МАТЕМАТИКА

БРОЙ 5
2016 г.
ГОДИНА LV

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

ISSN 0204-6881

57. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков, Емил Колев, Александър Макелов

57-мата Международна Олимпиада по Математика се проведе в Хонконг между 6 и 16 юли 2016 г. с участието на 602 ученици от 109 държави. България беше представена от отбор в състав: **Виолета Найденова** (11 клас, СМГ), **Александър Чергански** (12 клас, СМГ), **Христо Папазов** (11 клас, Американски Колеж), **Даниел Атанасов** (12 клас, СМГ), **Станислав Славов** (12 клас, СМГ) и **Атанас Динев** (10 клас, ПМГ Бургас). Ръководители на отбора бяха Петър Бойваленков (ИМИ–БАН), Емил Колев (ИМИ–БАН) и Александър Макелов (MIT). Ето резултатите на нашия отбор по задачи:

Име	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Общо**	**Медал**
Виолета Найденова	7	3	0	7	2	0	19	бронзов
Александър Черганскиi	7	5	0	7	7	0	26	сребърен
Христо Папазов	7	1	2	7	0	0	17	бронзов
Даниел Атанасов	7	1	1	7	3	7	26	сребърен
Станислав Славов	7	3	0	7	2	7	26	сребърен
Атанас Динев	7	0	0	7	4	0	18	бронзов
Общо	42	13	3	42	18	14	132	

С извоюваните 132 точки, България се нареди на 18-то място в отборното класиране, на четвърто място в Европейския съюз – след Обединеното Кралство, Унгария и Италия и на първо място на Балканския полуостров. Спрямо тенденцията от последните три години (хронологично, 38-мо, 37-мо и 29-то място), представянето ни бележи напредък, който се надяваме да запазим (макар и с по-скромни темпове). Тук предлагаме на вниманието на читателя условия и решения на задачите, както и коментари по представянето на нашите състезатели.

Задача 1. Даден е триъгълник BCF с прав ъгъл при върха B. Нека A е точката върху правата CF, за която $FA = FB$ и F лежи между A и C. Точка D е избрана така, че $DA = DC$ и AC е ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$. Точка E е избрана така, че $EA = ED$ и AD е ъглополовящата на $\sphericalangle EAC$. Нека M е средата на CF. Нека X е точката, за която $AMXE$ е успоредник (където $AM \| EX$ и $AE \| MX$). Да се докаже, че правите BD, FX и ME се пресичат в една точка.

Решение. Нека $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE = \alpha$. Да забележим, че

$$\triangle AFB \sim \triangle ADC \sim \triangle AED \quad (*)$$

понеже и трите са равнобедрени с ъгъл α при основата.

От (*), $\triangle ABC \sim \triangle AFD$ по равни ъгли при върха A и отношение на страните при този връх, откъдето $\sphericalangle BCA = \sphericalangle FDA$. Сега от една страна $\sphericalangle AFB = 90^\circ + \sphericalangle BCA = 90^\circ + \sphericalangle FDA$ като външен за $\triangle FBC$ и от друга $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ADB$. Така получаваме, че $\sphericalangle FDC = 90^\circ$, откъдето D лежи на окръжността описана около $\triangle BCF$ с център M. Оттук, $\triangle CMD \cong \triangle AED$ понеже и двата са равнобедрени с ъгъл α при основата, и $CD = AD$.

Отново от (*), $\triangle ABD \sim \triangle AFE$ по равни ъгли при върха A и отношение на страните при този връх, откъдето $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AFE$. Но от вписаността на $BCDF$,

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABD &= \sphericalangle ABF + \sphericalangle FBD = \alpha + \sphericalangle FCD \\ &= 2\alpha = 180^\circ - \sphericalangle AFB = \sphericalangle BFC\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFC = 2\alpha = \sphericalangle FAE$, откъдето $AE = EF$ и B, F и E лежат на една права.

Сега остава да кажем нещо и за точка X. От $\triangle CMD \cong \triangle AED$ и успоредника $AMXE$ знаем, че $MX = AE = DM = MC$, откъдето X лежи на окръжността описана около $BCDF$. Понеже $\sphericalangle FAD = \alpha = \sphericalangle ADE$, имаме $AM \| ED$, откъдето X лежи на правата ED.

Взимайки предвид тези наблюдения, $DX = EX - ED = AM - FM = AF = FB$, и понеже $BXDF$ е вписан, следва, че $BXDF$ е равнобедрен трапец; а от $FE = DE$ и $BM = XM$ следва, че правата ME е общата симетрала на двете му основи, откъдето BD, XF и ME се пресичат в една точка.

Коментар. На тази задача нямаме нито един пропуск, което винаги ни е цел на 1. и 4. задача, но не трябва да се приема за даденост – горната геометрия е по-трудна от обикновеното за първа задача в темата. За сравнение, отборът на САЩ, които спечелиха олимпиадата, имат два непълни резултата по 1. задача: 6/7 и 3/7. Единствените ни притеснения бяха свързани с едно изчислително решение, където в зависимост от големината на ъгъла α, някои тригонометрични изрази си сменят знака, а съответният състезател беше разгледал само един от случаите; за щастие, случаите се оказаха напълно аналогични (но се надяваме това да послужи за поука на читателя!).

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа n, за които всяка клетка на таблица с размери $n \times n$ може да бъде запълнена с една от буквите I, M и O по такъв начин, че:

- във всеки ред и всяка колона, една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O; и
- във всеки диагонал, ако броят елементи в диагонала е кратен на три, то една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O.

Забележка: Редовете и колоните на таблица с размери $n \times n$ са номерирани с числата от 1 до n по обичайния начин. Така на всяка клетка отговаря двойка естествени числа $(i, j), 1 \leq i, j \leq n$. За $n > 1$, таблицата има точно $4n-2$ *диагонала* от два типа. Диагонал от първия тип се състои от всички клетки (i, j) за които $i+j$ е константа, и диагонал от втория тип се състои от всички клетки (i, j) за които $i-j$ е константа.

Решение. Като за начало е ясно, че трябва 3 да дели n. Първо ще покажем пример, който работи за всяко n от вида $n = 9k$, а след това ще покажем че няма други възможни стойности на n.

Идеята за конструкцията при $n = 9k$ е да сглобим таблицата от подтаблици с размер 3×3, във всяка от които на всеки от двата диагонала има точно по една буква от всеки вид. Понеже диагоналите в голямата таблица с брой клетки кратен на 3 са съставени от диагонали на 3×3 подтаблици, това ще осигури второто свойство от условието на задачата. Ако имаме 3×3 подтаблица в която всеки от двата диагонала съдържа по една буква от всеки вид, с нея можем да асоциираме две други като сменяме циклично буквите: I с M, M с O, и O с I. Това гарантира, че ако всеки ред и колона на голямата таблица минават през равен брой 3×3 подтаблици от всеки от трите асоциирани вида, голямата таблица ще има и първото свойство от условието (забележете, че тук използваме, че n е кратно на 9). Ето как можем да изпълним тази стратегия при $k = 1$.

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

При $k > 1$, можем да сглобим голямата таблица като просто долепим няколко копия на таблицата за $k = 1$ едно до друго: от горните ни наблюдения следва, че това изпълнява условието.

Сега да покажем защо n трябва да е от вида $9k$. Нека е дадена таблица $3m \times 3m$, изпълняваща условието на задачата. Да я разбием на 3×3

подтаблици, и да наричаме една клетка *ключова*, ако е център на една от тези подтаблици; с други думи, ключовите клетки са с координати от вида $(3i + 2, 3j + 2)$ за $i, j \geq 0$. Ако вземем обединението (с кратности) от клетките на всички редове, колони и диагонали, които съдържат ключови клетки, всяка ключова клетка е броена 4 пъти, а всяка не-ключова клетка е броена веднъж. Оттук, понеже има по равен брой букви от всеки вид в това обединение, и понеже има по равен брой букви от всеки вид в цялата таблица (защо?), излиза, че трябва да има и по равен брой букви от всеки вид сред ключовите клетки, всяка взета три пъти. Но това е еквивалентно на това да има по равен брой букви от всеки вид в ключовите клетки, откъдето броят им m^2 се дели на три; оттук $n = 3m$ се дели на 9.

Коментар. Тук очаквахме, че отборът е добре подготвен, но за жалост не постигнахме нито едно пълно решение и по тази задача делим 38. място в класирането. Задачата е зададена в сравнително стандартна комбинаторна ситуация, с която състезателите ни често се сблъскват по вътрешните ни състезания и подготовки (или поне на нас така ни изглежда), но макар че няколко от тях имаха идеи в правилната посока, на всеки не му достигна по нещо.

Задача 3. Даден е изпъкнал многоъгълник $P = A_1A_2\ldots A_k$ в равнината. Върховете $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имат цели координати и лежат на една окръжност. Нека S е лицето на P. Дадено е нечетно естествено число n, такова, че квадратите на дължините на страните на P са цели числа, които се делят на n. Да се докаже, че $2S$ е цяло число, което се дели на n.

Решение. *Първи начин.* От формулата на Пик следва, че $2S$ е цяло число. Ще докажем с индукция по броя на върховете k, че $2S$ се дели на n. Ясно е, че е достатъчно да разгледаме случая $n = p^t$, където p е нечетно просто, а t е естествено число.

При $k = 3$ нека страните на P са с дължини $\sqrt{na}$, $\sqrt{nb}$ и $\sqrt{nc}$, където a, b и c са естествени числа. От формулата на Херон имаме

$$16S^2 = n^2(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2),$$

означава, че n^2 дели $16S^2$. Тъй като n е нечетно, заключаваме, че n дели $2S$, с което базата на индукцията е доказана.

Нека $k \geq 4$. Да отбележим, че от формулата за разстояние между две точки следва, че квадратите на диагоналите са естествени числа. Ако квадратът на някой от диагоналите на P се дели на n, то индукционната стъпка е очевидна, защото този диагонал разделя P на два по-малки многоъгълника с исканите свойства. Затова оттук нататък ще считаме, че никой от квадратите на диагоналите на P не се дели на $n = p^t$. С други думи, $v_p(A_jA_j^2) < t$ за всеки диагонал A_iA_j, където, както обикновено, с $v_p(r)$ се означава най-високата степен на p, която дели r.

Ще докажем с индукция по m, че $v_p(A_1A_m^2) > v_p(A_1A_{m+1}^2)$ за всяко $m = 2, 3, \ldots, k-1$. Базата $m = 2$ е очевидна поради нашето предположение за квадратите на диагоналите. Нека имаме $v_p(A_1A_2^2) > v_p(A_1A_3^2) > \cdots > v_p(A_1A_m^2)$ за някое m, $3 \leq m \leq k-1$. От теоремата на Птолемей за вписания четириъгълник $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$ имаме равенството

$$A_1A_{m+1} \cdot A_{m-1}A_m + A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} = A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1},$$

откъдето

$$\begin{aligned} A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2 &= A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2 + A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 \\ &\quad - 2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1} \ (*). \end{aligned}$$

От $(*)$ следва, че числото $2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}$ е цяло.

Поради индукционните предположения $v_p(A_1A_{m-1}^2) > v_p(A_1A_m^2)$ и $v_p(A_mA_{m+1}^2) \geq t > v_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$ имаме неравенството

$$v_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) > v_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2).$$

Тогава

$$\begin{aligned} &\quad v_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 \cdot A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ &= v_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) + v_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ &> 2v_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2), \end{aligned}$$

т.е. $v_p(A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}) > v_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2)$.

Сега от сравняването на степените на p от двете страни на (*) заключаваме, че $v_p(A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2) = v_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2)$. Оттук и от $v_p(A_mA_{m-1}^2) \geq t > v_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$ следва, че $v_p(A_1A_{m+1}^2) < v_p(A_1A_m^2)$. С това индукцията по m е завършена.

От доказаното следва, че

$$t = v_p(A_1A_2^2) > v_p(A_1A_3^2) > \cdots > v_p(A_1A_k^2) = t,$$

противоречие.

Втори начин. Да означим страните на P с $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и нека радиусът на описаната около P окръжност да е R. Тъй като симетралите на страните на P имат уравнения с рационални коефициенти, тяхната пресечна точка има рационални координати. Без ограничение на общността можем да считаме, че тези координати са цели и тогава да заключим, че числото R^2 е цяло. Сега от формулата за лицето на P

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} a_i\sqrt{R^2 - \frac{a_i^2}{4}}$$

лесно следва, че е достатъчно да докажем, че R^2 се дели на $n = p^t$. Да допуснем противното и нека $v_p(R^2) = \delta < t$.

Както по-горе разсъждаваме по индукция и виждаме, че е достатъчно да достигнем до противоречие в случая, когато никой от квадратите на диагоналите на P не се дели на $n = p^t$. Да разгледаме триъгълника $A_1A_2A_3$, в който да означим $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$ и $A_1A_3 = c$, като $v_p(a^2) = \alpha \geq t$, $v_p(b^2) = \beta \geq t$ и $v_p(c^2) = \gamma < t$. От Хероновата формула за лицето S_1 на $\triangle A_1A_2A_3$ имаме

$$16S^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Тъй като най-ниската степен на p отдясно е 2γ и се среща само веднъж, сравняването на степените на p от двете страни дава, че $v_p(S^2) = 2\gamma$. Сега от формулата за лице

$$16R^2S^2 = a^2b^2c^2$$

следва, че $\beta + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma$, т.е. $2t > \beta + \gamma = \alpha + \beta \geq 2t$, противоречие.

Коментар. Получените само три точки на тази задача не са добър резултат, тъй като използваните в тази задача идеи не са нови. На заинтересованите читатели препоръчваме да разгледат задача 7. от шортлиста на МОМ 2004, предложена от България (автор Александър Иванов). От друга страна е факт, че почти всички участници са били изненадани и нашият скромен резултат ни нарежда на 10-12 място по тази задача.

Задача 4. Множество от естествени числа се нарича *ароматно*, ако съдържа поне два елемента и всеки от неговите елементи има общ прост делител с поне един от останалите елементи. Нека $P(n) = n^2 + n + 1$. Да се намери минималното възможно естествено число b, за което съществува цяло неотрицателно число a, такова, че множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

е ароматно.

Решение. В няколко помощни твърдения ще анализираме НОД на "близки" изрази от разглеждания вид.

Лема 1. Имаме $d = (P(n), P(n+1)) = 1$ за всяко естествено число n.

Доказателство. Тъй като $d | P(n+1) - P(n) = 2(n+1)$ и $(d, 2) = (d, n+1) = 1$, заключаваме, че $d = 1$.

Лема 2. Имаме $d = (P(n), P(n+2)) = 1$ или 7 за всяко естествено число n, като $d = 7$ точно когато $n \equiv 2 \pmod 7$.

Доказателство. Тъй като $d | P(n+2) - P(n) = 2(2n+3)$ и $(d, 2) = 1$, заключаваме, че $d | 2n+3$. Сега от $d | n(2n+3) - 2P(n) = n - 2$ имаме $d | n - 2$

и тогава $d|2n+3-2(n-2)=7$. Накрая, от $d|n-2$ следва, че $n\equiv 2 \pmod 7$, като последното действително дава $d=7$.

Лема 3. Имаме $(P(n), P(n+3)) = 1$ или 3 за всяко естествено число n, като $d=3$ точно когато $n\equiv 1 \pmod 3$.

Доказателство. Аналогично.

Лема 4. Имаме $(P(n), P(n+4)) = 1$ или 19 за всяко естествено число n, като $d=19$ точно когато $n\equiv 7 \pmod{19}$.

Доказателство. Аналогично.

(Оценка) Нека $P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k)$ е редица с исканите свойства. От Лема 1 очевидно следва, че $k\geq 4$. Ако $k=4$, то от Лема 1 и Лема 2, приложена за двойките $(P(n+1), P(n+3))$ и $(P(n+2), P(n+4))$ следва, че 7 е обща делител на $P(n+1)$ и $P(n+2)$, което противоречи на Лема 1. Ако $k=5$, то от Лема 1 и Лема 2 следва, че $P(n+3)$ се дели на 7 (независимо дали има нетривиален общ делител с $(P(n+1)$ или с $P(n+5)$. Поради втората част на Лема 3 е невъзможно едновременно да имаме $(P(n+1), P(n+4)) = 3$ и $(P(n+2), P(n+5)) = 3$. Следователно едно от числата $P(n+2)$ и $P(n+4)$ се дели на 7, което дава противоречие с Лема 1 и полученото по-горе за $P(n+3)$. Получихме $k\geq 6$.

(Конструкция) Ако $k=6$, от Леми 1–4 следва, че трябва да са изпълнени (например) следните условия: $n+1\equiv 7 \pmod{19}$, $n+2\equiv 2 \pmod 7$ и $n+3\equiv 1 \pmod 3$. Съществуването на такива n следва от Китайската теорема за остатъците (лесно се вижда, че най-малкото е 196).

Коментар. На тази лесна и леко досадна задача по теория на числата нормално бяха получени пълен брой точки. Терминът *ароматно* идва в чест на първото име на залива при Хонг Конг – Ароматния залив.

Задача 5. На дъската е написано уравнението

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$

с по 2016 линейни множителя от всяка страна. Да се намери минималната възможна стойност на k, за която е възможно да се изтрият точно k от всичките 4032 линейни множителя така, че да остане поне по един множител от всяка страна и полученото уравнение да няма реални корени.

Решение. Понеже има 2016 еднакви множители от двете страни на равенството, трябва да изтрием поне 2016 множители. Ще докажем, че уравнението няма реални корени, ако от лявата част изтрием всички множители от вида $x-k$ за $k\equiv 2,3 \pmod 4$, а от дясната част изтрием всички множители от вида $x-m$ за $m\equiv 0,1 \pmod 4$. Получаваме уравнението:

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4) = \prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3). \tag{1}$$

Случай 1. При $x = 1, 2, \ldots, 2016$ едната страна на равенството е 0, а другата е различна от 0.

Случай 2. Нека $4k + 1 < x < 4k + 2$ или $4k + 3 < x < 4k + 4$. При $j = 0, 1, \ldots, 503$ и $j \neq k$ произведението $(x-4j-1)(x-4j-4)$ е положително. При $j = k$ произведението $(x - 4j - 1)(x - 4j - 4)$ е отрицателно. Това означава, че лявата страна на равенството (1) е отрицателна. Тъй като всяко произведение от вида $(x - 4j - 2)(x - 4j - 3)$ е положително, то дясната част на (1) е положителна, противоречие.

Случай 3. Нека $x < 1$ или $x > 2016$ или $4k < x < 4k + 1$ за някое $k = 1, 2, \ldots, 503$. Записваме уравнението във вида:

$$1 = \prod_{j=0}^{503} \frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)} = \prod_{j=0}^{503} \left(1 - \frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right).$$

Тъй като $(x - 4j - 2)(x - 4j - 3) > 2$, то всеки множител е число в интервала $(0, 1)$. Тогава цялото произведение е число в интервала $(0, 1)$, което е противоречие.

Случай 4. Нека $4k+2 < x < 4k+3$ за някое $k = 0, 1, \ldots, 503$. Записваме уравнението във вида

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \prod_{j=1}^{503} \frac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)} \\ &= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \prod_{j=1}^{503} \left(1 + \frac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\right). \end{aligned}$$

Множителите $\dfrac{x-1}{x-2}$ и $\dfrac{x-2016}{x-2015}$ са по-големи от 1. Всеки от останалите множители също е по-голям от 1. Тогава цялото произведение е по-голямо от 1, което е противоречие.

Следователно търсеният минимален брой е 2016.

Коментар. Предположението, че отговорът е 2016, е естествено. Разглеждането на много случаи изисква упоритост и търпение в търсене на решението. Очакванията ни бяха за повече от едно пълно решение.

Задача 6. Дадени са $n \geq 2$ отсечки в равнината, такива, че всеки две отсечки се пресичат във вътрешна точка и никои три не се пресичат в една точка. За всяка отсечка Джеф трябва да избере единия и край и да постави в него жаба, обърната с лице към другия край на отсечката. След това Джеф ще плесне с ръце $n - 1$ пъти. Всеки път, когато Джеф пляска с ръце, всяка жаба веднага скача напред в следващата пресечна точка по своята отсечка. Жабите никога не променят посоката на своето движение.

Джеф желае да разположи жабите така, че да няма момент, в който някои две от тях да се окажат едновременно в една и съща пресечна точка.

(а) Да се докаже, че Джеф винаги може да изпълни желанието си, ако n е нечетно.

(б) Да се докаже, че Джеф няма как да изпълни желанието си, ако n е четно.

Решение. Да разгледаме окръжност, която съдържа всички краища на дадените отсечки. Да продължим всички отсечки до пресичане с окръжността и да означим пресечните точки по посока на часовниковата стрелка с $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Тъй като всеки две отсечки се пресичат, то отсечките са A_iA_{i+n}. Ясно е, че движението на жабите в пресечните точки на отсечките не се променя, ако преместим жабите в новите краища на отсечките.

а) Да разположим жабите в точките с нечетни индекси, т.е. в $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$. Понеже A_i и A_{i+n} са с различна четност, то върху всяка отсечка ще има по една жаба. Ще докажем, че жабите, разположени в точки A_{2p+1} и A_{2q+1} няма да се срещнат. Да означим с X пресечната точка на двете отсечки с крайща A_{2p+1} и A_{2q+1}. Тъй като всеки две отсечки се пресичат и никои три отсечки не се пресичат в една точка, имаме, че:

1. Всяка отсечка, единият край на която е точка от вида A_r за $2p+1 < r < 2q+1$, пресича точно веднъж една от отсечките $A_{2p+1}X$ и $A_{2q+1}X$.
2. Всяка отсечка, която няма край в точка от вида A_r за $2p+1 < r < 2q+1$, или пресича и двете отсечки $A_{2p+1}X$ и $A_{2q+1}X$, или не пресича нито една от тях.

Тъй като точките от вида A_r за $2p+1 < r < 2q+1$ са нечетен брой, от горните две наблюдения следва, че върху отсечките $A_{2p+1}X$ и $A_{2q+1}X$ има нечетен брой пресечни точки.

Следователно върху отсечките $A_{2p+1}X$ и $A_{2q+1}X$ не може да има равен брой точки и жабите не могат да се срещнат в точка X.

б) Ако имаме две жаби в съседни точки, след първия скок те ще попаднат в една и съща точка. Ако нямаме две жаби в съседни точки, то жабите трябва да бъдат разположени или в точките с нечетни индекси или в точките с четни индекси. Тъй като A_i и A_{i+n} са с еднаква четност, върху половината отсечки ще има по две жаби, а върху останалите отсечки няма да има жаби. Следователно такова разположение е невъзможно.

Коментар. Тази задача отстъпва по трудност на обичайните шести задачи на МОМ. Основната трудност е да се ограничи цялата конструкция в кръг, след което решението се развива по естествен начин. Радостно е, че имаме две пълни решения на задача 6, нещо, което не се е случвало от много време.

33. БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Петър Бойваленков, Ивайло Кортезов, Олег Мушкаров

От 5 до 10 май 2016 г. в град Тирана, Албания, се проведе 33. Балканска олимпиада по математика. Българският отбор беше в състав **Виолета Найденова** (11 кл., СМГ), **Костадин Гаров** (11 кл., ПМГ Бургас), **Христо Папазов** (11 кл., АК София), **Даниел Атанасов** (12 кл., СМГ), **Кирил Бангачев** (10 кл., СМГ), **Атанас Динев** (10 кл., ПМГ Бургас), проф. Петър Бойваленков (ИМИ–БАН) – ръководител, доц. Ивайло Кортезов (ИМИ–БАН) – заместник-ръководител и проф. Олег Мушкаров (ИМИ–БАН) – научен консултант.

Отборът беше определен след двудневно контролно, което се проведе на 7 и 8 април 2016 г. по време на Пролетната конференция на Съюза на математиците в България в Плевен. В контролните взеха участие 24 най-добре представили се ученици на Есенния математически турнир в София, Зимните математически състезания в Ямбол и Пролетния математически турнир в Русе.

В БОМ участваха балканските страни Албания, Босна и Херцеговина, България, Кипър, Гърция, Македония, Молдова, Черна Гора, Румъния, Сърбия и Турция, както и неофициално отбори на Азербайджан, Франция, Италия, Казахстан, Туркменистан, Великобритания, Саудитска Арабия и втори отбор на Албания.

Българският отбор спечели три сребърни и три бронзови медала, а в отборното класиране България със 170 точки остана на четвърто място след Сърбия (181 точки), Румъния (180 точки) и Турция (172 точки).

Със *сребърни медали* са

Виолета Найденова	($31 = 10 + 10 + 10 + 1$ точки)
Кирил Бангачев	($30 = 10 + 10 + 10 + 0$ точки)
Атанас Динев	($30 = 10 + 10 + 10 + 0$ точки)

а *бронзови медали* получиха

Христо Папазов	($29 = 10 + 10 + 9 + 0$ точки)
Костадин Гаров	($27 = 7 + 10 + 10 + 0$ точки)
Даниел Атанасов	($23 = 10 + 1 + 10 + 2$ точки).

Благодарим на Министерството на образованието и науката и на генералния спонсор на отбора Американска фондация за България, които подпомогнаха нашето участие на състезанието.

По-долу ви предлагаме условията и решенията на задачите от Балканиадата.

Задача 1. (*Македония*) Да се намерят всички инективни функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такива, че за всяко реално число x и за всяко естествено число n е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i\Big(f(x+i+1)-f(f(x+i))\Big)\right| < 2016.$$

Решение. Понеже n е произволно, можем да го заместим с $n-1$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} i\Big(f(x+i+1)-f(f(x+i))\Big)\right| < 2016$$

(това е тривиално вярно и при $n=1$) и следователно за събираемото, по което двете суми се отличават, имаме

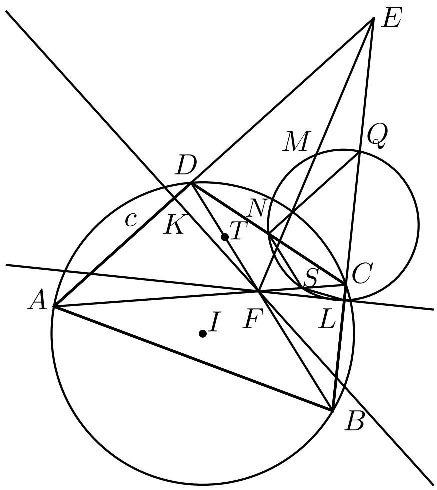
$$\Big|n\Big(f(x+n+1)-f(f(x+n))\Big)\Big| < 2\cdot 2016 = 4032,$$

т.е. $|f(x+n+1)-f(f(x+n))| < \dfrac{4032}{n}$ за всяко реално x и всяко естествено n. Тогава ако за произволно $y\in\mathbb{R}$ положим $x=y-n$, имаме

$$\forall n\in\mathbb{N}: |f(y+1)-f(f(y))| < \frac{4032}{n},$$

т.е. $f(y+1)=f(f(y))$ и понеже f е инективна, $y+1=f(y)$. Явно функцията $f(y)=y+1$ изпълнява даденото условие.

Задача 2. (*Гърция*) Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник, в който $AB<CD$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точка F, а правите AD и BC се пресичат в точка E. Нека K и L са ортогоналните проекции на F съответно върху правите AD и BC и нека M, S и T са средите съответно на EF, CF и DF. Да се докаже, че втората пресечна точка на окръжностите, описани около триъгълниците MKT и MLS, лежи на отсечката CD.



Решение. Описаната окръжност k за триъгълник MLS е окръжност на Ойлер за $\triangle EFC$ и минава през средата Q на CE. Нека N е средата на CD. Ъглите EDB и QNS имат успоредни рамене (средни отсечки), така че $\sphericalangle QNS = \sphericalangle EDB$ или $\sphericalangle QNS + \sphericalangle EDB = 180^\circ$. От медианата в правоъгълния $\triangle FLC$ имаме $\sphericalangle SLC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle EDB$, така че $LNSQ$ е вписан, т.е. N лежи на k. Аналогично N лежи и на описаната окръжност за триъгълник MKT, с което твърдението е доказано.

Забележка. Твърдението на задачата е в сила и без изискването $AB < CD$ (в решението $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDB$ се заменя с $\sphericalangle ADB + \sphericalangle EDB = 180^\circ$).

Задача 3. (*Гърция*) Да се намерят всички нормирани полиноми f със цели коефициенти, удовлетворяващи следното условие: съществува естествено число N, такова, че p дели $2\,(f(p))! + 1$ за всяко просто число $p > N$, за което $f(p)$ е естествено число.

Решение. Ако $f(x)$ е от степен поне 2, то $f(p) > p$ за достатъчно големи прости числа p. Тогава p дели $(f(p))!$ и е невъзможно p да дели $2\,(f(p))!+1$. Следователно $f(x) = x-k$, където k е естествено число (защо?) и условието е еквивалентно на $2(p-k)! + 1 \equiv 0 \pmod p$. От друга страна, теоремата на Уилсън ни дава $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Комбинирайки последните две сравнения, получаваме

$$2 \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod p,$$

което може да бъде вярно за достатъчно голямо p само когато лявата и дясната страна са равни, т.е. при $k = 3$.

Лесно се проверява, че полиномът $f(x) = x-3$ действително е решение на задачата.

Задача 4. (*България, Николай Белухов*) Всяко от квадратчетата на безкрайна квадратна мрежа е оцветено в един от 1201 цвята. Известно е, че нито един правоъгълник със страни по правите от мрежата и периметър 100 не съдържа две квадратчета от един и същи цвят. Да се докаже, че не съществува правоъгълник с размери 1×1201 или 1201×1, който да съдържа две квадратчета от един и същи цвят.

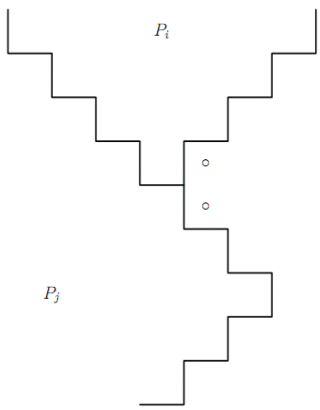
Решение. Нека центровете на квадратите от дадената квадратна мрежа са точките с цели координати. Тогава координатите на центъра еднозначно определят съответния квадрат и ще отъждествяваме квадратите с техните центрове.

Да разгледаме множеството D от квадрати (x, y), за които $|x|+|y| \le 24$. Ще наричаме D и неговите транслирани копия *диамант.* Тъй като всеки два квадрата от един и същи диамант принадлежат на някакъв правоъгълник с периметър 100 (проверете!), от условието следва, че в един диамант не може да има два едноцветни квадрата. Но всеки диамант съдържа точно $24^2 + 25^2 = 1201$ квадрата и значи всеки цвят се среща точно по веднъж в даден диамант.

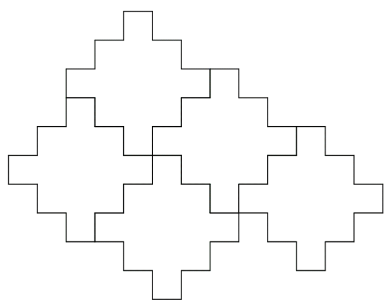
Да фиксираме един цвят, например зелен, и нека $a_1, a_2, \ldots$ да са всички зелени квадрати. Нека P_i е диамантът с център a_i. Ще докажем, че диамантите P_i, $i = 1, 2, \ldots$, покриват точно равнината, т.е. никой квадрат от мрежата не се съдържа едновременно в два такива диаманта и всеки квадрат от мрежата се съдържа в някой от диамантите P_i.

Да допуснем, че диамантите P_i и P_j, $i \neq j$, съдържат един и същи квадрат b от мрежата. Тогава техните центрове лежат в правоъгълник с периметър 100, противоречие. Ако c е произволен квадрат от мрежата, то диамантът с център c съдържа (точно един) зелен квадрат a_i. Тогава диамантът P_i съдържа c.

Не е трудно да се съобрази, че полученото точно покритие на равнината е единствено (с точност до транслация; виж фиг. 1). Без органичение на общността можем да считаме, че покритието се състои от диамантите с центрове (x, y), за които $24x + 25y$ се дели на 1201 (виж фиг. 2 за аналогично покритие с по-малки диаманти). Сега вече не е трудно да се види в това конкретно покритие, че не е възможно да имаме правоъгълник с размери 1×1201, който да съдържа два зелени квадрата. Разбира се, същата аргументация е приложима и за другите цветове.



Фигура 1



Фигура 2

ИНТЕРВЮ С АКАДЕМИК ПЕТЪР КЕНДЕРОВ

Акад. Кендеров, през 2014 г. Световната федерация на национални математически състезания (WFNMC) Ви удостои с най-високото си отличие – наградата Пол Ердьош. Какво е за Вас тази награда?

Името на федерацията може да остави погрешното впечатление, че тя е фокусирана само върху състезанията. Всъщност, целта е по-широка – състезанията се разглеждат като инструмент за насърчаване на математическото образование и издигане на равнището му. Чрез регулярните си конференции и публикуването на списанието „Mathematics Competitions“ федерацията предоставя възможност на заинтересованите колеги да общуват и да обменят информация. Наградата Пол Ердьош се дава на лица, допринесли за постигането на целите на федерацията на национално и международно равнище. Дава се на всеки две години на най-много трима от номинираните. За разлика от други награди, тук човек не може да се номинира сам. Веднъж направена, номинацията преминава през четирима референти, през Подкомитета за наградите на федерацията, а окончателното решение се взема от Изпълнителния комитет и Борда на съветниците.

През 1994 година с тази награда бе отличен проф. Йордан Табов. Радвам се, че в мое лице България има втори носител на наградата и напълно си давам сметка, че за това отличие най-съществен принос имат многобройните участници в българската система за откриване и развиване на математически таланти, която продължава да се развива и да дава добри резултати. Благодарен съм на Института по математика и информатика на БАН за номинацията, както и на референтите и на ръководството на WFNMC за тази висока оценка. Имаше, за съжаление, и неособено приятни инциденти около тази награда. След обявяване на наградените за 2014 година (и мен в това число) във федерацията е постъпило оклеветяващо личността ми писмо. Вероятно целта е била наградата ми да се отмени или просто получателят на наградата да бъде очернен. Подобно писмо е изпратено и до Програмния комитет на Международния конгрес по математическо образование (ICME’13) по повод отправеното от този комитет към мен предложение, да изнеса доклад по покана на избрана от мен тема. Тази покана също е своеобразно отличие и признание за дейността ми в областта на математическото образование и това, изглежда, е засегнало някого. Както и следваше да се очаква, клеветничеството и завистта са били разпознати и наградата Пол Ердьош ми беше връчена по време на Международния конгрес по математическо образование, проведен в Хамбург от 24-ти до 31 август 2016 година. В церемонията по награждаването взе участие и лично председателят на Програмния комитет на Международния конгрес по математическо образование проф. Габриеле Кайзер.

На каква тема беше докладът Ви на Международния конгрес по математическо образование?

За пръв път от развитието на нашата цивилизация съвременните технологии дават възможност учениците да усвояват по експериментален път и на задоволително равнище математическо знание, което е значително по-голямо по обем и по-интересно по съдържание. С помощта на софтуерни системи за динамична математика може съществено да се разшири и разнообрази кръгът на задачите, които се изследват и решават в училище и извън него. Представих примери, включително и на практически задачи, които са непреодолимо предизвикателство за традиционното образование по математика, но са напълно достъпни за изучаване и изследване с помощта на математически софтуер. Представих възможностите в това отношение на създадения в България Виртуален училищен кабинет по математика, който е на разположение на всички училища в страната на адрес `http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/`. По същество става дума за използване и по-нататъшно развитие на Изследователския подход в образованието по математика. През последните десетина години този подход се разпространява у нас по линия на поредица от европейски проекти, по които Институтът по математика и информатика на БАН е партньор и в част от които лично участвам. Този подход притежава и значителен потенциал за повишаване на интереса към изучаването на математиката, както и за улесняване на учениците при преодоляване на неизбежните трудности от технически характер.

За пръв път ли получавате покана от Програмния комитет да изнесете доклад на международен конгрес?

Международният конгрес по математическо образование се провежда веднъж на четири години. Участвал съм и по-рано с някаква роля. Например през 1988 г., на конгреса в Будапеща, бях главен организатор на Предметна област 10 „Ученици с по-високи способности“ (Topic Area 10 “Students of High Ability”). Сега на конгреса в Хамбург участвах с доклад по покана. Ако не се лъжа, за пръв път лектор от България получава такава покана. Може обаче и да не съм добре информиран. Доклад по покана на Програмния комитет изнесох и на другото най-важно за математиците събитие – Международния конгрес на математиците. Той също се провежда на всеки четири години. На конгреса през 2006 година в Мадрид изнесох доклад за математическите състезания и връзката им с образованието по математика. Радвам се, че по-късно и друг българин – проф. Мартин Касабов, който живее и работи в САЩ – също изнесе доклад по покана на Международния конгрес на математиците (в Сеул през 2014 година).

Под Ваше ръководство работи авторски колектив, разработващ нови технологии, които да се приложат в обучението по математика в училище в така наречения изследователски стил (Inquiry Based Education). Какви са разработките и до колко те са приложими в сегашната ситуация на ограничен брой часове по математика и претоварени учебни програми?

„Под мое ръководство“ е силно казано. През последните 8 години бях координатор от страна на ИМИ–БАН в четири европейски проекта, посветени на Изследователския подход в образованието. Основната движеща сила е секцията „Образование по математика и информатика“ на ИМИ–БАН, като най-значителен принос имат доц. Тони Чехларова, ръководител на секцията и доц. Жени Сендова. Жени е и научен ръководител за България на последния за сега проект по тази линия (MASCIL), а Тони е член на Европейския борд на проекта. Два от проектите (Fibonacci и MASCIL) бяха по линия на Седмата Рамкова програма на Европейската комисия, която е насочена към развитието на науката. Само на пръв поглед е странно, че програма за развитие на науката включва възможност за финансиране и на образователни проекти. Днес науката има какво да предложи за осъвременяване на образованието не само от гледна точка на добавяне на нови научни факти, които си заслужава да бъдат изучавани, но и от гледна точка на това, как да протича образователния процес. Няма по-ефективен начин за усвояване и дълбоко разбиране на научните факти от това да се повтори в някаква степен процеса на откриване на тези факти. Тъкмо това е същността на Изследователския подход в образованието. От друга страна, за развитието на науката са небходими изследователи, които отрано, още от училищно равнище, са закърмени с изследователски навици. Точно такива навици и критично мислене се развиват чрез Изследователския подход в образованието.

Има и нещо друго. Обемът на научната информация расте лавинообразно. Каквото и да сме учили (дори на университетско ниво) в даден момент се оказва недостатъчно и остаряло. Часовете в клас обаче са ограничени. Ограничено е и учебното съдържание. За да остане човек специалист в областта си и да крачи напред заедно с прогреса, трябва сам да попълва знанията си. Тъкмо способността да учим сами и да поддържааме знанията си на ниво се култивират най-добре чрез Изследователския подход в образованието. По тази причина другите два проекта (InnoMathEd и KeyCoMath) бяха финансирани от Програмата за „Образование през целия живот“ (Lifelong Learning Programme) на Европейската комисия. Радвам се, че България вече прави добри стъпки в разпространението на този подход. Има сериозна група от учители, които преминаха съответното обучение. Квалификационни курсове се организират по линия на МОН, както и по линия на ИМИ-БАН. Изследователският подход присъства осезателно и в програмата на Пролетните конференции на СМБ през последните 6–7 години. Създадена е и материалната основа за използване на този подход. Това е вече споменатия Виртуален училищен кабинет по математика, който съдържа над 1000 аплета, покриващи немалка част от учебното съдържание. Те могат да се използват както в клас, така и в извънкласните занимания. За една година този кабинет има повече от 80 хиляди посещения и повече от 35 хиляди сваляния на отделни аплети. Много се радвам, че вече започнаха да го използват и ученици.

Кой от проектите, по които сте работили считате за най-успешен.

Всички проекти, по които съм работил до сега са били важни за мен и съм доволен от постигнатите чрез тях резултати. Особено интересна и нестандартна беше идеята на проекта KeyCoMath, който завърши в края на миналата година. Той имаше за фокус използването на образованието по математика за култивиране на компетентностите, включени в европейската референтна рамка на ключовите компетентности (Комуникация на роден език; Комуникация на чужди езици; Математическа компетентност и основни компетентности в областта на природните науки и ИТ; Дигитална компетентност; Умение за самостоятелно учене; Социални и граждански компетентности; Усет за инициатива и предприемачество; Усет и подобаващо отношение към културата и към изявяването). Проектът бе ръководен от проф. Фолкер Улм от университета в Байройт, Германия, и бе обявен от Европейската комисия като много успешен (бе включен в категорията “success story”). В тази категория се влиза след строг подбор въз основа на оригиналност на приносите и оценка на потенциалните възможности за въздействие върху образователната среда в Европа.

Като най-успешен от гледна точка на продължителност и резултатност мога да спомена друг проект, в зачеването и развитието на който участвах. Нарича се Център за съвършенство по приложна математика (Center of Excellence for Applied Mathematics). Той бе замислен и започнат през

2002 година в София, докато в ИМИ беше на специализация проф. Херман Рендер от Германия. Проектът бе финансиран от немската служба за академичен обмен, по-добре известна под името DAAD. Проектът обхващаше почти всички страни от Югоизточна Европа, които тогава не бяха членки на Европейския съюз. Ежегодно се провеждаха редица интензивни курсове, в които участваха млади хора от тези страни. Темите на курсовете отразяваха съвременните постижения на математиката. Лекторите бяха световно известни специалисти в съответната област. Обръщахме внимание и на образованието. Проведохме два интензивни курса за усвояване на системата ГЕОНЕКСТ, предшественик на ГЕОГЕБРА. Имаше и сериозен финансов ресурс за изпращане на специализанти (студенти, докторанти и млади изследователи) от една страна в друга или от един център в страната – в друг научен център. Проектът беше замислен като тригодишен, но се разви толкова успешно, че DAAD продължава финансирането му „година за година“ и до днес. Аз бях координатор за България по този проект до 2007 година, след това координирането бе поето от доц. Андрей Андреев от ИМИ–БАН.

Акад. Кендеров, известни са дългогодишните усилия, които полагате за развитие на математическите състезания в България. Ваша е инициативата за създаване на Екипа за извънкласна работа по математика. Разкажете за началото на неговата дейности какво е постигнато през годините.

През 1976 г. бях назначен за ръководител на българския отбор за осемнадесетата Международната олимпиада по математика (МОМ). Към този момент редица от елементите на българската среда за откриване и развитие на математическите таланти вече съществуваха. Формите за подготовка на участници в математическите състезания – школи, кръжоци и др. – набираха сили. Силно се открояваха центровете в Русе, Ямбол, Пловдив, Казанлък, Бургас, Варна, София, Хасково и други. В тях действаха ентусиазирани учители, чиито имена се помнят и до днес. Те мотивираха голям брой ученици за сериозна работа по математика и състезанията в страната привличаха все повече участници. Формите за изява – състезания, олимпиади и др. – макар и не твърде многобройни от днешна гледна точка, също вече имаха облик. Без това да влиза в професионалните им задължения, в провеждането на състезанията участваха известни математици като Алипи Матеев, Иван Проданов, Кирил Дочев, Веселин Петков, Владимир Чуканов, Любомир Давидов, Иван Тонов, Йордан Табов и други. В МОМ България се нареждаше под средното равнище и беше далеч от лидерите – СССР, Унгария, ГДР и Румъния, в които нивото на подготовка беше доста по-високо от научна гледна точка. Известно е, че най-добрият инструмент за издигането на равнището на която и да е дейност в едно общество е науката. По тази причина през 1976 г. по мое предложение и със заповед на акад. Любомир Илиев, директор на Единния център по математика и механика, който тогава обединяваше Факултета по математика на Софийския университет и Института по математика на БАН, бе назначен **„Екип за извънкласна работа по математика със средношколците в НРБ“**. Първата задача на Екипа беше да осигури високо научно равнище на всички дейности в тази област – подготовката на учителите, издаването на помощни материали за извънкласните форми на работа, изнасянето на лекции в страната, съставянето на оригинални задачи за състезанията, журирането на самите състезания и много други неща от организационен и логистичен характер. Втората цел на екипа беше да се разшири значително обхвата на извънкласните дейности (в смисъл на участие на повече ученици), както и да се разнообрази и обогати „асортимента” от форми за изява. Екипът се състоеше предимно от млади хора, които като ученици са участвали в извънкласните дейности. По отношение на издигането на научното равнище Екипът действаше като научен семинар. Годишно се правеха 10–15 сбирки, на които се обсъждаха състезателни задачи и стоящите зад тях математически идеи. За относително кратък период от време членовете на екипа постигнаха високо професионално равнище в тази област. Световните новости бързо бяха усвоявани и пренасяни в България. Подобри се и участието ни в МОМ. Нареждането сред първите 6–10 отбора вече не беше изненада. Появиха се много нови състезания и иницативи на местно и национално ниво. Значително се разшири и укрепи основата на пирамидата от дейности. В различните извънкласни дейности се включваха стотици хиляди ученици. Екипът действаше въз основа на годишен план и съставът му се актуализираше периодически, съгласно активността на участниците и предстоящите задачи. При поредното попълване на екипа през 1984 година той вече се състоеше от 30 души, като сред тях бе обособена подгрупа от 10 души, занимаващи се с извънкласните дейности по информатика и математическа лингвистика, които също вече бяха на много добро равнище. Това позволи през 1987 година в България да се проведе първото, доколкото ми е известно, международно състезание по информатика за ученици. То беше съпътстващо мероприятие на конференцията „Децата в информационния век“. Следващата година имаше подобно международно състезание за ученици от техникумите. Натрупаният опит и самочувствие в екипа ни дадоха основание да гледаме и към по-висока цел. По инициатива на акад. Благовест Сендов България излезе с предложение пред „ЮНЕСКО“ за организация в България на първата Международна олимпиада по информатика за ученици. Това стана през 1989 г. в Правец.

Разбира се, тези успехи се дължаха не само на работата на Екипа. Имаше и редица други фактори. Държавата в лицето на Министерството на просветата и Станциите на младите техници по места активно подкрепяше извънкласните дейности и споделяше схващането, че тези дейности имат положително въздействие върху образованието като цяло. Математическите гимназии се утвърдиха като средища за такъв род дейности. От изключително значение беше и това, че Съюзът на математиците в България (СМБ) прие тези дейности като съществена и важна част от своя организационен живот. Движението за Техническо и научно творчество на младежта (известно като ТНТМ) в областта на математиката и информатиката също изигра сериозна роля. Ученическата секция стана постоянна част от Пролетната конференция на СМБ. Към дейността на Екипа бяха приобщени и колеги от други вузове и организации в страната. Като илюстрация за това колко полезно може да е сътрудничеството между държавните структури и обществените организации ще спомена една любопитна история. По онова време в България действаше известното Дружество за разпространение на научни знания „Георги Кирков“. То имаше представителства („Окръжни съвети“) във всички окръжни центрове. Републиканският съвет на дружеството се финансираше от държавата и можеше да командирова за своя сметка лектори в цялата страна, стига лекциите да са заявени и организирани от Окръжните съвети на дружеството. Изготвих списък от над 200 лекции, подходящи за извънкласни дейности и го представих в Републиканския съвет на дружеството. Лекциите бяха предложени от общо 43 колеги, които бяха готови да ги изнасят из страната, ако бъдат командировани. Реакцията на служителя в дружеството беше скептична „Имаме много такива списъци, но няма интерес за изнасяне на лекции, особено по математика“. Успях да го убедя да приеме списъците. По същото време (октомври 1982 г.) в качеството си на заместник-председател на СМБ изпратих същия списък на секциите на СМБ в страната с молба да подберат интересните за тях лекции и лектори и да организират поканването чрез съответните окръжни съвети на дружеството. Това се оказа много удачна идея. Още при следващото отчетно събрание на Дружество „Георги Кирков“ през 1983 г. се оказа, че изнесените лекции по математика са над 1000 и са повече от всички други взети заедно. Това продължи да е така и в следващите няколко години (до 1989 г.). По груби сметки дружеството „Георги Кирков“ всяка година „инвестираше“ в развитието на извънкласните дейности по математика и информатика между 20 и 25 хиляди лева. По онова време това бяха значителни средства, които също допринасяха за издигането на равнището на извънкласните дейности в страната.

Дейността на екипа имаше още едно последствие. Извънкласната дейност получи признанието на математическата колегия и започна да се въз-приема като важна за развитието на науката част от служебните задължения на учените. Високият професионализъм в извънкласните дейности започна да се взема предвид при служебното израстване. Многозначителен е и фактът, че всички председатели на СМБ след акад. Л. Илиев (Любомир Давидов, Иван Тонов, Чавдар Лозанов, Стефан Додунеков и моя милост) навлязоха в живота на СМБ чрез участието си в Екипа.

През годините от 1998 до 2013 бяхте президент на Международната фондация „Св. Св. Кирил и Методий“, а от 2014 г. сте почетен президент. Разкажете за дейността си през този период.

Фондацията бе създадена през 1982 година с цел подкрепяне на талантливите българи. Първоначално носеше името „Людмила Живкова“ и работеше по програми, ориентирани предимно към подкрепата на талант в областта на изкуството и културата. В средата на 80-те години беше осъзнато, че следва да се подкрепя и талантът в областта на науката и бях поканен да участвам при подбора на ученици, които ще продължат образованието си в Колежите на обединения свят. След политическите промени през 1989 г. фондацията бе преименувана на Международна фондация „Св. Св. Кирил и Методий“, но запази характера и мисията си. Като вице-президент на фондацията през периода 1992 – 1998 г. участвах в разработването и усъвършенстването на процедурите за подбор на кандидатите с цел постигане на прецизност и обективност. През този период президент на фондацията беше проф. Петер Фишер Апелт, бивш дългогодишен президент на Университета в Хамбург. Той наложи стил и метод на работа, който консолидира екипа на фондацията и бързо спечели доверието на редица чуждестранни партньори, които и до днес разчитат на фондацията при реализацията на програмите си в България. Сред програмите, които имат отношение към науката и образованието и в създаването на които съм участвал пряко, ще спомена само две. Едната е ежегодното избиране и награждаване, включително и с парична награда, на учители с най-голям принос в откриването и развитието на талантите на учениците. Реализацията на тази програма започна през 1994 г. като съвместно начинание на СМБ и Фондацията и се отнасяше само за учители по математиката и информатиката. Скоро след това по същия модел, като съвместна програма на фондацията и съответния съюз, в нея се включиха и другите науки – физика, химия, биология. По идея на акад. Георги Близнаков награда започна да се присъжда и за създаване на стимулираща учебна среда (кабинети по физика, химия, биология). Кръгът на приятелите на фондацията в Германия, който ежегодно следи работата ѝ, хареса тази програма и предостави средства тя да се разшири и в посока на хуманитарната сфера и усвояването на чужди езици. Програмата съществува и до днес.

Втората програма, която искам да спомена, е Ученическият институт по математика и информатика (УчИМИ). Той бе създаден през 2000 г. като една от инициативите за отбелязване на „Годината на математиката“. Целта беше да се възстановят, обновят и разширят положителните страни на движението ТНТМ, което преди 1989 г. даваше възможност за изява на учениците със склонност към изследователска дейност. Основатели на УчИМИ бяха фондация „Еврика“, Международна фондация „Св.Св. Кирил и Методий“, СМБ и Институтът по математика и информатика на БАН. По-късно към основателите се присъедини и Американската фондация за България, а в последните 6 години основен спонсор е фондация „Америка за България“. Основните инструменти за постигане на целите на УчИМИ са три: а) Ученическата конференция през януари, която възроди идеите на ТНТМ; б) Традиционната ученическа секция по време на Пролетната конференция на СМБ и в) 20-дневна Лятна изследователска школа (ЛИШ), идеята и моделът за която са взети от аналогична шестседмична американска програма, провеждана в Масачузетския технологичен институт. В УчИМИ учениците работят върху свои проекти под ръководството на учител или друг специалист. Разработките се изпращат на специалистите в ИМИ-БАН, които изготвят писмена рецензия с критични бележки и препоръки. Учениците вземат предвид тези бележки в по-нататъшната работа или дават отговор при докладването на съответния форум. УчИМИ съществува вече 16 години и издръжката му (напоследък – около 100 хиляди лева годишно) се покрива изцяло от спонсори. Покрай него се оформи висококвалифициран екип, който 15 години работеше под ръководстввото на член-кореспондент Олег Мушкаров. Сега за директор на УчИМИ е назначен доц. Емил Колев. Чрез УчИМИ успешно развиха изследователските си способности повече от 1200 ученика. „УчИМИ-ците“, както наричаме участниците в Ученическия институт представят достойно България на различни престижни форуми в Америка и Европа. Радостно е, че в работата на УчИМИ взеха да се включват като ръководители на проекти и като лектори в Лятната изследователска школа бивши участници в УчИМИ, които сега са студенти в престижни университети в САЩ и Европа. Акад. Стефан Додунеков, който беше директор на ИМИ и Председател на СМБ, когато се създаде УчИМИ, често споделяше (цитирам по памет) „Само УчИМИ да бяхме направили, щеше да е достатъчно да се гордеем, че сме свършили нещо добро“. От 2014 година в БАН също се организира Ученически институт, под формата на еднократна ученическа научна сесия, в която се изнасят доклади от всички области на науката.

Акад. Кендеров, сега сте председател на СМБ. Какво прави СМБ за талантливите ученици по математика и информатика, както и за учителите, които работят с тях?

Ако погледнете годишен отчет за дейността на СМБ, който обикновено има обем около 40 страници, ще видите, че почти две трети от него описват тъкмо дейности, насочени към откриване и развитие на таланта на младите българи. В тези дейности участват всички секции на съюза и е обхваната цялата страна. Непрекъснато се появяват и нови инициативи. В съответствие с духа на времето от две години ИМИ-БАН съвместно със СМБ провежда състезание от нов тип. То се нарича „ВИВА Математика с компютър“ и се провежда „онлайн“. Спонсорира се от Виваком и е безплатно за участниците. Провежда се през Април и през Декември. Най-добре представилите се ученици се канят на втори кръг, който се провежда през септември или октомври. За да се улесни подготовката за това състезание, ежемесечно се публикува „Тема на месеца“, състояща се от пет обединени от обща тема задачи. Целта на тези инициативи е да се популяризира решаването на задачи (включително и на такива, които възникват от практиката) с помощта на компютър. Повече информация може да се почерпи на сайта `vivacognita.org`.

Акад. Кендеров, нека сменим темата. Напоследък сте обект на нападки във връзка с принадлежност към органите на Държавна сигурност. Какво мислите по този въпрос?

Не бягам от този въпрос, но считам, че обсъждането му не следва да става на страниците на списание „Математика“, което е посветено на по-високи цели. При последните избори за академици и член-кореспонденти в БАН не се поддадох на едно изнудване и сега заплахите, отправени тогава към мен, се изпълняват. Ще го понеса. Уверен съм, че използването на лъжи и клевети няма бъдеще.

7. ФЕСТИВАЛ НА МЛАДИТЕ МАТЕМАТИЦИ

Емил Колев

От 6 до 13 септември в Созопол се проведе 7. Фестивал на младите математици. Участваха 49 отбора, разделени в три възрастови групи: 6.–7. клас (22 отбора), 8.–9. клас (17 отбора) и 10.–12. клас (10 отбора). Във възрастовата група 6.–7. клас участва и отбор от Раменское, Русия.

Математическите боеве се проведоха в 4 кръга и финал.

Победител във възрастовата група 6.–7. клас стана отборът ПЧМГ-1 (Борислав Кирилов, Любослав Стефанов, Александър Иванов, Кристина Михова, Никола Цачев, Петър Генчев), следван от отбора на 125 СОУ 7-1 (Гергана Пеева, Ангел Райчев, Петър Дойнов, Мартин Димитров, Александър Дойчинов, Владимир Слепцов).

Победител във възрастовата група 8.–9. клас стана отборът на СМГ 8-3 (Маргарита Стефанова, Кьонг Виет До, Иван Георгиев, Мартин Стефанов, Никола Стайков, Александър Недков), след като на финала победи отбора на ПМГ Бургас 89-1 (Виктор Балтин, Кристиан Минчев, Петър Чонгов, Веселина Велкова, Николета Николова, Андрей Цочев).

Във възрастовата група 10.–12. клас победи отборът на СМГ 11-1 (Евгени Кайряков, Кирил Бангачев, Мария Павлова, Александър Ангелов, Калоян Алексиев, Габриел Костадинов), а втори остана отборът на СМГ 11-2 (Туан Анх Нгуен, Димитър Любенов, Вилиана Петрова, Ирина Софронова, Васил Йорданов).

Най-много точки по време на боевете извоюваха Елена Вутова (6. клас, ПМГ Добрич), Деница Павлова (9. клас, СМГ) и Атанас Динев (11. клас, ПМГ Бургас) от съответните възрастови групи. В индивидуалното класиране бяха отличени състезателите, спечелили най-много точки от задачи във всяко от четирите тематични направления – алгебра, геометрия, теория на числата и комбинаторика.

Предлагаме ви някои от най-интересните задачи и техните решения.

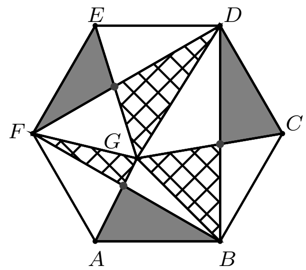
Задача 1. За всяко естествено число $n \geqq 2$ с t_n е означен броят на n-цифрените естествени числа, които са кратни на 4 и се записват с цифри от множеството $\{2, 0, 1, 6\}$. Да се намерят стойностите на n, за които числото t_n е кратно на броя на естествените си делители.

Решение. Първо ще преброим n-цифрените естествени числа, кратни на 4, които се записват с 2, 0 , 1, 6. Двуцифрените числа с това свойство са 12, 16, 20 и 60, т.е. $t_2 = 4$. При трицифрените числа цифрата на стотиците може да се избере по три начина (2, 1 или 6), а за последните две цифри има пет възможности: 00, 12, 16, 20 и 60; следователно $t_3 = 3.5 = 15$. По същия начин, при $n \geqq 4$ първата цифра на числото може да се избере по три начина, следващите $n-3$ цифри са произволни от дадените четири, а за последните две цифри има пет възможности: 00, 12, 16, 20 и 60. Оттук

$$t_n = 3.4^{n-3}.5.$$

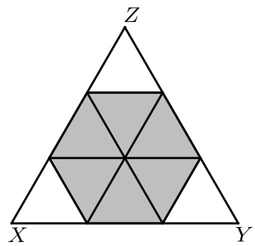
Остава да проверим при кои n числото t_n е кратно на броя на естествените си делители. Числата $t_2 = 4$ и $t_3 = 15$ не изпълняват това условие. При $n \geqq 4$ от представянето $t_n = 2^{2n-6}.3.5$ следва, че броят на делителите на t_n е $4(2n-5)$. Това число е делител на t_n, когато нечетното число $2n-5$ е делител на 15 (освен това $2n-5 \geqq 2.4-5 = 3$). От равенствата $2n-5=3$, $2n-5=5$ и $2n-5=15$ намираме възможните стойности на n: 4, 5 и 10.

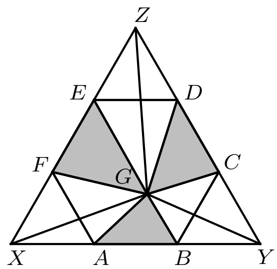
Задача 2. Даден е правилен шестоъгълник $ABCDEF$. Във вътрешността на триъгълника BDF е избрана произволна точка G и е свързана с върховете на шестоъгълника. Да се докаже, че общото лице на сивите триъгълници на чертежа е равно на общото лице на защрихованите триъгълници.



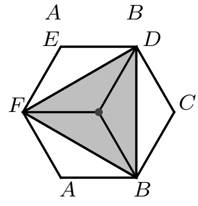
Решение. Първо ще докажем, че общото лице на триъгълниците ABG, CDG и EFG е равно на половината от лицето на шестоъгълника.

Да разгледаме равностранния триъгълник XYZ, който се получава при пресичането на правите AB, CD и EF. Лесно се вижда, че лицето на XYZ е $\dfrac{3}{2}$ от лицето на шестоъгълника. Освен това лицето на равностранния триъгълник XYZ е сбор от лицата на триъгълниците XYG, YZG, ZXG. Като забележим, че лицето на XYG е 3 пъти по-голямо от лицето на ABG, лицето на YZG е 3 пъти по-голямо от лицето на CDG и лицето на ZXG е 3 пъти по-голямо от лицето на EFG, получаваме, че общото лице на триъгълниците ABG, CDG и EFG е равно на третината от лицето на XYZ, т.е. на половината от лицето на шестоъгълника.





От друга страна, лицето на триъгълника BDF също е равно на половината от лицето на шестоъгълника. Това може да се докаже *без думи*, както е показано на чертежа.



Получихме, че общото лице на триъгълниците ABG, CDG и EFG е равно на лицето на триъгълника BDF. Оттук, като се изрежат общите части на двете равнолицеви области, следва твърдението на задачата.

Задача 3. Клетките на таблица $m \times n$ са оцветени в черно и бяло, като са изпълнени свойствата:

• във всеки ред има равен брой черни и бели клетки;

• ако ред и стълб се пресичат в черна клетка, то редът и стълбът съдържат равен брой черни клетки;

• ако ред и стълб се пресичат в бяла клетка, то редът и стълбът съдържат равен брой бели клетки.

Да се намерят всички двойки (m, n), за които такова оцветяване е възможно.

Решение. От първото свойство следва, че $n = 2k$ и във всеки ред има k черни и k бели клетки.

Да разгледаме произволен стълб. Ако в него има само клетки от един вид, от второто или третото свойство следва, че в него има точно k клетки, т.е. $n = 2m$. Ако в стълба има клетки и от двата вида, то в него има k черни и k бели клетки, т.е. $n = m$.

Пример при $n = m$ е шахматното оцветяване, а при $n = 2m$ оцветяваме лявата половина на дъската в единия цвят, а дясната в другия.

Задача 4. Образуваме редица от числа по следния начин – първото число е 0, а всяко следващо е с едно по-голямо от средноаритметичното на предишните. Вярно ли е, че:

а) разликата между 2016-тото и 1008-мото число е по-голяма от $\frac{1}{2}$;

б) поне едно от числата е по-голямо от 2016?

Решение. За $n \geqq 2$ имаме

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} + 1 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} + 1,$$

откъдето $na_{n+1} - (n-1)a_n = a_n + 1$ или $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$. Сега по индукция следва, че $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}$ за всяко $n \geqq 2$.

а) Разглеждаме разликата $a_{2016} - a_{1008} = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1017} + ... + \frac{1}{2015}$. Първите 16 събираеми са по-големи от 17-тото, което е $\frac{1}{2^{10}}$, а останалите (991 на брой) са по-големи от $\frac{1}{2^{11}}$. Следователно разликата е по-голяма от

$$\frac{17}{2^{10}} + \frac{991}{2^{11}} = \frac{1025}{2^{11}} > \frac{1}{2}$$

и отговорът на поставения въпрос е положителен.

б) Понеже дробите със знаменател по-голям от 2^k и по-малък или равен на 2^{k+1} са по-големи (или равни) от $\frac{1}{2^{k+1}}$ и са 2^k на брой (за всяко естествено число k), то всяко такова k дава принос $\frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$. Затова при $n \geqq 2^{4032} + 1$ сумарно по всички k, за които $2^k \leqq n - 1$ (те са поне 4032 на брой) се получава принос, по-голям от 2016. Отговорът е положителен.

Задача 5. а) Да се докаже, че от числата $1, 2, 3, \ldots, 3000$ могат да се изберат 1999 числа така, че частното на всеки две от избраните числа да не е равно на 2.

б) Да се докаже, че както и да се изберат 2000 числа от числата $1, 2, 3, \ldots, 3000$, то частното на някои две от избраните числа е 2.

Решение. а) Измежду дадените числа може да изберем тези от вида $4^n.m$, където n е неотрицателно цяло число и m е нечетно число, т.е.

$$1, 3, 5, \ldots, 2999, \quad 4, 12, \ldots, 2996, \quad 16, 48, \ldots, 2992, \quad \ldots, \quad 1024.$$

Частното на никои две от тези числа не е 2. Освен това, за фиксирано n броят на числата от вида $4^n.(2k-1) \leqq 3000$ е равен на броя на естествените решения на неравенството $k \leqq \frac{3000 + 4^n}{2.4^n}$. Затова избраните числа са общо

$$\frac{3000}{2} + \left[\frac{3000+4}{8}\right] + \left[\frac{3000+16}{32}\right] + \left[\frac{3000+64}{128}\right] + \left[\frac{3000+256}{512}\right] + \left[\frac{3000+1024}{2048}\right],$$

т.е. $1500 + 375 + 94 + 23 + 6 + 1 = 1999$.

б) Всяко число, което няма вида от а), е четно и се дели на нечетна степен на двойката. Следователно, ако такова число се раздели на 2, ще получим число от а). Следователно двойките $(x, 2x)$ за всички x от а) съдържат всички числа $1, 2, 3, \ldots, 3000$. Тези двойки са 1999 на брой и ако имаме 2000 числа, то поне две то тях ще бъдат в една двойка; тогава частното на тези две числа е равно на 2.

Задача 6. В 2016 от клетките на квадратна дъска 1008×1008 е разположена по една пешка. Да се докаже, че някои 4 пешки са върхове на успоредник.

Решение. Нека m е броят на редовете с поне две пешки. Във всеки от останалите $1008 - m$ реда има най-много по една пешка. В тези m реда има поне $2016 - (1008 - m) = 1008 + m$ пешки. За всеки от тези m реда да изберем най-лявата пешка и да запишем разстоянията от тази пешка до другите пешки в нейния ред. Ще получим поне $1008 + m - m = 1008$ различни разстояния. Да забележим, че всяко разстояние е число в интервала $[1, 1007]$. Следователно има две равни разстояния и тези 4 пешки са върхове на успоредник.

ЕДНО ЕЛЕМЕНТАРНО НЕРАВЕНСТВО С ИНТЕРЕСНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Петър Попиванов, ИМИ–БАН, София

През 1845 г. френският математик Ж. Бертран(1822–1900) изказа интересна хипотеза из областта на теория на числата, която можем да формулираме така:

Теорема. *Нека n е естествено число. Тогава съществува просто число p такова, че $n < p \leqq 2n$.*

Горната теорема беше доказана за първи път през 1850 г. от изтъкнатия руски математик П. Чебишев (1821–1894). Сега са известни кратки и сравнително прости доказателство на този резултат (както и негови обобщения), които се базират на биномното неравенство

$$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}, \quad n \geqq 2. \tag{1}$$

По-долу предлагаме две доказателство на (1) – триково (I) и „естествено“ но по-неелементарно (II).

I. Лявата страна на (1) се доказва индуктивно.

Неравенството е вярно при $n = 2$, а прехода $n \to n+1$ следва от тъждеството

$$\binom{2n+2}{2n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} > 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} > \frac{2^{2n+2}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Последното неравенство е еквивалентно на $(2n+1)^2 > 4n(n+1)$. Да отбележим също, че $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Доказателството на дясното неравенство от (1) е по-триково. Означаваме

$$P = \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Очевидно

$$1 > \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} =$$

$$= P^2(2n+1) > 2n.P^2 = 2n\frac{\binom{2n}{n}^2}{2^{4n}}, \quad \text{т.е. } \frac{2^{4n}}{2n} > \binom{2n}{n}^2 \text{ и т.н.}$$

II. От курсовете по Анализ 1 е добре известно формулата на Стирлинг

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \text{ където } 0 < \theta_n < 1. \tag{2}$$

Написваме формулата на Стирлинг за $(2n)!$ с евентуално друго θ_n, а именно $\theta_{2n} \in (0, 1)$ и така стигаме до

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} 2^{2n} e^{\frac{\mu_n}{n}}, \text{ където } \mu_n = \frac{\theta_{2n} - 4\theta_n}{24} \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{24}\right).$$

Тъй като функцията $e^{\frac{1}{x}}$ е строго монотонно намаляваща при $x \geqq 2$, то $e^{\frac{\mu_n}{n}} \leqq e^{\frac{1}{48}}$ и респективно $e^{\frac{\mu_n}{n}} \geqq e^{-\frac{1}{12}}$. Така намираме, че при $n \geqq 2$

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{1}{12}}}{\sqrt{\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{e^{\frac{1}{48}}}{\sqrt{\pi}}.$$

Остава ни само да отбележим, че $e^{\frac{1}{48}} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $2 > \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{12}}$, за да получим (1).

ВИСОЧИНАТА ОТ ДРУГА ГЛЕДНА ТОЧКА

Емил Карлов

Ще разгледаме височината като множество от точки в равнината, които притежават определено свойство и нито една точка вън от височината не притежава това качество, т.е. ще разгледаме височината, като геометрично място от точки (ГМТ).

Всички знаем, че симетралата, ъглополовящите и медианата в триъгълника са части от различни геометрични места от точки в равнината. Както вече стана дума, за да покажем, че дадено множество от точки е ГМТ трябва да докажем твърдение в две посоки.

1. Точките от даденото множество притежават свойството.
2. Няма точка вън от даденото множество, която да притежава това свойство.

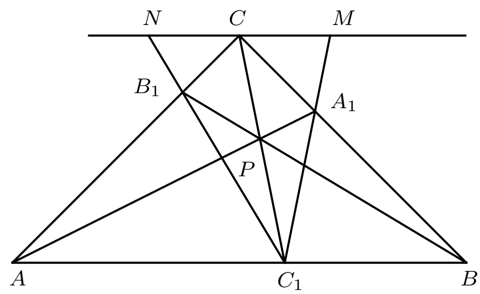
За тази цел е нужно да знаем просто и красиво решение в една от двете посоки, което да можеш да „обърнем“ и да получим решение и в другата посока. Точно това красиво и просто решение до скоро аз не знаех.

Една позната задача.

Задача 1. На страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ са така избрани точки A_1, B_1 и C_1, че отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка (чевиани). През върха C построяваме права c, успоредна на страната AB. Пресечната точка на правите C_1A_1 и c означаваме с M, а пресечната точка на правите C_1B_1 и правата c – с N. Да се докаже, че отсечките CM и CN са равни.

Решение. Нека $P = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$. От подобията на триъгълниците $AC_1B_1 \sim CNB_1$ и $C_1BA_1 \sim MCA_1$ следват равенствата

$$\frac{CM}{C_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} \quad \text{и} \quad \frac{CN}{AC_1} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$



Разделяме второто равенство на първото и като използваме теоремата на Чева, получаваме

$$\frac{CM}{CN} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

т.е. $CM = CN$.

Невероятното в тази задача е, че както и да изберем трите чевиани AA_1, BB_1 и CC_1, отсечката C_1C е медиана в $\triangle MNC_1$.

Всеки ученик от девети клас е срещал задачата, че височините на даден триъгълник са ъглополовящи за педалния триъгълник (т.е. в триъгълника с върхове петите на височините на дадения триъгълник).

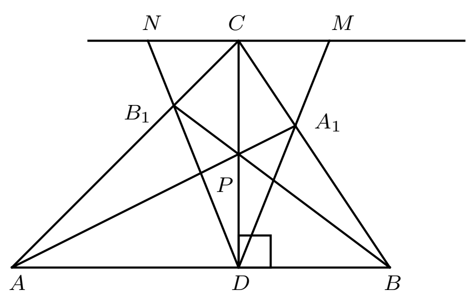
Задача 2. За $\triangle ABC$ са построени трите му височини AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че за $\triangle A_1B_1C_1$ отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи.

Упътване. Опишете окръжности около четириъгълниците ABB_1A_1 и BCC_1B_1.

Неочакваното тук е, че това свойство на височината да се „превръща“ в ъглополовяща е вярно за всяка точка от височината.

Задача 3. Избираме произволна точка P от височината CD на остроъгълния $\triangle ABC$. Продължаваме отсечките AP и BP докато пресекат срещуположните страни BC и CA съответно в точки A_1 и B_1. Да се докаже, че $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$.

Решение. През върха C на $\triangle ABC$ построяваме права c, успоредна на страната AB и продължаваме DA_1 и DB_1 до пресичането им с правата c съответно в точки M и N.



От задача 1. знаем, че $CM = CN$, т.е. в $\triangle DMN$ отсечката DC е медиана, но поради това, че $CD \perp AB$ и $c||AB$ следва, че отсечката $DC \perp c$, т.е. DC е и височина в същия $\triangle DMN$ и този триъгълник е равнобедрен. Следователно DC е и ъглополовяща в $\triangle DMN$ или $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$.

Забележка. Тази задача през 1972 година под номер М141 е предложена от Егор Салинен за конкурсна задача в руското списание „Квант“, а в брой 1 от 1973 година е решена с помощта на координати на точка и уравнение на права.

Задачи за упражнение

Упражнение 1. Решете задача 3), когато $\triangle ABC$ е тъпоъгълен с тъп ъгъл при върха A.

Упражнение 2. Избираме произволна точка P от продължението на височината CD, така че върхът C да е точка от отсечката PD. Продълженията на страните BC и CA пресичат отсечките AP и BP съответно в точки A_1 и B_1. Да се докаже, че $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$.

Упражнение 3. Избираме произволна точка P от продължението на височината CD, така че D да е точка от отсечката CP. Продълженията на страните BC и CA пресичат правите AP и BP съответно в точки A_1 и B_1. Да се докаже, че височината CD сключва равни ъгли с правите DA_1 и DB_1.

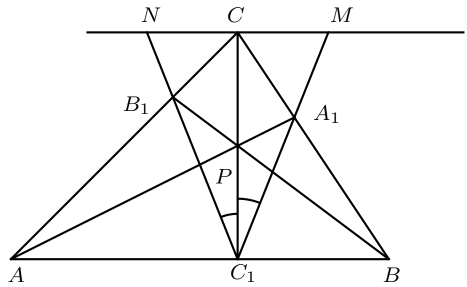
Всеки, който опита и реши задачите от упражненията, ще е доказал в пълнота, че точките от правата CD, определена от височината CD, имат следното свойство.

***Свойство* S**. За всяка точка P от правата CD, определена от височината CD на $\triangle ABC$ е вярно, че ако правите AP и BP пресичат правите BC и CA съответно в точки A_1 и B_1, то правите DA_1 и DB_1 сключват равни ъгли с правата CD.

Нека разгледаме и обратното твърдение.

Задача 4. Ако точката D е произволна точка от страната AB на остроъгълния $\triangle ABC$ и върху отсечката CD може да се намери точка P, за която правите AP и BP пресичат страните BC и CA на триъгълника съответно в точки A_1 и B_1 и $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$, да се докаже, че отсечката CD е височина в $\triangle ABC$.

Решение. През върха C на $\triangle ABC$ построяваме права c, успоредна на страната AB и продължаваме DA_1 и DB_1 до пресичането им с правата c съответно в точки M и N.



От задача 1. знаем, че $CM = CN$, т.е. в $\triangle DMN$ отсечката DC е медиана. По условие $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$, т.е. DC е и ъглополовяща в $\triangle DMN$. Следователно отсечката DC е и височина в същия $\triangle DMN$, т.е. $CD \perp c$, но $c||AB$, следователно $CD \perp AB$.

Задачи за упражнение

Упражнение 4. Ако точката D е произволна точка от страната AB на $\triangle ABC$ и ако върху отсечката CD може да се намери точка P, за която правите AP и BP пресичат страните *или продълженията на страните* BC и CA на триъгълника съответно в точки A_1 и B_1 и $\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle B_1DC$, да се докаже, че отсечката CD е височина в $\triangle ABC$.

Упражнение 5. Ако точката D е произволна точка от страната AB на $\triangle ABC$ и ако върху правата CD може да се намери точка P, за която правите AP и BP пресичат страните или продълженията на страните BC и CA на триъгълника съответно в точки A_1 и B_1 и правите DA_1 и DB_1 *сключват равни ъгли* с правата CD, да се докаже, че отсечката CD е височина в $\triangle ABC$.

Упражнение 6. Нека отсечката CD е височината към страната AB на $\triangle ABC$, а точката M да е средата на същата страна. Да се докаже, че ГМТ на точките X, за които

$$|XA^2 - XB^2| = 2.AB.MD,$$

е правата CD.

За всички, които са решили задачите за упражнение, е ясно, че освен точките от правата, определена от височината на триъгълника, няма други точки със свойството **S**, т.е. точките от височината на триъгълника са част от ГМТ, които притежават свойството **S**.

САНГАКУ В ПРАВОЪГЪЛНИК

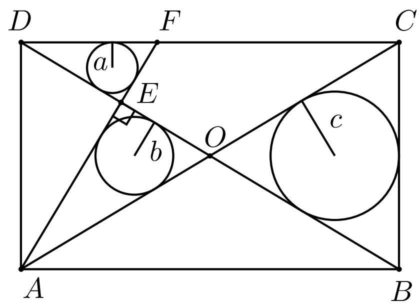
Борислав Мирчев

На вниманието на читателите на списание *Математика* предлагам серия геометрични задачи в стил Сангаку. Твърденията свързват радиуси на вписани окръжности и за доказателствата им са достатъчни знания за подобни триъгълници и Питагорова теорема.

Първата задача е предложена от Kadir Altintas, учител в Емирдаг (Турция) и беше публикувана през юни 2016 г. в групата Peru Geometrico[1].

Задача 1. Даден е правоъгълникът $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O. Точката $E \in BD$ е такава, че $AE \perp BD$ и $F = AE \cap CD$. Ако a, b и c са радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците DEF, AOE и BCO съответно, то

$$a + b = c.$$



Решение. Радиусите на вписаните окръжности в правоъгълните триъгълници DEF и AOE са съответно

$$a = \frac{1}{2}(EF + DE - DF) \text{ и } b = \frac{1}{2}(AE + EO - AO)$$

и оттук техният сбор е

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{(EF + AE) + (DE + EO) - DF - AO}{2} \\ &= \frac{AF + DO - AO - DF}{2} = \frac{AF - DF}{2}. \end{aligned}$$

От равенството $\sphericalangle DAF = \sphericalangle DCA$ следва подобието на правоъгълните триъгълници ADF и CDA, откъдето

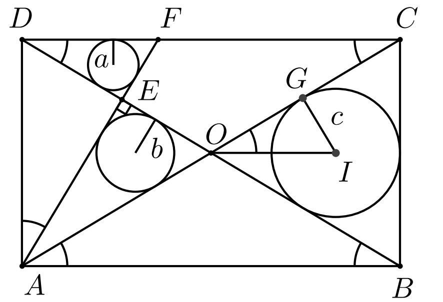
$$\frac{AD}{DC} = \frac{DF}{AD} = \frac{AF}{AC} \Longrightarrow DF = \frac{AD^2}{DC} \text{ и } AF = \frac{AC.AD}{DC}.$$

[1] www.facebook.com/groups/perugeometrico1/

Тогава

$$(1) \qquad a+b=\frac{AF-DF}{2}=\frac{AD}{2DC}(AC-AD).$$

Нека вписаната в триъгълника BOC окръжност има център I и се допира до AC в точката G. Тъй като $\sphericalangle IOG=\sphericalangle ACD$, то правоъгълните триъгълници GOI и ADC са подобни.



Оттук $c=\dfrac{AD}{DC}\cdot GO$. Тъй като $GO=\dfrac{BO+CO-BC}{2}=\dfrac{AC-AD}{2}$, то

$$(2) \qquad c=\frac{AD}{2DC}(AC-AD).$$

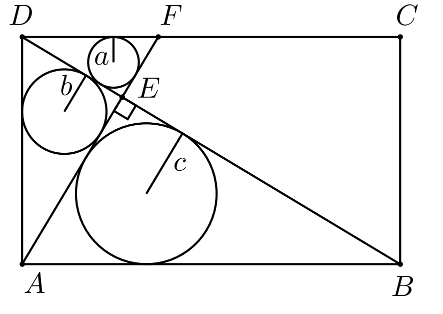
От (1) и (2) следва твърдението на задачата.

Друго решение на задачата може да се види в колекцията *Mathematics Instant for the High School* на румънския учител Virgil Nicula, публикувана в интернет на адрес `www.artofproblemsolving.com/community/c1090`.

В конфигурацията на задача 1. могат да се забележат и други интересни зависимости. Някои от тях са представени в следващите задачи.

Задача 2. Даден е правоъгълникът $ABCD$. Точката $E\in BD$ е такава, че $AE\perp BD$ и $F=AE\cap CD$. Ако a, b и c са радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците DEF, ADE и ABE съответно, то

$$b^2=ac.$$

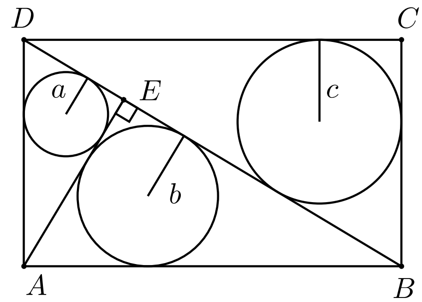


Решение. Достатъчно е да забележим подобията на триъгълниците DEF, ADE и ABE.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AED \sim \triangle DEF \Longrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{AE}{DE} \\ \triangle ABE \sim \triangle DAE \Longrightarrow \dfrac{c}{b} = \dfrac{AE}{DE}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}, \text{ т.е. } b^2 = ac.$$

Задача 3. Даден е правоъгълникът $ABCD$. Точката $E \in BD$ е такава, че $AE \perp BD$. Ако a, b и c са радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците ADE, ABE и BCD съответно, то

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



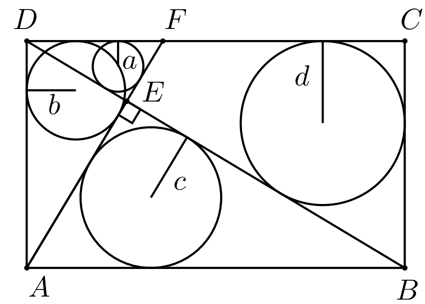
Решение. От подобието на триъгълниците ADE, ABE и BCD следва отношението

$$a : b : c = AD : AB : BD.$$

Оттук и от Питагоровата теорема за $\triangle ABD$ следва желаното равенство.

Задача 4. Даден е правоъгълникът $ABCD$. Точката $E \in BD$ е такава, че $AE \perp BD$ и $F = AE \cap CD$. Ако a, b, c и d са радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците DEF, ADF, ABE и BCD съответно, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 1.$$



Решение. От подобията на триъгълниците $DEF \sim ADF$ и $ABE \sim BCD$ следват равенствата

$$\frac{a}{b} = \frac{DE}{DA} \text{ и } \frac{c}{d} = \frac{AE}{CB}$$

От тях и Питагоровата теорема за $\triangle ADE$ следва желаното равенство.

КОНКУРС ЗА МАЛКИТЕ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

Невена Събева, Емил Колев

На 11 юни 2016 в Института по математика и информатика на БАН се проведе финалният (очен) кръг на конкурса на списание „Математика“ за малките. За участие в състезанието бяха поканени 33 ученици от 5, 6 и 7 клас, които се бяха представили най-добре в задочния етап на конкурса.

До очния кръг бяха допуснати следните ученици:

5 клас: Никола Генадиев Емилов (МГ, Видин), Георги Станимиров Тончев (МГ, Плевен), Стефани Лазарова Първина (125 СОУ, София), Мирослава Мирославова Мирчева (МГ, Казанлък), Евгени Евгениев Кирилов (125 СОУ, София), Александър Руменов Александров (МГ, Казанлък), Виктор Герасимов (125 СОУ, София), Маргулан Исмолдаев (МГ, Варна), Виктория Маринова Маринова (МГ, Казанлък);

6 клас: Георги Цветелинов Игнатов (МГ, Враца), Здравко Иванов Захариев (МГ, Казанлък), Калина Ивайлова Лалкова (МГ, Враца), Александър Пламенов Проданов (МГ, Казанлък), Мартин Даниел Копчев (ПМГ, Габрово), Гергана Ивова Николаева (МГ, Враца), Мира Георгиева Емилова (МГ, Враца), Ангел Иванов Райчев (125 СОУ, София), Гергана Георгиева Пеева (125 СОУ, София), Мартин Димитров Димитров (125 СОУ, София), Катрин Евгениева (125 СОУ, София), Димитър Росенов Русев (125 СОУ, София), Валери Чавдаров Ванков (СМГ);

7 клас: Стилиян Цветанов Иванов (МГ, Казанлък), Ферит Тамеров Исмаилов (ПМГ, Шумен), Йоан Найденов Найденов (МГ, Враца), Кристиян Каменов Чолаков (МГ, Кърджали), Иван Яворов Смиленов (ПМГ, Шумен), Лазар Стефанов Славчев (МГ, Казанлък), Даниел Цветанов Дамянов (ПМГ, Монтана), Иван Венцеславов Георгиев (СМГ), Калоян Юлиянов Цветков (МГ, Стара Загора), Александър Стоянов Недков (СМГ), Лиляна Недкова Петрова (МГ, Казанлък).

Журито в състав проф. Петър Бойваленков, доц. Емил Колев и Невена Събева присъди следните награди за най-добро представяне на очния кръг.

За *пети клас* – първо място за **Георги Станимиров Тончев**, второ място за **Мирослава Мирославова Мирчева**, трето място за **Никола Генадиев Емилов** и **Виктория Маринова Маринова**.

За *шести клас* – специална награда за **Александър Пламенов Проданов**, първо място за **Мартин Димитров Димитров**, **Ангел Иванов Райчев** и **Валери Чавдаров Ванков**, второ място за **Гергана Георгиева Пеева**, трето място за **Димитър Росенов Русев**.

За *седми клас* – първо място за **Даниел Цветанов Дамянов**, второ място за **Кристиян Каменов Чолаков**, трето място за **Калоян Юлиянов Цветков**.

Ето условията и кратки решения на задачите.

Задача 5.1. Иво наредил в редица $N+1$ колички. След това между всеки две съседни колички поставил по още две колички. Получената редица допълнил още веднъж, като между всеки две съседни колички поставил по три нови колички. Накрая се оказало, че една седма от количките в редицата са червени. Най-малко колко е N?

Решение. При първото попълване на редицата Иво е добавил $2N$ колички и те са станали общо $3N+1$.

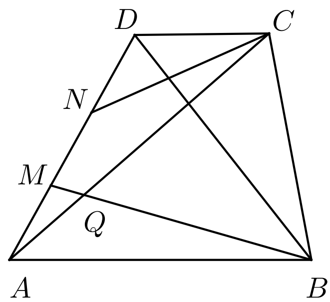
При второто попълване Иво е добавил $3.3N = 9N$ колички и те са станали общо $12N+1$.

Броят на количките $12N+1$ се дели на 7. Най-малкото N с това свойство е $N=4$.

Задача 5.2. Даден е трапецът $ABCD$ с основи AB и CD. Точките M и N разделят бедрото AD на три равни отсечки $AM = MN = ND$.

а) Ако лицето на четириъгълника $MBCN$ е равно на 60 кв.см, да се намери лицето на трапеца $ABCD$.

б) Ако $AB = 2\cdot CD$ а Q е пресечната точка на AC и BM, да се докаже, че лицето на триъгълника ABQ е равно на лицето на $MQCN$.



Решение. Имаме $S_{ABM} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ABD}$ и

$$S_{CDN} = \frac{1}{3}\cdot S_{ACD} = \frac{1}{3}\cdot S_{BCD}.$$

Като съберем горните равенства, получаваме

$$S_{ABM} + S_{CDN} = \frac{1}{3}(S_{ABD} + S_{BCD}) = \frac{1}{3}\cdot S_{ABCD},$$

откъдето следва, че $S_{MBCN} = \dfrac{2}{3}\cdot S_{ABCD}$.

а) Намираме $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}\cdot S_{MBCN} = \dfrac{3}{2}\cdot 60 = 90.$

б) От $AB = 2\cdot CD$ следва, че $S_{ABC} = 2\cdot S_{ADC}$, т.е. $S_{ABC} = \dfrac{2}{3}\cdot S_{ABCD}$. Това означава, че

$$S_{ABC} = S_{MBCN}$$

и като извадим от двете страни на равенството лицето на общата част BCQ, получаваме, че $S_{ABQ} = S_{MQCN}$.

Задача 5.3. Десетцифрено число се нарича *хубаво*, ако се записва само с 0, 1 и 2 и всеки две съседни цифри се различават с 1.

а) Да се намери броят на хубавите числа;

б) Да се докаже, че сборът на всички хубави числа се дели на 7.

Решение. а) Всяко хубаво число може да се запише като $\overline{1a1b1c1d1e}$ или като $\overline{21a1b1c1d1}$, където всяко от числата a, b, c, d, e може да бъде 0 или 2. Числата и първия вид са $2^5 = 32$, а от втория са $2^4 = 16$; всички хубави числа са 48.

б) Можем да разделим хубавите числа на 16 тройки от вида

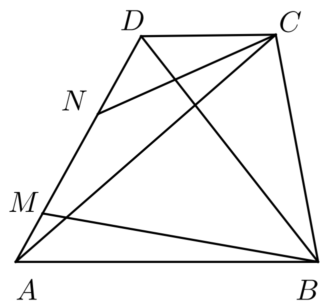
$$\overline{1a1b1c1d10},\ \overline{1a1b1c1d12},\ \overline{21a1b1c1d1}.$$

Сборът на числата във всяка тройка е равен на

$$4121212123 + 21.10^7.a + 21.10^5.b + 21.10^3.c + 21.10.d$$

и се дели на 7. Следователно сборът на всички хубави числа се дели на 7.

Задача 6.1. Даден е трапецът $ABCD$ с основи AB и CD, за които $AB : CD = 7 : 3$. Точките M и N на бедрото AD са такива, че $DN = \frac{1}{3}AD$ и $AM = \frac{1}{7}AD$. Колко процента от лицето на $ABCD$ е лицето на $BMNC$?



Решение. От $AB : CD = 7 : 3$ следва, че $S_{ABC} : S_{ADC} = 7 : 3$, т.е.

$$S_{ABC} = \frac{7}{10} \cdot S_{ABCD} \text{ и}$$

$$S_{ADC} = \frac{3}{10} \cdot S_{ABCD}.$$

Имаме

$$S_{ABM} = \frac{1}{7} \cdot S_{ABD} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{10} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{10} \cdot S_{ABCD}$$

и

$$S_{CDN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{10} \cdot S_{ABCD}.$$

Като съберем горните равенства, получаваме $S_{ABM} + S_{CDN} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$, откъдето следва, че $S_{MBCN} = 80\% S_{ABCD}$.

Задача 6.2. Компания се разположила за тържество на три маси в сладкарницата. По време на тържеството Ани се преместила от първата на втората маса, Боян минал от втората на третата маса, а Виктор – от третата на първата маса. След преместването им средната възраст на първата маса се увеличила с една година, средната възраст на втората маса се увеличила с 2 години, а средната възраст на третата маса се намалила с 4 години. Ако на първите две маси са седнали по 8 човека, колко човека седят на третата маса?

Решение. На първата маса има 8 човека и след преместването средната възраст се е увеличила с една година, следователно общата възраст на първата маса се е увеличила с 8 години.

По същия начин получаваме, че след преместването общата възраст на втората маса се е увеличила с 16 години.

Тъй като общата възраст на компанията не се е променила, значи общата възраст на третата маса се е намалила с $8+16=24$ години. И тъй като средната възраст се е намалила с 4 години, значи на третата маса седят $24:4=6$ човека.

Задача 6.3. Едно естествено число се нарича *хубаво*, ако сборът на нечетните му естествени делители е нечетно число.

а) Хубаво число ли е 2016?

б) Да се намерят всички цифри x, за които числото $\overline{2x16}$ е хубаво.

Решение. а) Тъй като $2016 = 2^5.3^2.7$, нечетните му делители са делителите на $3^2.7$. Броят на тези делители е $3.2 = 6$, т.е. те са четен брой и следователно сборът им е четен. Получихме, че 2016 не е хубаво число.

б) За да бъде едно число хубаво, то трябва да има нечетен брой нечетни делители. Ако запишем числото A във вида $A = 2^k.n$, където n е нечетно число, то нечетните делители на A са нечетните делители на n. Те са нечетен брой, когато n е точен квадрат. Следователно едно число е хубаво, когато може да се запише във вида $2^k.m^2$, където m е нечетно число.

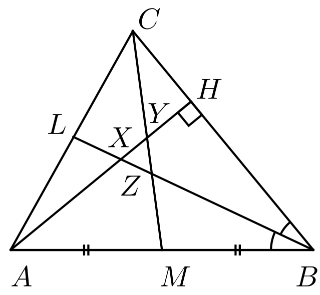
За всяка възможност за цифрата x разлагаме на множители числото $\overline{2x16}$ и проверяваме дали то е от посочения вид. Оказва се, че само $2116 = 2^2.23^2$ и $2916 = 2^2.3^6$ са хубави числа. Търсените стойности на x са 1 и 9.

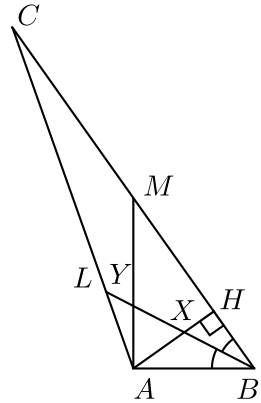
Задача 7.1. а) В триъгълника ABC са построени височината през върха A, ъглополовящата през B и медианата през C. Трите построени отсечки се пресичат в три различни точки X, Y и Z. Възможно ли е триъгълникът XYZ да е равностранен?

б) В триъгълника ABC височината и медианата през върха A пресичат ъглополовящата през B съответно в точките X и Y. Възможно ли е триъгълникът AXY да е равностранен?

Решение. а) Ще използваме означенията на чертежа. Да допуснем, че триъгълникът XYZ да е равностранен.

От правоъгълния триъгълник BXH намираме $\sphericalangle XBH = 30^\circ$, следователно $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. От правоъгълния $\triangle CYH$ намираме $\sphericalangle YCH = 30^\circ$, следователно триъгълникът BCM е правоъгълен, като $\sphericalangle BMC = 90^\circ$. Това означава, че медианата CM е и височина, т.е. ABC е равнобедрен триъгълник; а тъй като $\sphericalangle B = 60^\circ$, то ABC е равностранен. Но тогава точките X, Y и Z съвпадат; противоречие.





б) Пример може да се конструира, като изберем триъгълника ABM така, че $\sphericalangle ABM = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAM = 90^\circ$, а точката C е такава, че M е среда на BC (вж. чертежа). При тези условия лесно се доказва, че триъгълникът AXY е равностранен.

Задача 7.2. Да се намери естествено число N със следните свойства:
- N има точно два различни прости делителя;
- N има точно 8 делители;
- сборът на делителите на N е 180.

Решение. Нека p и q са простите делители на N. Тъй като N има 8 делители, то N е от вида p^3q. Делителите на N са $p^3q,\ p^2q,\ pq,\ q, p^3,\ p^2,\ p,\ 1$. Сборът им е равен на

$$(p^3q+p^2q+pq+q)+(p^3+p^2+p+1) = (q+1)(p^3+p^2+p+1) = (q+1)(p+1)(p^2+1).$$

Тъй като $180 = 2^2.3^2.5$, получаваме равенството

$$(q+1)(p+1)(p^2+1) = 2^2.3^2.5.$$

Множителите $(p+1)$ и (p^2+1) са с еднаква четност.

Ако и двата са четни, то $(q+1)$ е нечетно число (тъй като 2 участва на втора степен в разлагането на 180). Това означава, че простото число q

е четно, т.е. $q = 2$. Получаваме равенството

$$(p+1)(p^2+1) = 2^2.3.5 = 60.$$

Тъй като при $p \geqq 5$ имаме $(p+1)(p^2+1) \geqq 6.26 > 60$, то нечетното просто число p е по-малко от 5. Но при $p = 3$ равенството не е изпълнено, т.е. в този случай няма решение.

Ако $(p+1)$ и (p^2+1) са нечетни, т.е. $p = 2$, намираме $q = 11$. Тогава $N = 11.2^3 = 88$.

Задача 7.3. В турнир по волейбол участвали n отбора. Всеки два отбора изиграли точно по една среща един срещу друг. След завършване на турнира се оказало, че от произволни четири отбора могат да се изберат три отбора A, B и C така, че A е победил B, B е победил C и C е победил A.

а) Да се докаже, че $n \leqq 7$.

б) Да се докаже, че такъв турнир е възможен при $n = 6$.

(Във волейбола няма равни срещи.)

Решение. а) Да допуснем, че турнир с 8 отбора е възможен. Общо изиграните срещи са $\dfrac{8.7}{2} = 28$. От принципа на Дирихле следва, че съществува отбор, който има поне 4 победи. Нека отбор X е победил отборите Y, Z, T и S. Отборите Y, Z, T и S са изиграли помежду си 6 срещи (което означава, че има 6 победи) и следователно има отбор с поне две победи. Без ограничение нека Y е победил Z и T. Тогава в четворката X, Y, Z и T няма три отбора с исканото в условието свойство.

б) Нека отборите са X, A_1, A_2, B_1, B_2 и B_3.

Търсеният пример се получава, ако X е загубил от A_1, A_2 и е победил B_1, B_2 и B_3; A_2 е победил A_1; B_1 е победил B_2, B_2 е победил B_3 и B_3 е победил B_1; A_1 е победил B_1, A_2 е победил B_2. Всички останали срещи B_i – A_j са завършили с подбеда на B_i.

Директно се проверява, че за този турнир е изпълнено условието на задачата.

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2016 г. и бр. 1, 2 от 2017 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (очен) кръг през юни 2017 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

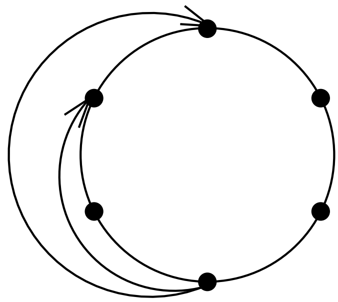
2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на адрес:

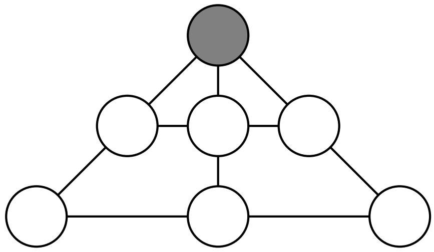
Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН,
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
или на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. В кръг са отбелязани шест точки. Скакалец е кацнал на една от тях и скача по посока на часовниковата стрелка – или през една точка на втората, или през две точки на третата (както е показано на чертежа). Най-малко колко пъти трябва да скочи скакалецът, за да посети всяка точка и да се върне в тази, от която е тръгнал?



Задача 2. В кръгчетата на схемата трябва да се запишат числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, и 7 така, че сборът от трите числа по всяка от петте прави да е един и същ.



а) Кое число трябва да се запише в сивото кръгче?

б) По колко различни начина могат да се запишат дадените числа в кръгчетата така, че да е изпълнено условието на задачата? (Две записвания са различни, ако се различават в поне едно кръгче.)

Задача 3. Във всяко поле на таблица 7×7 е записано различно естествено число от 1 до 49. *Интересно число в таблицата* е такова число, което е най-голямото в своя ред и в същото време е най-малкото в своя стълб на таблицата. Например, числото 28 е *интересно* в показаната таблица.

1	3	6	10	15	21	**28**
2	5	9	14	20	27	34
4	8	13	19	26	33	39
7	12	18	25	32	38	43
11	17	24	31	37	42	46
16	23	30	36	41	45	48
22	29	35	40	44	47	49

а) На колко може да е равно числото N, което е *интересно* в дадена таблица?

б) Възможно ли е числата да се запишат в таблицата така, че в нея да няма *интересно* число?

в) Колко *интересни* числа може да има в една и съща таблица?

Срокът за представяне на решенията е 30.11.2016 г.

конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2016/17 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Класирането се отчита за една учебна година, т.е. от бр. 5 до бр. 4 на следващата година. На първия лист на всяко писмо пишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

доц. Емил Колев (за конкурса на списание „Математика“)
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София.

* * *

Задача 1. В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са равни и лъчите AB и CD се пресичат в точка O. Да се докаже, че правата, съединяваща средите на диагоналите, е перпендикулярна на ъглополовящата на ъгъл AOD.

Задача 2. Да се намерят всички растящи функции

$$f : \{1, 2, \dots, 10\} \to \{1, 2, \dots, 100\},$$

за които е изпълнено свойството: за всеки две числа $x, y \in \{1, 2, \dots, 10\}$ числото $x + y$ дели $xf(x) + yf(y)$.

Задача 3. Даден е изпъкнал n-ъгълник. Да се докаже, че съществуват най-много $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ триъгълника с лице 1, чиито върхове са измежду върховете на дадения n-ъгълник.

Срокът за представяне на решенията е 30.12.2016 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 3/2016 г.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, за които числата $12n - 119$ и $75n - 539$ са точни квадрати.

Решение. Нека $12n - 119 = a^2$ и $75n - 539 = b^2$. Тогава

$$n = \frac{a^2 + 119}{12} = \frac{b^2 + 539}{75},$$

откъдето $4b^2 - 25a^2 = 819$. Тъй като $819 = 3^2.7.13$, то за $(2b - 5a, 2b + 5a)$ има следните възможности:

$$(1, 819);\ (3, 273);\ (7, 117);\ (9, 91);\ (13, 63);\ (21, 39).$$

Като решим съответните системи, намираме $(a, b) = (27, 69);\ (11, 31);\ (5, 19)$. Първата двойка не дава цяла стойност за n, а от другите две получаваме решенията $n = 12$ и $n = 20$.

Задача 2. При $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ да се докаже неравенството

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Решение. Ще използваме неравенството между средното геометрично и средното хармонично за две числа

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}},$$

като равенство се достига само при $x = y$. В горното неравенство да изберем $x = \dfrac{a}{b+c}$ и $y = 1$. Получаваме

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}.1} \geq \frac{2}{1 + \frac{b+c}{a}} = \frac{2a}{a+b+c}$$

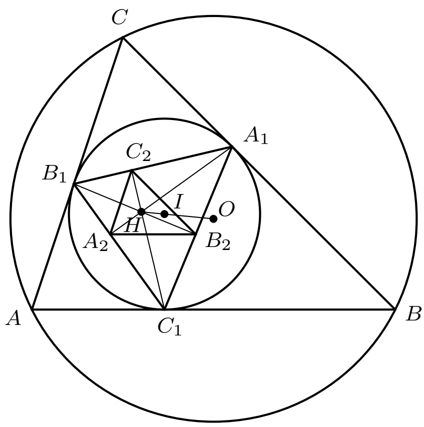
и като съберем това равенство с аналогичните неравенства за другите две събираеми, получаваме

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

За да имаме равенство трябва $1 = \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{a+c} = \dfrac{c}{a+b}$, което е невъзможно.

Задача 3. Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните му в точки A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че центърът на описаната около триъгълника ABC окръжност лежи на правата на Ойлер на триъгълника $A_1B_1C_1$. (За всеки триъгълник центърът на описаната окръжност, медицентърът и ортоцентърът лежат на една права, която се нарича права на Ойлер.)

Решение. Нека O и I са центровете на вписаната и описаната окръжности на триъгълника ABC, а H е ортоцентърът на триъгълника $A_1B_1C_1$. Да означим с A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 височините на триъгълника $A_1B_1C_1$. Тъй като ъглите на $\triangle A_1B_1C_1$ са равни на $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, той е остроъгълен. Точката H е център на вписаната окръжност за $\triangle A_2B_2C_2$ (защо?).



Изразяваме $\sphericalangle AC_1A_2 = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\sphericalangle A = \dfrac{1}{2}\sphericalangle B + \dfrac{1}{2}\sphericalangle C$ и

$$\begin{aligned}
\sphericalangle C_1A_2B_2 &= \sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - (\sphericalangle C_1A_1B + \sphericalangle B_1A_1C) = \\
&= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle B + 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C) = \frac{1}{2}\sphericalangle B + \frac{1}{2}\sphericalangle C,
\end{aligned}$$

следователно правите AB и A_2B_2 са успоредни. Аналогично получаваме, че съответните страни на триъгълниците ABC и $A_2B_2C_2$ са успоредни. Това означава, че съществува хомотетия, която изобразява единия триъгълник в другия. При тази хомотетия центърът O на описаната окръжност на ABC се изобразява в центъра I на описаната окръжност на $A_2B_2C_2$, а центърът I на вписаната окръжност в ABC се изобразява в центъра H на вписаната окръжност в $A_2B_2C_2$. При това всяка от правите OI и IH минава през центъра на хомотетията, т.е. O, I и H лежат на една права. Остава да отбележим, че I и H са съответно център на описаната окръжност и ортоцентър на $A_1B_1C_1$, т.е. IH е правата на Ойлер на триъгълника $A_1B_1C_1$.

Тест по математика за 7. кл., външно оценяване

20 май 2016 г.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Изразът $x + \frac{1}{4}$ е тъждествено равен на:

А) $x + 1{,}4$ **Б)** $4x + 1$ **В)** $x + 0{,}25$ **Г)** $x + 4$

2. Разликата $25.25 - 5.5$ е равна на произведението:

А) $25.20.5$ **Б)** $25.25.25$ **В)** 20.20 **Г)** 20.30

3. Нормалният вид на $(x - 0{,}2)^2$ е многочленът:

А) $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04$ **Б)** $x^2 - 0{,}4x + 0,4$

В) $x^2 + 0{,}04$ **Г)** $x^2 - 0{,}4$

4. При $a = -2$ изразът $5 - 3(a - b)$ е тъждествено равен на:

А) $3b + 11$ **Б)** $b + 11$ **В)** $11 - 3b$ **Г)** $2 + 3b$

5. Коренът на уравнението $2 - 2x = \frac{1}{2}$ е:

А) $1\frac{1}{4}$ **Б)** $1\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{3}{4}$ **Г)** 0

6. Решенията на неравенството $\frac{2x-3}{3} > \frac{2x+3}{2}$ са:

А) $x < -17$ **Б)** $x < -7{,}5$ **В)** $x > -7{,}5$ **Г)** $x > 3$

7. Турист изкачва един връх за 6 ча̀са със скорост x km/h и се връща обратно за 3 пъти по-малко време, като се движи с 4 km/h по-бързо. Уравнението, което изразява тази зависимост, е:

А) $6x = 2(x + 4)$ **Б)** $6x = 3(x + 4)$

В) $6x = 2(x - 4)$ **Г)** $6x = 3(x - 4)$

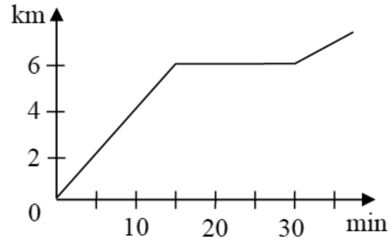
8. Един снегорин почиства булевард за 5 ча̀са, а втори снегорин почиства същия булевард за 3 ча̀са. За колко ча̀са двата снегорина ще почистят $\frac{4}{5}$ от този булевард, ако работят заедно?

А) 2 ча̀са и 20 мин. **Б)** 2 ча̀са и 30 мин.

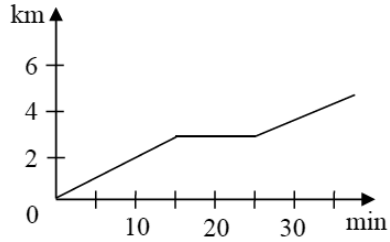
В) 1 час и 20 мин. **Г)** 1 час и 30 мин.

9. Коко пробягал 3 километра за 15 минути. Седнал да си почине за 15 минути и продължил да тича по маршрута си. Коя от графиките представя вярно движението му?

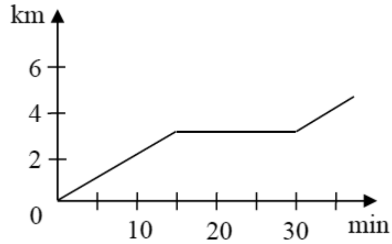
А)



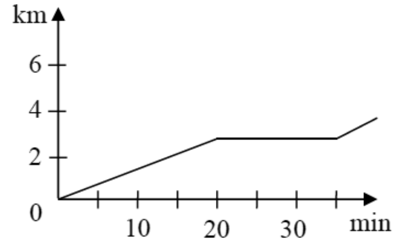
Б)



В)



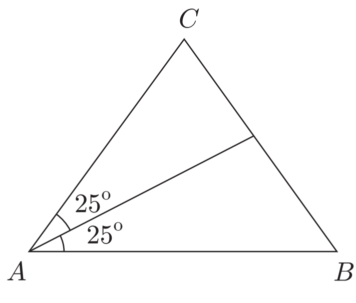
Г)



10. На чертежа $AC = BC$.
Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:

А) 80° **Б)** 75°

В) 50° **Г)** 25°



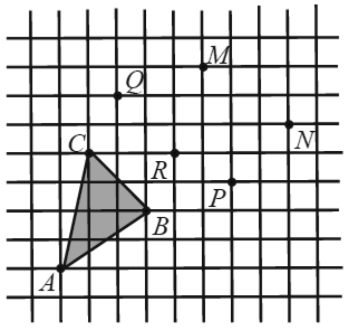
11. Дължините в сантиметри на страните на триъгълник могат да са:

А) 0,5; 1,5 и 2 **Б)** 1,5; 2 и 3 **В)** 2; 1 и 1 **Г)** 3; 2 и 1

12. Кои три точки на чертежа образуват триъгълник, който е еднакъв на триъгълника ABC?

А) M, N и Q **Б)** M, R и Q

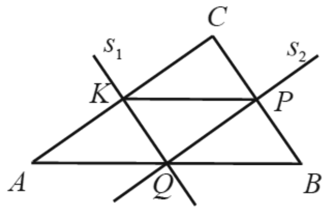
В) M, N и P **Г)** M, R и P



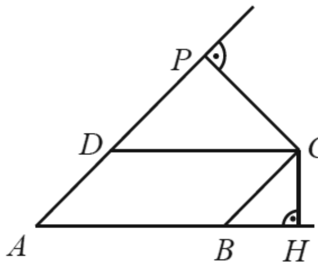
13. На чертежа s_1 и s_2 са симетралите съответно на страните AC и BC в триъгълника ABC. Ако $AB + KP = 24$ cm, дължината на CQ е:

А) 12 cm **Б)** 8 cm

В) 6 cm **Г)** 4 cm



За задачи 14, 15 и 16 използвайте следното условие:
На чертежа $ABCD$ е успоредник, $CH \perp AB$ и $CP \perp AD$.



14. Ако $\sphericalangle CBH = x$ и $\sphericalangle CBA = 3x$, стойността на е:

А) 75° **Б)** 60°

В) 45° **Г)** 30°

15. Ако $\sphericalangle CDP = \alpha$, мярката на $\sphericalangle HCP$, изразена чрез α, е:

А) $90^\circ + \alpha$ **Б)** $45^\circ + \alpha$ **В)** $180^\circ - 2\alpha$ **Г)** $180^\circ - \alpha$

16. Ако $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm и $CP = 4$ cm, дължината на CH в сантиметри е:

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

17. В първата колона на таблицата са изпълнени указания за привеждане на израза $2x^2-3-x(x-3)-2x$ в нормален вид. Попълнете празната колона, като следвате същите указания за израза $(x-1)(3-x)-(2-x)^2$.

Пример		Приведете в нормален вид многочлена
$2x^2 - 3 - x(x-3) - 2x$	Указания	$(x-1)(3-x)-(2-x)^2$
$2x^2 - 3 - x^2 + 3x - 2x$	**(А)** Разкрий скобите.	
$x^2 - 3 + x$	**(Б)** Направи приведение.	
$x^2 + x - 3$	**(В)** Подреди едночлените по степените им.	

18. Пресметнете стойността на всеки от изразите $A = \dfrac{4^3 - 7^3}{49 + 7.4 + 16}$ и $B = 2.1{,}5 - 1{,}5.5$ и сравнете получените числа.

19. Диаграмата показва броя на оценките, получени на една контролна работа.

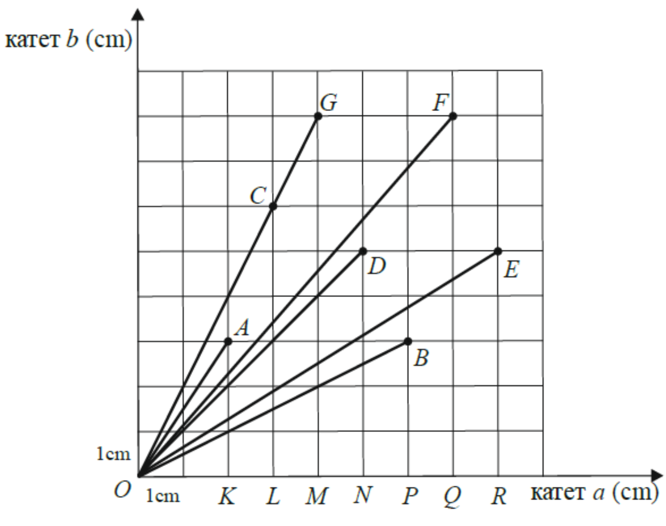
(1) Колко е процентът на броя оценки „слаб“ от броя оценки „отличен“?

(2) Ако броят на оценките „среден“ е n, попълнете таблицата, като изразите чрез n броя на другите оценки и общия брой на всички оценки.

Оценка	слаб	среден	добър	мн. добър	отличен	общо
Брой		n				

(3) Оценките „среден“ са осем на брой. Колко е броят на всички оценки, показани на диаграмата?

20. Диаграмата представя хипотенузите на 8 правоъгълни триъгълника с катети a cm и b cm. Всяка хипотенуза има един край в точката O и втори – в една от отбелязаните точки. Върхът при правия ъгъл на всеки такъв триъгълник е отбелязан върху хоризонталната ос. Например OA е хипотенузата на правоъгълния триъгълник OAK с катети $a = 2$ и $b = 3$ cm.



(1) Във втората колона на таблицата срещу номера на всеки въпрос запишете правилния според вас отговор.

Въпрос I. Коя е хипотенузата на равнобедрен правоъгълен триъгълник?

Въпрос II. Два от триъгълниците са еднакви. Кои са техните хипотенузи?

Въпрос III. Кой от триъгълниците има най-голямо лице?

Въпрос IV. Колко са триъгълниците, в които острият ъгъл при катета a е по-малък от другия му остър ъгъл?

(2) В мрежата начертайте отсечка OT, която е хипотенуза на равнобедрен правоъгълен триъгълник, за който $a + b = 14$ cm.

ВТОРИ МОДУЛ

21. БУРГАС – ПРАГА

Върху тази карта авиолинията „Бургас - Прага“ е изобразена с отсечка. На карта с мащаб 1:10 000 000 отсечката има дължина 11,6 cm.

21А) Препишете и попълнете пропуснатите числа в изречението. *Действителната дължина на авиолинията от Бургас до Прага е . . . . cm, което е равно на . . . . km.*

21Б) Часовата разлика между Бургас и Прага е 1 час. Това означава, че когато местното време в Бургас е 12:00 часа̀ на обед, в Прага местното време е 11:00 часа̀ сутринта. Часът на излитане и кацане се задават в местно време. Една авиокомпания осъществява редовен полет с:

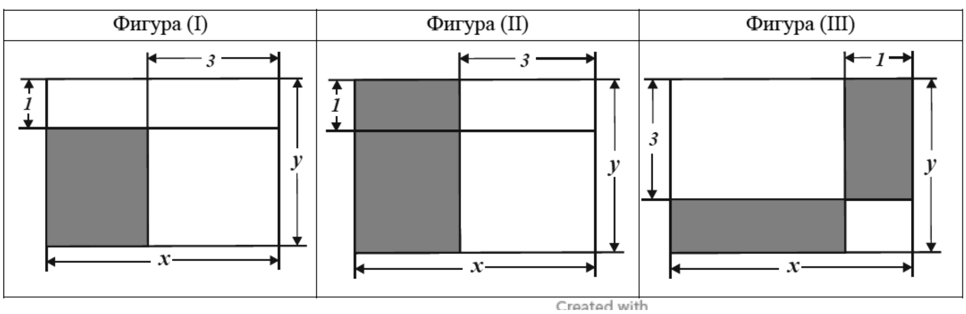
час на излитане от Бургас – 07:10 часа̀ (местно време)

и *час на кацане в Прага* – 08:05 часа̀ (местно време).

Колко минути е продължителността на полета на тази авиокомпания?

22. РАЗРЯЗВАНЕ НА ПРАВОЪГЪЛНИК

На всеки чертеж са означени размерите в сантиметри на правоъгълник, разрязан на по-малки правоъгълници, част от които са оцветени. Фигура (I) Фигура (II) Фигура (III)



22А) Намерете в коя фигура оцветената част има най-голям периметър и на колко сантиметра е равен той, ако $x = 8$ cm и $y = 5$ cm.

22Б) Пречертайте и попълнете таблицата, като изразите чрез x и y лицето на оцветената част във всеки от правоъгълниците.

	Оцветена част във:		
Изразени чрез и y:	Фигура (I)	Фигура (II)	Фигура (III)
Лице (cm^2)			

22В) Нека $y = (x - 7)$ cm и лицето на оцветената част на Фигура (I) е равно на 6 cm^2. Напишете уравнение с неизвестно X, което изразява тази зависимост, и намерете всички стойности на x, за които това е вярно.

На задачи **23.** *и* **24.** *напишете решението с необходимите обостовки.*

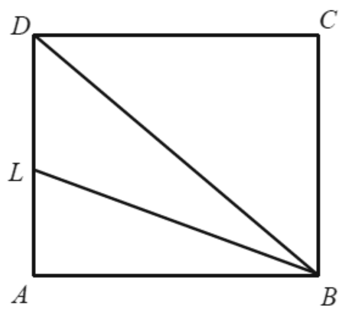
23. В една работилница майстор и чирак изработват еднакви чашки. Майсторът изработва по 60 чашки за 1 час. За да изработят един и същ брой чашки, на чирака е нужно с 25% повече време, отколкото на майстора.

Пречертайте и попълнете липсващите данни в таблицата и обосновете отговорите си.

	Време за изработване на 60 чашки (в минути)	Брой чашки, изработени за 1 час
Майстор		60
Чирак		

Един ден майсторът започнал сам работа в 8:00 часà. След известно време, машината се развалила. Ремонтът продължил 4 чàса. След ремонта започнал да работи само чиракът и изработил толкова чашки, колкото е изработил майсторът преди да се развали машината. Най-много по колко чашки е изработил всеки от тях, ако чиракът е приключил работа не по-късно от 18:00 часà?

24. В правоъгълника $ABCD$ с $\sphericalangle DBC = 50^\circ$ ъглополовящата на ABD пресича страната AD в точка L. През точката L е построена права, перпендикулярна на правата BL, която пресича диагонала BD и страната CD съответно в точките M и N. Намерете ъглите на триъгълник MND.
От точката L е спуснат перпендикуляр към диагонала BD, който го пресича в точка HY. Намерете разстоянието от точката M до правата AD, ако $MH = 8$ cm. Докажете, че $BH + DM = AB + DN$ и $BM < BH + DM$.



Отговори и решения

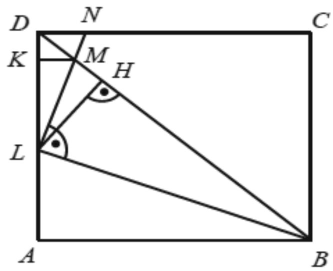
1. В; **2.** Г; **3.** А; **4.** А; **5.** В; **6.** Б; **7.** А; **8.** Г; **9.** В; **10.** А; **11.** Б; **12.** В; **13.** Б; **14.** В; **15.** Г; **16.** Б; **17.** А) $3x-x^2-3+x-4+4x-x^2$, Б) $8x-2x^2-7$, В) $-2x^2+8x-7$; **18.** $A=-3$, $B=-4{,}5$, $A>B$; **19.** (1) 25%, (2) $0{,}5n$; $3n$; $3{,}5n$; $2n$; $10n$, (3) 80; **20.** 1) I. OD, II. OB и OC, III. OFQ, IV. 2; **21.** А) 116 млн.; 1160; Б) 115 мин.; **22.** А) фигура (III) – 26 cm; Б) (I) $S=(x-3)(y-1)$; (II) $S=(x-3)y$; (III) $S=(x-1)(y-3)+3$; В) $(x-3)(x-8)=6$, т.е. $x=9$ (cm).

23. От условието следва, че майсторът изработва 60 чашки за 60 минути. Чиракът изработва 60 чашки за време $60+25\%.60=75$ минути. Тогава за 1 час чиракът изработва $60:\dfrac{5}{4}=48$ чашки.

	Време за изработване на 60 чашки (в минути)	Брой чашки, изработени за 1 час
Майстор	**60**	60
Чирак	**75**	**48**

Нека всеки от тях е изработил по N (N – естествено число) чашки. Времето на майстора (в часове) за тези чашки е $\dfrac{N}{60}$, а на чирака е $\dfrac{N}{48}$. Получаваме $\dfrac{N}{60}+4+\dfrac{N}{48}\geqq 10$, откъдето намираме, че $N\leqq 160$. Следователно всеки от тях е изработил най-много 160 чашки.

24. Намираме $\sphericalangle ABL=\sphericalangle LBD=20^\circ$. От $\triangle BDC$ получаваме $\sphericalangle BDC=40^\circ$. От $\triangle BML$ получаваме $\sphericalangle BML=\sphericalangle DMN=70^\circ$. Тогава от $\triangle MND$ следва $\sphericalangle MND=70^\circ$. От $\triangle HML$ получаваме $\sphericalangle MLH=20^\circ$. От $\triangle DLN$ получаваме $\sphericalangle DLN=20^\circ$.



Следователно LM е ъглополовящата на $\sphericalangle DLH$ и $MK=MH=8$ cm. Тъй като LH е височината към хипотенузата в правоъгълния $\triangle BML$, то H е вътрешна за отсечката BM и $BM=BH+HM$.

За правоъгълните триъгълници $\triangle ABL$ и $\triangle HBL$ с обща хипотенуза BL е изпълнено, че $LA=LH$ (разстояния от точка L върху ъглополовящата BL до раменете на $\sphericalangle ABD$). Следователно $\triangle ABL\cong\triangle HBL$, откъдето $BH=AB$. Тъй като $\triangle MND$ е равнобедрен, то $DM=DN$. Следователно $BH+DM=AB+DN$.

Неравенството $BH+HM<BH+DM$ е изпълнено, ако $HM<DM$. Последното следва от зависимостта между страните и ъглите в правоъгълния $\triangle DKM$: $DM>MK=MH$.

ТЕСТ

за подготовка за държавен зрелостен изпит

Държавен зрелостен изпит по математика, 30.05.2016 г.

На задачите от 1 до 20 включително посочете верния отговор.

1. Ако числото 2 е с 20% по-малко от числото x, то числото $x+2$ е равно на:

А) $\frac{5}{2}$ **Б)** $\frac{9}{2}$ **В)** 10 **Г)** 12

2. Стойността на израза $(\sqrt{2}-1)^3$ е:

А) $2\sqrt{2}-1$ **Б)** $4\sqrt{2}-5$ **В)** $5\sqrt{2}-7$ **Г)** $5\sqrt{2}+7$

3. Изразът $\dfrac{1}{x^2-16} : \dfrac{x}{x+4}$ е дефиниран при:

А) $x \neq 4;\ x \neq 0$ **Б)** $x \neq -4;\ x \neq 0$

В) $x \neq \pm 4;\ x \neq 0$ **Г)** $x \neq \pm 4$

4. Множеството от решенията на неравенството $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-3)} \geqq 0$ е:

А) $x \in [-5;1] \cup (3;+\infty)$ **Б)** $x \in (-5;1) \cup (3;+\infty)$

В) $x \in (-5;1] \cup [3;+\infty)$ **Г)** $x \in (-\infty;-5) \cup (1;3)$

5. Стойността на израза $\log_{\frac{1}{5}} 25 + 25^{1+\log_5 2}$ е равна на:

А) 98 **Б)** 27 **В)** 26 **Г)** 18

6. Сборът от реалните корени на уравнението $4x^4+3x^2-1=0$ е равен на:

А) -1 **Б)** $-\frac{3}{4}$ **В)** 0 **Г)** $\frac{1}{4}$

7. Уравнението, което има два положителни корена, е:

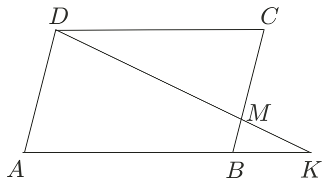
А) $x^2-7x+6=0$ **Б)** $x^2+7x+6=0$

В) $-x^2-x+30=0$ **Г)** $3x^2+5=0$

8. Коя от двойките числа $(x;y)$ е решение на системата $\left| \begin{array}{l} x+y=4 \\ xy=3 \end{array} \right.$?

А) $(3;1)$ **Б)** $(1;-3)$ **В)** $(-1;-3)$ **Г)** $(-3;-1)$

9. В успоредник $ABCD$ със страна $AB = 42$ cm е взета точка M от страната BC, така че $BM : MC = 2 : 7$. Правата DM пресича продължението на AB в точка K. Дължината на BK е:



А) 9 cm **Б)** 12 cm **В)** 14 cm **Г)** 16,8 cm

10. В правоъгълен $\triangle ABC$ катетите са с дължини 3 cm и 4 cm. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

А) 0,5 cm **Б)** 1 cm **В)** 2,5 cm **Г)** 5 cm

11. Координатите на върха на параболата $y = -x^2 + 2x + 2$ са:

А) $(1; -1)$ **Б)** $(-1; 1)$ **В)** $(-1; 5)$ **Г)** $(1; 3)$

12. Намерете стойността на произведението $a_1a_3a_5$, където a_1, a_3 и a_5 са членове на редицата с общ член $a_n = (-1)^n.n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

А) -161 **Б)** -23 **В)** 23 **Г)** 161

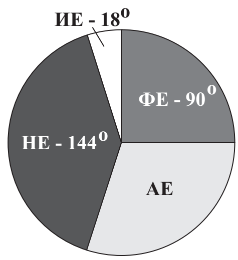
13. За крайната геометрична прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е дадено, че $a_1 = 32$, $q = \dfrac{1}{2}$ и сумата от членовете ѝ е $S_n = 63\dfrac{3}{4}$. Броят n на членовете на прогресията е:

А) 7 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 10

14. Стойността на израза $A = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$ при $\alpha = 15^\circ$, е:

А) 1 **Б)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** 2

15. Посетителите на исторически музей са пожелали превод на един от следните четири езика: английски език – АЕ, френски език – ФЕ, немски език – НЕ и испански език – ИЕ. Изборът е отразен на кръговата диаграма в градуси. Избралите английски език са:



А) 25% **Б)** 30% **В)** 35% **Г)** 40%

16. Ако $n \geqq 3$ и $V_n^3 = C_n^4$, то n е:

А) 4 **Б)** 7 **В)** 12 **Г)** 27

17. За $\triangle ABC$ дължината на страната AB е $6\sqrt{3}$ и $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е:

А) 36 **Б)** $12\sqrt{3}$ **В)** 12 **Г)** $\dfrac{9}{2}$

18. Лицето на $\triangle ABC$ със страна $BC = 2$ cm и $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ е 3 cm^2. Дължината на страната AC е:

А) $\sqrt{10}$ cm　　**Б)** $3\sqrt{2}$ cm　　**В)** $2\sqrt{13}$ cm　　**Г)** 10 cm

19. За успоредника $ABCD$ е дадено, че $AB = 8$ cm, $AD = 7$ cm и $AC = 13$ cm. Разстоянието от върха C до правата AB е:

А) $28\sqrt{3}$ cm　　**Б)** 7 cm　　**В)** $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ cm　　**Г)** $\sqrt{57}$ cm

20. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB\|CD$) е вписана окръжност с център точка O, която се допира до бедрото BC в точка K. Ако $OC = 6$ cm и $CK = 4$ cm, то лицето на трапеца е:

А) $36\sqrt{2}$ cm^2　　**Б)** $72\sqrt{2}$ cm^2　　**В)** $36\sqrt{5}$ cm^2　　**Г)** $72\sqrt{5}$ cm^2

На задачите от 21 до 25 включително запишете само верния отговор.

21. Намерете стойността на израза $A = \operatorname{tg} 44^\circ.\operatorname{tg} 45^\circ.\operatorname{tg} 46^\circ$.

22. Решете неравенството $x^3 > \frac{16}{x}$.

23. Запишете числото x, за което е изпълнено равенството

$$5\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = 4.$$

24. При измерване на ръста на група служители се установило, че средната височина на мъжете е 180 cm, а на жените – 165 cm . Намерете средния ръст на всички служители, ако е известно, че жените са с 50% повече от мъжете.

25. Намерете периметъра на $\triangle ABC$ със страни a, b, c, ако $a-c = c-b = 2$ и един от ъглите на триъгълника е 120°.

На задачите от 26 до 28 включително напишете пълните решения с необходимите обосновки

26. Решете уравнението $\sqrt{\frac{2x-2}{x-2}} + 2\sqrt{\frac{x-2}{2x-2}} = 3$.

27. Намерете всички възможни четири числа, за които едновременно е изпълнено: първите три образуват аритметична прогресия, а последните три – геометрична прогресия, сборът на първото и третото е 2, а отношението на четвъртото и първото е (-9).

28. В $\triangle ABC$ ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича страната AB в точка L така, че $AL = 7\sqrt{2}$ cm и $LB = 5\sqrt{2}$ cm. Ако $\cos\sphericalangle ACB = \frac{3}{5}$, намерете дължините на AC, BC, CL и лицето на $\triangle ABC$.

ОТГОВОРИ

1. Б); **2.** В); **3.** В); **4.** А); **5.** А); **6.** В); **7.** А); **8.** А); **9.** Б); **10.** Б); **11.** Г); **12.** Г); **13.** Б); **14.** В); **15.** Б); **16.** Г); **17.** В); **18.** А); **19.** В); **20.** В); **21.** 1; **22.** $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$; **23.** $x = \frac{2}{3}$; **24.** 171 cm; **25.** 15; **26.** $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; **27.** -4, 1, 6 и 36 или -1, 1, 3, и 9; **28.** $AC = 21$ cm, $BC = 15$ cm, $CL = 7\sqrt{5}$ cm. $S_{ABC} = 126$ cm^2.

В тази рубрика ще представяме класически задачи, които бихте могли да атакувате и със съвременни средства (включително дигитални).

ЗА ЧАШИТЕ, БУЧКИТЕ ЗАХАР ИЛИ ЗАЩО ВРЕМЕТО НЕ СТИГА ЗА УЧЕНЕ

Евгения Сендова

Когато решението не става с лист и молив

Имам малка приятелка, Рони, на 10 години, с която обичаме да си разменяме логически задачи. В нейните винаги има по някой трик, в който тя разчита на това, че съм забравила началото на условието. Но понякога успява да ме „хване“ на тясно … Аз също не се давам, но колкото и богата да е „математическата ми ракла“, винаги опреснявам съдържанието ѝ с някой бисер на Мартин Гарднър. Последният, който дадох на Рони, е от книжката му „Аха!“. Започнах със загрявка:

Ето ти единайсет бучки захар и 3 пластмасови празни чашки. Можеш ли да разпределиш бучките така, че във всяка да има нечетен брой?

Рони помисли малко и усмихната ми показа решението си:

— 1 *бучка в първата,* 3 – *във втората и* 7 – *в третата. Много е лесна тази задача, даже има и други решения …*

Добре, ето ти малко по-сложна:

Взимам ти едната бучка захар, за да подсладя кафето си. Сега вече имаш 10 *бучки и пак* 3 *разни пластмасови чаши. Можеш ли да сложиш бучките в тези чаши, така че във всяка да има нечетен брой бучки …*

Рони почна да експериментира, но разбра, че този път решението не е очевидно …Реши да си помогне с лист и молив.

— *Забележи, че не ти казах да представиш числото* 10 *като сбор от три нечетни числа – тази задача наистина няма решение* – казах, след като я оставих да се помъчи …

— *А-а-а, значи е важно, че имам работа с чаши … Чакай да помисля още малко.*

Помислете и вие, драги читатели, преди да продължите с четенето.

— *Открих!* – извика тържествуващо след малко Рони. *Ако сложа едната чаша в друга, долната ще има сбора от бучките в двете чаши!*

— *Това наистина е трикът!* – зарадвах се аз. *И какво е решението ти?*

— *Ами например* 1 *бучка в първата чаша,* 2 *във втората, в която пускам първата (така във втората стават общо* 3*) и* 7 *– в третата.*

— *Браво! Знаеш ли как математиците биха описали твоето решение? Имаш едно множество от* 7 *елемента (третата чаша) и едно множество от* 3 *елемента (втората чаша), което съдържа подмножество от* 1 *елемент (първата чаша).*

— *Чакай малко! Как така казваш на една бучка „множество“? Вие математиците сте много странни хора …*

— *Ами така си е …В теорията на множествата дори нито една бучка да няма, пак е множество – празното множество! И по-странното е, че имаше време, когато елементи от тази теория се изучаваха в началното училище …*

– Добре, че съм се родила малко по-късно! Но сигурно тази задача има и други решения … Чакай да видя …

Рони откри още няколко решения, но се учуди, като ѝ казах, че всички решения са 15, като според Мартин Гарднър 5 от тях изискват наистина математическо прозрение (или казано на по-прост език – да си кажеш АХА!

Като откриете всички 15 решения, опитайте се да обобщите задачата, като менете броя на бучките, броя на чашите и правилото за това какъв брой бучки да има във всяка чаша.

Най-интересната част от решението на горната задача, е че един елемент (бучката в първата чаша) принадлежи на две множества (на първата и на втората чаша) и се брои 2 пъти. Тази идея е в основата на някои забавани парадокси.

Парадоксално ли е, че децата нямат време за учене?

Ето как малкият Иванчо обяснил на директорката на училището, че няма време за учене.

Спя по 8 часа на ден, което прави 8×365 *или общо* 2920 *часа. Като ги разделя на* 24*, получавам около* 122 *дни за сън. Събота и неделя са почивни* *дни, което прави* 52 *седмици по* 2, *или общо* 104 *дни на година. Имам* 60 *дни лятна ваканция. Освен това ми трябват около* 3 *часа дневно за хранене, т.е.* 3×365, *което е* 1095 *часа или делено на* 24 – *общо* 45 *дни на година. Ако сложим и* 2 *часа на ден почивка или развлечения, стават* 2×365 *или* 730 *часа, делено на* 24 – *около* 30 *дни на година.*

Директорката обобщила сметките му по следния начин:

Сън	122
Уикенди	104
Лято	60
Хранене	45
Почивка	30
Общо	361

Нали виждате сега, госпожо, че ми остават само 4 *дни (ако евентуално се разболея), а въобще не съм броил зимната и пролетната ваканция …*

Директорката не успяла да намери грешка в разсъжденията на Иванчо.

А вие?

ПП Да не забравя да споделя задачата-отмъщение на Рони:

— *Пускаш пръстена си в чаша с кафе и го вадиш сух. Как е възможно това?*

Мислих, мислих и позорно се предадох …

— *Ами кой е казал, че кафето е било течно – може да е било на зърна или на прах* – иронично заключи Рони …

Ученическо творчество

Скъпи ученици, списание „Математика“ обявява конкурс за авторска задача за ученици от 4.–12. клас. Най-интересните и оригинални задачи ще публикуваме на страниците на списанието.

Вярваме във Вашата изобретателност и очакваме вдъхновяващи и провокиращи мисълта задачи (заедно с решенията им) на e-mail:

math_competition@abv.bg.

Първата задача, която публикуваме, е на **Симона Славова** от 5. клас, СМГ. По думите на автора, задачата е творческа импровизация на тема *броене* и *задачи с отсечки*, родила се в процеса на усилена подготовка за математически състезания. Задачата е подходяща за ученици от 4. и 5. клас.

Сборникът на Симона

Сборникът на Симона започва със задачи за 4. клас, след това за 5. клас, за 6. клас и накрая за 7. клас. Номерацията на страниците в сборника започва от страница 5 и завършва на страница 125, като първите два листа и последните три страници не са номерирани. На неномерираните страници няма задачи.

а) Колко цифри са използвани за номерирането на този сборник?

б) Задачите за всеки клас започват на нова страница. За 7. клас има толкова страници, колкото и за 6. клас, а за 5. клас страниците са 2 пъти по-малко от страниците за 6. клас и 2 пъти повече от страниците за 4. клас. На коя страница започват задачите за всеки клас?

в) На кой поред лист (отляво надясно) са последните задачи за 5. клас?

Решение. а) За номериране са нужни $9-4=5$ цифри за едноцифрените страници, $90.2=180$ цифри за двуцифрените страници и $(125-99).3=78$ цифри за трицифрените страници. Общо цифрите са $5+180+78=263$.

б) Нека в сборника има x страници за 4. клас. Тогава страниците за 5. клас са $2x$, а за 6. и за 7. клас – по $4x$. Общо страниците със задачи са $125-4=121$ и получаваме равенството

$$x+2x+4x+4x=121, \text{ т.е. } 11x=121,$$

откъдето намираме $x=11$. И така, задачите за 4. клас започват на страница 5 и завършват на страница $11+5-1=15$. Задачите за 5. клас започват на страница 16 и завършват на страница $22+16-1=37$. Задачите за 6. клас започват на страница 38 и завършват на страница $44+38-1=81$. Задачите за 7. клас започват на страница 82 и завършват на страница $44+82-1=125$.

в) Последните задачи за 5. клас са на страница 37, която е на 19-ти лист.

за по-малките задачи

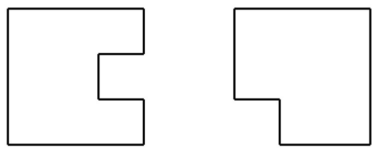
4. клас

61. Баба Цоцолана набрала ябълки за внуците си. Ако даде на всеки внук по 7 ябълки, ще останат 6 ябълки, а 12 ябълки не стигат, за да им даде по 9 ябълки. Колко внуци има баба Цоцолана?

62. Дребосъчето и Карлсон имали общо 120 бонбона. Бонбоните на Дребосъчето били с 10 по-малко от бонбоните на Карлсон. То дало няколко от своите бонбони на Карлсон, след което бонбоните на Карлсон станали 4 пъти повече от бонбоните на Дребосъчето. Колко бонбона дало Дребосъчето на Карлсон?

63. Всяка сутрин Сашо печели по 35 лева. Всеки следобед той изхарчва половината от парите си. На 4 май вечерта той имал 87 лева. Колко лева е имал на 1 май по обяд?

64. От два еднакви квадратни листа със страна X см изрязали еднакви квадратчета със страна Y см. Обиколката на едната от останалите фигури била 76 см, а на другата – 94 см (виж чертежа). Да се намерят X и Y.



5. клас

65. Да се намерят неизвестните числа x и y от равенствата

$$204 : (x + 6) = 12 \quad \text{и} \quad 204 : y + 6 = 12.$$

66. Иван, Асен и Катя си купили еднакви пасти на обща стойност 24 лв. Иван платил 8 лв. 40 ст., а Асен платил с 2 лв. 40 ст. по-малко от Иван. Катя и Иван купили общо 15 пасти. Колко пасти е купил Асен?

67. Правоъгълник има лице 700 кв.см и дължина 28 см. Да се намери обиколката на правоъгълника и лицето на най-големия квадрат, който може да се изреже от този правоъгълник.

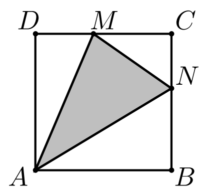
68. Иво и Емо получили кутия с бонбони. Иво веднага изял половината от бонбоните и още един бонбон. След това Емо взел третината от останалите бонбони и още два бонбона. Ако накрая са останали 20 бонбона, колко са били бонбоните в началото?

6. клас

69. От произведението на числата x и 0,4 извадили $\frac{1}{4}$ и получили 4. Сбора на числата y и 0,4 умножили по $\frac{1}{4}$ и получили 4. Да се намери разликата на x и y.

70. Колко кубични метра е обемът на правоъгълен паралелепипед с лице на повърхнината 34 m^2 и основа с размери 2 m и 5 m?

71. Квадрат $ABCD$ има страна 5 см. Точките M и N съответно от страните CD и BC са такива, че $DM = 2$ cm и $BN = 1$ cm. Колко процента от лицето на квадрата е лицето на триъгълника AMN?



72. Турист изминал 80% от маршрута си и пресметнал, че му остават 12 км. Но $\frac{2}{3}$ от предстоящия път са по труден терен, докато само $\frac{1}{3}$ от изминатия път била по труден терен. Колко километра е маршрутът и колко процента от него са по труден терен?

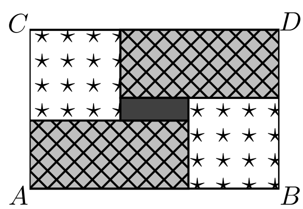
7. клас

73. Да се намери $m + n$, ако m и n са естествени числа и

$$\frac{14^m(3^4 - 5^2)}{2(18^2 + 18 + 1)^3} = 2^{12}7^n.$$

74. Правоъгълникът $ABCD$ е сглобен от две еднакви сиви плочки с размери x и y dm, две еднакви плочки на звездички и една черна плочка, чиито страни са 1 dm и 3 dm.

а) Да се изразят чрез x и y страните на една плочка със звездички и страните на $ABCD$.



б) Ако сивата плочка има обиколка 56 dm, да се намери обиколката на плочката със звездички и обиколката на $ABCD$.

75. Номерът на стаята ми е трицифрено число. Ако между цифрата на стотиците и цифрата на десетиците сложа знак за умножение, а между цифрата на десетиците и цифрата на единиците сложа знак за събиране, стойността на получения израз ще е 27. Ако разменя местата на знаците, ще получа 22. Кой е номерът на моята стая?

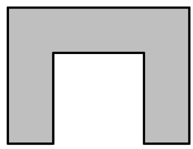
за по-малките решения

на задачите от бр. 4/2016

46. Три ябълки, четири круши и една праскова струват 4 лв. Една ябълка, четири круши и праскова струват 3 лв. 20 ст. Колко струва всеки плод поотделно, ако прасковата струва колкото две ябълки?

Решение. Първата покупка включва с две ябълки повече от втората, затова цената на една ябълка е $(400 - 320) : 2 = 40$ ст. Прасковата струва $2.40 = 80$ ст, а крушата е $(320 - 120) : 4 = 50$ ст.

47. От правоъгълник със страни 15 см и 18 см изрязали квадрат със страна 12 см, както е показано на чертежа. Да се намери лицето и обиколката на получената фигура.



Решение. Лицето на фигурата е $15.18 - 12.12 = 126$ кв. см, а обиколката и е $2(15 + 18) + 2.12 = 90$ см.

48. Васко решавал задачи в понеделник, вторник и сряда. В понеделник и сряда общо той решил с 32 задачи повече, отколкото във вторник, а във вторник решил с 11 задачи по-малко, отколкото в понеделник. Колко задачи е решил Васко в сряда?

Решение. В понеделник Васко е решил с 11 задачи повече от вторник, а в понеделник сряда общо – с 32 задачи повече от вторник. Значи в сряда е решил $32 - 11 = 21$ задачи.

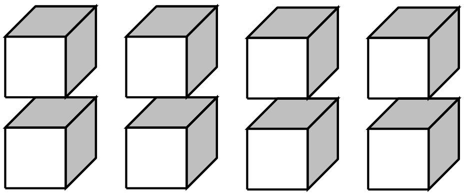
49. В шест кутии има съответно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 бонбони. Иво взел две от кутиите, а Емо – три от останалите кутии и се оказало, че Емо е взел 2 пъти повече бонбони от Иво. Колко бонбони има в останалата кутия?

Решение. Общо бонбоните са 119 и ако в оставащата кутия има a бонбони, то Иво е взел $(119 - a) : 3$ бонбона. Разликата $(119 - a)$ се дели на 3 само при $a = 20$ (проверете!)). Иво е взел $15 + 18 = 33$ бонбона, Емо е взел $16 + 19 + 31 = 66$ бонбона, а в оставащата кутия има 20 бонбона.

50. В древен индийски трактат намираме следната задача. Ако $\frac{1}{5}$ от пчелния рой полетяла към акацията, $\frac{1}{3}$ – към липата, утроената разлика на тези числа – към цъфтящите череши, а една пчела продължила да лети през цветната градина, колко са пчелите в този рой?

Решение. Към дърветата полетяли $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{14}{15}$ от пчелния рой. Оставащата $\frac{1}{15}$ от роя е една пчела, значи в роя е имало 15 пчели.

51. За боядисване на повърхността на дървено кубче използвали 4 грама боя. Когато боята изсъхнала, разрязали кубчето на 8 еднакви кубчета. Колко грама боя са нужни, за да се боядисат неоцветените стени на малките кубчета?



Решение. Повърхнината на кубчето се състои от $6.4 = 24$ квадратчета, оцветени с 8 г боя. След разрязването неоцветените квадратчета са $8.6 - 24 = 24$, т.е. са нужни още 8 г боя.

52. Яна, Ина и Ани си купили обща палатка. Яна дала 60% от цената на палатката, Ина дала 40% от останалата сума, а Ани – останалите 30 лв. Колко струва палатката?

Решение. Тъй като 30 лв. са $100\% - 40\% = 60\%$ от останалата сума, то останалата сума е $30 : 0,6 = 50$ лв. Тя е $100\% - 60\% = 40\%$ от цената на палатката, т.е. палатката струва $50 : 0,4 = 125$ лв.

53. Младеж се наел на работа при условие, че в края на годината ще получи автомобил и 2600 лв. Но след 8 месеца той напуснал, като за работата си получил автомобил и 1000 лв. Колко струва автомобилът?

Решение. Заплатата за останалите 4 месеца е $2600 - 1000 = 1600$ лв. Следователно заплатата за 8 месеца е $2.1600 = 3200$ лв, а от друга страна, автомобил и 1000 лв. Автомобилът струва $3200 - 1000 = 2200$ лв.

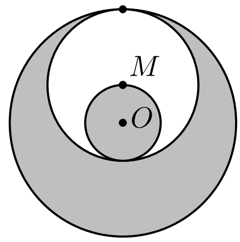
54. Едно от числата A, B и C е положително, друго е отрицателно, а третото е равно на 0. Ако $A = B(B - C)$, кое е положителното, кое – отрицателното и кое число е равно 0?

Решение. Ако допуснем, че $A = 0$, то $B = 0$ или $B = C$, противоречие.

Ако $B = 0$, то $A = 0$, противоречие.

Следователно $C = 0$ и тогава $A = B^2$, т.е. числото A е положително. Остава B да е отрицателно.

55. На чертежа са построени две окръжности с център точката O, а третата окръжност е с център M и се допира до другите две. Ако $OM = 1$, да се намери лицето на оцветената фигура.



Решение. Трите окръжности имат радиуси 1, 2 и 3. Лицето на оцветената фигура е

$$3^2\pi - 2^2\pi + 1^2\pi = 6\pi.$$

56. Хари и Джим играли на топчета. В началото те имали по равен брой топчета. В първата игра Хари спечелил 20 топчета, но при втората загубил $\frac{2}{3}$ от всичките си топчета. Така топчетата на Джим станали 4 пъти повече, отколкото топчетата на Хари. С колко топчета е започнала играта?

Решение. След първата игра топчетата на Хари се увеличили с 20, а на Джим намаляли с 20. Следователно преди втората игра Хари имал с 40 топчета повече от Джим.

Нека след втората игра Хари имал x топчета. Джим е имал 4 пъти повече, т.е. $4x$ топчета. Общият брой на топчетата е $5x$.

При втората игра Хари загубил $\frac{2}{3}$ от всичките си топчета и останал с $\frac{1}{3}$ от топчетата си, които са x. Следователно преди втората игра Хари е имал $3x$ топчета, а у Джим са били останалите $5x - 3x = 2x$ топчета. Тогава $3x - 2x = 40$, т.е. $x = 40$. Играта е започнала с $5.40 = 200$ топчета, по 100 на всеки от двамата.

57. Един от пет братя – Андрей, Васко, Димо, Тони или Юри, разбил прозореца. Те провели следния разговор.

Андрей: *Виновен е или Васко, или Тони.*

Васко: *Аз и Юри не сме виновни.*

Димо: *Един от вас казва истината, а другият лъже.*

Юри: *Димо, не си прав!*

Ако поне трима от братята казват истината, кой е разбил прозореца?

Решение. Или Димо, или Юри лъже. Тъй като поне трима от братята казват истината, то Андрей и Васко не лъжат. Следователно Тони е разбил прозореца.

58. Пет положителни числа a, b, c, d и e са такива, че

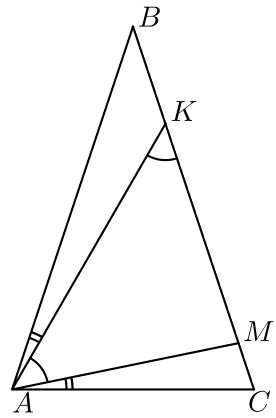
$$ab = 2, \quad bc = 3, \quad cd = 4, \quad de = 5.$$

На колко е равно отношението $e : a$?

Решение. Имаме

$$(ab)(cd) = 2.4 = 8, \quad (bc)(de) = 3.5 = 15 \Longrightarrow \frac{15}{8} = \frac{bcde}{abcd} = \frac{e}{a}.$$

59. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AB = BC$). На страната BC са взети точки K и M така, че K е между B и M, $KM = AM$ и $\sphericalangle MAC = \sphericalangle KAB$. Да се намери $\sphericalangle BAM$.



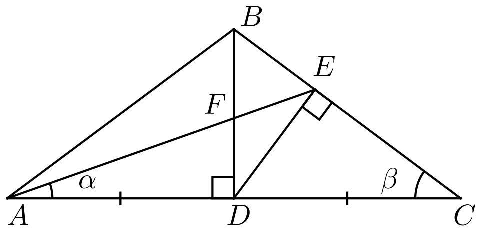
Решение. Нека $\sphericalangle MAC = \sphericalangle KAB = \alpha$. Триъгълникът AMK е равнобедрен, затова $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MKA = \beta$. Тъй като и $\triangle ABC$ е равнобедрен, имаме $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = 2\alpha + \beta$. От сбора на ъглите в $\sphericalangle ACK$ получаваме

$$(\alpha+\beta)+(2\alpha+\beta)+\beta = 180^\circ \iff 3(\alpha+\beta) = 180^\circ,$$

т.е. $\alpha + \beta = 60^\circ$. Остава да забележим, че $\sphericalangle BAM = \alpha + \beta$, т.е.$\sphericalangle BAM = 60^\circ$.

60. Точката D е среда на основата AC на равнобедренния триъгълник ABC. Точката E е петата на перпендикуляра от D към страната BC. Отсечките AE и BD се пресичат в точката F. Коя е по-дългата от отсечките BF и BE?

Решение. Да означим ъглите при основата на равнобедрения триъгълник ABC с β, т.е. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \beta$, а $\sphericalangle CAE = \alpha$. Изразяваме $\sphericalangle AEB = \alpha + \beta$ (външен за $\triangle ACE$), а $\sphericalangle EFB = \sphericalangle AFD = 90^\circ - \alpha$ (от $\triangle ADF$) и $\sphericalangle AED = \sphericalangle DEB - \sphericalangle AEB = 90^\circ - \alpha - \beta$.



В правоъгълния триъгълник DEC катетът е по-малък от хипотенузата, т.е. $DE < DC$ и тъй като $DC = AD$, получаваме неравенството $DE < AD$. Оттук в $\triangle ADE$ следва неравенството на срещулежащите ъгли

$$\sphericalangle DAE < \sphericalangle AED \iff \alpha < 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Последното неравенство може да запишем във вида

$$\alpha + \beta < 90^\circ - \alpha \iff \sphericalangle FEB < \sphericalangle EFB,$$

а оттук в $\triangle BEF$ получаваме неравенството на срещулежащите страни $BF < BE$.

ЛАГЕРНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ИГРИ НА АНГЛИЙСКИ ЕЗИК

Ивайло Кортезов

Летният математически лагер на Асоциация „Кенгуру без граници“ се проведе хотел „Аврора“ в курорта „Св. Св. Константин и Елена“ в периода 21–27 юли 2016. Типичната програма за всеки от дните включваше два учебни часа лекции, плаж сутрин и басейн следобед, както и две състезания („От 1 до 100“, „Математическа щафета“, „Математическа рулетка“, „Математически конквистадор“, „Математическа търсачка“, „Математическа шапка“) с продължителност по около 90 минути всяко. В част от състезанията бяха включени и задачи и думи на английски език с оглед засилващия се интерес в последните години към подготовка и участие в такива състезания.

Описанието на някои от състезателните формати може да намерите в предишните материали от рубриката. За първи път правим на лагер „Математическа шапка“, но е ясно, че и тя ще стане част от постоянния репертоар, понеже беше единодушно одобрена от децата. В това състезание отборите бяха 27 (по двама) и се разпределяха по 3 отбора на маса. Всяка маса получаваше шапка с около 40 сгънати листчета, всяко с математически термин на английски език, заедно с превода му на български. Играта протича в три фази. В първата фаза играчът, който е на ход, разполага с 45 секунди, в които тегли листче и трябва да обясни съдържанието му на партньора си с произволен брой думи, без да ползва думи с общ корен с обясняваната дума. При успех печели листчето с думата, тегли ново листче и т.н. до изпразване на шапката. Накрая всеки отбор регистрира общия брой спечелени от него листчета и ги връща в шапката. Във втората фаза обяснението трябва да стане с единствена дума, нямаща общ корен с обясняваната дума или с нейните пароними, а третата фаза е сходна, но обясняващият няма право да говори. В определени моменти отборите трябва да казват думите само на английски език. Класирането на всяка маса се определя от сбора от резултатите от трите фази: отборът с най-голям сбор печели 6 точки, вторият – 4 и третият – 2 (при равенство отборите получават средноаритметичното на полагащите им се точки). Проведохме три такива състезания, като във второто и третото издание разпределянето на отборите по масите ставаше според спечелените им точки в предните издания, така че да се срещат отбори със сходна сила, с които не са се срещали по-рано. В крайното класиране отборите бяха класирани според сбора от точките им от трите издания на играта, а при равенство – от сбора от спечелените им листчета във всичките 9 фази.

Участниците в състезанията реагираха с нестихващ ентусиазъм на постоянната необходимост да се борят с разнообразни математически предизвикателства. И на тях, и на лекциите децата работиха старателно и качествено и оставиха отлични впечатления у нас и у околните. Сега не се притеснявайте, няма да ви оставим на сухо, ето идват и задачите - в случая тези от четирите щафети (задачата на пост B ползва отговора на пост A, тази на пост C ползва отговора на B, а на D ползва отговора на C). Опитайте се да ги решите!

1A. Tom is 20 years old. He is twice as old as Ann was when Tom was as old as Ann is now. How old is Ann now?

1B. *Let N be the number you will receive.*
Four cards have eight different positive integers written on them (one on each side of each card). The product of the two numbers on each card is the same. The cards are put on a table with the numbers 20, 25, 30, N facing up. What is the smallest possible total of the 4 numbers facing down?

1C. *Let S be the number you will receive.*
In the triangle shown, the first diagonal line $1, 2, 3, 4, \ldots$ begins at 1 and each number after the first is one larger than the previous number. The second diagonal line $2, 4, 6, 8, \ldots$ begins at 2 and each number after the first is two larger than the previous number. The n-th diagonal line begins at n and each number after the first is n larger than the previous number. In which horizontal row does the number S first appear?

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \\ 3\ 4\ 3 \\ 4\ 6\ 6\ 4 \\ 5\ 8\ 9\ 8\ 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

1D. *Let R be the number you will receive.*
The integers from 1 to R are written on R tiles (one per tile). The tiles are turned face down. Two different tiles are turned up at random. What is the probability that the sum of the numbers on the two tiles will be a square? Express the number as fraction in lowest terms p/q and submit $p+q$ as a final answer.

2A. Each face of a cube is painted with exactly one colour. What is the smallest number of colours needed to paint a cube so that no two faces that share an edge are the same colour?

2B. *Let C be the number you will receive.*

How many bracelets can be made with 5 beads, if each of them can have one of C given colors?

2C. *Let B be the number you will receive.*
Chrissie wrote down the integers from 1 to B on a piece of paper and then correctly added up all the individual digits of the numbers. What sum did she obtain?

2D. *Let P be the number you will receive.*
What is the smallest possible sum of a set of positive integers whose product is P?

3A. Five postcards were put at random in five envelopes (one in each). It turned out that two of the postcards were in the correct envelopes, while the other three are in wrong ones. In how many different ways can this happen?

3B. *Let N be the number you will receive.*
What is the largest number of rectangles that can be obtained by drawing N segments?

3C. *Let S be the number you will receive.*
Alex wrote a four-digit number M. When he erased one of its digits, he obtained the three-digit number N. If $M + N = S$, find M.

3D. *Let M be the number you will receive.*
Andy has some marbles, Ben has more, Cody has even more and Dan has more than Cody. They have a total of M marbles. What is the largest possible number of marbles Andy can have?

4A. A disc is cut into 6 identical sectors. Each of them can be white or black. How many different colorings are possible? (Discs are considered identical after rotation, but not after a flip.)

4B. *Let D be the number you will receive.*
In three consecutive months there are D Sundays. How many Mondays are there?

4C. *Let M be the number you will receive.*
In how many ways can M identical coins be distributed among 3 children, so that each child gets at least two coins?

4D. *Let U be the number you will receive.*
A square is divided into U unit squares. How many rectangles (including squares) of area 10 have all their vertices in nodes of the grid?

Ето и решенията.

1A. Отговор 15.
Ann has been 10 when Tom has been x, and now Ann is x, so $20 - x = x - 10$, hence $x = 15$.

1B. Отговор 228.
As $\text{LCM}(15,20,25,30) = 300$, the product is a multiple of 300. It is not 300, as behind 15 needs to be 20; nor it is 600, as behind 20 needs to be 30; nor it is 900, as behind 30 needs to be 30. If it is 1200, the numbers on the back are 80, 60, 48, 40 and their sum is 228.

1C. Отговор 30.
Row R contains the products of pairs with sum $R+1$. As $228 = 22.3.19$, the least sum appears for 12 and 19. Then $R = 12 + 19 - 1 = 30$.

1D. Отговор 100.
The sum is above 2 and below 60; being a perfect square, it may be 4 (1 variant), 9 (4 variants), 16 (7 variants), 25 (12 variants), 36 (17 variants) или 49 (24 variants), or a total of 65 variants. There are $30.29/2 = 15.29$ possible pairs, so the probability is $13/87$ and we get $13 + 87 = 100$.

2A. Отговор 3.
We need 3 colours for the faces with common vertex. We can use the same colour for opposite faces.

2B. Отговор 39.
Type $xxxxx$: 3; type $xxxxy$: $3.2 = 6$; type $xxxyy$: $3.2 = 6$; type $xxyxy$: $3.2 = 6$; type $xxxyz$: 3; type $xxyxz$: 3; type $xxyyz$: 3; type $xyxyz$: 3; type $xyyxz$: $3.2 = 6$. Total: $4.6 + 5.3 = 39$. (Check via Cauchy-Frobenius Lemma: $\dfrac{243 + 4.3 + 5.27}{10} = 39$.)

2C. Отговор 240.
Units digits: $4.(1 + 2 + \cdots + 9) = 180$. Tens digits: $10.(1 + 2 + 3) = 60$. Total: 240.

2D. Отговор 16.
We have $240 = 24.3.5$. The sum does not increase when a term of type $a.b$ ($a \geq b \geq 2$) is replaced by $a + b$, so the least sum is $4.2 + 3 + 5 = 16$.

3A. Отговор 20.
The two correct postcards can be chosen in $5.4 : 2 = 10$ ways. Now for the first wrong postcard there are 2 possible wrong envelopes. For the remaining postcards there is a unique way to be put in the remaining envelopes. So there are $10.2 = 20$ possibilities.

3B. Отговор 2025.
We can use 10 horizontal and 10 vertical sticks to obtain a 9×9 grid. The shadow of each rectangle onto the base can be of length 1 (9 variants), of length 2 (8 variants), of length 3 (7 variants), ..., of length 8 (2 variants) or of length 9 (just 1 variant). So there are 45 variants for the "horizontal shadow" and the same number of variants for the "vertical shadow". Each rectangle is defined by its pair of shadows, which makes $45.45 = 2025$ rectangles.

3C. Отговор 1841.
As 2025 is odd, the erased digit is the last one. If $M = 10N + a$, then we have $11N + a = 2025$, so $a = 1$ and $N = 184$.

3D. Отговор 458.
We have $458 + 460 + 461 + 462 = 1841$. If Andy had 459 or more, the total number would be at least $459 + 460 + 461 + 462 = 1842$: a contradiction.

4A. Отговор 14.
We have 1 with 0 white, 1 with 1 white, 3 with 2 white, 4 with 3 white, 3 with 4 white, 1 with 5 white and 1 with 6 white. Total: $1+1+3+4+3+1+1 = 14$. (Check via Cauchy-Frobenius Lemma: $\dfrac{64 + 2.2 + 2.4 + 8}{6} = 14$.)

4B. Отговор 13.
This can happen only if the three months have a total of 92 days (they cannot have more). This means they have 13 weeks plus one day (that is clearly Sunday).

4C. Отговор 36.
Let us first give two coins to each child; we have 7 coins left. Write a sequence of 7 letters "C" and 2 letters "N" that will code the distribution as follows: "C" means "give a coin to the current child", while "N" means "go on to the next child". Each such sequence corresponds to a unique distribution. The number we need is hence the number of combinations of 9 elements taken 2 at a time, that is $9.8 : 2 = 36$.

4D. Отговор 64.
There are two 2×5 rectangles contained in each pair of adjacent rows or columns, or $10.2 = 20$ in total. Also, there are two "tilted" squares contained in each square 4×4 from the grid (each obtained by cutting off four right triangles of legs 1 and 3); we have $3.3 = 9$ squares 4×4, generating $2.9 = 18$ squares of area 10. In addition, there are two "tilted" rectangles contained in each rectangle 4×5 from the grid (each obtained by cutting off two right triangles of legs 1 and 2 and two right triangles of legs 4 and 2); we have $2.3.2 = 12$ rectangles 4×5, generating $2.12 = 24$ rectangles of area 10. Also, there are two rectangles obtained by cutting off two right triangles of legs 1 and 1 and two of legs 5 and 5 from the entire grid. In total there are $20 + 18 + 24 + 2 = 64$ such rectangles.

ха на куб

Рубриката „Ха на куб“ се води от Жен-И-Сен, колекционер на вицове, анекдоти и автентични смехории в математически контекст. Ще се радваме да се включите с коментари и авторски принос.

ВЪПРОСИ С НЕЕДНОЗНАЧНИ ОТГОВОРИ

За математиците често се говори, че били „сухари“, че нямали чувство за хумор и други подобни имагинерни съждения ... Истината е, че едно от основните приложения на математическите знания е човек да се смее на вицове, които са недостъпни за презиращите тази наука ... Предлагам ви вариации на въпроси, някои от които вероятно сте срещали „в друг вариант“ (типично за българските слушатели на вицове), но които се *мъдрят* по страниците на N $(N > 1)$ забележителни книжки, посветени на математиката и хумора ... За краткост ще означаваме въпросите и отговорите с инициалите им (при повече от един отговор, ще използваме долен индекс).

В. *Има ли глупави въпроси?*

О. Не, а отговори?

В. *Каква е разликата между аргумент и доказателство?*

О. За един разумен човек аргументът е достатъчен, но за останалите е необходимо доказателство,

В. *Какво ли мисли нулата за осмицата?*

О. Най-вероятно, че се е пристегнала прекалено много в талията ...

В. *Какво казало* 3,14 *на* π.

О. Действията ти не са рационални ...

В. *Как математикът упреква децата си?*

О. Казвал съм ви n пъти, казвал съм ви $n+1$ пъти ...

В. *Как математикът се обяснява в любов?*

$\mathbf{O_1}$. Да означим любовта ми към теб с $L(t)$, където t е времето. Тогава е в сила, че функцията $L(t)$ е монотонно растяща.

$\mathbf{O_2}$. Когато съм далеч от теб, сърцето ми е като $\{\}$.

В. *Защо математиците не обичат да шофират?*

О. Защото ширината на пътя е пренебрежима по отношение на дължината му ...

В. *Какво държи квадрата здраво на земята?*

О. Квадратният корен ....

В. *Дали професорът по статистика знае статистически вицове?*

О. Вероятно ...

В. *Може ли да Ви задам един въпрос?*

О. Ако става дума за „точно един“, вече го направихте и то без разрешение ...

А сега – „светлина, повече светлина“[1] от математическа гледна точка

В. *Колко математици са нужни за смяната на една крушка?*

O_1. Нула. Задачата е оставена за упражнение на читателя …

O_2. Нула. Математикът не може да сменя крушки, той само доказва, че това може да бъде направено.

O_3. Един – дава задачата на 4 програмисти, след като я свежда до вече решена задача.

O_4. Един (ако формулирате задачата с известни нему термини).

O_5. От предишни резултати е известно, че 1 математик може да смени крушка. Ако допуснем, че k на брой математици могат да сменят крушка и ако един ги наблюдава, то $k+1$ математици могат да сменят крушка. Следователно (по индукция) произволен брой математици могат да сменят една крушка.

O_6. Отговорът е очевиден

В. *Колко докторанти по математика са нужни за смяната на една крушка?*

О. Само един, но му трябват 5–6 години,

В. *Колко класически геометри са нужни за смяната на една крушка?*

О. Нула. Задачата е нерешима с линийка и пергел.

В. *Колко специалисти по теория на числата са нужни за смяната на една крушка?*

О. Никой не знае точния брой, но има хипотеза, че е елегантно просто число.

В. *Колко специалисти по числен анализ са нужни за смяната на една крушка?*

О. 3.99123 след 6 итерации

В. *Колко административни директори са нужни за смяната на една крушка?*

О. Че какво ѝ е на старата?

Хумор в къси панталонки

Майката: *Иванчо, какво каза докторът, когато му подари календара?*

Иванчо: Че дните му били преброени.

Иванчо: *Какво е това „неизвестно“ в математиката?*

Марийка: Когато учителката не знае за какво говори, го нарича „неизвестно“.

Иванчо: *А какво всъщност е алгебрата?*

Марийка: В алгебрата числата имат само символично значение…

[1] Твърди се, че това са последните думи на Гьоте.

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 21.09.2016 г.
Печат „Стилует“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.