката на българските ученички се осъществява от ИМИ–БАН и от предишни успешни участнички в състезанията. Тази година в екипа участваха проф. Петър Бойваленков, проф. Емил Колев, доц. Станислав Харизанов, доц. Ивайло Кортезов и чл.-кор. Николай Николов, заедно с неколкократните медалистки от предни издания на EGMO Деница Маркова и Велина Иванова.

ИМИ–БАН работи с българските момичета и момчета чрез различни формати и обучения, включително чрез дейността на **фондация „Георги Чиликов“**. Сред успешните съвместни инициатива са Есенният математически турнир за ученици от 8 до 12 клас, Седмицата на олимпийската математика, където състезанията се осъществяват по типа задачи на Международната олимпиада по математика, както и в подготовката на националните олимпийски отбори. Институтът работи активно и с учители за усъвършенстване на тяхната професионална квалификация.

Учените от ИМИ–БАН са от добрите примери за успешно и полезно сътрудничество между научната общност и училищната система. Пример, който показва, че науката помага активно в развитието на нашите деца. Пример, че наука и училищно образование не са различни „планети“, а са взаимно допълващи елементи за успеха на българските деца.

Повече за работата с ученици, за постиженията на българските млади дами в Киев, за нуждата от специална олимпиада за момичета, както и защо участието на момичетата мотивира и момчетата ни разказват ***проф. Петър Бойваленков*** *и* ***Деница Маркова****. Деница е медалистка от Олимпиадата през 2014, 2015 и 2016 година.*

България е сред учредителите на Европейската олимпиада по математика. Защо е важно това състезание?

Проф. Петър Бойваленков: Преди всичко, Европейската олимпиада за момичета даде нова и изключително интересна възможност за изява на момичетата. Това доведе до раздвижване - самостоятелна работа, курсове за подготовка, допълнителни състезания, нови амбиции и т.н. Покрай момичетата се раздвижиха и момчетата. Получихме възможност (и се възползвахме от нея!) да докажем, че в България има млади дами, чиято математическа подготовка и култура са на световно ниво. Вече на два пъти (през 2016 и 2019) България е на трето място в света и на първо в Европейския съюз.

Деница Маркова: Европейската олимпиада по математика за момичета е важна стъпка напред в насърчаването на момичета да се интересуват от математика. По данни от официалната статистика на Международната олимпиада по математика, по-малко от 10% от участниците са момичета. Наблюдава се, че сред държави, които участват в EGMO, тази пропорция е нараснала. EGMO дава възможност на момичета да участват на елитно състезание и да получат опит и връзки, но още по-важно, увереност. Все още съществува стереотип, че математиката е „само за момчета“ или „зубърски“ предмет, което пречи на момичета да развиват таланта си. По време на EGMO момичетата могат да се запознаят с други жени, които водят научна дейност в математиката, и да видят, че това наистина е област, в която могат да успеят.

Какви са предизвикателствата пред подготовката на ученици за подобни международни състезания?

Проф. Петър Бойваленков: Не бих казал, че предизвикателствата са много по-различни от тези при традиционните (досегашните) състезания. Тук може би е мястото да отбележа, че вече голям брой страни правят това, което до преди 15–20 години ни даваше голямо предимство – концентрираната подготовка преди олимпиадата. Сега всички разполагатс добри програми за подготовка, лектори, финансиране (обикновено по-добро от нашето) и конкуренцията е огромна. Всичко това прави нашите успехи на EGMO още по-ценни, но и ни задължава да се стараем още повече – да търсим нови форми на успешна работа.

Деница Маркова: Основното предизвикателство лично при мен беше да помагам на подготовката от чужбина, както и да следвам „модата“ в задачите, които се дават. С годините състезателните теми еволюират и работата на ръководителя е да следи или даже предвиди тази еволюция. Олимпиадите по математика и информатика заемат все повече идеи една от друга. Това изисква състезателите да са запознати с много по-широк кръг идеи и предполага по-голям обем материал за подготовка.

Вие сте част от Института по математика и информатика към БАН. Защо е важно хората на науката директно да работят с учениците?

Проф. Петър Бойваленков: Най-краткият отговор се съдържа в баналната аксиома - не може да има добро образование без силна наука. Институтът по математика и информатика винаги е придавал огромно значение на работата с олимпийци по математика, информатика и математическа лингвистика. Наши специалисти определят, подготвят и ръководят отборите за най-важните международни състезания (между които несъмнено е и EGMO). Някога бивши олимпийци „захранваха“ кадрово института – уверени сме, че това време ще настъпи отново.

Деница Маркова: Поне в България, научната дейност не е популярна кариерна насока. Контактът с учени помага на това учениците да разберат, че имат опцията да преследват научна дейност.

След добрите резултати в Украйна, какво предстои за момичетата?

Проф. Петър Бойваленков: Преди всичко – нова учебна и състезателна година. Три от четирите момичета са още в средното училище и имат всички възможности и шансове да надградят върху тазгодишните си успехи. Разбира се, те не са „абонирани“ за отбора и отново ще трябва да преминат през системата за подбор в силна конкуренция. Сигурен съм, че имат големи шансове и в общите състезания. България е една от страните с отлични постижения на момичета на МОМ – ще спомена само, че Виолета Найденова спечели през 2017 г. новоучредената награда на името на Мариам Мирзахани (първата и засега единствена жена с Филдсова награда) като най-добре представила се девойка от Европа.

Деница Маркова: Три от четирите момичета в отбора имат още две години, в които могат да се състезават. Предстоят им още два опита в EGMO, както и основните международни олимпиади. По традиция, медалистите от международни олимпиади винаги биват приети в отлични университети.

XXIII МЛАДЕЖКА БАЛКАНИАДА ПО МАТЕМАТИКА, КИПЪР 2019

Ивайло Кортезов (ИМИ–БАН), Емил Карлов (СМГ)

Двадесет и третата Младежка балканска олимпиада по математика (МБОМ) за ученици до 15,5 години се проведе в с. Агрос (Кипър) от 20 до 25 юни 2019. В нея взеха участие ученици от 16 държави: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Еквадор (гост), Кипър (2 отбора), Казахстан (гост), Македония, Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Сърбия, Франция (гост), Хърватска (гост) и Черна гора. Разширеният отбор на България за МБОМ беше избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Есенния математически турнир (за 8 и 9 клас), Зимните математически състезания (за 8 и 9 клас), Пролетните математически състезания (за 7, 8 и 9 клас) и Националния кръг на олимпиадата по математика (за 7 и 8 клас). Отборът на България за МБОМ беше определен от участниците в Разширения отбор въз основа на сбора от точките от двете проведени контролни. Първите шестима участници според това класиране сформираха отбора на България за МБОМ 2019. За ръководител на отбора беше определен доц. д-р Ивайло Кортезов от ИМИ–БАН, а за заместник-ръководител – Емил Карлов от СМГ.

Беше проведена сериозна 13-дневна подготовка, включваща по 6 часа лекции денвено плюс математически бой. Бяха проведени и две големи контролни работи при условията на МБОМ. Състезанието се състоя на 22 юни 2019 (задачите и упътвания са дадени по-долу). Всички наши участници спечелиха медали: два златни медала с пълен сбор, три сребърни и един бронзов. Резултатите на българския национален отбор са следните:

	1	**2**	**3**	**4**	**сбор**	**медал**
Иван Тагарев	10	10	10	10	**40**	златен
Илияс Номан	10	10	10	10	**40**	златен
Никола Цачев	10	10	2	10	**32**	сребърен
Божидар Димитров	10	10	2	4	**26**	сребърен
Ивайла Радкова	4	10	0	6	**20**	сребърен
Мария Дренчева	4	0	0	9	**13**	бронзов
БЪЛГАРИЯ	48	50	24	49	**171**	

В неофициалното отборно класиране отборът ни зае второ място със 171 т. след отбора на Румъния. В неофициалното класиране с добавени гости, отборът е трети, малко зад отбора на Казахстан. Интересен факт е наличието на отбори, спечелили общо по-малко точки от кой да е български състезател. Състезателите се справиха отлично и показаха, че идват сериозни попълнения за отборите ни при по-големите.

Ето задачите от МБОМ. Опитайте се да се справите сами с тях. Даже най-добре е да опитате да не четете упътванията. Ще може да сверите намерените от Вас решения в следващия брой.

Състезателната тема МБОМ, 22.06.2019

Задача 1. Намерете всички прости числа p, за които съществуват естествени числа x, y и z, такива че числото $A = x^p + y^p + z^p - x - y - z$ е произведение на точно три различни прости числа.

Упътване. Проверете първите няколко прости p. Ако A се дели на някое просто число, то трябва да е сред трите множителя. И сами сте забелязали, че задачата плаче за МТФ, но има и други прости числа, за които може да се направят лесни наблюдения.

Задача 2. Нека a, b са две различни реални числа. Нека c е положително реално число, за което $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c$. Докажете, че $-c^{1/2} < ab < 0$.

Упътване. Бъдете упорити и прецизни. Задачата е лесна и има много възможни подходи. Не забравяйте да внимавате с неравенствата, понеже сред числата има отрицателни.

Задача 3. Триъгълник ABC е остроъгълен и $AB < AC$. Симетралата на страната BC пресича правите AB и AC съответно в точки P и Q. Нека H е ортоцентърът на триъгълник ABC, а M и N са съответно средите на отсечките BC и PQ. Докажете, че правите HM и AN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност k.

Упътване. Подобните триъгълници се разделят от съответните медиани на две двойки подобни триъгълници. Ако AN и HM се пресичат в L, какво може да кажете за $\sphericalangle MLN$? И си припомнете, че ако D е симетричната точка на H относно M, то е AD диаметър на k.

Задача 4. Таблица 5×100 е разделена на 500 единични квадратни полета, от които n са черни, а останалите – бели. Едно поле се нарича *съседно* на друго, ако имат обща страна. Всяко поле има най-много две съседни черни полета. Намерете най-голямото възможно n.

Упътване. За примера е добре черните полета да са по-близо до периферията, за да са съседи на по-малко полета, пък нататък – каквото сабя покаже. За оценката можете да преброите съседите на някое множество от полета и да отчетете колко пъти е броено всяко черно поле. Алтернативно, можете да разделите таблицата на зони, във всяка от които да има не повече от две черни полета.

Предизвикателство. Открийте всички примери на таблици, реализиращи максимума.

КОНТРОЛНИ РАБОТИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ ОТБОРА НА БЪЛГАРИЯ ЗА МБОМ 2019

Ивайло Кортезов (ИМИ – БАН)

Отборът на България за МБОМ беше определен от участниците в Разширения отбор въз основа на сбора от точките от двете проведени контролни работи. Ето резултатите им по всяка от осемте задачи:

Имена	**Клас**	**Училище**	**Град**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Сбор**
Иван Тагарев	8	СМГ	София	10	10	1	10	10	8	10	5	**64**
Никола Цачев	8	ПЧМГ	София	10	10	10	10	10	10	1	1	**62**
Божидар Димитров	8	ПМГ	Силистра	10	5	10	10	10	10	0	3	**58**
Илияс Номан	8	СМГ	София	10	4	1	10	2	10	10	5	**52**
Мария Дренчева	7	СМГ	София	10	10	2	0	10	10	4	1	**47**
Ивайла Радкова	8	125. СУ	София	10	10	1	0	10	10	0	5	**46**
Ясен Пенчев	7	ПМГ	Габрово	10	10	3	0	10	10	0	0	**43**
Александър Дойчинов	9	125. СУ	София	10	10	1	1	10	8	0	3	**43**
Константин Илиев	9	СМГ	София	10	10	1	0	10	10	0	0	**41**
Цветелина Илиева	8	ППМГ	Бургас	10	0	3	10	10	7	0	0	**40**
Антон Бресковски	7	107 ОУ	София	4	10	0	0	10	10	0	5	**39**
Деян Хаджи-Манич	7	МГ	Варна	10	10	5	0	10	0	2	1	**38**
Жара Недкова Еленска	8	ПМГ	В. Търново	10	4	4	0	10	8	0	1	**37**
Маргулан Исмолдаев	8	МГ	Варна	10	10	1	0	10	2	0	0	**33**

Първите 6 участници според това класиране сформираха отбора на България за МБОМ 2018.

Предлагаме на читателите условията и решенията на задачите от двете контролни.

Първо контролно за МБОМ, София, 11 май 2019 г.

Задача 1. Да се намерят всички двойки естествени числа $(m; n)$, такива, че

$$m^3 - 2^n = 3311.$$

Решение. По модул 7 остатъкът на m^3 е 0, 1 или 6, на 2^n е 1, 2 или 4, а на 3311 е 0, така че трябва остатъкът на 2^n да е 1, което се случва при $n = 3k$. Получаваме $m^3 - 2^{3k} = 3311$, т.е.

$$(m - 2^k)(m^2 + m.2^k + 2^{2k}) = 7.11.43.$$

Вторият множител е по-голям от квадрата на първия, така че имаме само вариантите:

▷ $m - 2^k = 1$; $m^2 + m.2^k + 2^{2k} = 3311$, откъдето получаваме, че $3.m.2^k = m^2 + m.2^k + 2^{2k} - (m - 2^k)^2 = 3310$: абсурд;

▷ $m - 2^k = 7$; $m^2 + m.2^k + 2^{2k} = 473$, откъдето получаваме, че $3.m.2^k = 424$: абсурд;

▷ $m - 2^k = 11$; $m^2 + m.2^k + 2^{2k} = 301$, откъдето получаваме, че $3.m.2^k = 180$, което предвид първото равенство води до $m = 15$, $k = 2$, $n = 6$.

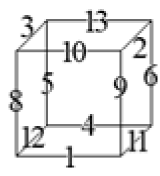
Задача 2. На ръбовете на куб (по едно на ръб) са записани 12 различни естествени числа, най-голямото от които е g, а най-малкото е m. Сборът от числата на трите ръба през всеки връх е един и същ. Намерете най-малката възможна стойност на $g - m$.

Решение. Ясно е, че $g - m \geqq 11$. Ако допуснем, че $g - m = 11$, то удвоеният сбор на числата по ръбовете

$$2(12m + 1 + 2 + \cdots + 11) = 24m + 132$$

е равен на сбора във върховете, така че се дели на 8, т.е. 8 дели 132: абсурд.

Вдясно има пример с $g - m = 12$.



Задача 3. Намерете най-голямата стойност на израза

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a+b}+\frac{\sqrt{b-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{c-1}}{c+a},$$

ако реалните числа a, b, c са не по-малки от 1.

Решение. Според САСГ

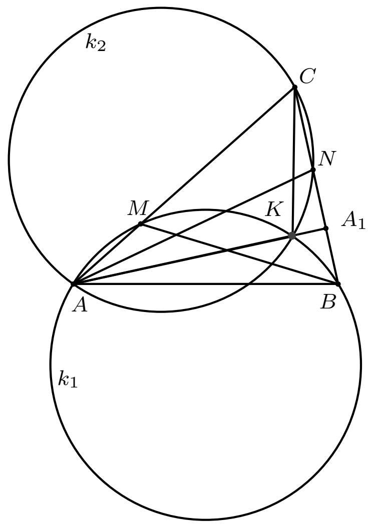
$$\frac{\sqrt{a-1}}{a+b} \leqq \frac{\sqrt{a-1}}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}} \leqq \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Събирайки с аналогично получените неравенства

$$\frac{\sqrt{b-1}}{b+c} \leqq \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \qquad \frac{\sqrt{c-1}}{c+a} \leqq \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right),$$

заключаваме, че даденият израз е не по-голям от $\frac{3}{4}$. Равенство се достига за $a=b=c=2$.

Задача 4. Страните AB и AC на остроъгълния триъгълник ABC са хорди съответно в окръжностите k_1 и k_2; k_1 пресича страната AC във вътрешна точка M, а k_2 пресича страната BC във вътрешна точка N, като $AB = AN$, $BC = BM$. Ако k_1 и k_2 се пресичат за втори път в точка K и $\sphericalangle ACK = 50^\circ$, да се пресметне големината на $\sphericalangle BAC$.



Решение. Нека ъглите на $\triangle ABC$ са съответно α, β, γ. Ще докажем, че височината AA_1 през върха A пресича k_2. Наистина, ако AA_1 не пресича k_2, то $\sphericalangle A_1AN = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$ е по-голям или равен на половината от дъгата AN, т.е $90^\circ - \beta \geqq \gamma \Leftrightarrow \alpha \geqq 90^\circ$. Противоречие.

Нека AA_1 пресича k_2 в точка T. От $AB = AN$ следва $\sphericalangle ANC = 180^\circ - \beta$. Тогава $\sphericalangle ATC = \sphericalangle ANC = 180^\circ - \beta$.

Да построим и височината CC_1 през върха C. Нека тя пресича AA_1 в точка H. От четириъгълника HC_1BA_1 получаваме $\sphericalangle AHC = \sphericalangle A_1HC_1 = 180^\circ - \beta$, което (предвид факта, че H и T лежат на AA_1) е възможно, когато $H \equiv T$.

Така доказахме, че ортоцентърът H на $\triangle ABC$ лежи на k_2. Аналогично доказваме, че H лежи и на k_1, т.е точка K от условието на задачата е от височината CC_1. Сега вече лесно намираме, че $\sphericalangle BAC = 40^\circ$.

Задача 5. Окръжност е разделена на равни дъги чрез 24 точки. За кое най-голямо k съществува изпъкнал k-ъгълник с върхове сред тези точки, никои две страни на който не са успоредни?

Решение. Нека точките са поред A, B, C, $\dots$, X. Ако са избрани четирите върха на някой от $ABMN$, $CDOP$, $EFQR$, $GHST$, $IJUV$, $KLWX$, то в k-ъгълника има две успоредни страни. Следователно трябва да е изпълнено условието $k \leqq 6.3 = 18$.

За $k = 18$ да вземем $ABCDEFGHIJKLMOQSUW$; ако има успоредни страни, те трябва да са от различни страни на диаметъра AM. Но от едната му страна върховете са поредни, а от другата са през един, така че двете свързващи дъги не могат да са равни, понеже се състоят от общо нечетен брой единични дъгички: абсурд.

Задача 6. Да се намерят всички двойки цели числа $(x; y)$, такива че

$$2x^4 + 4y^4 + (10y + 1)x^2 + (4x + 25)y^2 = 2019.$$

Решение. Записваме условието във вида

$$x^4 + x^4 + 10x^2y + 25y^2 + x^2 + 4xy^2 + 4y^4 = 2019$$

$$x^4 + (x^2 + 5y)^2 + (x + 2y^2)^2 = 2019.$$

При $|x| \geqq 7$ лявата страна е поне 2401: абсурд.

Също по модул 4 остатъкът на 2019 е 3, а на точните квадрати е 0 или 1, така че събираемите вляво са нечетни, в частност x е нечетно. По модул 5 остатъкът на 2019 е 4, на x^4 е 0 или 1 (защо?), а на точните квадрати е 0, 1 или 4. Имаме $x^2 \equiv x^2 + 5y (\mathrm{mod} 5)$, така че $x^4 \equiv (x^2 + 5y)^2 (\mathrm{mod} 5)$ и е възможно само $x^4 \equiv 0 (\mathrm{mod} 5)$. Тогава $x = \pm 5$ и в уравнението

$$(25 + 5y)^2 + (2y^2 \pm 5)^2 = 1394$$

вторият квадрат е нечетен, така че първият е нечетен, кратен на 5 и не по-голям от 1394, т.е. някое от числата 5^2, 15^2, 25^2 и 35^2. Проверката дава решенията $(5; 2)$ и $(5; -4)$.

Задача 7. На страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ извън $\triangle ABC$ са построени равностранните $\triangle BCA_1$, $\triangle CAB_1$ и $\triangle ABC_1$. Права m през средата M на отсечката A_1B_1 е перпендикулярна на правата AB. Права n през средата N на B_1C_1 е перпендикулярна на BC. Права p през средата P на C_1A_1 е перпендикулярна на CA. Докажете, че m, n и p минават през една точка.

Решение. Нека A_0, B_0, C_0, K и T са средите съответно на BC, CA, AB, CA_1 и CB_1 По I признак $\triangle A_0CB_0$, $\triangle A_0TM$ и $\triangle MKB_0$ са еднакви, така че $\triangle MA_0B_0$ е равностранен и m е симетрала за A_0B_0, т.е. тя съдържа центъра O на описаната окръжност около $\triangle A_0B_0C_0$. По същите причини n и p съдържат O.

Задача 8. а) Съществуват ли реални многочлени P, Q, R на променливите x, y, z такива, че за всички реални стойности на променливите е изпълнено

$$(x+2018y+2019z)^2.P+(x+2019y+2018z)^2.Q+(x+y+z+2019)^2.R=2019^2?$$

б) Съществуват ли реални многочлени A, B и C на променливите x, y такива, че за всички реални стойности на променливите е изпълнено

$$(x+y+2019)^2.A+x^2.B+y^2.C=2019^2?$$

Припомняме, че реален едночлен на променливите x, y, z е израз от вида $Kx^my^nz^p$, където K е реално число, а m, n, p са цели неотрицателни числа, а реален многочлен на тези променливи е сума на краен брой (възможно един) реални едночлени.

Решение. а) Отговорът на въпроса е Не, тъй като при $x=-2y-2019$, $z=y=\dfrac{2019}{4035}$ бихме получили абсурда $0.(P+Q+R)=2019^2$.

б) Ако заменим x с $2019x$, y с $2019y$ и съкратим полученото на 2019^2, трябва да осигурим

$$(x+y+1)^2A+x^2B+y^2C=1.$$

Ако умножим $(x+y+1)^2=x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$ по $1-2xy-2x-2y$, полученото можем да представим във вида $Px^2+Qy^2+1-8xy$ за подходящи многочлени P, Q. Ако сега умножим по $1+8xy$, полученото можем да представим във вида $-Bx^2-Cy^2+1$.

WORLD MATHEMATICS CHAMPIONSHIP, МЕЛБЪРН, АВСТРАЛИЯ

Иван Узунов

След 14 часа и 30 минути полет от Доха, Катар, и изминати общо около 15 000 километра, пресякохме глобуса, за да вземем участие във Финалното състезание на World Mathematics Championship, което се проведе между 01.07.2019 и 07.07.2019 в Trinity college, Melbourne University.

Финалите във Мелбърн се състояха от 12 отделни състезания, като само 3 са индивидуални, а останалите 9 са отборни. В тези състезания децата се оценяваха в 7 направления: **Знания, Стратегия, Креативност, Предизвикателство, Сътрудничество, Комуникация и Съдействие**. За всяка „колонка" от направленията Collaboration, Communication and Cooperation се съставят отбори на различен принцип: Collaboration (по решение на журито), Communication (по предварително класиране на отборите за финала или BG team) и Cooperation (на случаен принцип). Нивото на математическите знания е за 8.–9. клас.

Състезанието Mathematician е индивидуално и включва 40 задачи за 90 минути., а състезателната тема е тест от въпроси с избираем отговор.

Състезанието Due също е индивидуално и е стратегическа игра 1 срещу 1, която се състои от 3 етапа. Първото разделяне е на случаен принцип, второто е на база на спечелените точки, като тези с най-много точки са

Skills categories	Challenge	Collaboration	Communication	Cooperation
Knowledge	Mathematician	Lightning	Shuttle	Proof
Strategy	Duel	Innovation	Pursuit	Crypto
Creativity	Codebreaker	Open	Inspiration	Datamine

в една група, тези с по-малко – във втора, а третата група е с най-малко точки. Последният етап са финалите.

Състезанието Codebreaker е индивидуално. Всеки участник получава 8 кода с 8 липсващи празни полета и трябва да даде предположеие за следващото число в редицата. Времето за реакция е приблизително 10 секунди.

Състезанието Lightning е отборно и включва максимум 40 задачи за 60 минути. Отборите се нареждат в колона от чинове. Един представител от отбор отива до началото, взема задача, прави обиколка по часовниковата стрелка на всички чинове, дава задачата на отбора си. Решението се дава на журито за проверка и при верен отговор се взема втора задача и т.н. Ако се стигне до задача, която затруднява отбора, тя може да се пропусне и да се вземе следващата. „Пощальонът“ на отбора се сменя на 20 минути.

Състезанието Innovation е отборно и продължава около 120 минути. Всеки отбор изготвя презентация на тема от реален математически проблем. Отборите трябва да създадат модел за решението на този проблем и да го представят пред журито и аудиторията.

Състезанието Open е отборно. Всеки отбор има 60 минути, в които да направи постер по даден математически проблем. Решението се защитава пред жури и аудитория.

Състезанието Shuttle е отборно и включва 12 задачи за 60 минути. Провежда се като щафета: двама от отбора решават първата част от задачата и предават задачата на третия член от отбора. На всеки 4 задачи играчите се завъртат, за да може всеки един от отбора да завършва задачите.

Състезанието Pursuit е отборно и се провежда в 2 рунда от 8 задачи, всеки за 30 минути. Всички отбори са в кръг, а във всеки ъгъл на стаята има „4 станции“ със задачи. Всеки „ъгъл“ носи различен брой точки за решена задача. Взетите и решени задачи се връщат от станцията, от която са взети. След вземане и предаване на задача се прави обиколка на кръга в определена посока, за да се избегне предимството на по-близко стоящия.

Състезанието Inspiration е отборно. Изготвя се 3 минутна презентация върху реален математически проблем. Презентацията се представя пред ментори, жури и аудитория и се оценява по предварително зададени критерии като дълбочина на анализа, стил, доказателствена част, презентационни умения и други.

Състезанието Proof е отборно. В рамките на 60 минути отборите представят писмено доказателство на 12 твърдения от областите Алгебра, Геометрия, Теория на числата, Статистика, Аритметика.

Състезанието Crypto е отборно. Използват се 16 шифъра (Цезар, Разбъркана азбука, Морзов код, Пермутации, Телефонна клавиатура, Митични и др.). В рамките на 90 минути всеки отбор взема шифровано условие на задача, решава я и я предава и т.н. Получават се точки при правилен отговор, а при грешен само се взема задачата с 0 точки и отборът отива за следващ шифър.

Състезанието Datamine е отборно. Има голяма база от данни (над 50 000 реда и над 50 колони) и за около 120 минути отборът прави обработка на базата данни, флтриране, анализ и отговор на предварително зададени въпроси.

В квалификацията взеха участие и деца от Австралия, Тайван, Виетнам, Малайзия, Китай, Хонг Конг, Тайланд, Индонезия, Сингапур, Индия, Великобритания, които бяха преминали съответните квалификации, за да получат покана за участие във финалите.

Виктор Илиев от МГ „Д-р П. Берон“, Варна, **Давид Йорданов** от СМГ „Паисий Хилендарски“, София и **Петър Узунов** от МГ „Акад. Кирил Попов“ взеха участие във финалите на World Mathematics Championship в Мелбърн, Австралия в периода 01.07.–07.07.2019 г. с помощта на Фондация Димитър Бербатов.

Представянето на децата бе наистина страхотно и успяха да прославят България и да спечелят общо 4 медала и 3 призови места (второ на Duel, второ на Proof, трето на Open) в отделните състезания и то в по-висока възрастова група.

Това е историята на едно приятелство родено от любовта към математиката. Три момчета, които ни припомнят, че само смелите постигат мечтите си.

РАВНОЪГЪЛНИ ПРАВИ И ЗАДАЧАТА НА НАПОЛЕОН

Емил Карлов

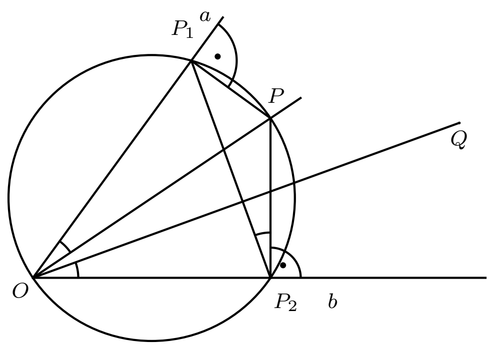
Даден е $\sphericalangle aOb$ с връх O, два лъча Oa и Ob (рамене на ъгъла) и ъглополовяща l. Две прави p и q през върха наричаме *изогонални или равноъгълни*, ако те сключват равни ъгли с ъглополовящата l.

Не е за вярване какви чудеса следват от това скромно определение, чието съдържание се изчерпва с превода от гръцки на думата *изо* – равен, еднакъв и *гонален* – ъгъл. Не винаги преводът изчерпва съдържанието на понятието и трябва да се внимава дали думата е с гръцки произход или е българска. Например *би* на гръцки е две и *бином* се превежда двучлен, но българската дума *бивол* не означава два вола.

За да продължим с кратката теория на равноъгълните прави, трябва да припомним следното просто, но изключително важно свойство.

Задача 1. Даден е $\sphericalangle aOb$ и точка P от вътрешността му. Нека OQ е изогоналната права на правата OP, а точките P_1 и P_2 са проекциите на P върху правите Oa и Ob. Да се докаже, че правата OQ е перпендикулярна на P_1P_2.

Решение. Около четириъгълника PP_1OP_2 може да се опише окръжност с диаметър OP. Очевидно $\sphericalangle P_2OQ = \sphericalangle P_1OP = \sphericalangle P_1P_2P = \varphi$.



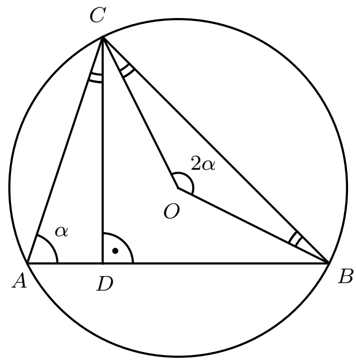
Тогава $\sphericalangle P_1P_2O = 90^\circ - \varphi$ и твърдението веднага следва.

Задача 2. Даден е $\sphericalangle aOb$ и точка P от вътрешността му. Нека OQ е изогоналната права на OP, а точките P_1 и P_2 са симетричните на P спрямо правите Oa и Ob. Да се докаже, че OQ е симетрала на отсечката P_1P_2.

Упътване. Използвайте, че $\triangle P_1OP_2$ е равнобедрен и OQ е височина в този триъгълник, следователно и симетрала.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с височина CD и радиус CO на описаната около триъгълника окръжност. Да се докаже, че правите CD и CO са изогонални прави спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$.

Упътване. Ако $\sphericalangle CAB = \alpha$, то $\sphericalangle ACD = 90^\circ - \alpha$, а $\triangle BOC$ е равнобедрен, $\sphericalangle COB = 2\alpha$ и следователно $\sphericalangle OCB = 90^\circ - \alpha$.

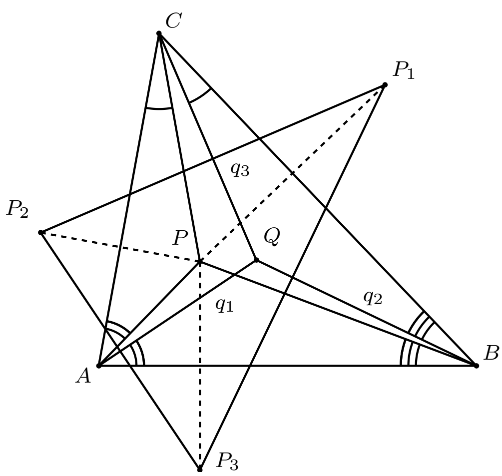


Задача 4. Височината CH и медианата CM в $\triangle ABC$ делят $\sphericalangle ACB$ на три равни части. Намерете ъглите на триъгълника.

Упътване. Правите CH и CM са изогонални прави спрямо $\sphericalangle ACB$. Къде лежи центърът O на описаната около триъгълника окръжност?

А сега да разгледаме една основна задача.

Задача 5. Точка P от равнината на $\triangle ABC$ не лежи на описаната около триъгълника окръжност. На правата AP построяваме изогоналната права q_1 спрямо върха A, на правата BP построяваме изогоналната права q_2 спрямо върха B и на правата CP построяваме изогоналната права q_3 спрямо върха C. Да се докаже, че трите прави q_1, q_2, q_3 се пресичат в една точка Q (точките P и Q наричаме *изогонално спрегнати точки спрямо* $\triangle ABC$).

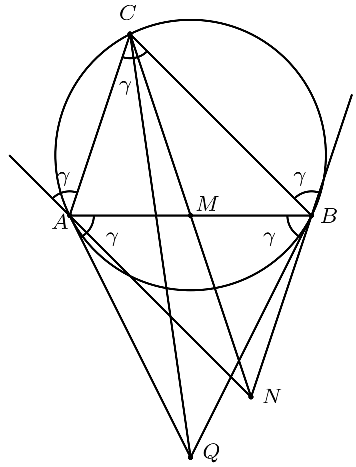


Решение. Престрояваме точките P_1, P_2, P_3, симетрични на съответно спрямо правите BC, CA, AB. От задача 2. знаем, че изогоналната права на AP е симетрала на P_2P_3. Следователно трите изогонални прави q_1, q_2, q_3 са симетрали на страните на $\triangle P_1P_2P_3$ и се пресичат в точка Q – центърът на описаната окръжност около $\triangle P_1P_2P_3$.

Забележка. Ако точката P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, от теоремата на Симсън знаем, че симетричните точки P_1, P_2, P_3 спрямо правите BC, CA, AB лежат на една права, тогава симетралите на отсечките P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 са три успоредни прави, които казваме, че се пресичат в безкрайната точка, т.е. изогонално спрегнатата точка на точка от описаната около триъгълника окръжност е безкрайната точка.

Забележка 3. Ако точката Q е изогонално спрегната на точката P спрямо $\triangle ABC$, то и P е изогонално спрегната на Q спрямо $\triangle ABC$.

Задача 6. Да се докаже, че ако построим допирателните към описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките A и B и те се пресекат в точка Q, то CQ и правата, определена от медианата CM, са изогонални прави спрямо $\sphericalangle ACB$.



Решение. Удвояваме медианата до $CN = 2CM$; тогава $ANBC$ е успоредник. Лесно се вижда, че AN и AQ са изогонални прави спрямо $\sphericalangle CAB$, а BN и BQ са изогонални прави спрямо $\sphericalangle ABC$ и твърдението следва от задача 5.

Задача 7. На страните BC и CA навън от $\triangle ABC$ са построени квадрати $BCPM$ и $CANQ$. Ако означим с S пресечната точка на отсечките AM и BN, да се докаже, че точка S лежи на височината на триъгълника, спусната от върха C.

Упътване. Постройте квадрат $ABKL$ навън от триъгълника, разгледайте височините на $\triangle KLC$ и използвайте транслация с вектор $\vec{LA}$.

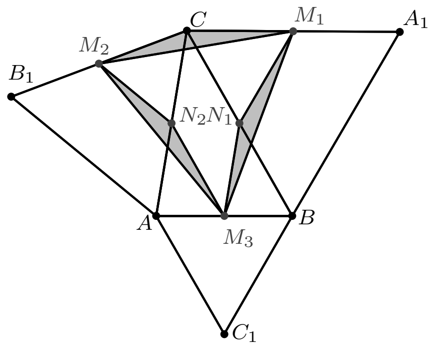
Задачата може да се реши и с изогонални прави, но е нужно да използвате теоремата, че ако върху изогоналните прави p и q спрямо $\sphericalangle aOb$ и раменете a и b на ъгъла изберете по точка, например A, B, P, Q (всяка точка е на едноименния си лъч), то пресечната точка S на диагоналите AO и PB на четириъгълника $APQB$ и пресечната точка R на продълженията на страните му AP и QB определят прави OS и OR, които са изогонални прави спрямо същия ъгъл $\sphericalangle aOb$.

Сега рязко да променим темата. След разочарованието на френския народ от Френската революция (14 юни 1789 г.) на мястото на безволевия и болнав крал Людвик XIV идва ужасно амбициозният император Наполеон I (декември, 1804 г). След смъртта на Наполеон остава една измъчена от войните Европа, множество легенди и две блестящи задачи (които едва ли са от Наполеон, но неговото име ги прави изключително известни).

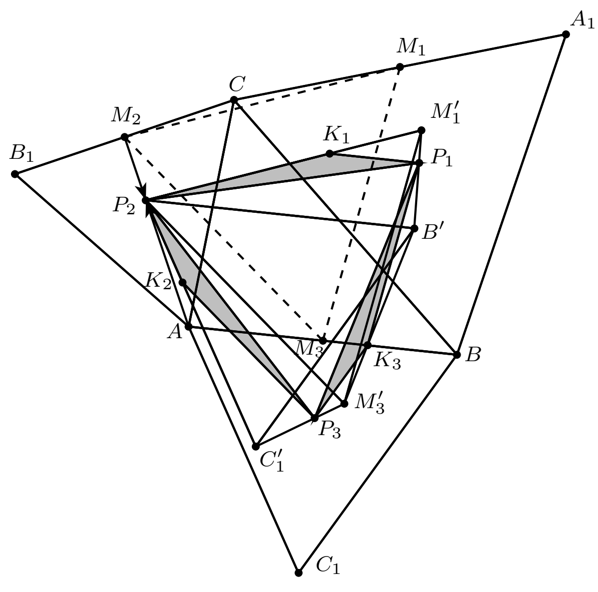
Задача 8. (задача на Наполеон) На страните на произволен $\triangle ABC$ външно са построени равностранните триъгълници BCA_1, CAB_1 и ABC_1 с центрове съответно P_1, P_2 и P_3. Да се докаже, че $\triangle P_1P_2P_3$ е равностранен.

Решение. Означаваме с M_1, M_2, M_3 съответно средите на отсечките CA_1, CB_1, AB, а средите на страните CB и CA съответно с N_1 и N_2.

Ясно е, че триъгълниците CM_1M_2, $N_2M_2M_3$ и $N_1M_1M_3$ са еднакви (по първи признак) и оттам $\triangle M_1M_2M_3$ е равностранен.



Нека AC е най-късата страна на $\triangle ABC$. Транслираме $\triangle M_1M_2M_3$ с вектор $\overrightarrow{M_2P_2}$, транслираме $\triangle AC_1B$ с вектор $\overrightarrow{AP_2}$ и получаваме два равностранни триъгълника $M_1'M_2'M_3'$ и $A'B'C_1'$ с общ връх $M_2' \equiv A' \equiv P_2$.



Точките P_1 и P_3 лежат съответно на отсечките $M_1'B'$ и $M_3'C_1'$, като отношението 1 : 2 се запазва (защо?). Избираме точки K_1, K_2, K_3, които делят съответно $M_1'P_2$, P_2C_1', $M_3'B'$ в отношение 1 : 2. От еднаквостта на триъгълниците $P_2K_1P_1$, $P_1K_3P_3$, $P_3K_2P_2$ следва, че $\triangle P_1P_2P_3$ е равностранен.

Обърнете внимание, че върховете на $\triangle P_1P_2P_3$ и върховете на $\triangle ABC$ са изписани в една и съща посока, посока противоположна на движението на часовниковата стрелка.

Задача 9. (задача на Наполеон) На страните на произволен $\triangle ABC$ вътрешно са построени равностранните триъгълници BCA_1, CAB_1 и ABC_1 с центрове съответно Q_1, Q_2 и Q_3. Да се докаже, че $\triangle Q_1Q_2Q_3$ е равностранен.

Задача 10. Да се докаже, че триъгълниците ABC, $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ имат общ медицентър.

Решение. Ако векторната сума $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, то точката M е медицентър на $\triangle ABC$, т.е. трябва да докажем, че $\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}+\overrightarrow{MP_3} = \overrightarrow{0}$. Но $\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CP_1}$ и $\overrightarrow{CP_1} = k(\overrightarrow{CB})$. Тук $(\overrightarrow{a})$ означава, че векторът $\overrightarrow{a}$ е завъртян на 30° по посока на часовата стрелка. По същия начин описваме векторите $\overrightarrow{BP_3}$ и $\overrightarrow{AP_2}$. Така получаваме

$$\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}+\overrightarrow{MP_3} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+k(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}.$$

По същия начин доказваме, че точката M е медицентър и на $\triangle Q_1Q_2Q_3$.

Задача 11. (Н. Белухов) Дадени са два различно ориентирани равностранни триъгълника $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ с общ медицентър M. Да се докаже, че правите P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 се пресичат в една точка.

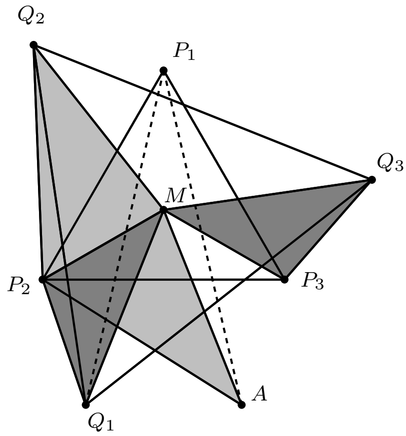
Решение. Знаем, че това са двата (външният и вътрешният) наполеонови триъгълника за някой $\triangle ABC$ (триъгълникът се появява, когато построим симетралите на отсечките P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3). Центърът O на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е пресечната точка на правите P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3.

Тук ще ви предложим друго решение с изогонално спрегнати точки.

Решение с изогонално спрегнати точки. Построяваме симетричната точка A на точката Q_1 спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle P_2P_1P_3$ в $\triangle P_1P_2P_3$ (виж чертежа). По първи признак $\triangle AP_3M \cong \triangle Q_3P_3M$.

Аналогично доказваме, че $\triangle MAP_2 \cong \triangle Q_2P_2M$.

Това означава, че правите P_1A, P_2A и P_3A имат за изогонални прави P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 съответно спрямо ъглополовящите при върховете P_1, P_3 и P_2. Тъй като правите P_1A, P_2A и P_3A очевидно се пресичат в точка A, то изогонално спрегнатите им P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 ще се пресичат в точка A_1 (задача 5), изогонално спрегнатата на A относно $\triangle P_1P_2P_3$.



Нека добавим няколко задачи.

Задача 12. Точките P и Q са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$. Да се докаже, че шестте основи на проекциите на P и Q върху правите BC, CA, AB лежат на една окръжност с център средата на отсечката PQ.

Задача 13. (Л. Ойлер) Да се докаже за всеки триъгълник, че средите на страните му, петите на височините му и средите на отсечките от връх на триъгълника до ортоцентъра лежат на една окръжност.

Упътване. Във всеки триъгълник ортоцентърът и центърът на описаната около триъгълника окръжност са изогонално спрегнати спрямо дадения триъгълник.

Задача 14. За $\sphericalangle aOb$ имаме две изогонални спрямо него прави c и d през точката O. Избираме по точка от всяка от правите: точка A от a, точка B от b, точка C от c, точка D от d така, че да получим изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка P на диагоналите и пресечна точка Q на продълженията на странитeAD и BC. Да се докаже, че OP и OQ са изогонално спрегнати спрямо същия ъгъл.

Упътване. Използвайте ъглите (по точно техните синуси), образувани от шестте прави в точката O.

Задача 15. В $\triangle ABC$ са избрани три точки A_1, B_1, C_1 съответно от страните BC, CA, AB и отсечките AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка P. Ако $\sphericalangle A_1C_1C = \sphericalangle B_1C_1C$, да се докаже, че CC_1 е височина в триъгълника.

Упътване. Използвайте задача 14.

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

Невена Събева

На 8 юни 2019 в Института по математика и информатика на БАН се проведе финалният (присъствен) кръг на конкурса на списание „Математика“ за малките. За участие в състезанието бяха поканени учениците от 5, 6 и 7 клас, които се представиха най-добре в задочния етап на конкурса.

Победители в конкурса станаха:

За *пети клас* – **Стефания Миленова Милева** (МГ *Д-р Петър Берон*, Варна) – първо място, **Ивалин Боянов Боев** (ОУ *П. Р. Славейков*, Стара Загора) – второ място.

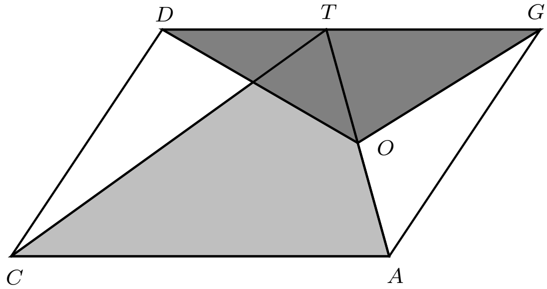
За *шести клас* – **Демира Георгиева Недева** (МГ *Акад. Кирил Попов*, Пловдив) и **Николай Евгениев Николаев** (ППМГ *Екзарх Йосиф I*, Видин) – първо място, **Александър Цветомир Мургин** (ППМГ *Екзарх Йосиф I*, Видин) и **Лазар Иванов Тодоров** (СМГ, София) – второ място, **Александър Руменов Данчев** (ППМГ *Гео Милев*, Стара Загора) – трето място.

За *седми клас* – **Виктор Ясенов Костадинов** (ПЧМГ, София) – първо място, **Давид Викторов Цаков** (СМГ, София) – трето място.

Ученикът, класиран на второ място в 7. клас, не е записал своето име на конкурсната работа. Очакваме анонимният автор да се свърже с редакцията на списанието, за да получи своята грамота и награди.

Ето условията и кратки решения на задачите.

Задача 5.1. Даден е успоредник $CAGD$. Точка T е от страната DG, а O е среда на AT.



Ако лицето на триъгълник DOG е 10, намерете лицето на триъгълник CAT.

Решение. Тъй като DO е медиана в триъгълника ADT, то

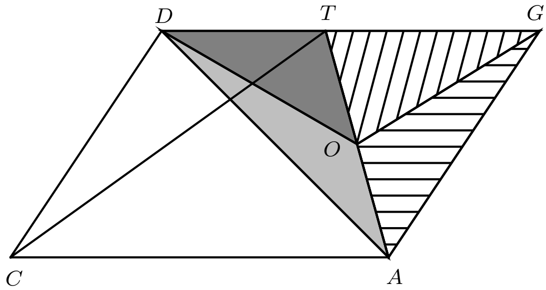
$$S_{DOT} = S_{DAO}, \quad \text{т.е.} \quad S_{ADT} = 2S_{DOT}.$$

По същия начин, GO е медиана в триъгълника AGT, следователно

$$S_{GOT} = S_{GAO}, \quad \text{т.е.} \quad S_{AGT} = 3S_{GOT}.$$

Като съберем горните равенства, получаваме

$S_{ADT}+S_{AGT} = 2S_{DOT}+2S_{GOT}$, т.е. $S_{AGD} = 2(S_{DOT}+S_{GOT}) = 2S_{DOG} = 20.$



Остава да забележим, че $S_{CAT} = \dfrac{1}{2}S_{CAGD} = S_{AGD} = 20$.

Задача 5.2. Нека N е най-малкото естествено число, което е с 22% по-малко от естествено число M и с 16% по-голямо от естественото число P. Да се намери N.

Решение. Тъй като $N = 78\%M = \dfrac{39}{50}M$ и N и M са естествени числа, то N се дели на 39.

В равенството $N = 116\%P = \dfrac{29}{25}P$ числата N и P са естествени, следователно N се дели на 29.

Търсеното число N е равно на най-малкото общо кратно на 39 и 29, което е 1131.

Задача 5.3. Две квадратчета от таблица 10×10 са избрани по случаен начин. Намерете вероятността двете квадратчета да са съседни (две квадратчета са съседни, ако имат обща страна).

Решение. Две квадратчета могат да се изберат по $\dfrac{100.99}{2} = 50.99$ начина. Двойките съседни квадратчета в един ред са 9, което прави 10.9 двойки хоризонтално съседни квадратчета. Толкова са и двойките вертикално съседни квадратчета. Следователно двойките съседни квадратчета на дъската са 2.10.9. Търсената вероятност е $\dfrac{2.10.9}{50.99} = \dfrac{2}{55}$.

Задача 6.1. Да се намери най-малкото естествено число, което се дели на 17 и сборът на цифрите му е 17.

Решение. Тъй като сборът на цифрите на числото е 17, търсеното число е поне двуцифрено.

Двуцифрените числа със сбор на цифрите 17 са 98 и 89, но нито едно от тях не се дели на 17.

Нека трицифреното число $\overline{abc}$ се дели на 17 и има сбор на цифрите 17. Имаме

$$\overline{abc} = 100a+10b+c = (a+b+c)+102a+9b-3a = (a+b+c)+6.17a+3(3b-a).$$

Следователно $3b-a$ се дели на 17.

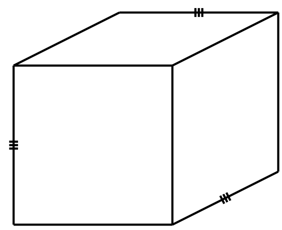
Търсим най-малкото възможно a. Ако $a = 1$, числото $3b-1$ се дели на 17 само когато цифрата b е 6; но тогава $c = 17-(1+6) = 10$; противоречие.

Ако $a = 2$, числото $3b-2$ не се дели на 17 при никоя цифра b.

Ако $a = 3$, числото $3b-3 = 3(b-1)$ се дели на 17 само когато цифрата b е 1; но тогава $c = 17-(1+3) = 13$; противоречие.

Ако $a = 4$, числото $3b-4$ се дели на 17 само когато цифрата b е 7; получаваме $c = 17-(4+7) = 6$ и търсеното число е 476.

Задача 6.2. На всеки ръб на куб записали 1 или -1. На всяка стена записали произведението на четирите числа на нейните ръбове. Най-малко на колко е равен сборът на всичките 18 записани числа?



Решение. Ако запишем -1 на всички ръбове, освен трите, означени на чертежа, на всяка стена ще е записано числото -1 и ще получим сбор $(-9+3)-6 = -12$.
Ще покажем, че не може да се получи сбор, по-малък от -12.

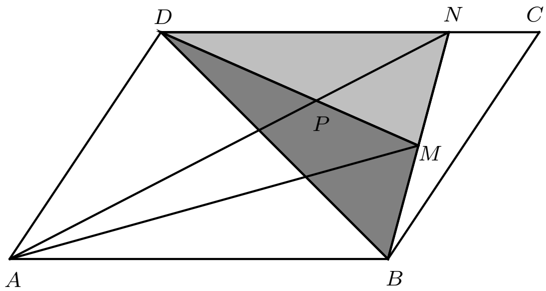
Ако запишем -1 на всеки ръб, на всяка стена ще е записано числото 1 и сборът на записаните числа ще е $-12+6 = -6$. Всеки път, когато заменяме на някой ръб -1 с 1, най-много на две стени 1 ще се смени с -1 и сборът ще се намали най-много с 2 (когато $-1+1+1$ стане $1-1-1$). Следователно трябва да запишем 1 на поне 4 ръба, за да получим сбор, по-малък от -12. Но в този случай сборът ще е най-малко $(4-8)-6 = -10$. Следователно сборът не може да стане по-малък от -12.

Задача 6.3. Даден е успоредник $ABCD$. Точка N е от страната CD, а M е среда на BN. Отсечките DM и AN се пресичат в точката P. Ако лицето на APD е 5, а лицето на DMN е 3, да се намери лицето на $ABCD$.

Решение. Тъй като DM е медиана в триъгълника BND, то

$$S_{BND} = 2S_{DMN} = 6.$$

Тъй като правите AB и ND са успоредни, имаме $S_{ADN} = S_{BND} = 6$. Оттук намираме $S_{DPN} = S_{ADN} - S_{APD} = 6 - 5 = 1$ и $S_{PMN} = S_{DMN} - S_{DPN} = 3 - 1 = 2$.



Да разгледаме четириъгълника $AMND$. Имаме

$$\frac{S_{DPN}}{S_{MPN}} = \frac{DP}{PM} = \frac{S_{DPA}}{S_{MPA}} \iff \frac{1}{2} = \frac{5}{S_{MPA}},$$

откъдето $S_{MPA} = 10$. Следователно $S_{AMN} = S_{MPA} + S_{PMN} = 10 + 2 = 12$.

Тъй като AM е медиана в триъгълника ABN, то $S_{ABN} = 2S_{AMN} = 24$. Тогава $S_{ABCD} = 2S_{ABN} = 48$.

Задача 7.1. Има две естествени числа n със свойството, че ако разделим n^2 на $2n + 1$, се получава остатък 1000. Намерете тези числа.

Решение. Тъй като при деление на $2n + 1$ се получава остатък 1000, то $2n + 1 < 100$, т.е. $n \geqq 500$.

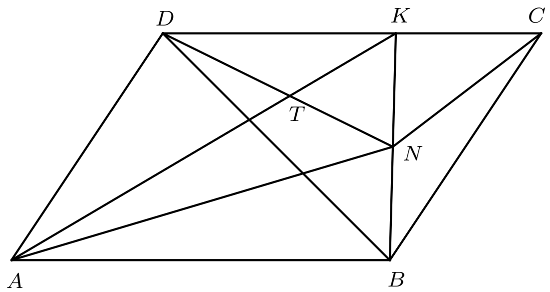
Числото $n^2 - 1000$ се дели на $2n + 1$, следователно

$$(2n - 1)(2n + 1) - 4(n^2 - 1000) = 3999$$

се дели на $2n+1$. Делителите на $3999 = 3.31.43$, които са по-големи от 500, са 666 и 3999. Те са двете търсени числа.

Задача 7.2. Даден е успоредник $ABCD$ с лице 48. Точка K е от страната CD, а N е средата на BK. Пресечната точка на AK и DN е T и лицето на триъгълника ANT е 10. Да се намери лицето на четириъгълника $ANKD$.

Решение. Имаме $S_{ABK} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = 24$. Тъй като AN е медиана в $\triangle ABK$, то $S_{ANK} = S_{ANB} = 12$ и оттук $S_{KNT} = S_{ANK} - S_{ANT} = 12 - 10 = 2$.



Имаме $S_{ATD} : S_{KTD} = AT : TK = S_{ANT} : S_{KTN} = 5 : 1$, т.е. ако означим $S_{KTD} = x$, то $S_{ATD} = 5x$.

Тъй като CN е медиана в $\triangle BCK$, имаме $S_{BNC} = S_{KNC} = y$.

Накрая използваме известното равенство

$$S_{ABN} + S_{DNC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{AND} + S_{BNC},$$

т.е. $12 + x + 2 + y = 24 = 5x + 10 + y$, откъдето намираме $x = 1$ и $y = 9$. Оттук $S_{ANKD} = 18$.

Задача 7.3. Намерете броя на множествата $\{a, b, c\}$ от три различни естествени числа, за които произведението на a, b и c е равно на произведението на $13, 21, 37, 47, 51$ и 67.

Решение. Да преброим колко наредени тройки различни числа a, b и c имат произведение

$$abc = 13.21.37.47.51.67 = 3^2.7.13.17.37.47.67.$$

Всеки от простите множители 7, 13, 17, 37, 47, 67 може да се разпредели в a, b или c, т.е. по 3 начина.

Двете тройки могат да се разпределят по $3 + 3 = 6$ начина (ако 3^2 участва в разлагането на едно от числата a, b, c, или ако в разлагането на едно от числата a, b, c няма тройка, а в разлагането на останалите има по една тройка).

Получаваме 6.3^6 разпределяния на простите множители. От тях трябва да изключим тройките с две еднакви числа; те са $(3, 3, N)$, $(3, N, 3)$, и $(N, 3, 3)$, където $N = 7.13.17.37.47.67$, както и $(1, 1, 9N)$, $(1, 9N, 1)$, и $(9N, 1, 1)$.

Получихме $6.3^6 - 6$ наредени тройки от три различни числа, на които съответстват $\dfrac{6.3^6 - 6}{6} = 728$ ненаредени тройки.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2018 г. и бр. 1, 2 от 2019 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (онлайн) кръг през юни 2020 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Да се намерят всички четирицифрени числа $\overline{abcd}$, за които

$$\overline{abcd} + b + c + d = 2029 .$$

Задача 2. Дадени са седем естествени числа със следното свойство: сборът на кои да е пет от дадените числа се дели на всяко от останалите две числа. Най-много колко различни числа има измежду дадените?

Задача 3. Естествените числа a, b и c са такива, че и числата

$$\frac{b}{a},\ \frac{c+100}{b} \text{ и } \frac{a+b+169}{2c+200}$$

са естествени. Да се намерят всички възможни стойности на a.

Срокът за представяне на решенията е 30.11.2019 г.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2019/20 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена с равенствата $a_0 = 1$ и

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, \quad n \geq 0.$$

Докажете, че за всяко n:

а) a_n е естествено число;

б) $a_n a_{n+1} - 1$ е точен квадрат.

Задача 2. Окръжностите a и b се пресичат в две различни точки Y и Z. Окръжност k се допира външно до a и b в точките A и B. Ъглополовящите на $\sphericalangle ZAY$ и $\sphericalangle YBZ$ се пресичат в точката X.

Докажете, че точките X, Y и Z лежат на една права.

Задача 3. Докажете, че за всяко естествено число n съществува пермутация на числата $\{1, 2, ..., n\}$, при която средноаритметичното на никои две числа не стои между тях.

Например, пермутацията $\{1, 3, 2, 4\}$ изпълнява това условие, а $\{1, 4, 2, 3\}$ не го изпълнява, защото 2 е между 1 и 3.

Срокът за представяне на решенията е 15.12.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 3/2019 г.

Задача 1. Ако a, b, c са страни на триъгълник с лице S, да се докаже, че

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4\sqrt{3}S.$$

Решение. Ако положим $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, то $S = \sqrt{xyz(x + y + z)}$ (ясно е, че $x, y, z > 0$). Даденото неравенство приема вида

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \geqq 4\sqrt{3xyz(x + y + z)} \iff$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqq 2\sqrt{3xyz(x + y + z)}$$

Като използваме известното неравенство (1) $x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx$, получаваме

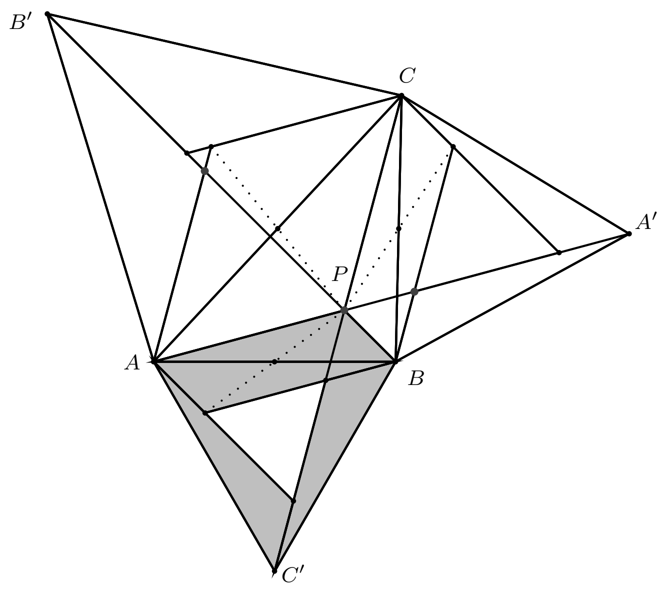
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqq 2(xy + yz + zx)$$

и е достатъчно да докажем, че

$$xy+yz+zx \geqq \sqrt{3xyz(x + y + z)} \iff (xy+yz+zx)^2 \geqq 3xyz(x+y+z) \iff$$
$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geqq xy^2z + xyz^2 + x^2yz,$$

което следва от (1) при $x := xy,\ y := yz,\ z := zx$.

Това неравенство може да се илюстрира геометрично. Както е известно, ако върху страните на триъгълник ABC със страни a, b, c външно построим равностранни триъгълници ABC', BCA' и CAB', то правите AA', BB' и CC' се пресичат в точката на Торичели P; имаме $\sphericalangle APB = \sphericalangle APC = \sphericalangle CPB = 120^\circ$.



Да построим симетричните точки на точката на Торичели P спрямо средите на страните на триъгълника ABC. Забелязваме, че триъгълникът APB се разполага 3 пъти без припокриване в равностранния триъгълник ABC', т.е.

$$S_{APB} \leqq \frac{1}{3} S_{ABC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} c^2}{4} \iff c^2 \geqq 4\sqrt{3} S_{APB}.$$

Аналогично $a^2 \geqq 4\sqrt{3} S_{BPC}$ и $b^2 \geqq 4\sqrt{3} S_{CPA}$ и като съберем трите неравенства, получаваме

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4\sqrt{3}(S_{BPC} + S_{CPA} + S_{APB}) = 4\sqrt{3} S.$$

Задача 2. Дадени са 1000 билета, номерирани с 000, 001, ..., 999, и 100 кутии с номера 00, 01, ..., 99. Един билет може да се постави в дадена кутия, ако може да се зачеркне някоя от цифрите в номера на билета така, че да се получи номерът на кутията. Докажете, че:

а) всички билети могат да се поставят в 50 кутии;

б) не е възможно всички билети да се поставят в по-малко от 50 кутии.

Решение. а) Да разгледаме две множества от цифри $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Да разгледаме също множеството от кутии M_A, чиито номера се записват само с цифри от A; ясно е, че $|M_A| = 25$. По същия начин, ако M_B е множеството от кутиите, чиито номера се записват само с цифри от B, имаме $|M_B| = 25$. Да разгледаме тези общо 50 кутии от $M_A \cup M_B$. Ще покажем, че те изпълняват условието.

Във всеки трицифрен номер на билет, две от цифрите са от едно от множествата A и B; като зачеркнем останалата цифра, може да поставим билета в кутия от M_A или от M_B.

б) За всяка цифра a да разгледаме множеството от кутии T_a, чиито номера започват с a. Ясно е, че за всяко a имаме $|T_a| \geqq 1$.

От тези десет множества да изберем множеството с най-малък брой елементи; без ограничение може да считаме, че то е T_9. Също без ограничение може да приемем, че $T_9 = \{99, 98, \ldots, 9y\}$, където $y = 10 - x$. Тогава всеки билет с номер $9pq$, където $p, q < y$, се поставя в кутия с номер pq. Следователно има поне y^2 кутии с номера, които се записват с цифрите $0, 1, \ldots, y-1$, както и поне x^2 кутии с номера, които започват с $y, y+1, \ldots 9$ (най-малко по x числа във всяка от тези x кутии). Следователно броят на използваните кутии е най-малко

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2(x - 5)^2 + 50 \geqq 50.$$

Задача 3. Редицата от естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ще наричаме *универсална*, ако всяка пермутация на числата 1, 2, 3, 4 може да се получи от тази редица, като се зачеркнат част от членовете ѝ. Докажете, че $k \geqq 12$.

Решение. Ще разгледаме по-обща задача. Редицата от естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ще наричаме n- *универсална*, ако всяка пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, n$ може да се получи от тази редица, като се зачеркнат част от членовете ѝ. Минималната дължина на n-универсална редица ще означаваме с l_n.

Ясно е, че $l_2 = 3$ (например 121 е 2-универсална редица).

Ще покажем, че $l_3 = 7$ (например 1213121 е 3-универсална редица с дължина 7).

Ако някое число, например 3, участва в 3-универсална редица веднъж, преди него и след него трябва да се среща 2-универсална редица (с числата 1 и 2). Следователно

$$l_3 \geqq 1 + 2l_2 = 7.$$

Ако всяко число участва в 3-универсалната редица поне два пъти, да разгледаме числото, което последно се появява за първи път в редицата. Преди него има поне две числа, то самото се появява още веднъж и след него има 2-универсална редица (с останалите две числа); получаваме, че

$$l_3 \geqq 2 + 1 + 1 + l_2 = 7.$$

Аналогично се убеждаваме, че $l_4 = 12$.

Ако някое число участва в 4-универсална редица веднъж, получаваме оценката

$$l_4 \geqq 1 + 2l_3 = 15.$$

Ако всяко число участва в 4-универсалната редица поне два пъти, оценката е

$$l_4 \geqq 3 + 1 + 1 + l_3 = 12.$$

Пример на 4-универсална редица с дължина 12 е 123412314231.

В общия случай последната оценка е $l_n \geqq n + 1 + l_{n-1}$ и оттук

$$l_n \geqq \frac{n^2 + 3n - 4}{2}.$$

Външно оценяване по математика 7. кл.,

19 юни 2019 г.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Кое от дадените равенства е вярно?

А) $\dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{6}$ **Б)** $\dfrac{1{,}2}{60} = \dfrac{0{,}1}{5}$

В) $\dfrac{3}{2} : 2 = \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3}$ **Г)** $-5 : (-3) = 10 : (-6)$

2. Стойността на израза $2y - 4y^2$ за $y = -0{,}5$ е:

А) -4 **Б)** -2 **В)** 0 **Г)** 2

3. Изразът $1 - (1-x)^2$ е тъждествено равен на:

А) $2 - 2x + x^2$ **Б)** $-2x + x^2$ **В)** $2x - x^2$ **Г)** $2 + 2x - x^2$

4. Изразът $4x^2y - 8xy + 12xy^2$ е тъждествено равен на:

А) $4xy(x - 2 + 3y)$ **Б)** $4xy(x - 4 + 8y)$

В) $4xy(x - 4 + 3y)$ **Г)** $4xy(x + 2 + 3y)$

5. Коренът на уравнението $(x - 10)^2 = (2 - x)^2$ е:

А) -6 **Б)** -4 **В)** 4 **Г)** 6

6. Уравнението $|x + 7| = 3$ има:

А) единствен корен -4 **Б)** единствен корен -10

В) корени 4 и 10 **Г)** корени -4 и -10

7. Вероятността при хвърляне на зар да се падне просто число, е:

А) 0 **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{2}{3}$

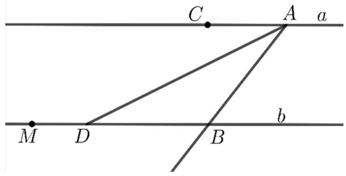
8. Решенията на неравенството $1 - 3x \geqq 0$ са числата от интервала:

А) $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ **Б)** $\left(-\infty; \dfrac{1}{3};\right]$ **В)** $\left(-\infty; \dfrac{1}{3};\right)$ **Г)** $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

9. Лицето на околната повърхнина на прав кръгов цилиндър с диаметър 10 cm и височина 3 dm е:

А) 300π cm^2 **Б)** 325π cm^2 **В)** 350π cm^2 **Г)** 600π cm^2

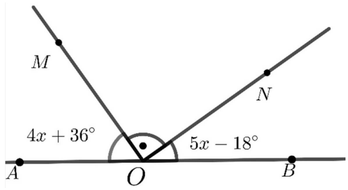
10. На чертежа правите a и b са успоредни, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, AD е ъглополовящата на $\sphericalangle CAB$. Мярката на $\sphericalangle MDA$ е:



А) 165° **Б)** 150°

В) 135° **Г)** 120°

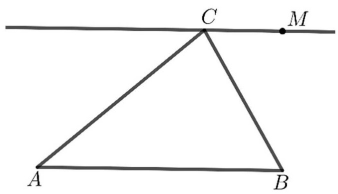
11. По данните от чертежа определете мярката на $\sphericalangle AOM$.



А) 52° **Б)** 68°

В) 72° **Г)** 84°

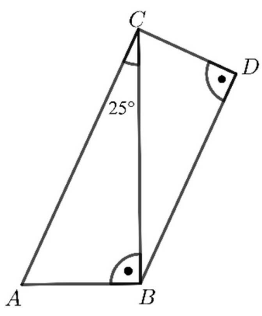
12. В $\triangle ABC$ на чертежа мерките на ъглите при върховете A, B и C са в отношение съответно $2:3:4$ и правата $CM \| AB$. Мярката на $\sphericalangle ACM$ е:



А) 140° **Б)** 120°

В) 100° **Г)** 80°

13. По данните от чертежа е вярно, че:



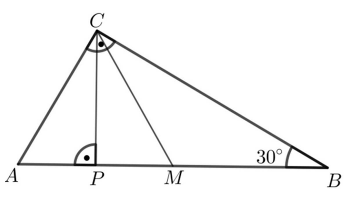
А) ако $\sphericalangle CBD = 25^\circ$, то $\triangle ABC \cong \triangle CDB$

Б) ако $AC \perp CD$, то $AB = CD$

В) ако $AC \| BD$, то $BC = AD$

Г) $\triangle ABC \ncong \triangle CDB$

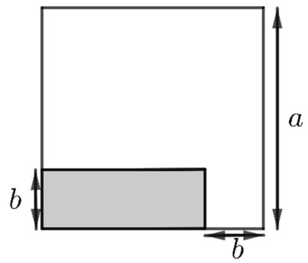
14. Точката M е средата на хипотенузата AB в правоъгълния $\triangle ABC$ на чертежа. Ако $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $CP \perp AB$, то е вярно, че:



А) $PB = \frac{1}{4}AB$ **Б)** $PB = \frac{1}{3}AB$

В) $PB = \frac{2}{3}AB$ **Г)** $PB = \frac{3}{4}AB$

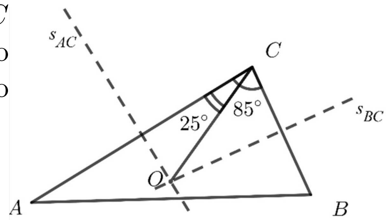
15. От квадрата с дължина на страната a е изрязан оцветеният правоъгълник. По данните от чертежа лицето на неоцветената част от квадрата се представя с израза:



А) $(a-b)^2$ **Б)** a^2-b^2

В) $a^2-b(a-b)$ **Г)** a^2-ab-b^2

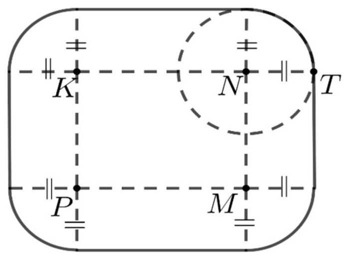
16. На чертежа симетралите на страните AC и BC в $\triangle ABC$ се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle ACB = 85°$, $\sphericalangle ACO = 25°$ и $BC = 6$ cm, то дължината на AO е:



А) 3 cm **Б)** 4,5 cm

В) 6 cm **Г)** 12 cm

17. Спортна площадка има формата, изобразена на чертежа с плътната линия. Ако $PMNK$ е правоъгълник, $KN = 20$ m, $MN = 15$ m и $KT = 23$ m, то обиколката на площадката (в метри) е:



А) $35+3\pi$ **Б)** $35+6\pi$

В) $70+6\pi$ **Г)** $70+9\pi$

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

18. Дадено е неравенството $x^2-5 \leqq x(x+1)$.

А) Представете графично решението на неравенството и запишете целите отрицателни числа, които са негови решения.

Б) Пресметнете и запишете средноаритметичното на целите отрицателни решения на неравенството.

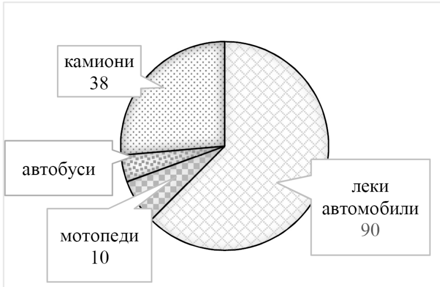
19. В библиотека доставили S на брой помагала по три учебни предмета – математика, литература и чужд език. Ако помагалата по математика са x на брой, по литература са с 5 по-малко от математическите, а по чужд език – с 5 повече от половината на математическите, то:

А) изразете и запишете чрез x броя на помагалата по литература и по чужд език;

Б) изразете и запишете чрез x броя на помагалата S и приведете израза в нормален вид;

В) пресметнете и запишете броя на помагалата по трите учебни предмета, ако $S = 200$.

20. Броят на превозните средства, заредили гориво на бензиностанция, е представен на кръговата диаграма. Общият брой на камионите и на мотопедите е $\dfrac{1}{3}$ от всички превозни средства, заредили гориво.



А) Намерете и запишете броя на всички превозни средства, заредили гориво.

Б) Намерете и запишете с несъкратима дроб каква част от всички превозни средства са автобусите. Запишете градусната мярка на ъгъла на сектора, с който е представен броят на автобусите на кръговата диаграма.

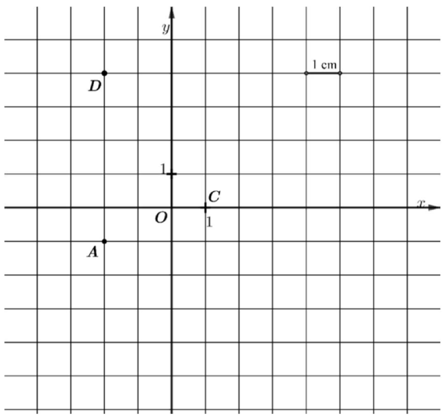
ВТОРИ МОДУЛ

21. В декартовата координатна система на чертежа са дадени точките A, C и D. Определете и запишете:

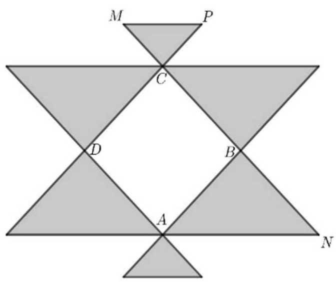
А) координатите на дадените точки;

Б) координатите на точката B от четвърти квадрант, така че четириъгълникът $ABCD$ да е успоредник;

В) вида на успоредника, лицето и периметъра на $ABCD$.



22. Чипровските килими са част от културното наследство на България. Изобразената геометрична фигура (повлияна от често срещания мотив канатица) се състои от равнобедрени правоъгълни триъгълници, като големите триъгълници са еднакви помежду си, а малките триъгълници са с равни хипотенузи. Катетите на големите триъгълници ограждат квадрата $ABCD$, а всеки катет на малките триъгълници лежи на една права със страна на квадрата и $CB = 2MC$. Ако $S_{\triangle MCP} = 4{,}5\ \text{cm}^2$, то намерете и запишете:



А) лицето на $ABCD$ и на $\triangle ABN$;

Б) с несъкратима дроб отношението $S_{\substack{\text{оцветената}\\ \text{фигура}}} : S_{ABCD}$

Запишете пълното решение на задачи от 23. до 25. с необходимите обосновки.

23. Велосипедист изминава разстоянието от град A до град B през град C за 4 h. От град A до град C велосипедистът се движи със скорост 10 km/h, а от град C до град B – със скорост 12 km/h. Ако $BC = 2AC$, то намерете:

А) разстоянието от град A до град B;

Б) времената, за които велосипедистът изминава разстоянията съответно от град A до град C и от град C до град B;

В) в колко часа̀ велосипедистът ще се намира на разстояние 9 km от град B, ако тръгне от град A в 9,00 часа̀ сутринта?

24. Дадено е неравенството

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{x(3x-7)}{6} > 2 + \frac{2(x-9)}{9}.$$

А) Решете неравенството и запишете решенията му с интервал.

Б) Пресметнете числото $m = \dfrac{9^2.8^{10}.(-6)}{27.(-2)^{31}}$.

В) Проверете и запишете дали числото m е решение на неравенството.

25. Точката M лежи на страната BC на равностранен $\triangle ABC$ така, че $CM = \dfrac{1}{3}BC$. Построена е отсечка MK, перпендикулярна на AB ($K \in AB$). Лицето на $\triangle KCM$ е 3 cm^2.

А) Изразете отсечката KB чрез страната AB.

Б) Докажете, че $AM = CK$.

В) Намерете лицето на $\triangle ACM$.

Отговори

1. Б; **2.** Б; **3.** В; **4.** А; **5.** Г; **6.** Г; **7.** В; **8.** Б; **9.** А; **10.** А; **11.** Б; **12.** А; **13.** Г; **14.** Г; **15.** В; **16.** В; **17.** В; **18.** А) $-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1$; Б) -3;

19. А) литература: $x-5$, чужд език $\dfrac{x}{2}+5$; Б) $S = 2,5x$; В) литература 75, чужд език 45, математика 80; **20.** А) 144; Б) $\dfrac{1}{24}$; 15°;

21. А) $A(-2;-1)$, $C(1;0)$, $D(-2;4)$; Б) $B(1;-5)$; В) ромб; Лице 15 cm^2, Периметър 20 cm; **22.** А) $S_{ABCD} = 36$ cm^2, $S_{ABN} = 18$ cm^2; Б) $\dfrac{9}{4}$.

23. А) $AB = 45$ km; Б) $t_{AC} = 1$ h 30 min, $t_{CB} = 2$ h 30 min; В) 12 часа и 15 мин.

24. А) $x \in (-\infty; 9)$; Б) $m = 9$; В) $m = 9$ не е решение на неравенството;

25. А) $KB = \dfrac{1}{3}AB$; В) $S_{ACN} = 9$ cm^2.

Държавен зрелостен изпит по математика, 31.05.2019 г.

Модул 1

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Стойността на израза $2^{1+\frac{1}{2}\log_2 6}$ е:

А) $2\log_2 6$ **Б)** $2\sqrt{6}$ **В)** $6\sqrt{2}$ **Г)** 9

2. Стойността на израза $\sqrt{(-9)^2}.\sqrt{3^{-6}}$ е:

А) $-\dfrac{1}{3}$ **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** 1 **Г)** 3

3. Множеството от допустимите стойности на израза $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+4}+\dfrac{x-1}{x^2+1}$ е:

А) $\emptyset$ **Б)** $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

В) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ **Г)** $\mathbb{R}$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{2x-3}{x-7}<1$ са:

А) $x\in(-\infty;-4)$ **Б)** $x\in(-\infty;-2)\cup(8;+\infty)$

В) $x\in(-4;7)$ **Г)** $x\in(-\infty;-4)\cup(7;+\infty)$

5. Ако за числата m, n и k е изпълнено $\left(\dfrac{8}{3}\right)^m>\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$ и $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n>\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, то:

А) $m>n>k$ **Б)** $k>n>m$ **В)** $m>k>n$ **Г)** $n>k>m$

6. Коя от посочените наредени двойки числа е решение на системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right. \quad ?$$

А) $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ **Б)** $(\sqrt{5},\sqrt{5})$ **В)** $(3,-1)$ **Г)** $(1,3)$

7. На кое от посочените уравнения са корени числата $\sqrt{2}$ и $\sqrt{-5}$?

А) $x^4-\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)x^2-\sqrt{10}=0$ **Б)** $x^4+7x^2+10=0$

В) $x^4-7x^2+10=0$ **Г)** $x^4-7x^2-10=0$

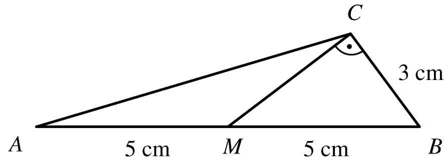
8. Изразът $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$ е тъждествено равен на:

А) $\sin\alpha\cos\alpha$ **Б)** $\sin 2\alpha$ **В)** 0 **Г)** 2

9. В равнобедрен триъгълник с основа 10 cm центърът на вписаната окръжност дели височината към основата в отношение 3 : 1. Периметърът на триъгълника е:

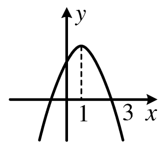
А) 20 cm **Б)** 30 cm **В)** 40 cm **Г)** $50\sqrt{2}$ cm

10. В $\triangle ABC$ медианата $CM \perp BC$, $MB = 5$ cm и $BC = 3$ cm. Дължината на страната AC е:



А) 8 cm **Б)** $6\sqrt{2}$ cm **В)** $\sqrt{73}$ cm **Г)** $5\sqrt{3}$ cm

11. Параболата от чертежа е графиката на функцията:



А) $y = 4 - (x-1)^2$ **Б)** $y = 4 - (x+1)^2$

В) $y = 1 - (x-2)^2$ **Г)** $y = (x-1)^2 - 4$

12. Шестият член на редицата с общ член $a_n = 3(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, е член и на редицата с общ член $b_m = m(m-6)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогава m е равно на:

А) 3 **Б)** 6 **В)** 9 **Г)** 27

13. За крайна аритметична прогресия е дадено, че $a_1 = -11$, $a_2 = -8$, $S_n = 25$ ($n \in \mathbb{N}$). Да се намери броят n на членовете ѝ.

А) 18 **Б)** 10 **В)** 5 **Г)** 3

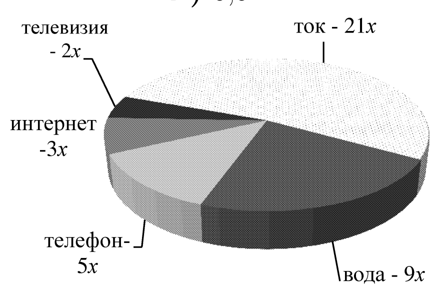
14. Стойността на израза $\sin(\alpha+45^\circ)\cos\alpha + \cos(\alpha+45^\circ)\sin\alpha$ при $\alpha = -45^\circ$ е:

А) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Б)** 0 **В)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\sqrt{2}$

15. Отговорите на няколко човека на въпроса: „Коя е любимата ви цифра?“ са: 0, 4, 4, 6, 5, 3, 5, 7, 4, 8, 6, 7, 7, 1, 0, 7, 7, 0. Разликата $M - S$ между медианата M и средноаритметичното S на статистическия ред е:

А) -1 **Б)** $-0{,}5$ **В)** 0 **Г)** 0,5

16. На кръговата диаграма е изобразено съотношението на разходите за ток, вода, телефон, интернет и телевизия на едно семейство през месец март. Най-голямата сметка е тази за ток. Ако е известно, че сборът от останалите сметки е 133 лв., то разходите за ток са:

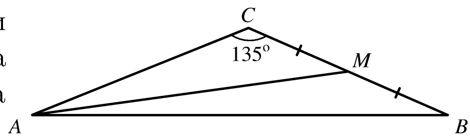


А) 140 лв. **Б)** 142 лв. **В)** 145 лв. **Г)** 147 лв.

17. Намерете дължината на радиуса на описаната окръжност около $\triangle ABC$, за който $AB = \sqrt{51}$ cm и $\cos \sphericalangle ACB = 0{,}7$.

А) $\dfrac{\sqrt{51}}{10}$ cm **Б)** $\dfrac{51}{5}$ cm **В)** 5 cm **Г)** 10 cm

18. В $\triangle ABC$ със страна $AC = 3$ cm и $\sphericalangle ACB = 135^\circ$ точката M е средата на BC. Ако $AM = \sqrt{17}$ cm, то дължината на страната BC е:



А) $\sqrt{2}$ cm **Б)** 2 cm **В)** $2\sqrt{2}$ cm **Г)** $4\sqrt{2}$ cm

19. Трапецът $ABCD$ е с основи $AB = 15$ cm, $CD = 5$ cm и диагонали $AC = 12$ cm и $BD = 16$ cm. Лицето на трапеца е:

А) 120 cm^2 **Б)** 96 cm^2 **В)** 94 cm^2 **Г)** 75 cm^2

20. В успоредника $ABCD$ диагоналът $BD = \sqrt{3}$ cm сключва със страните AB и BC ъгли съответно равни на 30° и 120°. Дължината на диагонала AC е:

А) $\sqrt{3}$ cm **Б)** 3 cm **В)** $\sqrt{21}$ cm **Г)** 21 cm

Модул 2

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете стойността на израза

$$A = \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$$

ако $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$.

22. Намерете решенията на неравенството $\dfrac{x^2 - 1}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \leqq 2$.

23. Първият член на геометрична прогресия е равен на 2, а шестият ѝ член е равен на 64. Намерете сбора от първите пет члена на прогресията.

24. Децата в клуб по интереси са разделени на три групи. В две от групите има съответно 5 и 4 деца. Броят на начините да се състави отбор от 6 деца, в който се включват по 2 деца от всяка група, е 900. Колко са децата в клуба?

25. В $\triangle ABC$е вписана окръжност с радиус $r = 2$ cm, която се допира до страната AB в точка T. Намерете лицето на триъгълника, ако $AT = BC = 6$ cm.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки.

26. Докажете тъждеството

$$\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{\sin 6\alpha}{1 + \cos 6\alpha}$$

за всички допустими стойности на α.

27. Решете уравненията $\sqrt{3x^2 - 2x} - 4 = 0$ и $\sqrt{x^2 + 6x} - 3x + 2 = 0$ и намерете сбора от корените им.

28. В $\triangle ABC$ с дължини на страните $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ е построена ъглополовящата CL ($L \in AB$) и медианата CM ($M \in AB$). Намерете дължините на CL, на CM, на радиуса r на вписаната в $\triangle ALC$ окръжност и на радиуса R на описаната окръжност около $\triangle BCM$.

ОТГОВОРИ

1. Б	**2.** Б	**3.** Г	**4.** В	**5.** А
6. Г	**7.** В	**8.** Б	**9.** В	**10.** В
11. А	**12.** В	**13.** Б	**14.** А	**15.** Г
16. Г	**17.** В	**18.** В	**19.** Б	**20.** В

21. $A = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
22. $(-1; 0) \cup (0; 1)$
23. 62
24. 15
25. 24 cm^2
27. $\dfrac{8}{3}$
28. $CL = \dfrac{15}{8}$ cm; $CM = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ cm; $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ cm; $R = \dfrac{7\sqrt{57}}{18}$ cm.

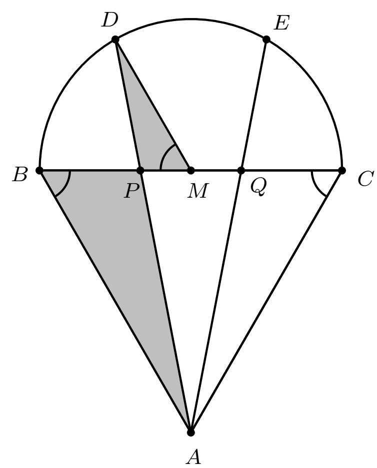
Ученическо творчество

ТРИСЕКЦИЯ НА ОТСЕЧКА

Зорница Христова
12.клас, ППМГ „Акад.Иван Ценов“, Враца

Предлагам на вниманието на читателите една интересна геометрична задача от датското състезание Georg Mohr Contest, 2010 и моето решение.

Задача. Даден е равностранен триъгълник ABC. Външно за триъгълника е построена полуокръжност с диаметър BC, а точките D и E разделят $\overset{\frown}{BC}$ на три равни дъги $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EC}$. Отсечките AD и AE пресичат страната BC съответно в точките P и Q. Да се докаже, че точките P и Q разделят страната BC на три равни отсечки, т.е. $BP = PQ = QC$.



Решение. Нека M е центърът на дадената полуокръжност. Да означим $MB = MC = MD = R$; тогава страната на равностранния триъгълник е равна на $2R$. От равенството

$$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EC}= \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$$

следва, че $\sphericalangle BMD = 60^\circ$. Тогава триъгълниците BPA и MPD са подобни с коефициент на подобие $\dfrac{BA}{MD} = \dfrac{2R}{R} = 2$.

Следователно $BP = 2 \cdot MP$, т.е.

$$BP = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}BC.$$

От съображения за симетрия и $CQ = \dfrac{1}{3}BC$, т.е. точките P и Q разделят страната BC на три равни отсечки, което искахме да докажем.

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОТ РУСКИ ОЛИМПИАДИ

4. клас

61. В градината на Олег растат ябълки, круши и дюли, общо 36 дървета. Ябълковите дървета са 2 пъти повече от броя на останалите дървета, а крушите са с 2 повече от дюлите. Колко са дюлите?

62. Николай записал числото 5. Скучаейки, той започнал да извършва следната операция: умножавал числото по 3, от резултата вадел 1 и в получения резултат изтривал всички цифри, освен последната. По този начин от числото 5 получил 4; след това приложил операцията към 4 и т.н. Кое число ще получи Николай след 2019 операции?

63. Мария поканила приятелките си да хапнат бонбони и малко преди те да дойдат, си помислила: Ако аз сега изям 7 бонбона, за всяка от нас ще останат по 4 бонбона. А ако освен другите момичета, повикам и Елена, тя ще донесе 3 бонбона и за всяка от нас ще има по 5 бонбона. Колко бонбона има Мария?

64. Пешо написал подред всички нечетни числа от 1 до 19. След това изтрил някои цифри така, че останало петцифрено число. Кое е най-голямото число, което може да получи Пешо.

5. клас

65. Колко са трицифрените числа, които се делят на 5 и сборът на цифрите им е 15?

66. Елена разделила един правоъгълник на 9 правоъгълника с помощта на четири отсечки, както е показано на чертежа. Във всеки от деветте правоъгълници записала обиколката му, но точно едно от числата е грешно. Намерете сгрешеното число и поправете грешката.

14	16	12
18	14	10
16	18	14

67. В клас с повече от 30, но по-малко от 40 ученици, всеки ден дежурят едно момче и едно момиче. След като 120 дни дежурили различни двойки от момче и момиче, се оказало, че на 121-ия ден задължително някоя двойка ще се повтори. Колко са учениците в класа?

68. На един остров живеят стройни рицари и дебели лъжци. Лъжецът винаги лъже и тежи 125 кг. Рицарят винаги казва истината и тежи 75 кг.

Веднъж четирима жители на този остров и провели следния разговор:

А: *Сред нас има точно трима рицари.*

Б: *Не, ние всички сме лъжци.*

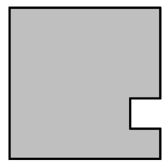
В: *Не, ние всички сме рицари.*

Четвъртият замълчал. Общо колко тежат тези четирима жители?

6. клас

69. Купих две еднакви торти. Нарязах първата торта на повече от 20 равни парчета. Втората торта също нарязах на равни парчета. Седем парчета от първата торта тежат колкото 11 парчета от втората. Най-малко колко са всички парчета торта?

70. От лист с форма на квадрат изрязали квадратче, както е показано на чертежа, в резултат на което обиколката на листа се увеличила с 10%. С колко процента се е намалило лицето на листа?

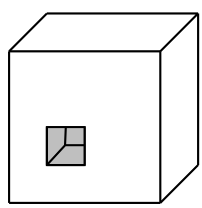


71. Намислих обикновенна дроб. Увеличих числителя и знаменателя с 10 и получих дроб, която е 2 пъти по-голяма от намислената. Коя дроб съм намислил?

72. Велосипедист и мотоциклетист едновременно тръгнали от A за B. Скоростта на мотоциклетиста е 5 пъти по-голяма от скоростта на велосипедиста. На средата на пътя мотоциклетът се повредил и мотоциклетистът продължил пеша със скорост, два пъти по-малка от скоростта на велосипедиста. Когато велисипедистът пристигнал в B, мотоциклетистът бил на 2 km от B. Да се намери разстоянието между A и B.

7. клас

73. От парче дърво с форма на куб изрязали отвор с форма на куб, както е показано на чертежа, в резултат на което лицето на повърхнината на тялото се увеличило с 24%. С колко процента се е намалил обемът на тялото?

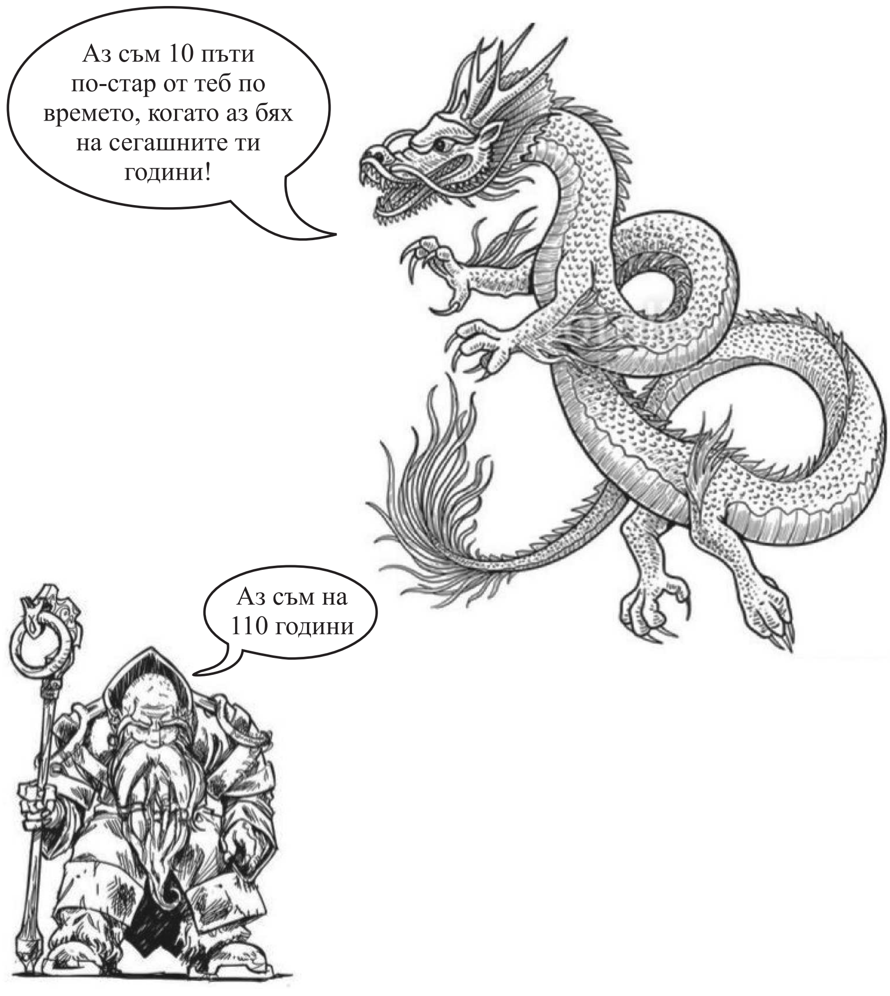


74. Дойде есента и оцвети някои зелени листа на любимото ми дърво в жълто, а други зелени листа – в червено. Жълтите и червените листа след време падат.

Вчера $\frac{1}{9}$ от всички листа на дървото бяха зелени, $\frac{1}{9}$ бяха червени, а останалите – жълти. Днес $\frac{1}{9}$ от всички листа на дървото са зелени, $\frac{1}{9}$ са жълти, а останалите – червени.

Най-малко колко процента от листата, които вчера висяха на дървото, са окапали през нощта?

75. Кралят на джуджетата, който е на 110 години, попитал стария дракон на колко е години. Драконът отговорил: *Сега съм 10 пъти по-стар от теб по времето, когато аз бях на твоите сегашни години.* На колко години е драконът?



За по-малките – решения

на задачите от бр. 4/2019

46. Миша ходил за риба. Той отишъл пеша до реката, а се върнал с велосипед. За отиване и връщане му били нужни общо 40 минути.

На следващия ден Миша на отиване и на връщане от реката се движил с велосипед, за което му били нужни общо 20 минути.

За колко минути Миша пеша ще отиде и ще се върне от реката?

Решение. На велосипед Миша изминава разстоянието от дома си до реката за $20 : 2 = 10$ минути. Пеша той изминава същото разстояние за $40 - 10 = 30$ минути. Миша пеша ще отиде и ще се върне от реката за $2.30 = 60$ минути.

47. Три картички и четири плика струват 18 лв., а шест картички и пет плика струват 27 лв. Колко струва една картичка?

Решение. Щом 3 картички и 4 плика струват 18 лв., двойно по-голяма покупка от 6 картички и 8 плика струва $2.18 = 36$ лв. Дадено е, че 6 картички и 5 плика струват 27 лв. Последните две покупки се различават с $8 - 5 = 3$ плика и разликата в сумите е $36 - 27 = 9$ лв. Щом 3 плика струват 9 лв., цената на един плик е $9 : 3 = 3$ лв. Една картичка струва $(18 - 4.3) : 3 = 2$ лв.

48. Две училища купили на една и съща цена 14 учебни табла. Едното училище платило 30 лв., а другото платило 40 лв. Колко табла е купило всяко училище?

Решение. Всичките 14 табла са стрували $30 + 40 = 70$ лв. Цената на едно табло е $70 : 24 = 5$ лв. Едното училище е купило $30 : 5 = 6$ табла, а другото е купило $40 : 5 = 8$ табла.

49. Рис може да изяде 600 кг месо за 6 часа, а тигър може да изяде тази порция 2 пъти по-бързо. За колко време рисът и тигърът заедно могат да изядат това месо?

Решение. Тигърът изяжда 600 кг месо за 3 часа, за което време рисът ще изяде $600 : 2 = 300$ кг. Значи заедно за 3 часа ще изядат $600 + 300 = 900$ кг. Това означава, че за 1 час ще изядат $900 : 3 = 300$ кг, а 600 кг ще изядат за 2 часа.

50. В училище има 33 кабинета, като в $\frac{2}{3}$ от тях има по 12 чина, а в останалите – по 13. До всеки чин има два стола, като 50% от столовете имат по три крака, а останалите – по четири. Всеки чин, освен 7 специални, има по 4 крака, а специалните чинове имат по 6 крака. Общо колко крака имат чиновете и столовете в това училище?

Решение. В училището има $\dfrac{2}{3} \cdot 33 \cdot 12 + \dfrac{1}{3} \cdot 33 \cdot 13 = 407$ чина, а те имат $7.6 + 400.4 = 1642$ крака. Столовете са $2.407 = 814$ и те имат $407.3 + 407.4 = 2849$ крака. Общо краката са $1642 + 2849 = 4491$.

51. Петър има повече от 150, но по-малко от 200 книги. От тях 20% са романи, а $\dfrac{1}{7}$ са с поезия. Колко книги има Петър?

Решение. Броят на книгите на Петър е кратен на 5 и на 7, следователно на НОК$(5; 7) = 35$. Единственото число между 150 и 200, което се дели на 35, е 175. Петър има 175 книги.

52. Като отскочи от левия си крак, Кенгуруто скача 2 метра, от десния 4 метра, а с двата крака скача 7 метра. Най-малко с колко скока Кенгуруто ще измине точно 300 метра?

Решение. Нужни са най-малко 44 скока – 42 скока с двата крака, един скок с левия крак и един скок с десния $(42.7 + 4 + 2 = 300)$.

53. Царят на джуджетата пази съкровищата си в три сандъка до стената. В единия са скъпоценните камъни, във втория златните монети, а в третия – магическите книги. Той помни, че червеният сандък е вдясно от скъпоценните камъни, а магическите книги са вдясно от червения сандък. Какъв е цветът на сандъка с магическите книги, ако зеленият сандък е вляво от синия?

Решение. Вляво е зеленият сандък със скъпоценните камъни, в средата е червеният сандък със златните монети, а вдясно е синият сандък с магическите книги.

54. Половината от едно положително число умножили с 20% от същото число и получили 22,5. Намерете това число.

Решение. Ако числото е x, то

$$\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{5}x = 22,5 \iff x^2 = 22,5.2.5 = 225.$$

Тъй като $225 = 15^2$, търсеното положително число x е 15.

55. Ученик прочел една книга за 3 дни. Първия ден той прочел 20% от книгата и още 16 страници; втория ден прочел 30% от остатъка и още 20 страници, а на третия ден прочел 75% от новия остатък и последните 30 страници. Колко страници има тази книга?

Решение. Разсъждаваме отзад напред. На третия ден ученикът прочел 75% от остатъка и последните 30 страници, следователно 30 страници са $100\% - 75\% = 25\% = \frac{1}{4}$ от остатъка. Оттук остатъкът след втория ден е $30.4 = 120$ страници.

На втория ден ученикът прочел 30% от остатъка и още 20 страници и му останали 120 страници. Следователно $100\% - 30\% = 70\% = \frac{7}{10}$ от остатъка са $20 + 120 = 140$ страници. Оттук остатъкът е $140 : \frac{7}{10} = 200$ страници.

Първия ден ученикът прочел 20% от книгата и още 16 страници и му останали 200 страници. Значи $100\% - 20\% = 80\% = \frac{4}{5}$ от остатъка са $16 + 200 = 216$ страници. Оттук книгата има $216 : \frac{4}{5} = 270$ страници.

56. Средното аритметично на шест числа е 17. Изтрили едно от числата и средното аритметично на останалите пет числа станало 19. Кое е изтритото число?

Решение. Сборът на шестте числа е $6.17 = 102$, а сборът на останалите пет числа е $19.5 = 95$. Извadеното число е $102 - 95 = 7$.

57. Две бутилки A и B са пълни донякъде с вода. Първо $\frac{1}{4}$ от водата в A прелели в B, а след това $\frac{1}{3}$ от водата в B прелели в A. По този начин количество вода в бутилките се изравнило. В какво отношение е било количеството вода в двете бутилки в началото?

Решение. Ако в A x литра вода, а в B е имало y литра вода, след първото преливане в A е имало $\frac{3}{4}x$ литра, а във B е имало $y + \frac{1}{4}x$ литра. След второто преливане в A е имало

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}\left(y + \frac{1}{4}x\right) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y$$

литра, а във B е имало

$$\frac{2}{3}\left(y + \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

литра.

От равенството

$$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

следва, че $\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}y$, т.е. $2x = y$ и търсеното отношение е $x : y = 1 : 2$.

58. Получих кутия с три вида бонбони: карамелени, шоколадови и желета. Карамелените са с 8 по-малко от всички останали бонбони, а шоколадовите са с 14 по-малко от останалите бонбони. Колко са желетата?

Решение. Нека в кутията има x карамелени бонбони, y шоколадови бонбони и z желета. Имаме, че

$$x = y + z - 8 \iff x - y = z - 8$$

и

$$y = x + z - 14 \iff x - y = 14 - z.$$

Следователно $z - 8 = 14 - z$, откъдето намираме $z = 11$.

59. В едно кафене се срещнали 55 вълшебни същества: елфи и джуджета. Всеки си поръчал или чай, или кафе. Всички елфи казват истината, когато пият чай, и лъжат, когато пият кафе, а при джуджетата е обратното. На въпроса *Чай ли пиете?* се получили 44 отговора *Да*, а на въпроса *Вие джудже ли сте?* се получили 33 отговора *Да*. Колко от вълшебните същества пили чай и колко са били джуджетата?

Решение. На въпроса *Чай ли пиете?* всички елфи са отговорили *Да*, а всички джуджета са отговорили *Не*. Значи елфите са 44, а джуджетата са $55 - 44 = 11$.

На въпроса *Вие джудже ли сте?* с *Да* са отговорили всички, които пият кафе. Следователно чай са пили $55 - 33 = 22$ същества.

60. Майката на Ваня се разхожда около кръгло езеро и обикаля езерото за 12 минути. Ваня кара тротинетка по същата алея в същата посока и настига майка си на всеки 12 минути. През колко минути Ваня ще среща майка си, ако се движи със същата скорост, но в обратната посока?

Решение. За 12 минути майката на Ваня ще обиколи езерото веднъж, а Ваня ще я настигне, т.е. ще направи две обиколки. Следователно скоростта на Ваня е 2 пъти по-голяма от скоростта на майка му. Ако Ваня се движи със същата скорост, но в обратна на нейната посока, между две срещи майката ще изминава $\frac{1}{3}$ от обиколката на езерото, а Ваня $\frac{2}{3}$ от обиколката. Следователно те ще се срещат на $\frac{1}{3}.12 = 4$ минути.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ВСЕРУСИЙСКАТА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Ивайло Кортезов(ИМИ–БАН), Елена Киселова(СМГ)

В предния брой на списанието беше дадена информация за Заключителния етап на XLV Всерусийска ученическа олимпиада по математика, 21–27 април 2019, както и условия и упътвания за задачите. Надяваме се, че освен че са Ви доставили голямо естетическо удоволствие, сте се справили успешно с тях. Все пак прилагаме решенията им, за да сверите полученото от Вас или ако такова няма, да се запознаете с тях.

9 клас

9.1. Нека точките са A, B, C, D, E, като най-отдалечени една от друга са A и B. Ако E лежи на симетралата s_{CD}, местим A и B на s_{CD}. Иначе нека точката E' е симетрична на E относно s_{CD}; местим A в E' и B на s_{CD} (това е възможно, понеже разстоянието от E до s_{CD} е по-малко от по-малката от EC и ED, а значи и от AB).

9.2. Отговор: $n = 6$. При $n = 6$ можем да положим $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и $a_5 = a_6 = -1$; даденият тричлен добива вида $x^2 - 8x + 7$ и има два цели корена: 1 и 7.

Ще покажем, че $n \geqq 6$. Нека числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяват условието; съкратената дискриминанта трябва да е точен квадрат:

$$d = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^4 - \left(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 1\right).$$

Тогава d е нечетен квадрат, така че дава остатък 1 при деление на 8. Горното е еквивалентно на

$$d + 1 + a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^4.$$

По модул 8 четвъртата степен е сравнима с 0 или 1, а лявата страна е сравнима с $1 + 1 + k$, където k е броят нечетни числа сред a_i, така че $n \geqq k \geqq 6$.

9.3. Нека P е втората пресечна точка на BO с окръжността Ω. Тогава BP е диаметър на Ω и $\sphericalangle BCP = 90^\circ = \sphericalangle BAP$. Значи $CP \parallel AH$ и $AP \parallel CH$. Следователно $AHCP$ е успоредник и диагоналите му имат обща среда, M.

При симетрия относно M точката A се изобразява в C, P – в H, E – в някаква точка E', а Ω – в окръжност Ω'. Тогава A, H, E' и C лежат на Ω'. Тъй като $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle AHC$, точка D също е на Ω'.

Поради симетрията $\sphericalangle ECP = \sphericalangle E'AH$, а също $PE' \parallel HE$, затова E' лежи на правата PB. Четириъгълниците $AHE'D$ и $BEPC$ са вписани, така че $\sphericalangle EBP = \sphericalangle ECP = \sphericalangle E'AH = \sphericalangle E'DH$. Следователно $\sphericalangle EBD = \sphericalangle BDH$, така че трапецът $BHED$ е равнобедрен и $BH = DE$.

9.4. Разглеждаме граф G с върхове – децата и ребра – приятелствата им. Едно оцветяване на върховете е *правилно*, ако съседните върхове са разноцветни. Така G е оцветен правилно в 7 цвята, отбелязани са 100 *стабилни* върха и някои от останалите трябва да се преоцветят така, че оцветяването да остане правилно.

Да допуснем, че това е невъзможно. Нека цветовете са $1, 2, \ldots, 7$. Да изберем два цвята $i < j$. Да оставим само върховете в тези цветове и ребрата между тях; получения граф ще бележим с G_{ij}. Този граф може да има няколко свързани компоненти; нека броят им е c_{ij}. Ако $c_{ij} > 100$, то има компонента без стабилни върхове и с размяна на цветовете i и j в нея получаваме желаното.

Сега нека $c_{ij} \leqq 100$ за всички i и j. Всяка свързана компонента с x върха има поне $x - 1$ ребра; тогава ако в G_{ij} има v_{ij} върха, то броят на ребрата му е $e_{ij} \geqq v_{ij} - c_{ij}$, т.е.

$$(*) \qquad e_{ij} \geqq v_{ij} - 100.$$

Да пресметнем сбора V на всички v_{ij} и сбора E всички e_{ij}. В G има 10000 върха и всеки участва в 6 графа от тип G_{ij}, така че $V = 60000$. В G има $11 \cdot 10000/2 = 55000$ ребра и всяко участва в един G_{ij}, така че $E = 55000$. Двойките цветове са $C_7^2 = 21$ и неравенството $(*)$ води до $E \geqq V - 21 \cdot 100$: противоречие.

9.5. Да допуснем, че широчината им y е била по-малка от дължината им x. Ако i-тото дете има квадратчета със страна a_i, то $y = b_i a_i$, $x = c_i a_i$ $(b_i, c_i \in \mathbb{N})$ и броят им е $b_i c_i$. Да запишем рационалното число $x/y = c_i/b_i$ като несъкратима дроб s/t. От $x > y$ следва $s > 1$ и c_i се дели на s за всяко i. Тогава общият брой квадратчета е по-голям от s и се дели на $s > 1$: противоречие.

9.6. Нека точката N е симетрична на A относно M; тогава $ADNT$ е успоредник. Поради $\sphericalangle ANT = \sphericalangle CAM$ е достатъчно да покажем, че $\sphericalangle AKT = \sphericalangle ANT$, или че A, T, N, K лежат на една окръжност.

Нека ND пресича AB в точка S; тогава $DS \parallel BC$ и $BSDC$ е равнобедрен трапец. Ще докажем, че K и N лежат на окръжността ω, описана около триъгълник AST. Имаме $\sphericalangle ATN = \sphericalangle ADN = 180^\circ - \sphericalangle SDA = 180^\circ - \sphericalangle ASD$, значи $N \in \omega$. От описаната около трапеца $BSDC$ окръжност имаме $\sphericalangle SKT = \sphericalangle SBC = 180^\circ - \sphericalangle SAT$, затова и $K \in \omega$.

9.7. Да обозначим юбилейната монета с Ю. Отделяме две неюбилейни монети A и B. Останалите монети разполагаме по 7 на всяко блюдо, така че Ю да е на лявото. Една монета ще наричаме *лява*, ако при това претегляне е на лявото блюдо.

Случай $(=)$. Ако блюдата са в равновесие, то или във всяко блюдо има по 3 тежки монети (и A и B са тежки), или по 4 (и A и B са леки). В лявото блюдо поставяме Ю и още една лява монета C, а в дясното – A и B.

Подслучай $(=,=)$. Ако пак са в равновесие, то A, B, C, Ю тежат еднакво. Сравняваме ги с други 4 леви монети. Равновесие вече е невъзможно, понеже след левите монети би имало поне 6 с това тегло: абсурд. Според това кое блюдо ще натежи ще разберем дали A, B, C, Ю са тежки или леки.

Подслучай $(=,<)$. Ако блюдото с Ю е по-леко, то там няма две тежки монети. Сравнявайки ги, при неравенство разбираме каква е Ю, а при равенство – че и двете са леки.

Подслучай $(=,>)$ Ако блюдото с Ю е по-тежко, действаме аналогично.

Случай $(<)$. Ако блюдото с Ю е по-леко, то сред левите монети има не повече от три тежки. Сравнявайки Ю с някоя лява монета C, при неравенство разбираме каква е Ю, а при равенство сравняваме тези две монети с друга двойка леви монети. При неравенство разбираме каква е Ю, а при равенство вече имаме 4 еднакви леви монети, сред които е Ю, а както вече отбелязахме, те може да са само леки.

Случай $(>)$ Ако блюдото с Ю е по-тежко, действаме аналогично.

9.8. От САСГ $b+c \geqq 2\sqrt{bc}$, така че

$$4\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leqq 2\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = 2\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{c}} \leqq \left(a-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c},$$

отново от САСГ. Аналогично

$$4\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leqq \left(b-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a}, \quad 4\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leqq \left(c-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}.$$

Остава да съберем трите неравенства. Равенство се достига при $a=b=c=\sqrt{2}$.

10 клас

10.1. Нека M е произволна точка от равнината. Да разгледаме триъгълник ABC с медицентър M. Нека D, E, F са медицентровете съответно на $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ и $\triangle ABM$. Тогава M е медицентър на $\triangle DEF$ (защо?) и

$$f(M) = f(D)+f(E)+f(F)$$

$$= (f(M)+f(B)+f(C)) + (f(M)+f(C)+f(A)) + (f(M)+f(A)+f(B))$$
$$= 2(f(A)+f(B)+f(C)) + 3f(M) = 5f(M),$$

следователно $f(M)=0$.

10.2. Не. Нека считаме, че началното парче е 1 кг. Ако Паша завари парче от поне 3 г, той реже от него две парчета по 1 г; по този начин всички парчета са цяло число грамове дори и след ходовете на Вова. Преди всеки пореден ход на Паша броят парчета е все по-голям, така че в даден момент ще му останат само парчета по 1 г или по 2 г. Тогава той ще е победил, иначе общата маса на парчетата би била по-малко от $1\cdot 100 + 2\cdot 100 = 300$ г.

10.3. Отговор: 8824. Групираме стаите с вместимости $101-200$, $102-199$, $\ldots$, $150-151$. Ако директорът не може да се справи, то броят хора във всяка двойка стаи е по-голям от вместимостта на по-голямата от тях, така че $n \geqq 201+200+199+\ldots+152 = 353\cdot 25 = 8825$.

Нека подредим стаите по нарастване на вместимостта. Ако в първите 50 стаи има по 76 души, а в стая с вместимост k при $151 \leqq k \leqq 200$ има $k-75$ души, то

$$n = 76\cdot 50 + (76+77+78+\ldots+125) = 3800 + 201\cdot 25 = 8825.$$

Да изберем две произволни стаи; нека вместимостите им са $a < b$. Тогава в първата има поне 76 души, а във втората – поне $b - 75$ и преселване не е възможно. Ако пък $n > 8825$, то пак може хората да са разположени така, че преселване да е невъзможно – достатъчно е оставащите хора да настаним където има свободни места.

10.4. Използвайки окръжностите $(PABC)$ и (PA_1B_1C), получаваме $\sphericalangle PAB = 180^\circ - \sphericalangle PCB = \sphericalangle PA_1B_1$ и аналогично $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PB_1A_1$. Сега $\triangle PAB \sim \triangle PA_1B_1$, така че $\sphericalangle APA_1 = \sphericalangle APB \pm \sphericalangle BPA_1 = \sphericalangle BPB_1$ и $PA/PA_1 = PB/PB_1$. Следователно $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$ и съществува въртяща хомотетия h с център P и ъгъл $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB$, $h : \overrightarrow{AA_1} \to \overrightarrow{BB_1}$. Тъй като AA_1B_1B е вписан, $\triangle B_1SB \sim \triangle A_1SA \cong \triangle A_1QA$. Щом $\triangle A_1QA$ и $\triangle B_1SB$ са подобни и еднакво ориентирани, получаваме $S = h(Q)$ и $\sphericalangle QPS = \sphericalangle ACB$. Аналогично $\sphericalangle SPR = \sphericalangle ACB$. Така $\sphericalangle QPR = 2\sphericalangle ACB$. Но

$$\sphericalangle QCR = \sphericalangle QCA + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCR = \sphericalangle ACS + \sphericalangle ABC + \sphericalangle SCB = 2\sphericalangle ABC.$$

Получихме $\sphericalangle QPR = \sphericalangle QCR$. Резултатът следва.

10.6. Да означим $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Без ограничение на общността $\alpha \geqq \gamma$. Точките D и E са среди на дъгите AB и AC от окръжността ω, така че $\sphericalangle ABD = \dfrac{\sphericalangle ACB}{2} = \gamma$ и $\sphericalangle CBE = \alpha$.

Нека M и N са среди съответно на страните AB и BC. Средната отсечка MN на $\triangle ABC$ е успоредна на AC и минава през средата K на BL. Също $\sphericalangle AMK = 180^\circ - \sphericalangle MAC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\sphericalangle BNK = \sphericalangle BCA = 2\gamma$.

Нека $BM = MA = c$, $BN = NC = a$. Щом MP е медиана в правоъгълния $\triangle APB$, $MP = c$ и $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MBP = \gamma$ и аналогично $NQ = a$, $\sphericalangle NQB = \alpha$. Следователно $\sphericalangle QNK = \sphericalangle BNK + \sphericalangle BNQ = 2\gamma + 180^\circ - 2\alpha$ и $\sphericalangle PMK = \sphericalangle AMK + \sphericalangle PMA = 180^\circ - 2\alpha + 2\gamma$. Тъй като $\alpha \geqq \gamma$, то или точките P и Q са на правата MN и задачата е решена, или точките P и A са в едната полуравнина относно правата MN, а Q – в другата.

За ъглополовящата BK на $\triangle BMN$ имаме $MK/KN = c/a = MP/QN$ и от $\sphericalangle PMK = \sphericalangle QNK$ следва $PMK \sim QNK$. Тогава $\sphericalangle MKP = \sphericalangle NKQ$ и (понеже P и Q са в различни полуравнини относно MN) P, K и Q са на една права.

10.7. Да. Нека три от децата са къдрави, а сработени са само отборите с нечетен брой къдрави деца. Тези отбори са 1 или 3; съществуват и двата варианта.

10.8. За всяко естествено b в редицата a_0, a_1, a_2, $\ldots$ има безбройно много b-ти степени на естествени числа, по-големи от 1 (иначе ако последната от тях беше $N = x^b$, в редицата нямаше да има нито една Nb-та степен).

Ако $d_k = a_{k+1} - a_k$, то $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Тъй като коефициентите на многочлена са цели, от $a \equiv a' \pmod{d_k}$ следва $P(a) \equiv P(a') \pmod{d_k}$ и с индукция по s получаваме $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, т.е. $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ за всички $s \geqq 0$.

Нека ℓ е степента на някое просто число p в каноничното разлагане на d_k. Нека $b = p^{\ell-1}(p-1)\ell$; според казаното в началото, има индекс $s > k$, такъв че $a_s = m^b$ за естествено m; при това $a_s \equiv a_k \pmod{p^\ell}$.

Ако m не се дели на p, то по теоремата на Ойлер

$$a_s = \left(m^{p^{\ell-1}(p-1)}\right)^\ell \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{p^\ell},$$

откъдето $a_k \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. Ако пък m се дели на p, то a_s се дели на p^ℓ, а значи и a_k също. И в двата случая $a_k(a_k - 1)$ се дели на p^ℓ. Оттук правим извода, че $a_k(a_k - 1)$ се дели на d_k.

За произволно k числото $a_k(a_k - 1)$ се дели на $d_k = P(a_k) - a_k$; при това по условие сред целите числа a_k има безбройно много различни. В частност, ако $Q(x) = P(x) - x$, то $|x(x-1)| \geqq |Q(x)|$ при безбройно много цели стойности на x.

Да предположим, че степента на многочлена $P(x)$ (а значи и на $Q(x)$) е над 1. Тогава горното неравенство може да се изпълни за безбройно много цели x само ако $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$, $u, v \in \mathbb{R}$. Тогава

$$Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$$

се дели на $Q(x)$ за безбройно много цели x; това е възможно само за $Q(x) = \pm x(x-1)$, т.е. $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В първия случай $a_k = n^{2^k}$, т.е. a_k не може да е нечетна степен на естествено число, ако n не е такава степен. Във втория случай $P(x) \leqq 1$ за всички x и не може да е степен на естествено число, по-голямо от 1. Полученото противоречие сочи, че $P(x)$ линеен.

11 клас

11.2. Не. От условията следва

$$13x + ay = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 21x + by = \frac{\pi}{2} + \pi\ell$$

за цели k и ℓ, следователно

$$(21a - 13b)y = 21(13x + ay) - 13(21x + by) = \pi(4 + 21k - 13\ell).$$

При $a = 8$, $b = 13$ получаваме $y = (13\ell - 21k - 4)\pi$, така че $\operatorname{tg}(ay) = 0$ и първото уравнение не се изпълнява.

11.3. Ще покажем как да постигнем това с $2n - 1$ хода, даже ползвайки само три от везните. Ползваме индукция по n.

ИБ: При $n = 2$ мерим двете монети на трите везни; по-тежката ще натежи поне два пъти и ще я открием.

ИС: При $n \geqq 3$ мерим две монети на две везни:

Случай 1. Ако двата пъти натежава една и съща монета a, то другата монета b не е най-тежка. Според ИП за останалите $n - 1$ монети са достатъчни $2n - 3$ хода. ИС е завършена.

Случай 2. Ако двете измервания си противоречат, то неизползваната везна е изправна и с нея откриваме най-тежката монета с още $n - 1 < 2n - 3$ хода. ИС е завършена.

Да допуснем, че има алгоритъм, позволяващ да се справим с $2n - 2$ хода. Номерираме монетите $1, \ldots, n$. Нека при първите $2n - 3$ хода натежи монетата с по-голям номер. Според Дирихле сред монетите $1, \ldots, n - 1$ някоя (номер k) е изглеждала по-лека не повече от веднъж. Това може да се е случило по два начина:

(А) Монетите са в нарастващ ред на масите и везните (дори и повредената) са показвали верен резултат.

(Б) Монетите са в нарастващ ред на масите, освен монета k, която е най-тежка, но единственият ход с нея е на повредена везна.

Случай 1. Ако при $(2n-2)$-я ход не участва монета k и отново натежи монетата с по-голям номер, то отново не можем да разграничим (А) от (Б).

Случай 2. Ако при $(2n-2)$-я ход участва монета k и се случи да натежи, то може да е в сила (А) и последният ход да е на повредена везна, или (Б) и последното измерване да е вярно.

11.4. Нека K_1 и L_1 са допирните точки на вписаната в тераедъра сфера ω съответно със стените ACD и BCD, а K_2 и L_2 – допирните точки на ω_B и ω_A с тези стени. Сферите ω и ω_A са хомотетични с център A, така че K_1 лежи на отсечката AK. Аналогично L_1 лежи на отсечката BL.

Ще покажем, че точките L_1 и L_2 са изогонално спрегнати относно $\triangle BCD$, т.е. $\sphericalangle BCL_1 = \sphericalangle DCL_2$, $\sphericalangle DBL_1 = \sphericalangle CBL_2$ и $\sphericalangle CDL_1 = \sphericalangle BDL_2$. Ще докажем само първото (другите се доказват аналогично). Нека M_1 и M са допирните точки на (ABC) съответно с ω и ω_A. От равенството на допирателните, по трети признак $\triangle CK_1D \cong \triangle CL_1D$, $\triangle AK_1C \cong \triangle AM_1C$, $\triangle BL_1C \cong \triangle BM_1C$, $\triangle CL_2D \cong \triangle CKD$, $\triangle BL_2C \cong \triangle BMC$, $\triangle AKC \cong \triangle AMC$. Сега

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCL_1 + \sphericalangle BCL_2 &= \sphericalangle BCM_1 + \sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM - \sphericalangle ACM_1 = \\ &= \sphericalangle ACK - \sphericalangle ACK_1 = \sphericalangle DCK_1 + \sphericalangle DCK = \\ &= \sphericalangle DCL_1 + \sphericalangle DCL_2\end{aligned}$$

и получаваме желаното $\sphericalangle BCL_1 = \sphericalangle DCL_2$. От условието и изогоналната спрегнатост на L_1 и L_2 следва

$$\begin{aligned}\sphericalangle CXD &= \sphericalangle CKD - \sphericalangle CBD = \sphericalangle CL_2D - \sphericalangle CBD = \sphericalangle BCL_2 + \sphericalangle BDL_2 = \\ &= \sphericalangle DCL_1 + \sphericalangle CDL_1 = 180^\circ - \sphericalangle CL_1D = 180^\circ - \sphericalangle CK_1D,\end{aligned}$$

следователно CK_1DX е вписан. Аналогично е вписан и CL_1DY.

Нека N_1 е допирната точка на ω с ABD. От $\triangle AK_1C \cong \triangle AM_1C$ и от аналогичните еднаквости на триъгълници, прилежащи към останалите пет ръба на $ABCD$, получаваме

$$\begin{aligned}2\sphericalangle AK_1C &= \sphericalangle AK_1C + \sphericalangle AM_1C = \\ &= (360^\circ - \sphericalangle AK_1D - \sphericalangle CK_1D) + (360^\circ - \sphericalangle AM_1B - \sphericalangle BM_1C) = \\ &= 360^\circ - \sphericalangle AN_1D - \sphericalangle CL_1D + 360^\circ - \sphericalangle AN_1B - \sphericalangle BL_1C = \\ &= \sphericalangle BL_1D + \sphericalangle BN_1D = 2\sphericalangle BL_1D.\end{aligned}$$

Тъй като K_1 и L_1 лежат съответно на отсечките AX и BY, то $\sphericalangle CK_1X = \sphericalangle DL_1Y$.

Ако завъртим (BCD) около правата CD до съвпадане с ACD, $\triangle CL_1D$ се изобразява в еднаквия $\triangle CK_1D$, а описаната около CL_1DY окръжност – в окръжност γ, описана около CK_1DX. В частност $Y \to Y' \in \gamma$. От $\sphericalangle CK_1X = \sphericalangle DL_1Y = \sphericalangle DK_1Y'$ следва, че X и Y' са симетрични относно диаметъра на γ, перпендикулярен на хордата CD. Следователно X и Y' (и Y) са равноотдалечени от средата на CD.

11.5. При $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Можем да считаме, че $q \geqq 1$. Нека радиусът на ω_i е $R_i = Rq^i$. Да опитаме да построим начупена линия, съставена от отсечки с дължина $\ell > 0$, започвайки от произволна $A_0 \in \omega_0$. Ако вече сме построили $A_i \in \omega_i$, разстоянията от нея до точките на ω_{i+1} запълват отсечка $[R_{i+1} - R_i, R_{i+1} + R_i]$, така че точката A_{i+1} може да се построи тогава и само тогава, когато $\ell \in [Rq^i(q-1), Rq^i(q+1)]$. Следователно начупената линия съществува точно когато

$$Rq^i(q-1) \leqq \ell \leqq Rq^i(q+1)$$

при $i = 0, 1, 2, 3$. Поради $q \geqq 1$ тази система от неравенства е равносилна на неравенствата $Rq^3(q-1) \leqq \ell \leqq R(q+1)$. Наличието на ℓ е равносилно с $q^3(q-1) \leqq q+1$, т.е. $q^4 - q^3 - q - 1 \leqq 0$, или $(q^2-q-1)(q^2+1) \leqq 0$. Най-голямото q, изпълняващо това неравенство, е $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

11.8. Отговор: $(n+1)n^2$. Въвеждаме координатна система, така че (центровете на) кубчетата да имат координати 1, 2, …, $3n$ по всяка ос. В решението всички сравнения са по модул 3. Едно кубче е черно точно когато всяка негова координата е сравнима с 2. В червено оцветяваме кубчетата (a, b, c), за които $a \equiv 0$, $b \equiv c \equiv 2$, а също $(1, b, c)$ за $b \equiv c \equiv 2$. Общо червените кубчета са $(n+1)n^2$ и условието е изпълнено. Ще покажем, че с по-малко от $(n+1)n^2$ кубчета целта е непостижима.

При $i = 1, 2, \ldots, n$ полагаме $w_{3i} = i$, $w_{3i-1} = 0$, $w_{3i-2} = n+1-i$; редицата (w_i) има вида $n, 0, 1, n-1, 0, 2, n-2, \ldots, 1, 0, n$. Ако дадено кубче има координати (a, b, c), записваме в него числото $w_a w_b w_c$ (в частност, в черните кубчета са записани нули). Сборът на всички числа в бели кубчета е $\Sigma = (w_1 + \cdots + w_{3n})^3 = n^3(n+1)^3$.

Да наречем *цена* $S(X)$ на кубчето X сбора на числата в кубчетата, имащи общ връх с X (включително самото X). При всяко подходящо оцветяване сборът от цените на червените кубчета е поне Σ. Ще докажем, че $S(X) \leqq (n+1)^2 n$ за всяко бяло кубче X. От това ще следва, че червените кубчета са поне $\dfrac{\Sigma}{(n+1)^2 n} = (n+1)n^2$. Нека X има координати (a, b, c). Абсцисите на кубчетата, имащи общ връх с X, са равни на a или $a \pm 1$; аналогично за другите координати. Следователно

$$S(X) = (w_{a-1} + w_a + w_{a+1})(w_{b-1} + w_b + w_{b+1})(w_{c-1} + w_c + w_{c+1}),$$

където сме положили $w_0 = w_{3n+1} = 0$.

Остава да забележим, че $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n$, ако $t \not\equiv 2$, иначе $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n+1$. Тъй като не всички координати на X са сравними с 2, получаваме $S(X) \leqq (n+1)^2 n$.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2019/2020 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Приложна математика“

Подготвя специалисти, които освен задълбочена математическа подготовка и умения за използване на съвременните компютърни и комуникационни технологии могат да използват получените знания в решаване на практически задачи от различни области. Това ги прави търсени и предпочитани специалисти навсякъде, където е възможно да се прилагат математически модели; като консултанти и експерти на научноизследователски проекти и други.

Бакалавърска програма „Компютърни науки“

Подготвя специалисти в областите: програмиране, дизайн на алгоритми, разработка на програмни езици, бази от данни, изкуствен интелект, интелигентни системи и др. Завършилите успешно специалността могат да се реализират като софтуерни специалисти в компютърни, телекомуникационни, инженерни, финансови, застрахователни фирми и научни институти; като преподаватели по информатика във висши училища, научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:

ул. „Акад. Г. Бончев“ бл. 8, ст. 230
1113 София
тел. (02) 873-84-04, 0888-123-169
e-mail: `spisaniematematika2019@gmail.com`

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 09.10.2019 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.

Ръкописи не се връщат.