МАТЕМАТИКА

БРОЙ 6
2018 г.
ГОДИНА LVII

ОДОБРЕНО ОТ МОН КАТО УЧЕБНО ПОМАГАЛО
с протокол 9/10.08.2000 г.

НОСИТЕЛ НА ОРДЕН „КИРИЛ И МЕТОДИЙ“ — първа степен

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Проф. дмн Петър Бойваленков – главен редактор
Ас. Невена Събева – зам. главен редактор
Чл.-кор. дмн Генчо Скордев
Проф. дмн Емил Колев
Проф. д-р Иван Тонов
Проф. дмн Николай Николов
Доц. д-р Евгения Сендова
Доц. д-р Ивайло Кортезов
Доц. д-р Марин Маринов
Александър Иванов
Емил Карлов
Татяна Пархоменко – графичен дизайн и предпечат
Йовко Коларов – художествено оформление

Не се допуска препечатване и заимстване на текстове, условия на задачи, решения и пр. без разрешение на редакцията.

© Издание на „Списание Математика“ ЕООД
ISSN 0204-6881

12. ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „Академик Стефан Додунеков“

Емил Колев, ИМИ–БАН

На 9–11.11.2018 г. в София се проведе дванадесетото издание на Есенния математически турнир (ЕМТ). Турнирът се проведе в сградата на Ректората на СУ „Св. Климент Охридски“, като участваха около 800 ученици от цялата страна. Резултатите от ЕМТ са валидни за определяне на разширения национален отбор за Европейската олимпиада за момичета и Всерусийската олимпиада.

Ето и имената на наградените:

8. клас

Първа награда: Илияс Номан (СМГ), Иван Тагарев (СМГ), Божидар Димитров (ПМГ, Силистра), Георги Начев (СМГ), Ивайла Радкова (125 СУ).

Втора награда: Никола Цачев (ПЧМГ), Цветелина Илиева (ППМГ, Бургас), Ванеса Мицева (СМГ), Благо Гунев (СМГ), Петя Чиликова (ППМГ, Бургас), Жара Еленска (ПМГ, В. Търново), Виктор Михайлов (СМГ), Огнян Арсов (МГ, Варна), Маргулан Исмолдаев (МГ, Варна), Петър Ивановски (АК).

Трета награда: Антония Илиева (СМГ), Камелия Михайлова (ППМГ, Бургас), Рами Аид Хенауи (ПЧМГ), Мартина Маркова (МГ, Пловдив).

9. клас

Първа награда: Борислав Кирилов (ПЧМГ), Мартин Копчев (ПМГ, Габрово), Христо Борисов (ППМГ, Бургас), Валери Ванков (АК), Георги Златинов (СМГ).

Втора награда: Десислава Николова (СМГ), Милко Бакалов (СМГ), Филип Тодоров (СМГ), Георги Динков (СМГ), Ангел Райчев (125 СУ), Андон Тодоров (СМГ), Стефанка Манахова (СМГ), Калина Николова (СМГ), Цветослав Мавродиев (МГ, Варна), Ивайло Иванов (МГ, Варна).

Трета награда: Георги Петков (СМГ), Константин Илиев (СМГ), Персиан Турсунов (СМГ), Данаил Георгиев (ППМГ, Бургас), Румяна Иванова (СМГ), Любослав Стефанов (ПЧМГ), Павел Николов (ПЧМГ), Димитър Неделчев (МГ, Варна), Мартин Димитров (125 СУ).

10. клас

Първа награда: Кънг Виет До (СМГ), Стефан Хаджистойков (СМГ), Светлин Лалов (СМГ).

Втора награда: Никола Стайков (СМГ), Виктор Колев (СМГ), Мартин Стефанов (СМГ), Николай Георгиев (СМГ), Иван Георгиев (СМГ), Маргарита Стефанова (СМГ), Никола Коларов (ППМГ, Бургас).

Трета награда: Михаела Гледачева (ПЧМГ), Йордан Илиев (СМГ), Мартин Василев (СМГ), Галин Тотев (ППМГ, Бургас), Виктор Кожухаров (МГ, Русе).

11. клас

Първа награда: Евгени Кайряков (СМГ), Петър Лангов (СМГ), Иво Петров (СМГ).

Втора награда: Димитър Опърлаков (МГ, Варна), Александър Милчев (НПМГ), Алек Димитров (ПЧМГ), Кристиан Минчев (ППМГ, Бургас), Матей Петков (НПМГ).

Трета награда: Владимир Железарски (СМГ), Спасиян Тодоров (ПЧМГ), Мартин Димитров (СМГ), Мария Палашева (НПМГ), Александър Желязков (АК).

12. клас

Първа награда: Иван-Александър Мавров (СМГ), Борислав Антов (СМГ), Кристиян Василев (ПЧМГ).

Втора награда: Борис Барбов (СМГ), Орлин Кучумбов (ППМГ, Бургас), Пламен Иванов (СМГ), Кирил Трифонов (СМГ).

Трета награда: Георги Ангелов (СМГ), Александра Савова (СМГ), Люба Конова (СМГ).

Условия на задачите

Задача 8.1. Да се докаже, че при $k \geq 25$ неравенството

$$x^4 + (2k-99)x^2 - 10x + k^2 + k \geq 0$$

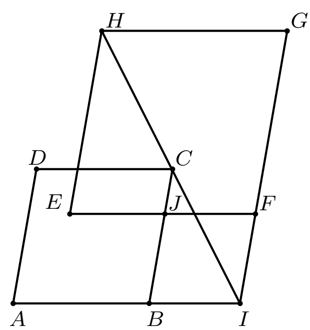
е изпълнено за всяко реално число x.

Задача 8.2. Ромбовете $ABCD$, $EFGH$ и $BIFJ$ със страни съответно a, b и c са разположени, както е показано на чертежа ($B \in AI$, $F \in IG$) и C е среда на IH.

а) Да се намери отношението $a : b : c$.

б) Да се докаже, че E е медицентърът на $\triangle ACD$.

в) Да се докаже, че правата AE разполовява страната GH.



Задача 8.3. Нека M е множеството от всички петцифрени числа от вида $\overline{a_1a_20b_1b_2}$, които са точни квадрати и $\overline{b_1b_2} = \overline{a_1a_2} + 1$.

а) Да се намерят всички елементи на M, които са кратни на 5.

б) Да се намерят всички елементи на M.

Задача 8.4. По колко различни начина квадратчетата в таблица 3×7 могат да се оцветят в жълт, червен или син цвят така, че да няма съседни едноцветни квадратчета?

(Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.)

Задача 9.1. Дадено е уравнението

$$x^2+\frac{64}{x^2}=a\left(x-\frac{8}{x}\right)+2,$$

където a е параметър, естествено число. За кои стойности на a уравнението има четири рационални корена?

Задача 9.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $BD\perp AD$. Точките A_1 и A_2 са петите на перпендикулярите, спуснати от A съответно към правите CD и BC. Отсечката A_1A_2 пресича AB в точка P, а $AC\cap BD=O$. Ако правите OP и AD се пресичат в точка M, докажете че точките A_1, O, A_2 и M лежат на една окръжност.

Задача 9.3. Подмножество M на множеството $\{1,2,\dots,2018\}$ се нарича „добро“, ако за всеки две числа a и b от M, за които $b>a$ и $b-a$ се дели на 30, числата $a+k\dfrac{b-a}{30}$ за $k=1,2,\dots,29$ са също от множеството M. Колко са добрите множества с 218 елемента?

Задача 9.4. Намерете всички трицифрени естествени числа n, за които съществува естествено число k, такова, че броят на естествените двойки решения (x,y) на системите от неравенства

$$\left|\begin{array}{c} x+y\leqq n+1\\ y\geqq k\end{array}\right.\quad\text{и}\quad\left|\begin{array}{c} x+y\leqq n+1\\ y<k\end{array}\right.$$

да е един и същ. Пример за едноцифрено n, удовлетворяващо условието, е $n=3$, където при $k=2$ броят решения на двете системи е по 3: $\{(1,2),(2,2),(1,3)\}$ на първата, $\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$ на втората.

Задача 10.1. Да се намерят всички неотрицателни стойности на реалния параметър a, за които решенията на неравенството

$$(a-4x^2)^2-(2a+1)x^2+6x^3\leqq 0$$

образуват краен затворен интервал.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB. Ако означим с P и R центровете на външновписаните окръжности за $\triangle AMC$ към страните AM и CM съответно, а с Q и T центровете на външновписаните окръжности за $\triangle BMC$ към страните BM и CM съответно, то да се докаже, че точките P, Q, R и T лежат на една окръжност.

Задача 10.3. В окръжност Γ с радиус 1 е построена хорда, която отрязва дъга с дължина $\sqrt{2}\pi$. За кои естествени n, $3 \leq n \leq 2018$, в Γ можем да впишем правилен n-ъгълник, така че като последователно номерираме по часовниковата стрелка върховете му с числата от 1 до n, сумите на числата от двете страни на хордата да са равни?

Задача 10.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10110900 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.
(Затворен маршрут е последователност от различни градове $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \geq 3$, за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и A_k е свързан с път с A_1.)

Задача 11.1. Дадени са редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $b_1 = 7$, $b_2 = 13$ и

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1}, \quad b_{n+1} = 2b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n$$

при $n \geq 2$. Да се намерят всички n, за които a_n дели b_n.

Задача 11.2. Точки M и N са среди съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точка P е от описаната около $\triangle CMN$ окръжност k, като P и C лежат в различни полуравнини относно правата AB. Отсечката PA пресича k в точка M_1, а отсечката PB пресича k в точка N_1. Ако отсечките MM_1 и NN_1 се пресичат в точка X, да се докаже, че $\sphericalangle ACX = \sphericalangle BCP$.

Задача 11.3. Да се намерят всички прости числа $p < 2018$, за които съществува множество от естествени числа $M = \{a, b, a+1, b-1\}$, за което:

1. $p \in M$
2. Числата a и b имат едни и същи прости делители;
3. Числата $a+1$ и $b-1$ имат едни и същи прости делители.

Задача 11.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10112018 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.
(Затворен маршрут е последователност от различни градове A_1, A_2, $\ldots$, A_k, $k \geqq 3$, за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и A_k е свързан с път с A_1.)

Задача 12.1. Да се докаже, че за всяка квадратна функция $f(x) = x^2 + px + q$ е изпълнено:

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \geqq \frac{1}{8}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 12.2. С диаметър страната AB на равностранен $\triangle ABC$ е построена окръжност k. Окръжност се допира вътрешно до k в точка T и до страните AB и AC. Допирателната към k в точка T пресича отсечката BC в точка Q. Ако $AB = 6$, да се намери дължината на отсечката CQ.

Задача 12.3. а) Да се намерят всички полиноми $f(x, y)$ с реални коефициенти такива, че $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ за произволни $x, y, z \in \mathbb{R}$.

б) Съществува ли функция $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, която не е полином, но горното равенство е в сила за произволни $x, y, z > 0$?

Задача 12.4. Безкрайно множество M от естествени числа се нарича „добро“, ако съществува естествено число $n \geqq 2$ със свойството: за всеки две числа a и b от M, за които $b > a$ и $b - a$ се дели на n, числата

$$a + k\frac{b - a}{n}$$

за $k = 1, 2, \dots, n - 1$ са също от множеството M.

За добро множество от естествени числа $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ с $B(M)$ означаваме втория по големина елемент на M.

Ако $M_1, M_2, \dots, M_{2018}$ са две по две непресичащи се добри множества да се намери най-малката стойност на

$$B(M_1) + B(M_2) + \dots + B(M_{2018}).$$

Задачите са предложени от: Иван Тонов –8.1, 8.3; Невена Събева – 8.2, 8.4; Диана Данова – 9.1, 9.2, 10.1; Александър Иванов – 9.3; Станислав Харизанов – 9.4, 10.3; Стоян Боев – 10.2; Александър Иванов – 10.4, 11.1, 11.2, 11.4, 12.4; Емил Колев – 11.3; Асен Божилов – 12.1; Емил Колев – 12.2; Николай Николов – 12.3.

Решения на задачите

8.1. Разлагаме израза от лявата част на неравенството на множители:

$$\begin{aligned} x^4 + (2k - 99)x^2 - 10x + k^2 + k &= (x^2 - 10x + k)(x^2 + 10x + k + 1) \\ &= ((x - 5)^2 + k - 25)((x + 5)^2 + k - 24). \end{aligned}$$

При $k \geqq 25$ за множителите имаме $(x - 5)^2 + k - 25 \geqq 0$ и $(x + 5)^2 + k - 24 > 0$. Следователно тяхното произведение е неотрицателно.

8.2. а) Ако $L = DC \cap HE$, то $EJCL$ е успоредник. От $\triangle BIC \cong \triangle LCH$ следва, че $BI = LC \iff b = 2c$ и $BC = LH \iff a = b + c - a$, откъдето $2a = 3c$. Получаваме $a : b : c = 3 : 4 : 2$.

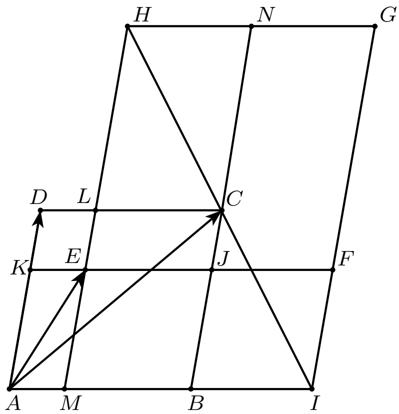
б) Ако $K = EF \cap AD$ и $M = AB \cap EH$, то $AMEK$ е успоредник със страни

$$AM = a + c - b = \frac{1}{3}a,\ AK = b - c = \frac{2}{3}a$$

и

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

следователно E е медицентър на $\triangle ACD$.



в) Ако N е средата на HG, то CN е средна отсечка в $\triangle HIG$, следователно $CN = \dfrac{1}{2}(b + c) = a$, $CN || IG || AD$, откъдето следва, че $ACND$ е успоредник. Тогава AN разполовява CD, а от б) следва, че AE разполовява CD; получихме, че $N \in AE$.

Същият факт може да се докаже, като се забележи, че

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AE}.$$

8.3. Отговор. 24025 и 75076.

Нека $N = \overline{a_1a_20b_1b_2} = n^2$. Тогава $b_2 \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Ако $b_2 = 0$, тъй като N е точен квадрат, то $b_1 = 0$, което е невъзможно ($\overline{b_1b_2} = \overline{a_1a_2} + 1 \geqq 11$).

Ако $b_2 = 5$, тъй като N е точен квадрат, то $b_1 = 2$. Получаваме числото $24025 = 5^2.31^2$, което е решение на задачата.

Остава да разгледаме $b_2 \in \{1, 4, 6, 9\}$, т.е.

$$a_2 \in \{0, 3, 5, 8\}. \tag{1}$$

Имаме

$$N = 1001\,\overline{a_1a_2} + 1 = n^2. \tag{2}$$

Тъй като $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ и $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$, то
$n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16, 20, 24, 25, 36 \pmod{40}$. Оттук и от (2) следва, че

$$\overline{a_1a_2} \equiv 0, 3, 8, 15, 19, 23, 24, 35, 39 \pmod{40}. \tag{3}$$

От (1) и (3) следва, че

$$\overline{a_1a_2} \in \{40, 80, 43, 83, 48, 88, 15, 55, 95, 23, 63, 35, 75\}. \tag{4}$$

Освен това $n^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod 9$ и от (2) следва, че

$$\overline{a_1a_2} \equiv 0, 3, 4, 6 \pmod 9. \tag{5}$$

От (4) и (5) получаваме, че

$$\overline{a_1a_2} \in \{40, 48, 15, 63, 75\}.$$

Проверяваме петте възможности. Числата $40041 = 3^3.1483$, $15016 = 2^3.1877$ и $63064 = 2^3.7883$ не са точни квадрати заради нечетните показатели на 2 или 3 в разлагането им. Числото 48049 е просто (за да се види, че 48049 не е точен квадрат, може да се използва и че квадратичните остатъци по модул 17 са 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16, а $48049 \equiv 7 \pmod{17}$). Числото $75076 = 2^2.137^2$ е решение на задачата.

8.4. Оцветяване без едноцветни съседни квадратчета ще наричаме *добро.*

Последният стълб на добре оцветена таблица е от вида

$$1)\ \begin{array}{|c|}\hline x\\\hline y\\\hline x\\\hline\end{array} \qquad \text{или} \qquad 2)\ \begin{array}{|c|}\hline x\\\hline y\\\hline z\\\hline\end{array}\,,$$

където x, y и z са различни цветове.

Нека a_n е броят на различните добри оцветявания на таблица $3 \times n$, при които последният стълб е от вид 1), т.е. е оцветен в два цвята. С b_n означаваме броя на различните добри оцветявания на таблица $3 \times n$, при които последният стълб е от вид 2), т.е. е оцветен в три различни цвята. Всички добри оцветявания на таблица $3 \times n$ са $s_n = a_n + b_n$ на брой.

Добрите оцветявания на таблица $3 \times n$ се получават, като добрите оцветявания на таблица $3 \times (n-1)$ от вид 1) се продължат по някой от следните пет начина:

$$\begin{array}{|c|}\hline x\\\hline y\\\hline x\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline x\\\hline y\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline z\\\hline x\\\hline z\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline x\\\hline z\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline z\\\hline x\\\hline y\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline z\\\hline y\\\hline\end{array}$$

или като добрите оцветявания на таблица $3 \times (n-1)$ от вид 2) се продължат по някой от следните четири начина:

$$\begin{array}{|c|}\hline x\\\hline y\\\hline z\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline x\\\hline y\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline z\\\hline x\\\hline y\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline z\\\hline y\\\hline\end{array}\,, \begin{array}{|c|}\hline y\\\hline z\\\hline x\\\hline\end{array}\,.$$

Следователно

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \quad \text{и} \quad b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

и като съберем равенствата и използваме, че $b_n = 2(a_{n-1} + b_{n-1}) = 2s_{n-1}$, получаваме

$$s_n = a_n + b_n = 5a_{n-1} + 4b_{n-1} = 5(a_{n-1} + b_{n-1}) - b_{n-1} = 5s_{n-1} - 2s_{n-2}.$$

Остава да намерим $a_1 = b_1 = 6$, $s_1 = 12$, $s_2 = 5.6 + 4.6 = 54$ и да пресметнем първите 7 члена на редицата: $12, 54, 246, 1122, 5118, 23346, 106494$.

9.1. *Отговор.* $a = 9$.

9.2. Тъй като AA_2BD е правоъгълник, то $A_2B = AD = BC$ и значи B е среда на A_2C. Но $BP \parallel CA_1$, следователно BP е средна отсечка в $\triangle CA_1A_2$. Четириъгълникът AA_2CA_1 е вписан с център O, следователно OP е симетралата на A_1A_2, $\triangle MA_2O \cong \triangle MA_1O$ и $\sphericalangle MA_1O = \sphericalangle MA_2O$.

Остава да покажем, че тези ъгли са прави, като за целта е достатъчно да докажем, че четириъгълникът MA_2OD е вписан. Нека означим $\sphericalangle DCB = \alpha$. Използвайки, че PA_2BO е вписан, получаваме $\sphericalangle MOA_2 = \sphericalangle ABA_2 = \sphericalangle DCB = \alpha$. От друга страна, DB е височина и медиана в $\triangle A_2CD$, следователно този триъгълник е равнобедрен и от успоредността на правите AD и BC получаваме $\sphericalangle MDA_2 = \sphericalangle DA_2C = \sphericalangle DCA_2 = \alpha$. От равенството $\sphericalangle MOA_2 = \alpha = \sphericalangle MDA_2$ заключаваме, че MA_2OD е вписан, с което задачата е решена.

Забележка. Ако $AA_1 \cap DC = X$, $AA_2 \cap BC = Y$, то разглежданата окръжност е окръжността на деветте точки за $\triangle XYC$.

9.3. *Отговор* 2300. Нека M е добро множество и да наредим елементите на M по големина $a_1 < a_2 < \cdots < a_{218}$. Всеки 30 последователни елемента на M дават пълна система от остатъци по модул 30 (докажете!).

Следователно $a_i \equiv a_{i+30} \pmod{30}$ за всяко i и ако означим с $d = \dfrac{a_{i+30} - a_i}{30}$, то $a_{i+k} = a_i + kd$ за всяко $k = 0, 1, \ldots, 30$. Доказахме, че всеки 30 последователни члена на M образуват пълна система остатъци по модул 30, като всеки елемент се получава от предишния с прибавяне на едно и също число d. Следователно това свойство е вярно за всички елементи на M, като d е взаимнопросто с 30.

Тъй като $2018 = 201.10{+}8 < 217.10{+}1$, то заключаваме, че $d \leqq 9$ и $(d, 30) = 1$, което води до единствените възможности $d \in \{1, 7\}$.

При $d = 1$ имаме 1801 добри множества, тъй като $217.1 + 1 = 218 \leqq a_{218} \leqq 2018$ и всеки различен избор на a_{218} води до различно множество M.

При $d = 7$ имаме 499 добри множества, тъй като $217.7 + 1 = 1520 \leqq a_{218} \leqq 2018$. Окончателно, има $1801 + 499 = 2300$ различни множества M.

9.4. Естествените двойки решения (x, y) на неравенството $x + y \leq n + 1$ са целочислените възли в правоъгълен, равнобедрен триъгълник с върхове $(1, 1)$, $(1, n)$ и $(n, 1)$. Следователно за всяко естествено $1 \leq s \leq n$, броят решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y \leq n + 1 \\ \quad y = s \end{array} \right.$$

е точно $n{+}1{-}s$. Нека означим $\ell = n{+}1{-}k$. Тогава първата система в условието на задачата има $\dfrac{\ell(\ell+1)}{2}$ двойки естествени решения (x, y), докато всички решения на двете системи заедно са $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Задачата се свежда до намирането на такива трицифрени n, за които съществува естествено ℓ, такова че е изпълнено следното тъждество:

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}. \tag{1}$$

Умножавайки двете страни по 8 и прибавяйки единица към тях, стигаме до еквивалентното уравнение

$$(2\ell + 1)^2 = n^2 + (n+1)^2. \tag{2}$$

Да означим $y = 2\ell + 1$ и $x = 2n + 1$. Тогава след елементарни преобразувания (2) се трансформира в уравнението на Пел

$$x^2 - 2y^2 = -1, \tag{3}$$

за което $(1, 1)$ е фундаментално решение. Следователно всичките му решения (x_m, y_m) се задават чрез формулата:

$$x_m + \sqrt{2}y_m = (1 + \sqrt{2})^{2m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

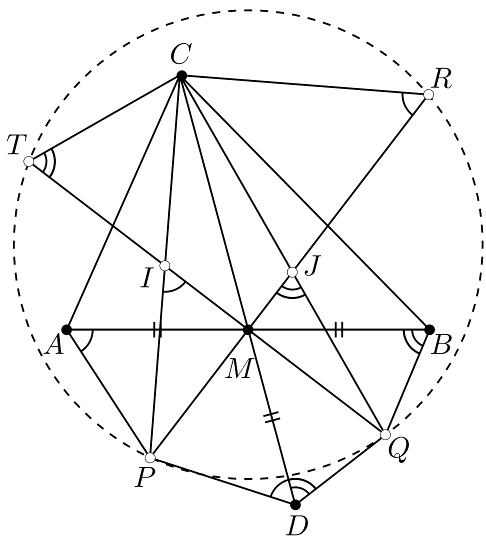
Измежду тях, ние търсим тези x_m, при които $100 \leq \frac{x_m - 1}{2} \leq 999$. Пресмятането на първите няколко решения води до $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (7, 5)$, $(x_3, y_3) = (41, 29)$, $(x_4, y_4) = (239, 169)$, $(x_5, y_5) = (1393, 885)$. Лесно се вижда, че x_6 вече е твърде голямо и води до четирицифрено n. Следователно, единствено x_4 и x_5 удовлетворяват условието и водят до двете решения на задачата: $n = 119$, съответно $n = 696$. За тях съответните ℓ са $\ell = 84$ и $\ell = 442$ и значи $k = 36$, респективно $k = 225$.

10.1. *Отговор* $a = 0$.

10.2. Нека I и J са центровете на вписаните в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ окръжности, а D е точка от лъча $CM^{\rightarrow}$, такава че $MD = MA = MB$. Тъй като $APMI$ и $CRMI$ са вписани четириъгълници (в окръжности с диаметри PI и RI съответно) и освен това $\triangle AMP \cong DMP$ (по първи признак), то

$$\sphericalangle MDP = \sphericalangle MAP = \sphericalangle MIP = \sphericalangle MRC.$$

Следователно $CPDR$ е вписан четириъгълник и аналогично $CQDT$ е вписан четириъгълник. Тогава $MP.MR = MD.MC = MQ.MT$, т.е. точките P, Q, R и T лежат на една окръжност, с което доказателството е завършено.



10.3. В правилен n-ъгълник на всяка страна отговаря *елементарна* дъга с дължина $\frac{2\pi}{n}$. Да означим с k броят върхове на многоъгълника, принадлежащи на дъгата с дължина $\sqrt{2}\pi$. Тогава тази дъга съдържа изцяло $(k-1)$ елементарни дъги и (някакви) части от други две елементарни дъги, т.е.

$$(k+1)\frac{2\pi}{n} > \sqrt{2}\pi \Longrightarrow k > \frac{n}{\sqrt{2}} - 1.$$

От друга страна, тъй като

$$1+2+\cdots+\left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil > \frac{n(n+\sqrt{2})}{4} > \frac{n(n+1)}{4} = \frac{1+2+\cdots+n}{2},$$

сумите от двете страни на хордата могат да са равни единствено, ако $k < \left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil$. Следователно $k = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$. Най-малката възможна сума при k на брой върха е когато тези върхове са първите k номерирани и тогава тази сума е равна на $k(k+1)/2$. Получаваме уравнението:

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}. \tag{4}$$

Следващата най-малка сума имаме, когато сме взели върховете от n до $k-1$, тъй като $n+1 < 2k+1$. В този случай достигаме до уравнението

$$\frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n-3)}{4}. \tag{5}$$

Понеже $\sqrt{2} < 3/2$, то $2n < 3k$ и следващата най-малка сума е $n-1+n+1\cdots+k-2$, при която получаваме уравнението:

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{n(n-7)}{4} + 1. \tag{6}$$

Четвъртата по големина сума е $2+3+\cdots+k+1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + k$. Но използвайки, че $\sqrt{2} > 7/5$, получаваме

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)}{2} + k &= \frac{k(k+3)}{2} \geq \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{2}}-1\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2}}+2\right)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{(\sqrt{2}-1)n-4}{4} > \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n-10}{10},\end{aligned}$$

откъдето следва, че при $n \geqq 10$ единствените възможности за равенство на сумите по дъгите са при (k,n) удовлетворяващи едно от трите уравнения (4), (5), или (6), като едновременно с това трябва да бъде изпълнено и $k = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$. Умножавайки двете страни на всяко от уравненията по 16 и след елементарни преобразувания, получаваме съответно

$$(2n+1)^2 - 2(2k+1)^2 = -1, \qquad (2n-3)^2 - 2(2k-1)^2 = 7, \qquad (2n-7)^2 - 2(2k-3)^2 = 31.$$

За обобщеното уравнение на Пел $x^2 - 2y^2 = d$ е известно, че ако (x_1, y_1) е едно решение, а (x_2, y_2) е решение на $x^2 - 2y^2 = 1$, то $(x_1x_2 + 2y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ е отново решение на $x^2 - 2y^2 = d$. Обратно, всички целочислени двойки решения се генерират посредством едно или няколко фундаментални решения на обобщеното уравнение и фундаменталното решение на класическото уравнение, което в случая е $(3,2)$. Задачата се свежда до намиране на фундаменталните решения за всяко от горните три уравнения и рекурсивното прилагане на формулата $(3x+4y, 2x+3y)$ за генериране на всяко следващо решение от предишното във всеки от фундаменталните клонове.

Едно от фундаменталните решения се получава при заместване с $k=n=0$ и взимане на абсолютна стойност. То е $(1,1)$, $(3,1)$, съответно $(7,3)$ за всяко от трите уравнения. Уравнението $x^2-2y^2=-1$ няма други фундаментални решения и следователно неговите решения са

$$(x_m, y_m) : \{(1,1),(7,5),(41,29),(239,169),(1393,985),\dots\}.$$

За $m=\{2,3,4,5\}$, получаваме $n=\{3,20,119,696\}$. Следващото генерирано $n=4059$ надхвърля 2018. Ясно е, че при всеки от тези случаи може да се впише правилен n-ъгълник с исканите свойства, защото

$$\frac{\left(\frac{n}{\sqrt{2}}-1\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)}{2}=\frac{n(n-\sqrt{2})}{4}<\frac{n(n+1)}{4}=\frac{k(k+1)}{2}$$

и значи удовлетворяваме изискването $k=\left[\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right]$.

Уравнението $x^2-2y^2=7$ има второ фундаментално решение $(5,3)$ и решенията му се генерират от двата клона $\{(3,1),(13,9),(75,53),(437,309),(2547,1801),\dots\}$ и $\{(5,3),(27,19),(157,111),(915,647),\dots\}$. По-големите решения вече не удовлетворяват условието $n\leq 2018$ и не ги разглеждаме. Така виждаме, че

$$(n,k)=\{(3,1),(4,2),(8,5),(15,10),(39,27),(80,56),(220,155),(459,324),(1275,901)\}.$$

Директно се проверява, че при всички тези двойки $k=\left[\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right]$ и значи съответните n са решение на задачата.

Уравнението $x^2-2y^2=31$ има второ фундаментално решение $(9,5)$ и решенията му се генерират от двата клона $\{(7,3),(33,23),(191,135),(1113,787),\dots\}$ и $\{(9,5),(47,33),(273,193),(1591,1125),\dots\}$. По-големите решения вече не удовлетворяват условието $n\leqq 2018$ и не ги разглеждаме. Така виждаме, че

$$(n,k)=\{(7,3),(8,4),(20,13),(27,18),(99,69),(140,98),(560,395),(799,564)\}.$$

Директно се проверява, че единствено при $n=\{7,140,560,799\}$ е изпълнено $k=\left[\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right]$ и значи само тези n са решение на задачата.

Остава да проверим случаите $n=\{5,6,9\}$. Но тези числа са от вида $n=4\ell+1$ или $n=4\ell+2$, сумата на числата във върховете на n-ъгълника $n(n+1)/2$ не е четно число и няма как да я разделим на две равни части, което автоматично ги изключва.

Окончателно получихме, че всички решения на задачата са:

$$n\in\{3,4,7,8,15,20,39,80,119,140,220,459,560,696,799,1275\}.$$

10.4. *Отговор* $k=5055450$. Нека $N=10110900$ и да разгледаме граф G с върхове дадените градове и ребра – пътищата между тях. Всеки връх на G е от степен 3. Трябва да намерим минималното k, за което винаги можем да оцветим k върха на G така че всеки цикъл да съдържа оцветен връх.

Да оцветим всички върхове на графа в червено. Ще преоцветяваме някои върхове в синьо по следното правило: Ако при оцветяването на даден връх в синьо не възниква изцяло син цикъл, го правим. Продължаваме по този начин докато не може да оцветим нов връх в синьо. Нека в този момент имаме x червени и $N - x$ сини върха. От всеки червен връх A поставяме две стрелки към двата сини върха от цикъла, който се получава при оцветяване на A в синьо.

Лесно се вижда, че във всеки син връх влизат най-много две стрелки. Следователно $2x \leq 2(N - x)$, т.е. $x \leq \dfrac{N}{2}$.

Тъй като N се дели на 4, да разгледаме граф съставен от $\dfrac{N}{4}$ пълни четириъгълници (четири върха, всеки два от които са свързани с ребро). Лесно се вижда, че във всеки такъв четириъгълник трябва да оцветим поне два върха. Следователно са необходими поне $\dfrac{N}{2} = 5055450$ оцветени върха.

11.1. *Отговор* $n = 15t + 11$.

11.2. Нека $NN_1 \cap AB = X_1$. От $\sphericalangle N_1X_1B = \sphericalangle N_1CM$ следва, че N_1X_1CB е вписан четириъгълник. Оттук $\sphericalangle BN_1C = \sphericalangle BX_1C$, откъдето $\sphericalangle AM_1C = \sphericalangle AX_1C$, т.е. AM_1X_1C е вписан четириъгълник. Следователно

$$\sphericalangle X_1M_1C = \sphericalangle X_1AC = \sphericalangle MNC = \sphericalangle MM_1C,$$

т.е. M_1, X_1 и M лежат на една права и значи $X \equiv X_1$.

Нека BP пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка K. Сега имаме $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ABK = \sphericalangle XCN_1$ (тъй като N_1XCB е вписан) и $\sphericalangle KCP = \sphericalangle BCN_1$ (от $FT \parallel KB$). От последните две равенства следва, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle XCB$.

11.3. *Отговор* 3, 5, 17 и 257. Ако $a = p$ имаме $b = p^n$ и числата $p + 1$ и $p^n - 1$ имат едни и същи прости делители. Нека q е прост делител на $p - 1$. Тъй като $p - 1$ дели $p^n - 1$ за всяко n, то q дели и $p^n - 1$. Понеже $p + 1$ и $p^n - 1$ имат едни и същи прости делители, то q дели и $p + 1$. Следователно q дели $(p+1) - (p-1) = 2$, т.е. $q = 2$. Следователно $p - 1$ няма нечетни делители, т.е. $p - 1 = 2^t$ или $p = 2^t + 1$.

Ако $b = p$ имаме $a = p^n$ и числата $p^n + 1$ и $p - 1$ имат едни и същи прости делители. Нека q е прост делител на $p - 1$ и $p^n + 1$. Тъй като $p - 1$ дели $p^n - 1$ за всяко n, то q дели и $p^n - 1$. Следователно q дели $(p^n + 1) - (p^n - 1) = 2$, т.е. $q = 2$. Следователно $p - 1$ няма нечетни делители, т.е. $p - 1 = 2^t$ или $p = 2^t + 1$.

Случаите когато $a + 1 = p$ или $b - 1 = p$ са аналогични на разгледаните.

Получихме, че ако съществува просто число p с исканите свойства, то $p = 2^t + 1$. Числата $a = 2^t + 1$, $b = (2^t + 1)^2$ удовлетворяват условието, защото $a + 1 = 2^t + 2$ и $b - 1 = 2^t(2^t + 2)$ имат едни и същи прости делители.

Простите числа $p = 2^t + 1 < 2018$ са: 2, 3, 5, 17 и 257.

При $p = 2$ числата са $2, 4, 3, 3$ и тъй като има повторение, те не образуват множество.

11.4. Нека $N = 10112018$ и да разгледаме граф G с върхове дадените градове и ребра – пътищата между тях. Всеки връх на G е от степен 3. Трябва да намерим минималното k, за което винаги можем да оцветим k върха на G така че всеки цикъл да съдържа оцветен връх.

Да оцветим всички върхове на графа в червено. Ще преоцветяваме някои върхове в синьо по следното правило: Ако при оцветяването на даден връх в синьо не възниква изцяло син цикъл, го правим. Продължаваме по този начин докато не може да оцветим нов връх в синьо. Нека в този момент имаме x червени и $N-x$ сини върха. От всеки червен връх A поставяме две стрелки към двата сини върха от цикъла, които се получава при оцветяване на A в синьо.

Лесно се вижда, че във всеки син връх влизат най-много две стрелки. Следователно $2x \leq 2(N-x)$, т.е. $x \leq \dfrac{N}{2}$.

Ако имаме равенство всеки син връх е край на точно две стрелки и сините върхове са точно $\dfrac{N}{2}$. Но това е възможно само ако всеки син връх е свързан с точно един син, т.е. сините върхове се разбиват на двойки и значи $\dfrac{N}{2}$ е четно.

Следователно $k \leq \dfrac{N}{2}-1$. Да разгледаме граф съставен от $\dfrac{N-6}{4}$ пълни четириъгълници (четири върха, всеки два от които са свързани с ребро) и една пресечена триъгълна пирамида. Лесно се вижда, че във всеки такъв четириъгълник и в пресечената пирамида трябва да оцветим поне два върха. Следователно са необходими поне $k=\dfrac{N}{2}-1=5056008$ оцветени върха.

12.1. Да допуснем, че $|f(x)|<\dfrac{1}{8}$ за всяко $x\in[0,1]$. Тогава

$$-\frac{1}{8}<q<\frac{1}{8} \text{ и } -\frac{1}{8}<1+p+q<\frac{1}{8}$$

и следователно $-\dfrac{1}{8}<1+p+q<1+p+\dfrac{1}{8}$ и $\dfrac{1}{8}>1+p+q>p+\dfrac{7}{8}$. От горните неравенства следва, че $p>-\dfrac{5}{4}$ и $p<-\dfrac{3}{4}$, откъдето $-\dfrac{p}{2}\in[0,1]$. Тогава

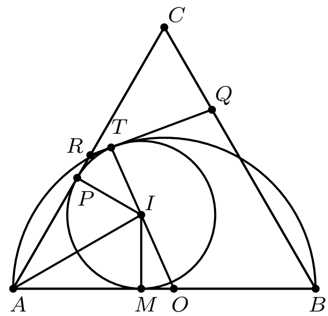
$$f(0)<\frac{1}{8} \iff q<\frac{1}{8},\ \ f(1)<\frac{1}{8} \iff 1+p+q<\frac{1}{8},\ \ f\left(-\frac{p}{2}\right)>-\frac{1}{8} \iff \frac{p^2}{4}-q<\frac{1}{8}$$

Умножаваме първото и второто неравенство с 2, а третото с 4, събираме почленно и получаваме $(p+1)^2<0$, което е невъзможно. Следователно

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)| \geqq \frac{1}{8}.$$

Ако този максимум е равен на $\dfrac{1}{8}$, то $q \leqq \dfrac{1}{8}$, $1+p+q \leqq \dfrac{1}{8}$ и $\dfrac{p^2}{4}-q \leqq \dfrac{1}{8}$. Ако поне едно от трите неравенства е строго, както по-горе получаваме противоречие. Следователно и трите неравенства трябва да са равенства, откъдето $p=-1$ и $q=\dfrac{1}{8}$.

12.2. Ако $\sphericalangle BTQ = \alpha$, от $\sphericalangle ITQ = \sphericalangle ATB = 90^\circ$ имаме $\sphericalangle ATI = \alpha$. Тогава $\sphericalangle OAT = \alpha$ и $\sphericalangle IAT = \alpha - 30^\circ$. Освен това $\sphericalangle ABT = 90^\circ - \alpha$, откъдето $\sphericalangle TBQ = \alpha - 30^\circ$. Следователно $\triangle BQT \sim \triangle AIT$ откъдето $\dfrac{BQ}{QT} = \dfrac{AI}{IR} = 2$ (тъй като $AI = 2r$).



От степента на точка Q спрямо k' имаме

$$QT^2 = QB.(QB - 3).$$

Оттук и от $BQ = 2TQ$ получаваме $BQ = 4$. Следователно $CQ = 2$.

12.3. а) Нека m (n) е степента на $f(u,v)$ като полином на u (v). От даденото равенство следва, че $m^2 = m$ и $n^2 = n$. Значи $m, n \in \{0, 1\}$, т.е. $f(u,v) = auv + bu + cv + d$. След заместване намираме, че $f(u,v)$ има една от следните форми: u, v и $auv + bu + bv + d$, където $ad = b^2 - b$.

б) Съществува – например $f(u,v) = (u+v)/(1+uv)$.

12.4. Нека M е добро множество и да наредим елементите на M по големина $a_1 < a_2 < \cdots$. Ще докажем, че всеки n последователни елемента на M дават пълна система от остатъци по модул n. Да допуснем, че съществуват два елемента a_i и a_j, за които $j > i$, $j - i < n$ и $a_j - a_i$ се дели на n. От условието следва, че между a_i и a_j има поне $n-1$ елемента от множеството, противоречие с $j - i < n$.

Следователно $a_i \equiv a_{i+n} \pmod n$ за всяко i, като при това ако означим $d = \dfrac{a_{i+n} - a_i}{n}$, то от условието на задачата имаме, че $a_{i+k} = a_i + kd$, за всяко $k = 0, 1, \ldots, n$. Доказахме, че всеки n последователни члена на M образуват пълна система остатъци по модул n, като всеки елемент се получава от предишния с прибавяне на едно и също число d. Следователно елементите на M образуват аритметична прогресия с частно d.

Всяко от множествата M_i е аритметична прогресия с първи член a_i и разлика d_i. Нека $D =$НОК$(d_1, d_2, \ldots, d_{2018})$. Всеки интервал $[a+1, a+2, \ldots, a+D]$ с дължина D съдържа $\dfrac{D}{d_i}$ елемента от M_i. Тъй като множествата M_i не се пресичат, получаваме:

$$\frac{D}{d_1} + \frac{D}{d_2} + \cdots + \frac{D}{d_{2018}} \le D \Longrightarrow \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{2018}} \le 1.$$

От това неравенство и от

$$(d_1 + d_2 + \cdots + d_{2018}) \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{2018}} \right) \ge 2018^2$$

получаваме $d_1 + d_2 + \cdots + d_{2018} \ge 2018^2$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{2018} B(M_i) = \sum_{i=1}^{2018} (a_i + d_i) \ge \sum_{i=1}^{2018} a_i + \sum_{i=1}^{2018} d_i \ge \sum_{i=1}^{2018} i + 2018^2 = 6109495.$$

Тази стойност се достига при $a_i = i$ и $d_i = 2018$.

ЕДИНАДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 11. И 12. КЛАС

Димитър Цветков, Любомир Христов,
Николай Горчев, Виктория Бенчева

На 11 март 2018 г. се проведе поредният единадесети Математически турнир на Великотърновския университет „Св. св. Кирил и Методий“ за ученици от 11. и 12. клас, организиран съвместно с Регионалното управление на образованието и секция „Великотърновски университет“ към Съюза на математиците в България (виж например [1, 2, 3, 4]).

В турнира участие взеха 96 ученици от градовете Велико Търново, Горна Оряховица, Свищов, Павликени, Лясковец, Габрово, Трявна, Троян, Ловеч, Търговище, Червен бряг, Дупница, Симитли и Елхово. Бяха наградени 6 участници, които получиха един златен, два сребърни и три бронзови медала. Победител в турнира с резултат от 115 точки стана Андрей Златков Върбанов от 12. клас на ПМГ „Васил Друмев“, Велико Търново, който спечели златния медал.

Сребърни медали бяха присъдени на: Драгослав Пламенов Цветков (105 точки), ученик в 12. клас на ПМГ „Васил Друмев“, Велико Търново и на Анастасия Стоянова Кичукова (105 точки) от 12. клас на ПЕГ „Екзарх Йосиф I“, Ловеч. Бронзов медал получиха: Славена Даниел Григорова (99 точки) от 12. клас на I СОУ „Свети Седмочисленици“, Търговище; Илина Илиянова Йозова (85 точки) от 12 клас на ЧПГ „АК Аркус“, Велико Търново и Станислава Георгиева Иванова (81 точки) от 11. клас на ПГ „Свети Климент Охридски“, Елхово.

Награди на журито за оригинално решение на допълнителната задача бяха присъдени на двама от призьорите в турнира: Андрей Златков Върбанов и Драгослав Пламенов Цветков.

Общият максимален брой точки е 120 като резултатът на всички участници се преобразува в оценка по шестобалната система. За учениците от 11. клас тази оценка е валидна за кандидатстване през 2019 година, а за учениците от 12. клас оценката е валидна за кандидатстване през 2018 и 2019 година за специалностите ***Информатика, Компютърни науки, Софтуерно инженерство, Педагогика на обучението по математика и информатика, Приложна математика*** и ***Информационно брокерство и дигитални медии*** на факултет „Математика и информатика“ на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Темата се състоеше от 21 задачи – 20 по формата за кандидатстудентски изпит по математика (тест) и една допълнителна задача. Решилите допълнителната задача се състезаваха за наградата на журито.

Задачите от 1 до 20 са от три типа:

• **дванадесет** тестови задачи от затворен тип, с номера от 1 до 12, с четири възможни отговора, от които само един е верен.

• **пет** тестови задачи със свободен отговор, с номера от 13 до 17, на които кандидат-студентът записва само отговора.

• **три** задачи, с номера 18, 19 и 20, решенията на който с необходимите обосновки се представят в писмен вид.

Задача 21 – задачата на журито е с повишена трудност, както е прието да се дава на математически състезания за ученици от 11. и 12. клас. Задача 21 беше взаимствана от учебника [5].

Различните начини на решение (при наличие на такива) се оценяват равностойно. При наличие на повече от един начин на решение на дадена задача в писмената работа на участника се зачита само един от тях.

Беше изтеглена тема със следните задачи:

ПЪРВА ЧАСТ

1. Кое от следните числа е най-малко?

А) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^{-1}$ **Б)** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$ **В)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$ **Г)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

2. Допустимите стойности на израза $\dfrac{x-2}{x^2+4}+\dfrac{5}{x}$ са:

А) $x \neq 0, x \neq 2$ **Б)** $x \neq 0$

В) $x \neq -2, x \neq 0, x \neq 2$ **Г)** $x \neq -2, x \neq 2$

3. Числото 5 е сбор от реалните корени на уравнението:

А) $x^2+5x-10=0$ **Б)** $x^2-5x+8=0$

В) $x^2-5x+7=0$ **Г)** $x^2-5x+6=0$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{2x-4}{3-x}>0$ са:

А) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ **Б)** $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

В) $(-2; 3)$ **Г)** $(2; 3)$

5. За аритметична прогресия е известно, че $a_1 = 48$ и $S_{10} = 1155$. Разликата на прогресията е равна на:

А) 15 **Б)** 20 **В)** 14 **Г)** 18

6. Ако $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, то стойността на израза $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$ е:

А) $\dfrac{9}{10}$ **Б)** $-\dfrac{9}{10}$ **В)** $-\dfrac{4}{5}$ **Г)** $\dfrac{4}{5}$

7. От кутия с 20 червени и 5 сини топки са извадени без връщане 2 топки. Каква е вероятността извадените топки да бъдат сини?

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{1}{30}$ **Г)** $\frac{1}{5}$

8. В триъгълника ABC е дадено, че $AB = 5$, $BC = 3$ и $AC = 7$. Ъгъл ABC е равен на:

А) 150° **Б)** 120° **В)** 60° **Г)** 30°

9. Радиусът на описаната окръжност около правоъгълен триъгълник с катет $\sqrt{3}$ и височина към хипотенузата $\frac{\sqrt{3}}{2}$ е равен на:

А) 2 **Б)** $\frac{3}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 1

10. Острият ъгъл на ромб с лице $32\sqrt{2}$, в който е вписан кръг с лице 8π, е:

А) 45° **Б)** 30°

В) 60° **Г)** не може да се определи

11. Диагоналът на куб е равен на $4\sqrt{3}$. Лицето на пълната повърхнина на куба е:

А) 16 **Б)** 36 **В)** 48 **Г)** 96

12. Всички ръбове на правилна четириъгълна пирамида са равни. Обемът на пирамидата е $\frac{125\sqrt{2}}{6}$. Ръбът на пирамидата е равен на:

А) 5 **Б)** 15 **В)** $5\sqrt{5}$ **Г)** $5\sqrt{2}$

ВТОРА ЧАСТ

13. В успоредника $ABCD$ е построена ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$, която пресича вътрешно DC в точка M. Да се намери лицето на $ABCD$, ако $DM = 4$ cm, $MC = 2$ cm и $AM = 6$ cm.

14. Хвърлят се едновременно бял, зелен и червен зар. Намерете вероятността сумата от падналите точки да е равна на 12.

15. В $\triangle ABC$ $(AC > BC)$ са построени височината CH и медианата CM. Ако $MB = BC$, $\sphericalangle MCH = 30^\circ$ и $MH = 4$, да се намерят лицето на $\triangle ABC$ и радиусът на вписаната в него окръжност.

16. Да се реши уравнението $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{5 - 2x}{2 - x} = 1 + \frac{2}{x - 3}$.

17. Сборът от първите три члена на растяща аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е равен на сбора на следващите два. Ако $a_1^2 = 2a_9$, намерете a_{2017}.

ТРЕТА ЧАСТ

18. Даден е $\triangle ABC$, $\sphericalangle B = 90^\circ$. Построена е окръжност с диаметър AB, която пресича AC в средата P. През точка C е построена допирателна $CK = 4$ към окръжността. Намерете AK.

19. Основата на пирамида $MABCD$ е правоъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 3\sqrt{2}$ и $AD = 3$. Равнините (ABM) и (ADM) са перпендикулярни на основата, а равнината (MBD) сключва с равнината на основата ъгъл с големина 30°. Намерете обема на пирамидата.

20. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $|x+1| + |x-1| = a$ няма решение.

21 Допълнителна задача (задача на журито).

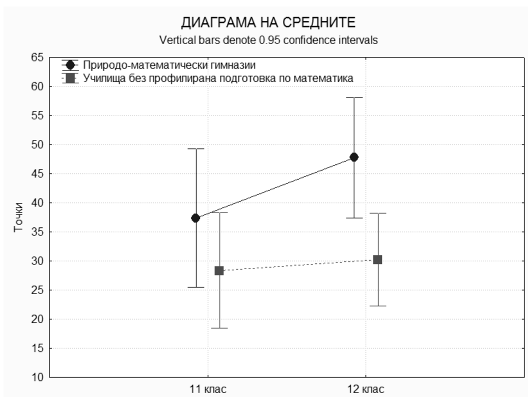
Даден е успоредникът $ABCD$ ($AB \| CD$). Точката M лежи на страната CD, а точката N лежи на страната AD така, че $DM/MC = p$ и $AN/ND = q$. Нека O е пресечната точка на AM и BN. Да се намери отношението AO/OM.

Отговори

1. В; **2.** Б; **3.** Г; **4.** Г; **5.** А; **6.** Б; **7.** В; **8.** Б; **9.** Г; **10.** А; **11.** Г; **12.** А; **13.** $9\sqrt{7}$; **14.** $25/216$; **15.** $S = 32\sqrt{3}, r = 4(\sqrt{3}-1)$; **16.** $8/3$; **17.** 3030. **18.** $AK = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$; **19.** $V = 6$; **20.** $a < 2$; **21.** $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{q(1+p)}{pq+p+1}$.

Слаба оценка получиха 32 ученика, показали резултат от 21 или по-малко точки за своите решения. Отличните оценки са сравнително малко. Общо на 5 ученика, получили 76 или повече точки, беше дадена отлична оценка, а първите четирима в класирането имат оценка 6,00.

В общия брой от 96 ученика имаше 37 от природо-математически гимназии и 59 от гимназии без профилирана подготовка по математика. 39 от тях бяха от 11. клас, а останалите 57 от 12. клас, при независимо взаимно разпределение [$chi-square(1) = 0.171; p-value = 0.679$]. Дисперсионният анализ показа статистически значим ефект на принадлежността към тип гимназия [$F(1,92) = 6.740; p-value = 0.011$] и отсъствие на значимост



Резултати от дисперсионния анализ

при фактора клас $[F(1,92) = 1.445; p-value = 0.232]$, както и отсъствие на значимо взаимодействие $[F(1,92) = 0.689; p - value = 0.409]$. Както можеше да се очаква, учениците от природо-математически гимназии показаха по-високи постижения. Резултатите са илюстрирани на фигурата.

Единадесетият математически турнир на Великотърновския университет „Св. св. Кирил и Методий“ за ученици от 11. и 12. клас привлече и повече спонсори от предишните издания. Тази година за провеждането на турнира помогнаха фирмите „Вали компютърс“ ООД – гр. Велико Търново, „Тремол“ ООД, „СуперХостинг.БГ“ ООД – гр. София, „ЗИВ“ ЕООД – гр. Варна.

В работата по организацията се включиха активно преподаватели и студенти от факултет „Математика и информатика“ при ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Софтуерните фирми от Велико Търново и страната, с който факултетът поддържа постоянни връзки, участват активно, както като спонсори, така и в организацията на различни турнири по математика, програмиране и информационни технологии за ученици и студенти, организирани от факултета. Представители на тези фирми все по-често се включват и в обучението на студентите най-вече с осигуряване на стажантски места, но също и с учебни програми по различни приложни дисциплини.

Факултетът предлага програми в областта на математиката – „Приложна математика“, бакалавърска степен, и „Математически структури в информационната сигурност“, магистърска степен, които допълват трите бакалавърски програми в професионално направление „Информатика и компютърни науки“ и специалността „Математика и информатика“, подготвяща бъдещите учители.

Литература

[1] Буюклиева, С., П. Пиперков. Математически турнир на Великотърновския университет. Математика, 2014, №3, 42–45.

[2] Буюклиева, С., П. Пиперков. Математически турнир на Великотърновския университет. Математика, 2015, №3, 31–35.

[3] Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова. Девети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. Математика, 2016, №3, 25–30.

[4] Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова. Десети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. Математика, 2017, №4, 37–41.

[5] Додунеков, С., Г. Кожухарова, М. Христова, Д. Капралова, С. Дойчев. МАТЕМАТИКА 9. клас за профилирана подготовка, второ равнище. РЕГАЛИЯ 6, София, 2001.

ДВЕ ПОЛЕЗНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ НЕРАВЕНСТВА

Петър Попиванов, ИМИ–БАН

Често в математиката се срещат задачи (да речем неравенства), които са сложни и ... доста самоцелни. Предлагам две класически елементарни неравенства с приложение към т.нар. израждащи се елиптични уравнения. Чрез тях и съответният апарат от анализа се установява разпространението на максимума на решението на уравнението, ако той се достига вътре в областта. Това бяха въпроси, изследвани около 1950–1970 г. По-долу формулирам и доказвам споменатите неравенства

1. Нека функцията $f(x) \geqq 0$ е два пъти диференцируема върху $\mathbb{R}^1$ и $|f''(x)| \leqq C$, $C = \mathrm{const} > 0$ навсякъде. Тогава ${f'}^2(x) \leqq 2Cf(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}^1$. Неравенството става равенство при $f(x) = x^2$.

Доказателство. Фиксираме x е за произволно h прилагаме формулата на Тейлър:

$$0 \leqq f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \leqq f(x) + hf'(x) + \frac{C}{2} h^2.$$

Тук ξ е някакво число. Понеже квадратният тричлен относно h е неотрицателно определен, то дискриминантата му ${f'}^2 - 2f(x)C \leqq 0$.

2. Нека $f(x) \geqq 0$ е два пъти диференцируема и $|f''(x)| \leqq 1$. Тогава съществуват константи $0 < c_1 < 1$, $c_2 > 1$ и такива, че

$$c_1(x^2 + f(0)) \leqq x^2 + f(x) \leqq c_2(x^2 + f(0)), \tag{1}$$

за всяко $x \in \mathbb{R}^1$. Възможни стойности на c_1, c_2 са $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = 2$.

При доказателството разглеждаме случай а) $f(0) = 0$ и случай б) $f(0) > 0$.

а) Понеже f има минимум в т. 0, то $f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$. Съгласно формулата на Тейлър

$$x^2 + f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{2} f''(\xi)\right),$$

$$\frac{1}{2} \leqq 1 + \frac{1}{2} f''(\xi) \leqq \frac{3}{2}$$

и т.н.

б) Разглеждаме произволен интервал $[-A, A]$, $A > 0$. Тогава $0 < f(0) \leqq x^2 + f(0) \leqq A^2 + f(0)$, докато

$$\frac{x}{x^2 + f(0)} \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$$

и

$$\frac{\left| \frac{x^2}{2} f''(\xi) \right|}{x^2 + f(0)} \leqq \frac{1}{2}.$$

Нека $A > 0$ е толкова голямо, че

$$\left| \frac{x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\xi)}{x^2 + f(0)} \right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad |x| \geqq A.$$

Фиксираме го и като комбинираме с поведението на $x^2 + f(0)$, $x^2 + f(x)$ върху $[-A, A]$, установяваме (1). Докажете, че можем да вземем $c_1 = \dfrac{1}{3}$, $c_2 = 2$.

Приложение. Уравнението $u_t = u_{xx}$ в $[0, A] \times [0, T]$, $A > 0$, $T > 0$ се нарича уравнение на топлопроводността. Да предположим, че решението достига своя максимум M вътре в правоъгълника $u(x_0, t_0) = M$, $0 < x_0 < A$, $0 < t_0 < T$. Тогава $u \equiv M$ в подобластта $[0, A] \times [0, t_0]$.

Ще спомена двама математици с принос в споменатата област: Л. Ниренберг, Абелов лауреат за 2015 г. и Ж.-М. Бони – член на академията на науките – Париж.

MATHEMATICAL OLYMPIAD PROGRAM 2018

Орлин Кучумбов (ППМГ, Бургас)

1. Увод (бел. гл. ред). На 21 май тази година получихме от ръководството на американския отбор за МОМ покана да изпратим един ученик, който да участва на тяхната подготовка за предстоящата след месец и половина олимпиада. Нашият отбор току що беше определен и след кратко съвещание решихме да предложим тази възможност на Орлин Кучумбов, ученик от ППМГ „Акад. Н. Обрешков“ в Бургас, който се беше класирал за резерва. Орлин прие и успя да се справи с всички формалности (за щастие имаше валидна виза; почти по същото време аз кандидатствах за J-1 виза и свободните часове за интервю бяха след 20-на дни). По-долу е разказът на Орлин за прекараните в Питсбърг три седмици.

2. За подготовката. Подготовката се състоя от 3-ти до 27-ми юни в град Питсбърг, Пенсилвания, в Carnegie Mellon University. Участваха около 80 ученици като имаше по двама представители от Гърция, Румъния, Китай, Чехия, Украйна, Тайван и Тайланд и по един от България, Южна Корея и Грузия. Бяхме разделени на цветни групи, наподобяващи коланите в бойните изкуства – черна, синя, зелена и червена. Аз бях в черната група, заедно с разширения отбор на Щатите и още няколко от чужденците. Разпределянето по групи е базирано на представянето на учениците по състезанията. Естествено, те поддържат съревнованието и ако някой се представя на контролните по-добре, или по-зле съответно, от това, което се очаква за неговата група, той бива повишен, или съответно понижен. Програмата беше натоварена, но именно заради разпределението по групи, не се усещаше като такава, тъй като ако някой сметне, че му е прекалено трудно, винаги може да се премести в по-долна група. Но какво имаше в тази програма?

- Всеки делничен ден имахме по 2 лекции по час и половина сутринта.
- Всеки вторник, четвъртък и събота следобяд имахме контролни във формата на МОМ, които коментирахме вечерта след това.
- Всеки понеделник и петък имахме т.нар. study sessions.

2.1. Лекциите. Лекторите бяха почти изцяло настоящи студенти, които са бивши олимпийци, състезавали се допреди няколко години. Единствените изключения бяха професорът от Харвард – Ноам Елкис, който ни изнесе лекция на тема *Дизайни* и По-Шен Ло – ръководител на националния им отбор и организатор на подготовката.

Самите лекции имаха различни формати. На някои първо ни преподаваха теория и след това я прилагахме в задачи, като например на лекциите по *Линейна алгебра* и *Проективни трансформации*. На други пък ни даваха лист със задачи и ни препоръчваха кои да гледаме и след известно време ги коментирахме, като всички присъстващи давахме идеи. Много често това бяха задачи, на които самите лектори са се състезавали и можеха да ни кажат точно как са подходили към задачата в състезателния ден. Освен това, по този начин можеш и да научиш много от най-добрите в света и как те опитват да се справят с дадено препятствие. Всъщност буквално с най-добрите в света, тъй като Джеймс Лин, който в последвалата Международна Олимпиада изкара 42 точки, беше в моята група. Трети вид лекции с небезизвестния Еван Чен пък бяха върху 1 задача. Да, една задача. На тях проследявахме стъпките в едно много абстрактно решение на съответната задача и обсъждахме мотивацията зад тях.

По програма имахме по 2 лекции сутринта, но всъщност бяха 4. Във всеки времеви прозорец всеки си избира на коя от 2 възможни лекции да отиде. Някои се оказваха доста популярни и привличаха почти всички от Черната група, като например тези на Еван Чен или Алън Лиу. А Алън Лиу кой е? Той е трикратен златен медалист за отбора на САЩ, като в последната си 2016-та изкарва 42 точки и се нарежда на трето място в Залата на Славата на САЩ. Естествено, ако изпуснеш лекция, защото си предпочел друга, лекторите винаги ни обръщаха внимание в лобито на общежитието на университета, където спахме, и даже я преразказваха в по-голяма и част. Винаги бяха готови да ни отговорят на всякакви въпроси, за които не е останало време по време на лекцията.

2.1.1. Темите на лекциите. В черната група преобладаваха лекциите по алгебра и комбинаторика, като разбира се имахме и няколко по теория на числата и геометрия. По-нататък в статията ще ви покажа и една от тях. Ето списък на част от темите, върху които бяха лекциите:

- Алгебра:
  - Линейна алгебра с Victor Wang
  - Полета и Фробениус с Victor Wang
  - Проективни трансформации с Mitchell Lee
  - Полиноми на Чебишев с Linus Hamilton
  - Легендарни неравенства с Evan Chen
  - Легендарни функционални уравнения с Ankan Bhattacharya
  - Неравенства с Alex Song

- Комбинаторика:
  - Невероятни идеи със Sasha Rudenko
  - Теория на графите с Po-Shen Loh
  - Комбинаторни множества с Po-Shen Loh
  - Отвъд неравенството на Марков с Yang Liu
  - Стратегии с Linus Hamilton
  - Цветът на шапките със Sasha Rudenko
  - Случайни разходки с Mark Sellke
- Теория на числата:
  - Елиптични криви с Allen Liu
  - Достатъчно голямо p с Alex Zhai
  - Алгебрична теория на числата с Victor Wang
  - Безкрайни редове в $\mathbb{Z}_p$ с Victor Wang
- Геометрия:
  - Инверсия с Thomas Swayze
  - Геометрия за пораснали с Thomas Swayze
  - Странна геометрия с Ankan Bhattacharya

2.2. Контролните. Три контролни на седмица може да звучат стряскащо, но да не забравяме, че там се бяхме събрали доста подбрана група от хора и смятам, че както за мен не бяха прекалено много, така и за останалите не са били. Всъщност на нашите подготовки в Пампорово, както и на тези в Института по математика и информатика на БАН, интензивността е подобна и контролните не са по-малко, така че това не се оказа проблем за мен. Те се деляха на няколко вида отново.

През делничните дни преди последната седмица имахме тренировъчни контролни. Тук е времето да спомена, че единствената разлика между подготовката за американците и за чужденците е, че нашите контролни бяха от непубликувани Shortlist-и от тяхното състезание ELMO, до което ще стигнем след малко, докато на американците бяха от Shortlist-а от предната Международна. Това се правеше с цел избягване на решаване на едни и същи задачи от нас, тъй като беше възможно нашите контролни да са съдържали част от задачите от гореспоменатия Shortlist.

В уикендите се провеждаше ELMO (не е случайно съвпадението с героя от Мъпетите – той е маскотът на състезанието). Това е вътрешна олимпиада, която се организира изцяло от бивши MOP-ъри, с изключението на

Еван Чен, който е председател на журито. Задачите се предлагат единствено от бивши участници, които все още са ученици, комисията се състои изцяло от ученици също. Форматът е същият като на МОМ, като нивото на задачите в никакъв случай не отстъпва.

Последните контролни, които имахме бяха т.нар. TSTST – Team Selection Test Selection Test. За чужденците това беше още едно контролно, този път в 3 дни по 3 задачи, с което да се преборим, но за американците това беше първото контролно от многото следващи за класиране в националния им отбор за следващата година. Задачите отново бяха авторски, но този път вече не от ученици.

2.3. Study Sessions. Заниманията ни понеделник и петък следобяд бяха свързани с решаване самостоятелно. Имаше 4 заделени стаи – една по алгебра/теория на числата, една по геометрия и две по комбинаторика. Раздаваха ни един лист с 3-4 задачи във всяка от горните категории и след това всеки си избираше в коя стая да отиде в зависимост от предпочитанието на тема. След това решавахме за около час и половина, а след това „квесторите“ обсъждаха задачите с нас. Тези събирания не бяха чак толкова формални и можехме да решаваме на групи или да получаваме подсказки от „квесторите“.

3. За преживяването. Не мога да излъжа като кажа, че преди да отида там, бях доста притеснен. Смятах, че ще бъда като новото момче в група от 60-ма, всеки двама от които се познават. Всъщност грешах и то много. Всички бяха изключително отзивчиви и дори за момент не съм се чувствал като новия в групата. Както учители, така и ученици, искаха да се запознаят с чужденците и да ни приобщят към тях.

Едно от най-впечатляващите неща беше, че там се запознах с много интересни хора – с хора, за които само бях чувал. Може би се чудите защо споменах точно Алън Лиу и Еван Чен по-горе. Както вече казах, през последната си година Алън изкарва максимален брой точки на МОМ. Но освен това, той решава абсолютно всяка задача, на която се явява тази година – контролни, контролни за контролните, национален кръг и т.н. Успях да се запозная лично с Еван Чен, който съм сигурен, че повечето сте чували. За тези, които не са, той има много полезен сайт с handout-и, които реално бяха това, което ме вкара в олимпийската математика след осми клас. Оказа се, че той е запознат с нашите олимпиади, тъй като го бях попитал за мотивация за трета задача от тазгодишния ни национален кръг и той веднага се сети кой е авторът ѝ. Запознах се и с И Сън. Всъщност преди да се запознаем, хората ми бяха казали, че той като ученик е бил „известен“ с това, че смята всяка задача с комплексни числа. Аз му казах, че съм българският му еквивалент и приказката ни веднага тръгна. Последен, но не на последно място, е Саша Руденко. Тъй като в града ни пускаха само с придружител, защото там си бяхме непълнолетни, той беше този, който най-често беше с нас. Последната вечер даже ни направи една разходка из университета, наподобяваща тази, която старите студенти на MIT правят за новодошлите, но е по-добре тя да остане извън статията.

Може би най-забележителния човек, с когото се запознах, е По-Шен Ло. Можем да оставим невероятните лекции, които той изнесе. Почти всяка вечер имахме импровизирани събирания в лобито на общежитието на най-различни теми – самоувереност, управление на времето си, мотивацията и т.н. Тези събирания се водеха от него, като той малко ни разказваше за своите виждания или лични опити, а после се превръщаха в дискусия между всички присъстващи. Дори не бяха толкова свързани с математика, но смея да твърдя, че бяха изключително полезни. Все пак да слушаш как да бъдеш ефикасен с времето си от човек, който освен ръководител на национален отбор, е и професор в Carnegie Mellon University и си има своя компания, Expii, си има своите плюсове. Освен това, той също беше много заинтересован от нашите подготовки, състезания и успехи. И в крайна сметка, този човек не беше дистанциран от нас. Напротив, той даже всяка вечер играеше тенис на маса с нас.

Това бяха само лекторите. Станахме много близки с момчетата от Румъния и Гърция, като още поддържаме връзка един с друг. С американците имаше една пречка – трудно ми произнасяха името. Но след тази начална спънка станахме добри приятели с много от тях. С други пък се сприятелявахме на игрите по баскетбол, с трети на масата за тенис на маса, а с четвърти – докато играхме 7-дневната Истинска Мафия.

Имаше и една много полезна част от програмата ни, особено за нас чужденците, и това беше т.нар. философия. Противно на името, тогава не разнищвахме философски въпроси, а се разделяхме на групи, като всяка група се водеше от няколко от лекторите и говорихме за университети, за работа след университета, както в академичната среда, така и в индустрията. Тайната зад успешното провеждане на това събитие беше, че всички там учеха, или вече бяха учили в най-добрите университети в света. Професионалният им опит също беше огромен – от софтуерни инженери до финансови анализатори. Няма много места по света, където можеш да получиш адекватно сравнение между университет от Бръшляновата лига и Оксфорд или Кеймбридж. Въпросите ни бяха толкова много, че времето не стигна и трябваше да продължим по време на вечерните събирания.

Цялото това приключение си имаше и нематематически ползи. Този месец беше като месец в университета. Всъщност буквално си беше месец в университета – спахме в общежитията на CMU, имахме лекции и контролни, хранихме се в ресторанта на университета. MOP ти дава представа как би било в бъдещето и честно казано, като изключим липсата на някои хора, които си бяха в България, не се сещам за минуси. Културното изживяване също е уникално. Единия ден имахме и екскурзия из града на мостовете – Питсбърг. Американците ни показаха една много популярна игра сред тях – Ultimate Frisbee, като в програмата оставаше време и да се организират турнири по различни спортове. Казвам, че оставаше време, тъй като, както се забелязва по описанието, имахме страшно много неща за правене. Но някакси не се усещаше толкова напрегнато, не се усещаше сякаш се чудиш кога ще свърши, а по-скоро с нетърпение очакваш следващото. Накрая даже си имахме и шоу на талантите.

МОР беше едно неописуемо, забавно, полезно и интересно изживяване и всеки, които успее да отиде, е късметлия.

4. Лекция: Трудни идеи. Сега ще ви покажа задачите, които обсъдихме на тази лекция и ще включа няколко, за които не остана време.

Анотация

Настоящата тема е по лекцията на Victor Wang, Hard Ideas, изнесена на Черната група на МОР 2018.

Задача 1. Можете ли да намерите две естествени числа a и b, за които $b - a > 1$ и за всяко $a < k < b$ имаме, че НОД$(a, k) > 1$ или НОД$(b, k) > 1$?

Решение. Ако $b = a + r$, то трябва НОД$(i(r - i), a + i) > 1$ за всички $i \in \{1, \ldots, r - 1\}$. Затова за всяко i искаме (A) НОД$(i, a) > 1$ или (B) НОД$(r - i, a + r) > 1$ ($i = 0$ и $i = r$ са автоматично готови).

Да забележим, че лесно можем да получим (A) за всички $i > 1$ просто като изберем $a \equiv 0 \pmod{i}$, затова ще се опитаме да нагласим малко тази конструкция. За простота, нека $r = p + q$ за прости p, q, такива, че $q \equiv 1 \pmod{p}$ и $p^2 \geq r = p + q$. Тогава, по Китайската теорема за остатъците избираме a така, че $a \equiv 0 \pmod{s}$ за всяко просто $s \neq p, q$, по-малко от $r = p + q$, и $a + p + q = a + r \equiv 0 \pmod{pq}$ (за да е вярно $a \equiv -q \equiv -1 \pmod{p}$, $a \equiv -p \pmod{q}$).

Остава да проверим, че едно от (A) или (B) е винаги изпълнено:

(1) Ако $i \neq 1, p, q$, то $2 \leq i \leq r - 1 < p^2$ и съответно i трябва да има прост делител $\ell \neq p, q$ по-малък от r. Тогава $\ell \mid a$ и (A) е изпълнено.

(2) Ако $i \in \{p, q\}$, то $r - i \in \{q, p\}$ дели $a + r$ от конструкцията и (B) е изпълнено.

(3) Ако $i = 1$, $q \equiv 1 \pmod{p}$ ни дава $r - i = p + (q - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ и от $p \mid a + r$ следва, че (B) е изпълнено. (Това е форсирано, защото всеки прост делител на $r - 1$ различен от p, q трябва да дели a и съответно не може да дели $a + r \equiv a + 1 \pmod{r - 1}$.)

Най-малката двойка (p, q), изпълняващи изискванията на тази конструкция, е $(5, 11)$. Оттук се получава с КТО, че двойката $(a, b) = (2184, 2200)$ работи.

Задача 2. Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots \in \mathbb{Z}[[x]]$, $a_0 \neq 0$, е формален степенен ред. Нека

$$f'(x)f(x)^{-1} \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Вярно ли е, че $a_0 | a_n$ за всяко $n \geq 0$?
(Степенен ред е безкраен ред от вида:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots ,$$

където a_n са коефициенти, независещи от променливата z.)

Решение. Отговорът е положителен! Без ограничение на общността можем да считаме, че НОД$(a_0, a_1, \ldots) = 1$.

За $k \geq 1$ дефинираме $g_k = f^{(k)} f^{-1}$. Да забележим, че ако имаме $g_k \in \mathbb{Z}[[x]]$ за някое $k \geq 1$, то след като диференцираме получаваме, че

$$f^{(k+1)} f^{-1} - f^{(k)} f' f^{-2} \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Но $f' f^{-1}, f^{(k)} f^{-1} \in \mathbb{Z}[[x]]$ (първото по условие, а второто по предположение) и следователно тяхното произведение $f^{(k)} f' f^{-2}$ също принадлежи на $\mathbb{Z}[[x]]$. Тогава

$$g_{k+1} = f^{(k+1)} f^{-1} \in \mathbb{Z}[[x]].$$

От горното следва, че по индукция $g_k \in \mathbb{Z}[[x]]$ за всички $k \geq 1$. Но

$$g_k f = f^{(k)} = k! \sum_{i \geq 0} \binom{i+k}{k} a_{i+k} x^i$$

и от лемата на Гаус за формалните безкрайни редове и факта, че

$$\text{НОД}(a_0, a_1, \ldots) = 1$$

получаваме, че

$$g_k / k! \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Като пресметнем в нулата, получаваме, че

$$a_0 \mid \binom{0+k}{k} a_{0+k} = a_k \ \text{ за всяко } \ k \geq 1$$

и затова f/a_0 има цели коефициенти, както и искахме.

Задача 3. (Artin-Hasse exponential) Нека p е просто число. Да се докаже, че коефициентите на

$$E_p(x) = \exp(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots)$$

са рационални, със знаменател взаимнопрост с p.
(Тук $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.)

Решение. Ще запишем E_p като безкрайно произведение на безкрайни редове. Нормалната експоненциална функция може да се запише така:

$$\exp(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{\frac{-\mu(n)}{n}}.$$

Тук $\mu(n)$ е функцията на Мьобиус. Тогава всеки множител е от вида

$$(1 - x^n)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}(-x^n)^i.$$

Тъй като $\binom{\alpha}{i}$ е рационално със знаменател, неделящ се на p, когато α е, то проблемните степени са тези, за които знаменателят на $\alpha = \frac{\mu(n)}{n}$ се дели на p, или $p|n$. Но ако ги махнем се получава точно

$$\prod_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} (1 - x^n)^{\frac{-\mu(n)}{n}} = \exp(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots).$$

Функцията на Мьобиус се дефинира по следния начин: $\mu(n) = 0$, ако n има прост делител от степен поне втора; $\mu(n) = (-1)^k$, ако n е свободно от квадрати и k е броят на простите делители на n.

Задача 4. Нека ω е 5-ти корен на единицата и $p > 5$ е просто число. Да се докаже, че

$$\frac{1+\omega^p}{(1+\omega)^p} + \frac{(1+\omega)^p}{1+\omega^p} \in 2 + p^2\mathbb{Z}$$

(или че е сравнимо с 2 по модул p^2).

Решение. Имаме $(1+\omega)^p \equiv 1+\omega^p \pmod p$, което следва от развитието на $(1+\omega)^p$ и от факта, че $p|\binom{p}{i}$ за всички $1 \le i \le p-1$ и нечетни прости p. Оттук получаваме

$$((1+\omega)^p - (1+\omega^p))^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

и

$$(1+\omega)^{2p} + (1+\omega^p)^2 \equiv 2(1+\omega)^p(1+\omega^p) \pmod{p^2}.$$

След като разделим на $(1+\omega)^p(1+\omega^p)$ получаваме, че

$$\frac{(1+\omega)^p}{1+\omega^p} + \frac{1+\omega^p}{(1+\omega)^p} \equiv 2 \pmod{p^2}.$$

Използвахме $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ само за да сме сигурни, че не делим на нула, т.е. $(1+\omega)^p \neq 0$ и $1+\omega^p \neq 0$.

Предлагаме на читателя и четири задачи по темата за упражнение.

Задача 5. Да се намерят всички естествени числа x и $n > 1$, за които $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ е четен точен квадрат.

Задача 6. Да се намерят всички естествени числа $k > 1$, за които съществуват безбройно много двойки от различни числа $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, такива, че $(x+i)(y+i)$ е точен квадрат за $i = 1, 2, \ldots, k$.

Заинтересованият от тази задача читател сигурно ще иска да види и Задача 15.12 от „640 задачи или теория на числата за олимпиади“, Алексиев, Бангачев, Бойваленков, Унимат СМБ, 2016.

Задача 7. (USA TST 2010/9) Съществува ли естествено число k, за което $p = 6k+1$ е просто число и $\dbinom{3k}{k} \equiv 1 \pmod{p}$?

Задача 8. (Гаус) Нека p е просто число и ω е p-ти корен на единицата. Да се докаже, че

$$\sum_{n=0}^{p-1} \omega^{n^2} = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{ако } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{p}, & \text{ако } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

ТРЕТА ОЛИМПИАДА НА МЕТРОПОЛИСИТЕ

Йордан Табов, ИМИ–БАН

От 2 до 7 септември в Москва се проведе Третата олимпиада на метрополисите по природни науки. В нея взеха участие ученици от над 30 града от целия свят, сред които Астана, Берлин, Братислава, Делхи, Хонг Конг, Истанбул, Лайпциг, Милано, Шанхай, Тел Авив, Бостън, Мадрид и др.

Сред участниците бяха и ученици от СМГ с ръководител Стойчо Стоев. Иван-Александър Мавров и Евгени Кайряков се представиха отлично и спечелиха сребърни медали.

Състезателната тема по математика беше следната.

Задача 1. Да се реши в реални числа системата уравнения:

$$\begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) = abc - 1\,, \\ (a-2)(b-2)(c-2) = abc - 2\,. \end{cases}$$

Задача 2. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност ω. Нека PQ е диаметърът на ω, който е перпендикулярен на AC. Дадено е, че правите BP и DQ се пресичат в точка X, а правите BQ и DP – в точка Y. Да се докаже, че точките X и Y лежат на правата AC.

Задача 3. Нека k е такова естествено число, че $p = 8k+5$ е просто число. Целите числа

$$r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$$

са такива, че числата

$$0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$$

имат различни един от друг остатъци при деление на p. Да се докаже, че произведението

$$\prod_{1 \le i < j \le 2k+1} (r_i^4 + r_j^4)$$

е сравнимо с $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модул p.

(Две цели числа са сравними по модул p, ако тяхната разлика се дели на p.)

Задача 4. Нека k е естествено число, и нека $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ са всички положителни делители на числото $4k$. Да се докаже, че има $i \in \{1, \ldots, m\}$ такова, че $d_i - d_{i-1} = 2$.

Задача 5. Аня и Максим играят игра на шахматна дъска 100×100.

Отначало Аня написва на полетата на дъската целите числа от 1 до 10000 – по едно число на всяко поле.

След това Максим поставя фигура на едно от полетата в най-лявата колонка от полета – по свой избор. По-нататък той с поредица от ходове придвижва фигурата в най-дясната колонка от клетки. За един ход той може да придвижи фигурата от полето, в което се намира, в кое да е съседно на него поле (с което има общ връх или страна). За всяко посетено поле (включително и първото) Максим плаща на Аня толкова монети, колкото е числото, написано на това поле.

Максим иска да плати колкото може по-малко, а Аня иска да получи колкото може повече. Колко монети ще плати Максим, ако всеки от тях действа по най-добрия за себе си начин?

Задача 6. Окръжност, вписана в триъгълник ABC, се допира до страните BC и AC съответно в точките D и E. Нека P е такава точка на по-малката дъга DE на окръжността, че $\sphericalangle APE = \sphericalangle DPB$. Отсечките AP и BP пресичат отсечката DE съответно в точките K и L. Да се докаже, че $2KL = DE$.

Решенията на задачите (на английски език) може да се видят тук: `http://megapolis.educom.ru/assets/media/metropolises-2018-math-day1-solutions-en.pdf`

ГЕОМЕТРИЧНИ МИНИАТЮРИ

по материали на Stan Fulger

Stan Fulger е добре познат на любителите на геометрията като автор на задачи, разпознаваеми по елегантния си стил. Неговите решения са кратки, неочаквани и демонстрират богато въображение и геометрична проницателност.

Stan Fulger разказа за списание *Математика*, че по професия е капитан на кораб и се занимава с геометрия само като хоби. Вдъхновение намира в математическите форуми в интернет и понякога забелязва интересни геометрични свойства, които формулира като задачи.

През 2107 г. Alexander Bogomolny публикува на сайта си CutTheKnot материал по задача на Stan Fulger[1], а Jean - Louis Ayme посвети брой на своето списание на един от геометричните резултати на Stan Fulger[2].

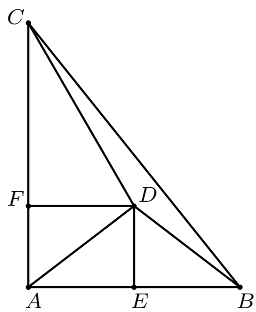
Пет от задачите на Stan Fulger вяха включени в състезателните теми за 7. и 8. клас на последния Фестивал на младите математици в Созопол.

Задача 1. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с $\sphericalangle A = 90^\circ$. Ако D е вътрешна точка и $BD = AD$, $CD = AB$, да се намери $\sphericalangle ACD$.

Първо решение. Нека E и F са проекциите на точката D върху страните AB и AC. Тогава $AEDF$ е правоъгълник и E е среда на AB. Следователно в правоъгълния $\triangle FCD$ имаме

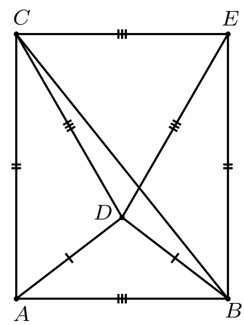
$$CD = AB = 2AE = 2FD,$$

откъдето $\sphericalangle FCD = 30^\circ$.



Второ решение. Да построим правоъгълник $ABEC$ както е показано на чертежа.

Триъгълниците ADC и BDE са еднакви по първи признак, следователно $DE = DC$. Тъй като $CD = AB$ по условие, то триъгълникът DCE е равностранен. Оттук $\sphericalangle ACD = 30^\circ$.



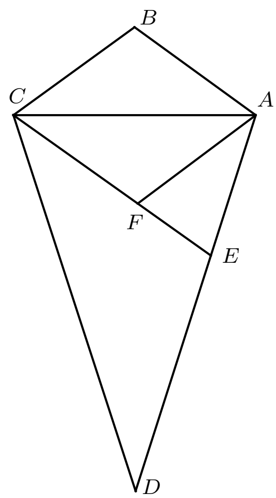
[1] Stan Fulger's Observation in Right Triangle

[2] UN RESULTAT REMARQUABLE DE STAN FULGER

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $\sphericalangle CAD = 72^\circ$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC = 36^\circ$ и $AD = AB + AC$. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

Решение. Лесно намираме $\sphericalangle DCA = 72^\circ$, следователно $\triangle ACD$ е равнобедрен и $CD = AD$.

Нека точката $E \in AD$ е такава, че $CE = AC$; оттук лесно следва, че $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DCE = 36^\circ$, т.е. $\triangle CDE$ е равнобедрен и $CE = DE$. Оттук и от даденото равенство $AD = AB + AC$ следва, че $AE = AB$.



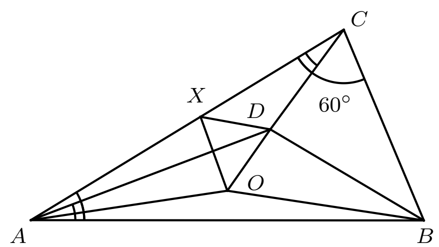
Нека точката $F \in CE$ е такава, че $AF = AE$; тогава $\sphericalangle AFE = 72^\circ$ и $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FAC = 36^\circ$, т.е. $\triangle AFC$ е равнобедрен и $CF = AF$.

Получаваме, че $\triangle ACF \cong ACB$ по първи признак, откъдето

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACF = 36^\circ.$$

Задача 3. В триъгълника ABC е дадена точка D, за която $\sphericalangle CAD = 10^\circ$,$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACD = 20^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ABD$.

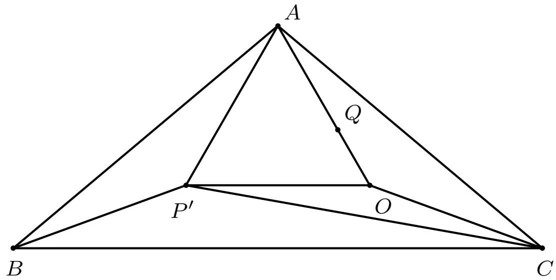
Решение. Ако O е центърът на описаната около ABC окръжност, то $\triangle BCO$ е равностранен, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB = 10^\circ$ и $D \in OC$.



Нека $X \in AC$ и $AO = AX$; триъгълникът AOX е равнобедрен с ъгли $20^\circ - 80^\circ - 80^\circ$. Тъй като ъглополовящата AD на $\sphericalangle OAX$ е симетрала на OX, то $OD = DX$. Освен това $\sphericalangle DOX = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOX = 140^\circ - 80^\circ = 60^\circ$, следователно $\triangle ODX$ е равностранен. От $\triangle BOD \cong \triangle COX$ следва, че $\sphericalangle OBD = 20^\circ$ и намираме $\sphericalangle ABD = 30^\circ$.

Задача 4. В равнобедрения триъгълник ABC с $\sphericalangle A = 100^\circ$ са дадени две точки P и Q така, че $\sphericalangle BAP = \sphericalangle QAC = 20^\circ$ и $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACQ = 10^\circ$. Докажете, че точките B, P и Q лежат на една права.

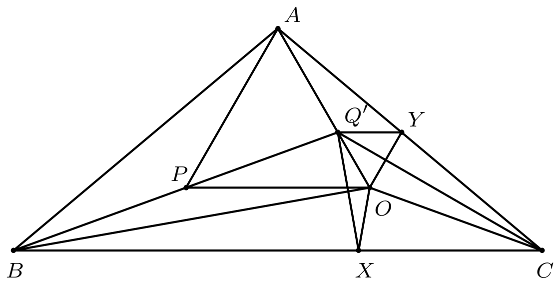
Решение. Вътре в триъгълника ABC избираме точката P' и O така, че $\triangle AP'O$ да е равностранен, $AP' = BP' = AO = CO$. Лесно се вижда, че $\sphericalangle BAP' = 20^\circ$ и $\sphericalangle BCP' = 10^\circ$ (тъй като $\triangle P'OC$ е равнобедрен с ъгли 160°, 10°, 10°), следователно $P' \equiv P$. Освен това $Q \in AO$, тъй като $\sphericalangle OAC = \sphericalangle QAC = 20^\circ$.



Да отбележим точка $X \in BC$, за която $BX = BA$ и нека ъглополовящата BP на $\sphericalangle CBA$ пресича AO в точка Q'. Триъгълникът ABQ' е равнобедрен с ъгли 20°, 80°, 80° и е еднакъв на триъгълника XBQ'; имаме $Q'A = Q'X = BQ'$. Тъй като BO е ъглополовяща на $\sphericalangle CBP$ и симетрала на $Q'X$, то $OX = OQ'$ и в равнобедрения триъгълник OXQ' имаме

$$\sphericalangle Q'XO = \sphericalangle XQ'O = 180^\circ - 2.80^\circ = 20^\circ.$$

Оттук $\sphericalangle CXO = 180^\circ - (20^\circ + 80^\circ) = 80^\circ$.



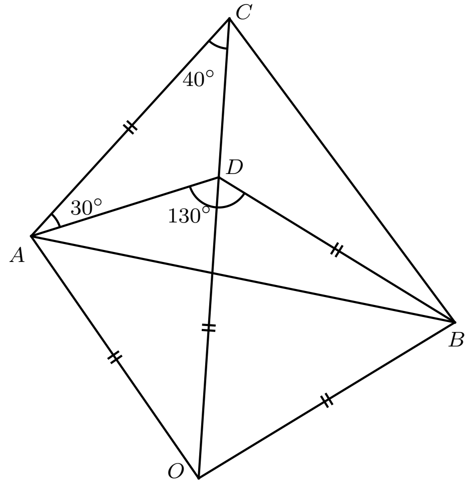
Нека $Y \in CA$ и $CY = CX$. Триъгълникът COX е равнобедрен с ъгли 20°, 80°, 80°. Тогава $\triangle XCO \cong \triangle YCO$ (равнобедрени с ъгъл при върха 20°) и получаваме, че

$$YO = OX = OQ'.$$

Тъй като $\sphericalangle YOQ' = 360^\circ - 2.80^\circ - 140^\circ = 60^\circ$, то триъгълникът OYQ' е равностранен. Следователно $\triangle YQ'C \cong \triangle OQ'C$ и оттук $\sphericalangle ACQ' = 10^\circ$. Следователно $Q \equiv Q'$.

Задача 5. В триъгълника ABC е дадена точка D така, че $\sphericalangle CAD = 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = 40^\circ$, $\sphericalangle ADB = 130^\circ$, $BD = AC$. Да се намери $\sphericalangle BAD$.

Решение. Продължаваме CD до точка O така, че $OA = AC$.



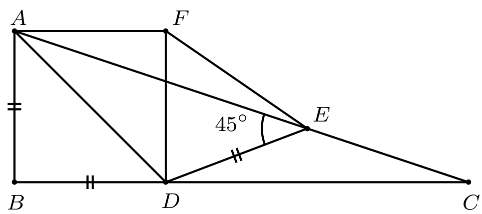
Оттук лесно следва, че $\sphericalangle AOC = 40^\circ$, $\sphericalangle ADO = 70^\circ = \sphericalangle AOD$, следователно $\triangle AOD$ е равнобедрен и $OD = OA$. Следователно $OD = DB$ и тъй като $\sphericalangle ODB = 60^\circ$, то $\triangle OBD$ е равностранен. Следователно O е центърът на описаната около $\triangle BAD$ окръжност и оттук $\sphericalangle BAD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BOD = 30^\circ$.

Забележка. Точката D е центърът на вписаната в ABC окръжност.

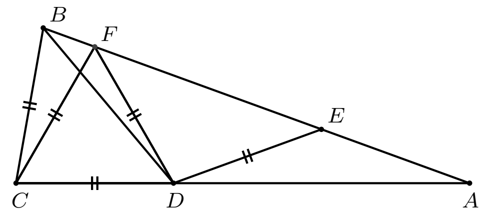
Предлагаме ви още пет от последните задачи, публикувани от Stan Fulger.

Задача 6. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 90^\circ$. Точките $D \in BC$ и $E \in AC$ са такива, че $AB = BD = DE$. Ако $\sphericalangle DEA = 45^\circ$, да се намери $\sphericalangle C$.

Решение. Да означим с F симетричната точка на B спрямо AD; тогава $ABDF$ е квадрат. Тъй като $AF = FD$ и $\sphericalangle AFD = 2\sphericalangle AED$, то F е центърът на описаната около триъгълника AED окръжност. Следователно $\triangle DEF$ е равностранен и намираме $\sphericalangle DAE = \dfrac{1}{2}\sphericalangle DFE = 30^\circ$. Оттук $\sphericalangle C = 15^\circ$.



Задача 7. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 80^\circ$. Точките $D \in AC$ и $E \in AB$ на чертежа са такива, че $BC = CD = DE$. Да се намери $\sphericalangle ADE$.



Решение. Нека F е точката от страната AB, за която $BC = CF$. Тъй като $\sphericalangle BCF = 20^\circ$, то $\sphericalangle DCF = 60^\circ$, следователно равнобедреният триъгълник CDF е равностранен.

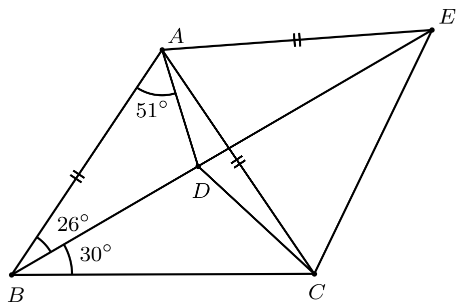
Тогава триъгълникът DEF е равнобедрен и тъй като

$$\sphericalangle DFE = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ,$$

то $\sphericalangle DEF = 40^\circ$. Оттук намираме $\sphericalangle ADE = 20^\circ$ (и $DE = EA$).

Задача 8. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AB = AC$) и вътрешна за него точка D, за която $\sphericalangle ABD = 26^\circ$, $\sphericalangle BAD = 51^\circ$, $\sphericalangle CBD = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ACD$.

Решение. Върху правата BD избираме точка E така, че $AB = AE$.



Имаме $\sphericalangle BEA = 26^\circ$ и намираме

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE - \sphericalangle BAC = 128^\circ - 68^\circ = 60^\circ,$$

следователно равнобедреният триъгълник ACE е равностранен.

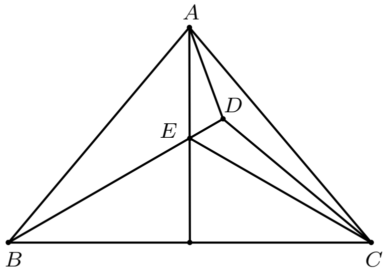
Намираме $\sphericalangle DAC = 17^\circ$, $\sphericalangle DAE = 77^\circ$, откъдето

$$\sphericalangle ADE = 180^\circ - (77^\circ + 26^\circ) = 77^\circ,$$

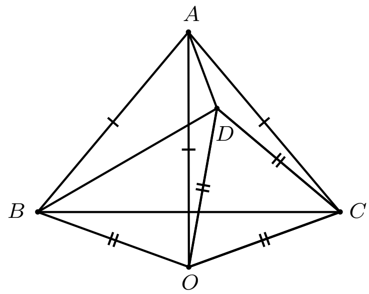
следователно $\triangle ADE$ е равнобедрен. Получихме равенството $AE = ED = EC$, което означава, че E е центърът на описаната около триъгълника ADC окръжност. Оттук намираме $\sphericalangle ACD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle AED = 13^\circ$.

Задача 9. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 50^\circ$. Точка D е вътрешна за триъгълника и $\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ACD = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ADC$.

Първо решение. Да означим с E пресечната точка на BD и симетралата на BC. Тогава $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABE = 20^\circ$ и оттук $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECD = 10^\circ$. Лесно намираме, че $\sphericalangle AED = \sphericalangle CED = 60^\circ$. Следователно D е центърът на вписаната окръжност в триъгълника AEC. Оттук $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAD = 20^\circ$ и намираме $\sphericalangle ADC = 150^\circ$.

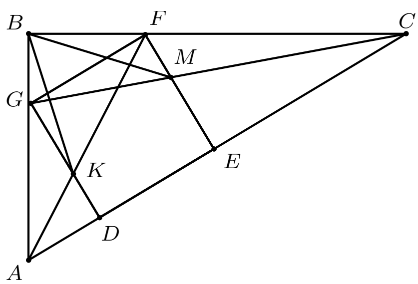


Второ решение. Нека O е центърът на описаната окръжност около триъгълника BCD. Тъй като $\sphericalangle CBD = 30^\circ$, то $\triangle DCO$ е равностранен. Ясно е, че AO е симетралата на BC и $\sphericalangle OAC = 40^\circ$. Следователно триъгълникът OCA има ъгли 40°, 70°, 70° и е равнобедрен, а тъй като $OD = DC$, то AD е ъглополовяща на $\sphericalangle OAC$. Оттук намираме $\sphericalangle ADC = 150^\circ$.



И накрая предлагаме на читателите самостоятелно да докажат следното интересно свойство, забелязано от Stan Fulger.

Задача 10. В правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 90^\circ$ е вписан квадрат $DEFG$, както е показано на чертежа.



Ако $AF \cap GD = K$ и $CG \cap EF = M$, да се докаже, че $BK = BM$.

Очакваме вашите решения!

ПОЧТИ СЪВЪРШЕНИ ЧИСЛА И РАЗПРЪСНАТИ МНОЖЕСТВА

Емил Карлов

Има Книга, в която Бог пази съвършените доказателства на всички математически теореми. Всеки математик млад или възрастен твърди, че тази Книга съществува и в мечтите си чете от нейните страници.

По идея на Пол Ердьош двама професори от Берлинския университет Мартин Айгнер и Гюнтер Циглер издадоха книгата "Proofs from THE BOOK" (може да се изтегли от мрежата). Според тях, доказателствата в тяхната книга са част от доказателствата в Божията Книга.

След като се разбрахме, че Книгата е на рафта след останалите Божии книги, искам да ви попитам нещо съвсем просто.

Как са номерирани страниците на Книгата?

Отговорът е близко до ума. Страниците на съвършената Книга са номерирани последователно в растящ ред със *съвършените* числа.

Да припомним, че едно естествено число е *съвършено*, ако е равно на сбора от всички свои делители, които са по-малки от самото число.

Единицата не е съвършено число, а числото $6 = 1+2+3$ е съвършено.

Математиците познават само няколко съвършени числа и нито едно нечетно съвършено число. Никой не знае колко страници има Книгата, защото не знае колко на брой са съвършените числа.

Упражнение 1. (К. Чакърян) Намерете всички съвършени числа s, на които и двете съседни числа $s-1$ и $s+1$ са прости.

Предлагам Ви, тук и накратко, да се запознаем с *почти съвършените числа.*

Естественото число $n > 1$ е *почти съвършено*, ако сборът на всички негови делители без n е число, по-голямо или равно на n. Например, $12 < 1+2+3+4+6$ е почти съвършено и $28 = 1+2+4+7+14$ е съвършено, значи и почти съвършено. Ясно е, че простите числа не са почти съвършени.

Задача 1. Докажете, че всяко естествено число, което се дели на 6, е почти съвършено число.

Решение. Щом се дели на 6, числото има вида $6k$. Да съберем част от делителите му. Тъй като $1+k+2k+3k > 6k$, числото $6k$ е почти съвършено.

Оттук веднага следва, че *почти съвършените числа са безброй много.*

Задача 2. Вярно ли е, че сборът на две почти съвършени числа е почти съвършено число?

Решение. Числата 28 и 40 са почти съвършени (проверете!), но сборът им 68 не е почти съвършено число, защото $68 > 1 + 2 + 4 + 17 + 34$. Следователно твърдението не е вярно.

Задача 3. Може ли всяко почти съвършено число да се представи като сбор от две или повече почти съвършени числа?

Решение. Ясно е, че *най-малкото* почти съвършено число (може да проверите, че то е 6) не може да се представи като сбор на две или повече почти съвършени числа. Твърдението е невярно.

Задача 4. Намерете всички прости числа p, за които числото $8p$ е почти съвършено.

Решение. Очевидно, ако $p = 3, 5, 7, 11, 13$ числата $24, 40, 88, 104$ са почти съвършени (проверете!)

Всички делители на $8p$, по малки от $8p$, са $1, 2, 3, 4, 8, p, 2p, 4p$. За да бъде почти съвършено числото $8p$, трябва да е изпълнено равенството

$$1 + 2 + 4 + 8 + p + 2p + 4p > 8p.$$

Следователно $p < 15$ и търсените числа са точно $p = 3, 5, 7, 11, 13$.

Задача 5. Докажете, че в редицата

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots \tag{1}$$

няма почти съвършено число.

Решение. Знаем, че

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \tag{2}$$

Сборът от всички делители на числото 2^n е сборът в лявата част на равенството (2). Следователно числото 2^n не е почти съвършено.

Задача 6. Докажете, че всяко естествено число може да се представи като сбор на числа, които не са почти съвършени.

Решение. Твърдението на задачата е вярно, тъй като всяко естествено число n може да се запише като сбор на членове от редицата (1) (това е двоичното представяне на числата). Ето как:

1. Нека k е най-голямата степен на двойката 2^k, че $2^k \leqq n$ (при равенство спираме с търсенето).

2. Нека m е най-високата степен на двойката 2^m, че $2^m \leqq n - 2^k$.

Търсенето продължава, докато достигнем равенство. Равенство непременно се достига, защото разликата между n и съответните суми на степените на двойката е цяло неотрицателно число и строго намалява.

Например, $2018 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1$.

Сега ще изведем едно *характеристично свойство* на почти съвършените числа, т.е. свойство, което притежават само съвършените числа.

Задача 7. Ако естественото число A е почти съвършено и всичките му делители са $1, d_1, d_2, \dots, d_k, A$, да се докаже неравенството

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} + \frac{1}{A} \geqq 2. \tag{3}$$

Решение. Нека делителите на A са подредени в растящ ред, т.е.

$$1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_k < A.$$

Умножаваме двете страни на неравенството (3) с числото A и получаваме

$$A + d_k + d_{k-1} + \cdots + d_1 + 1 \geqq 2A \quad \text{или} \quad d_k + d_{k-1} + \cdots + d_1 + 1 \geqq A$$

Последното неравенство е вярно, защото A е почти съвършено число. Следователно неравенството (3) е вярно.

Задача 8. Ако за естественото число A и за всички негови делители е изпълнено неравенството (3), то A е почти съвършено число.

Решение. Както в предишната задача, от (3) получаваме, че $d_k + d_{k-1} + \cdots + d_1 + 1 \geqq A$, т.е. A е почти съвършено число.

Всички почти съвършени числа, които споменахме дотук, са четни.

Задача 9. Съществува ли нечетно почти съвършено число?

Решение. Ще покажем как може да се конструира нечетно почти съвършено число.

Всички делители на нечетното почти съвършеното число трябва да са нечетни и да изпълняват неравенството (3). Ще намерим такова число, чиито прости делители са 3, 5 и 7.

За целта в (3) добавяме събираеми, докато сборът им стане по-голям от 2. Имаме

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{63}+\frac{1}{135}+\frac{1}{189}+\frac{1}{225}+\frac{1}{315} > 2$$

Следователно числото $3^3.5.7 = 945$ е нечетно и почти съвършено.

Задача 10. Съществуват ли две последователни почти съвършени числа?

Решение. Ако намерим нечетно почти съвършено число, което не се дели на 3, то някой от двата му четни съседа ще се дели на 6 и от задача 1 ще следва, че този му съсед е почти съвършено число.

Отново се заемаме с (3)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\cdots.$$

Първите три дроби $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ имат сбор, по-голям от $1\frac{3}{10}$.

Вторите три дроби $\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$ имат сбор, по-голям от $\frac{3}{20}$.

Третите три дроби $\frac{1}{23}, \frac{1}{25}, \frac{1}{29}$ имат сбор, по-голям от $\frac{3}{30}$ и т.н.

Ако продължим да вземаме по три числа от всяка десетка, например от следващата десетката от 30 до 40 вземем 31, 35, 37, които са нечетни и не се делят на 3, в даден момент ще получим сбор, по-голям от 2. Да разгледаме сбора

$$1+\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

и да видим кога числото в скобите ще стане по-голямо от 10/3. Имаме

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}>\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\cdots+\frac{1}{64}>\frac{1}{2}.$$

Вече знаем докъде трябва да продължим сумата в неравенството (3). Последната дроб в сумата отляво е $\frac{1}{637}$. Така получаваме:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\cdots+\frac{1}{637} \geqq 2.$$

Следователно $n = 5.7.11.13.17.23.25.29.31.35.37\ldots637$ е почти съвършено нечетно число и не се дели на 3.

Един от съседите му $n-1$ или $n+1$ се дели на 6 следователно и той е почти съвършено число.

Може да покажем две съседни почти съвършени числа, които не изпълняват условието нечетното число да не се дели на 3 и двете съседни числа са почти съвършени: 5775 и 5776 или 5984 и 5985.

Упражнение 2. Ако естествените числа A и B са почти съвършени, вярно ли е, че числото $A.B$ е почти съвършено число?

От задачата на Керопе Чакърян става ясно, че има само едно съвършено число, на което и двата му съседа са прости числа и това е числото 6. Но има много почти съвършени числа, на които двата съседа са прости числа. Например, (11, 12, 13), (17, 18, 19), (29, 30, 31), (41, 42, 43), (59, 60, 61), (71, 72, 73) и (101, 102, 103).

Не може да докажем, че почти съвършените числа, които имат два съседа прости числа, са безброй много, защото така ще докажем, че простите числа *близнаци* са безброй много, а това е не е доказано още от математиците. (*Близнаци* са тези прости числа, които са съседни нечетни числа.)

Но може да докажем нещо много интересно.

Задача 11. Сборът на всеки две съседни нечетни прости числа е число, което може да се представи като произведение на три или повече от три множители (не непременно различни), по-големи от единица.

Решение. Например, сборът на съседните прости числа 11 и 13 е числото $24 = 2.4.3$ или $24 = 2.2.2.3$.

Нека p и q са две съседни прости числа. Числото $m = p + q$ е четно число, т.е. има множител 2.

Освен това, числото $p < \dfrac{p+q}{2} < q$ не е просто, защото между p и q няма прости числа, т.е. има поне още един делител k, по-голям от единица и се разлага поне на три множителя: $m = 2.k.s$.

Упражнение 3. Сборът от реципрочните стойности на всички делители на едно съвършено число (без единицата) е равен на 1.

Например, числото 28 е съвършено и сборът от реципрочните стойности на неговите делители (без 1) е

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 1. \tag{4}$$

Нека отново да погледнем безкрайната редицата от числа:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$$

Сумата от реципрочните стойности на първите n числа от редицата винаги изпълнява неравенството:

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2,$$

което е още едно доказателство, че в редицата (2) няма почти съвършени числа.

От друга страна, изберете няколко числа от редицата (2) и ще забележите, че сумата от тези числа не е равна на сумата на което и да е друго подмножество на редицата (2). Всяка сума на подмножества на (2) е двоично описание на различно естествено число.

Множество от естествени числа със свойството, че няма подмножества с равни суми, се нарича *разпръснато множество.*

Задача 12. От множеството $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 26\}$ изберете 6 числа, които образуват разпръснато множество.

Решение. Множеството $\{26, 25, 24, 22, 16, 10\}$ е разпръснато множество (проверете).

Не е трудно да се убедим, че $\dfrac{1}{26} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{22} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{10} < 2.$

Задача 13. От множеството от числата $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 26\}$ не могат да се изберат 7 числа, които да образуват разпръснато множество.

Решение. Допускаме, че можем да изберем седем числа, които да образуват разпръснато множество.

Това множество от 7 елемента има 7 подмножества с 1 елемент, 21 подмножества с 2 елемента, 35 подмножества с 3 елемента и 35 подмножества с 4 елемента. Всички тези $98 = 7+21+35+35$ подмножества трябва да имат 98 различни суми, за да бъде множеството разпръснато. Но най-голямата стойност, която може да се получи от числата от даденото множество $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 26\}$, е $98 = 26 + 25 + 24 + 23$.

От друга страна, числата 23, 24, 25, 26 не могат да участват едновременно в нашето разпръснато множество, защото $23 + 26 = 24 + 25$ и множеството няма да е разпръснато. Така че възможните различни стойности, които може да приемат сумите на подмножествата с 1, 2, 3 и 4 елемента е от 1 до 97, а подмножествата са 98! Противоречие.

Така стигаме до мисълта, че множеството от всички делители на едно почти съвършено число е нещо противоположно на разпръснато множество, в смисъл, че сумата от реципрочните на всичките му делители е винаги по-голяма или равна на 2, а сумата от реципрочните стойности на елементите на едно разпръснато множество е може би винаги по-малка от 2.

Това ще изясним в следващата задача.

Задача 14. Докажете, че ако множеството $R = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ е разпръснато, то е изпълнено неравенството:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$$

Решение. Нека елементите на разпръснатото множество R са подредени по големина в нарастващ ред: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$. Ще докажем, неравенството

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Знаем, че всяко подмножество на R е разпръснато множество и следователно сумите от числата във всяко подмножество от елементи

$\Pi_k = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ приемат стойности в интервала $[1; A_k]$, където $A_k \geqq 2^k - 1$, защото $2^k - 1$ е броят на всички (без празното) подмножества на множеството $\Pi_k = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$.

От друга страна знаем, че $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^1 + 1$.

Следователно следващият елемент a_{k+1} ще приеме стойност по-голяма или равна на 2^k, т.е.

$$a_{k+1} \geqq 2^k,$$

защото подмножеството $\Pi_{k+1} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$ е също разпръснато множество.

Да разгледаме разликата

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{a_n}\right) \geqq 0,$$

защото всички събираеми са неотрицателни числа. Така получаваме, че

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Упражнение 4. Намерете разпръснато множество от 11 елемента, което е подмножество на $E = \{1, 2, 3, \ldots, 999\}$.

Упражнение 5. Докажете, че няма подмножество с 14 елемента на $E = \{1, 2, 3, \ldots, 999\}$, което да е разпръснато множество.

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ЛЕМУС–ЩАЙНЕР

Калин Върбанов (12. клас, СМГ)

През 1840 година Даниел Кристиян Лемус е професор по алгебра в университета в Берлин и пише в писмо до своя колега професор Жак Чарлз Щурм от университета в Париж, че не може да намери геометрично решение на следното твърдение.

Ако две ъглополовящи в един триъгълник са равни, то триъгълникът е равнобедрен.

След година твърдението е доказано алгебрично от професора по геометрия Якоб Щайнер, а малко по-късно Лемус намира геометрично решение. Така тази *заплетена* история довежда до известната на всеки ученик теорема на Лемус–Щайнер ([1], [2]).

Тук ще разгледаме едно интересно обобщение на теоремата.

Върху ъглополовящата CL в триъгълника ABC избираме произволна точка P. Отсечките AM и BN ($M \in BC, N \in AC$) през точка P наричаме *псевдоъглополовящи* на $\triangle ABC$.

Обобщение на теоремата на Лемус–Щайнер. Ако две псевдоъглополовящи в един триъгълник са равни, то триъгълникът е равнобедрен.

Доказателство. На чертежа CL е ъглополовящата на $\triangle ABC$, а AM и BN са две равни псевдоъглополовящи през точка $P \in CL$. Описваме окръжност k_1 около ACM и окръжност k_2 около BCN. Нека окръжността k_1 пресича правата CL в точка V, а окръжността k_2 пресича правата CL в точка U.

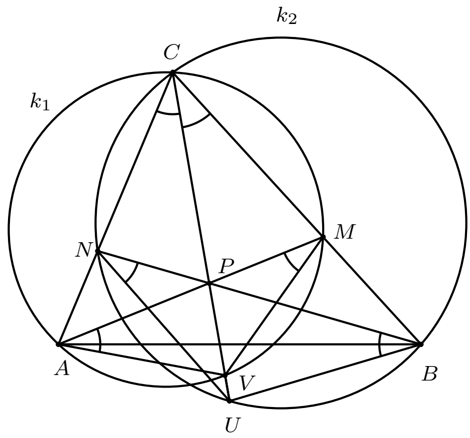
Разглеждаме триъгълниците VMP и CMV, които очевидно са подобни (имат общ ъгъл и $\sphericalangle VCM = \sphericalangle ACV = \sphericalangle AMV$). Оттук

$$VM^2 = VP\,.\,VC. \tag{1}$$

Аналогично от $\triangle UNP \sim \triangle UNC$ следва равенството:

$$UN^2 = UP\,.\,UC. \tag{2}$$

От друга страна AMV и BNU са еднакви според втори признак за еднакви триъгълници ($AM = BN$, $\sphericalangle AMV = \sphericalangle BNU$, $\sphericalangle VAM = \sphericalangle UBN$), т.е. $VM = UN$.



От равенствата (1) и (2) получаваме, че за четири точки от правата L

$$VP\,.\,VC = UP\,.\,UC, \tag{3}$$

като $CP < CV$ и $CP < CU$. Полагаме $CP = x$, $CV = v$ и $CU = u$. От равенството (3) следва, че

$$(v - x)v = (u - x)u \iff x(u - v) = (u + v)(u - v).$$

Ако $u \neq v$ следва, че $x = u + v$, или $CP = CU + CV$, което е невъзможно! Следователно $CU = CV$.

Точката $U \equiv V$ е равноотдалечена от върховете на четириъгълника $ABMN$ ($UA = UB = UM = UN$), с други думи около $ABMN$ може да се опише окръжност. Тъй като диагоналите AM и BN на този четириъгълник са равни, то той е равнобедрен трапец.

Следователно $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ и триъгълникът ABC е равнобедрен.

Бел. ред. Разглежданото обобщение е доказано за пръв път в [3].

Литература

[1] Тонов, И. *Теорема на Щайнер-Лемус или още нещо за допускане на противното*, Математика, 2009, бр. 6, стр. 2-8.

[2] Sadi Abu-Saymeh, Mowaffaq Hajja. *More on the Steiner-Lehmus Theorem.* Journal for Geometry and Graphics, Volume 14 (2010), No.2, 127-133.

[3] Virgil Nicula, Cosmin Pohoate. *A Stronger Form of the Steiner-Lehmus Theorem.* Journal for Geometry and Graphics, Volume 13 (2009), No.1, 25-27.

тест

за подготовка за външно оценяване и приемни изпити след 7. клас

Тестът обхваща учебното съдържание, което се изучава до м. януари.

ПЪРВИ МОДУЛ

ЗАДАЧИ С ИЗБИРАЕМ ОТГОВОР

1. Стойността на израза $\dfrac{2018^2 - 2018}{2018^2 - 1}$ е равна на:

А) $\dfrac{2017}{2018}$ **Б)** $\dfrac{2017}{2019}$ **В)** $\dfrac{2018}{2019}$ **Г)** 1

2. В понеделник Иво решил $\dfrac{2}{7}$ от задачите за домашно, а във вторник решил 60% от останалите задачи. Каква част от задачите са останали нерешени?

А) $\dfrac{4}{7}$ **Б)** $\dfrac{2}{7}$ **В)** $\dfrac{19}{35}$ **Г)** $\dfrac{4}{35}$

3. Ако в $\triangle ABC$ е известно, че $\sphericalangle A = 80^\circ$ и $\sphericalangle B$ е равен на 75% от $\sphericalangle A$, то $\sphericalangle C$ е равен на:

А) 75° **Б)** 55° **В)** 45° **Г)** 40°

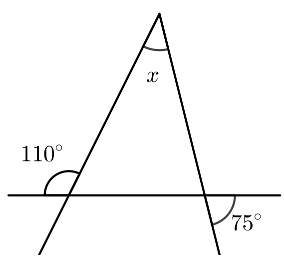
4. На колко градуса е равен ъгъл, който е с 12° по-голям от съседния си ъгъл?

А) 102° **Б)** 100° **В)** 98° **Г)** 96°

5. Уравнението $|x + 1| = 5$ е еквивалентно на:

А) $\dfrac{x}{4} + 1 = \dfrac{x}{2}$ **Б)** $(x + 2)^2 = 6(x + 2)$

В) $(x-4)^2+2(x-4) = 0$ **Г)** $(x + 6)^2 = 10(x + 6)$

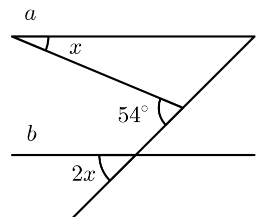


6. Градусната мярка на ъгъл x на чертежа е:

А) 31° **Б)** 33°

В) 35° **Г)** 37°

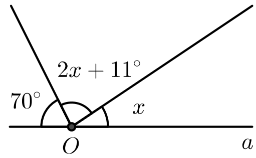
7. На чертежа правите a и b са успоредни. Градусната мярка на x е:



А) 17° **Б)** 18°

В) 19° **Г)** 24°

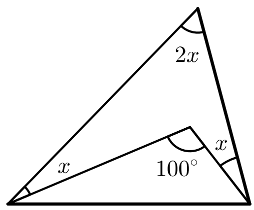
8. На чертежа точка O лежи на правата a. Градусната мярка на ъгъла, означен с x, е:



А) 31° **Б)** 33°

В) 36° **Г)** 38°

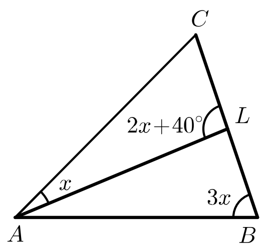
9. Градусната мярка на ъгъл x на чертежа е:



А) 20° **Б)** 24°

В) 25° **Г)** 30°

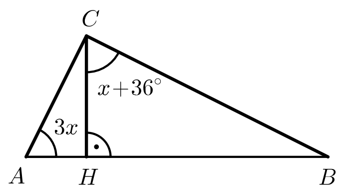
10. На чертежа отсечката AL е ъглополовяща в $\triangle ABC$. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:



А) 80° **Б)** 70°

В) 60° **Г)** 40°

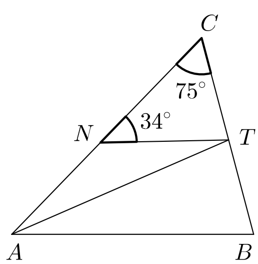
11. На чертежа $\triangle ABC$ е правоъгълен и CH е височина. Мярката на ABC е:



А) 40° **Б)** 42°

В) 34° **Г)** 36°

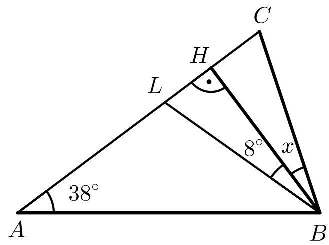
12. На чертежа отсечката AT е ъглополовяща в $\triangle ABC$ и NT е успоредна на AB. Мярката на $\sphericalangle ATB$ е:



А) 92° **Б)** 91°

В) 90° **Г)** 89°

13. На чертежа отсечката BH е височина, а BL е ъглополовяща в $\triangle ABC$. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:



А) 54° **Б)** 58°

В) 64° **Г)** 56°

14. Произведението на коефициентите пред x и x^2 в нормалния вид на многочлена

$$2x - (x-1)^2 + (3x+1)(1-3x)$$

е равно на:

А) -40 **Б)** 32 **В)** 0 **Г)** -20

15. Колко килограма грозде, което съдържа 75% вода, трябва да се изсушат, за да се получат 3 килограма стафиди, които съдържат 10% вода?

А) 10 **Б)** 10,5 **В)** 10,8 **Г)** 10,9

16. Правоъгълник $ABCD$ има обиколка 20 cm и страна $AD = x$ cm. Лицето на $ABCD$ е равно на:

А) $10x + x^2$ **Б)** $20x - x^2$ **В)** $10x - x^2$ **Г)** $10x$

17. В един клас има 8 момчета със средна възраст 14,5 години и 12 момичета със средна възраст 14 години. Средната възраст на учениците в класа е:

А) 14,3 **Б)** 14,2 **В)** 14,1 **Г)** 14

ЗАДАЧИ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР

18. Всеки ученик в училище X изучава точно един чужд език: английски, немски, испански или руски. Разпределението на учениците според изучавания от тях език е показано на кръговата диаграма.

А) Ако 70% от учениците не учат испански, да се намери градусната мярка на ъгъла в сектора за испански език.

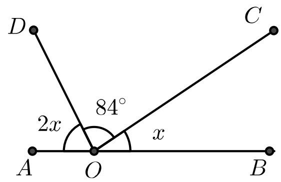
Б) Като се използват данните в таблицата, да се намери градусната мярка на централните ъгли на секторите в диаграмата.

Чужд език	английски	немски	испански	руски
Брой ученици	132	99	121	44

19. Триъгълникът ABC е правоъгълен и ъглополовящите AL и BN на острите му ъгли се пресичат в точка O.
А) Намерете $\sphericalangle AOB$.
Б) Права през точка N, успоредна на BC, пресича страната AB в точката M. Ако $\sphericalangle MNB = 20^\circ$, намерете $\sphericalangle BAC$.

20. Намерете общия корен на уравненията $x^3 - 49x = 0$ и $|x+1| = 6$.

21. На чертежа точката O лежи на правата AB, а $\sphericalangle COD = 84^\circ$.
А) По данните от чертежа намерете x.
Б) Намерете отношението $\sphericalangle AOC : \sphericalangle COB$.
В) Намерете градусната мярка на ъгъла между ъглополовящите на $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle DOB$.



22. Автомобил изминал пътя от А до В за x часа със скорост 60 km/h. На връщане автомобилът се движил със скорост 100 km/h.
А) Изразете чрез x и попълнете в таблицата разстоянието от А до В и времето, за което автомобилът се е върнал от В в А.

	V	t	S
От А до В	60 km/h	x	
От В до А	100 km/h		

Б) Намерете средната скорост, с която автомобилът е изминал пътя от тръгването от А до връщането си в А.

Запишете пълното решение на задачи 23, 24 и 25 с необходимите обосновки.

23. Даден е многочленът

$$M = (2x-1)(3x+4) + (x-2)(ax-4)$$

с параметър a.
А) Запишете многочлена M в нормален вид.
Б) При коя стойност на параметъра a многочленът M е от първа степен?
В) При $a = 9$ разложете многочлена M на множители.

24. За 40 минути Том може да боядиса 25% от оградата, а за същото време Хъкълбери може да боядиса 20% от оградата.
А) Намерете времето, за което Том може да боядиса сам цялата ограда.
Б) Том боядисал сам 10% от оградата, след което в работата се включил и Хъкълбери. Намерете времето, за което е боядисана оградата.

25. В правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle C = 90^\circ$ са построени ъглополовящата AD ($D \in BC$) и отсечката BH ($H \in AC$) така, че острият ъгъл между AD и BH е равен на 70°, $\sphericalangle CBH = x$ и $\sphericalangle ABH = 11x$.
А) Изразете чрез x ъглите $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle BAD$.
Б) Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ABC$.

Отговори и решения

1. В; **2.** Б; **3.** Г; **4.** Г; **5.** Г; **6.** В; **7.** Б; **8.** Б; **9.** В;
10. А; **11.** Г; **12.** А; **13.** А; **14.** А; **15.** В; **16.** В; **17.** Б.
18. А) 108°; Б) английски 120°, немски 90°, испански 110°, руски 40°.
19. А) 135°; Б) 50°.
20. -7.
21. А) 32°; Б) $37 : 8$; В) 48°.
22. А) $60x$ km, $0{,}6x$ h; Б) 75 km/h.
23. А) $M = (6+a)x^2 + (1-2a)x + 4$; Б) $a = -6$; В) $(3x-1)(5x-4)$.

24. А) Производителността на Том е $\frac{3}{8}$. Той боядисва оградата за $\frac{8}{3}$ часа, т.е. за 2 ч 40 мин.

Б) Том боядисал 10% от оградата за $\frac{1}{10} : \frac{3}{8} = \frac{4}{15}$ часа, т.е. 16 мин.

Общата производителност на Том и Хъкълбери е $\frac{27}{40}$. Ако заедно боядисвали x часа, то
$$\frac{27}{40}x = \frac{9}{10} \iff x = \frac{4}{3},$$
т.е. заедно са боядисвали 1 ч 20 мин. Оградата е боядисана за 1 ч 36 мин.

25. А) От $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle BAC = 90^\circ - 12x$ и
$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 45^\circ - 6x;$$

Б) Ако $AD \cap BH = O$, от сбора на ъглите в $\triangle ABO$ имаме
$$(45^\circ - 6x) + 11x = 70^\circ \Rightarrow x = 5^\circ.$$
Следователно $\sphericalangle ABC = 12x = 60^\circ$.

ПЪТИЩАТА НА БРЪМБАРА

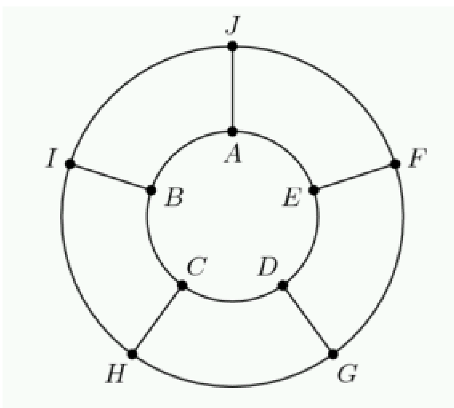
Невена Събева, ИМИ–БАН

Наскоро публикувах на страницата си във фейсбук забавна задача за броене на пътища. Противно на очакванията ми, не получих коментари с хитри решения, а няколко добронамерени предупреждения да избирам по-приятни задачи.

Вместо това да видим откъде дойде тази задача. Тя бе улеснен вариант на задача 10 от AIME (American Invitational Mathematics Examination) през 2018 г. AIME е второто състезание за подбор на националния отбор на САЩ за Международната олимпиада по математика и е очаквано задачите там да са интересни. Статистиката показва, че тази година най-трудна е била именно задача 10 (решена от едва 9,85% от участниците и с най-висок коефициент на трудност). Определено такава задача е неподходяща за фейсбук, но представлява интерес за любителите на математиката от всякаква възраст.

Ето и задачата.

В точка A на схемата се намира бръмбар. За една стъпка той се придвижва от една отбелязана точка до съседна на нея по линиите на схемата. По вътрешната окръжност бръмбарът се движи обратно на часовниковата стрелка, а по външната – по часовниковата стрелка.



Да се намери броят на пътищата с 15 стъпки, които започват и завършват в точка A.

Публикуваните решения включват разглеждане на случаи, което предвид малкия брой стъпки относително бързо води до отговор. Ще приложим друг подход – с използване на **рекурсия**, полезен при подобни задачи.

Нека X_n е броят на пътищата с n стъпки от A до X за всяка точка X измежду $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Имаме $A_0 = 1$ и $X_0 = 0$ за всяка друга точка X. При $n > 0$ от правилата за придвижване следва, че

$$\begin{aligned}
A_n &= \quad B_{n-1} + J_{n-1} \quad = I_n \\
B_n &= \quad C_{n-1} + I_{n-1} \quad = H_n \\
C_n &= \quad D_{n-1} + H_{n-1} \quad = G_n \\
D_n &= \quad E_{n-1} + G_{n-1} \quad = F_n \\
E_n &= \quad A_{n-1} + F_{n-1} \quad = J_n
\end{aligned}$$

Като използваме, че $A_n = I_n$, $B_n = H_n$, $C_n = G_n$, $D_n = F_n$ и $E_n = J_n$, записваме горните равенства във вида

$$\begin{aligned}
A_n &= B_{n-1} + E_{n-1} \\
B_n &= C_{n-1} + A_{n-1} \\
C_n &= D_{n-1} + B_{n-1} \\
D_n &= E_{n-1} + C_{n-1} \\
E_n &= A_{n-1} + D_{n-1}
\end{aligned}$$

Освен това, броят на всички пътища с n стъпки е 2^n (тъй като за всяка стъпка има по 2 възможности). От друга страна, броят на всички пътища с n стъпки е

$$A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + F_n + G_n + H_n + I_n + J_n = 2(A_n + B_n + C_n + D_n + E_n).$$

Следователно $A_n + B_n + C_n + D_n + E_n = 2^{n-1}$. Тогава последователно получаваме

$$\begin{aligned}
A_n &= B_{n-1} + E_{n-1} = \\
&= (C_{n-2} + A_{n-2}) + (A_{n-2} + D_{n-2}) = \\
&= 2A_{n-2} + D_{n-3} + B_{n-3} + E_{n-3} + C_{n-3} = \\
&= 2A_{n-2} + 2^{n-4} - A_{n-3}.
\end{aligned}$$

Оттук лесно намираме първите 13 члена на редицата:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_n	1	1	0	2	1	10	7	35	36	127	165	474	715

Тогава $A_{15} = 2A_{13} + 2^{11} - A_{12} = 2.715 + 2048 - 474 = 3004$.

Задачата позволява различни подходи и обобщения, което я прави подходяща за ученическа разработка (реферат). Така че ръкавицата е хвърлена – очакваме вашите предложения!

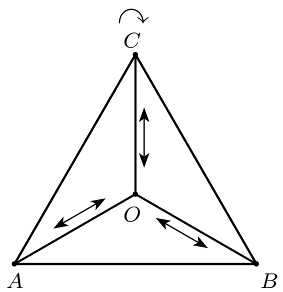
Конкурсни задачи

Уважаеми читатели,

Конкурсът на сп. „Математика“ продължава през 2018/19 г. Участват всички ученици, които изпратят в посочения срок решения на задачите. Очакваме вашите решения на e-mail math_competition@abv.bg (във формат pdf).

* * *

Задача 1. Робот се движи по схемата, показана на чертежа, като за един ход изминава една отсечка. По отсечките OA, OB OC е позволено двупосочно движение, а по страните на триъгълника ABC роботът се движи само по посока на часовниковата стрелка.



Роботът тръгва от точка O и след 10 хода трябва да се върне в O. По колко различни маршрута може да стане това?

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC с $\sphericalangle B = 90^\circ$ е вписан квадрат $DEFG$ ($D, E \in AC$, $F \in BC$, $G \in AB$). Ако $AF \cap GD = K$ и $CG \cap EF = M$, да се докаже, че $BK = BM$.

Задача 3. Да се намерят всички реални числа x, за които е изпълнено равенството

$$\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1.$$

(С $\lfloor x \rfloor$ означаваме цялата част на x.)

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2019 г.

Решения на конкурсните задачи от бр. 4/2018 г.

Задача 1. Известно е, че съществува единствена тройка прости числа (p, q, r), за които $p < q < r$ и $\dfrac{p^3 + q^3 + r^3}{p + q + r} = 249$. Да се намери r.

Решение. Ще използваме равенството

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p + q + r)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp).$$

Имаме

$$(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp) = p^3+q^3+r^3-3pqr = 249(p+q+r)-3pqr,$$

следователно

$$3pqr = (p + q + r)(249 + pq + qr + pr - p^2 - q^2 - r^2).$$

Лявата страна на равенството е произведение на прости числа, следователно за множителя вдясно $p+q+r$ има малък брой възможности. Някои отпадат, тъй като $p + q + r > 3$ и $p + q + r > 3p$.

Ако разгледаме случая $p + q + r = 3q$, имаме

$$0 = 249 + q(p + r) - p^2 - q^2 - r^2 = 249 + q^2 - p^2 - r^2,$$

откъдето $3p^2 - 2pr + 3r^2 = 996$. Следователно $3|2pr$ и тъй като $r > p$, то $p = 3$; оттук намираме $r = 19$. Тройката $(p, q, r) = (3, 11, 19)$ е решение на задачата.

Задачата е решена от **Мирослав Минчев** (8. клас, ППМГ, Плевен) и **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ).

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с радиус на описаната окръжност 17 и радиус на вписаната окръжност 4. Външновписаната окръжност, която се допира до страната BC, е k_a. Симетричната окръжност на k_a спрямо правата BC се допира до описаната около ABC окръжност. Да се намери лицето на ABC.

Решение. Ще използваме стандартните означения в $\triangle ABC$. Нека D е допирната точка на k_a с BC и X е точката, в която образът на k_a допира описаната окръжност k и $XD \cap k = M$. При хомотетия с център X, която изпраща k_a в k, допирателната BC към k_a се изобразява в допирателна t към k през M. От успоредността $t||BC$ следва, че $\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{MC}$, т.е. M е среда на $\overset{\frown}{BC}$ и AM е ъглополовящата на $\sphericalangle A$. Ако $D'D$ е диаметърът на образа на k_a и $DD' \cap t = Y$, триъгълниците $DD'X$ DMY са подобни, откъдето

$$DY.DD' = DM.DX.$$

Степента на точката D спрямо окръжността k е

$$DM.DX = DB.DC$$

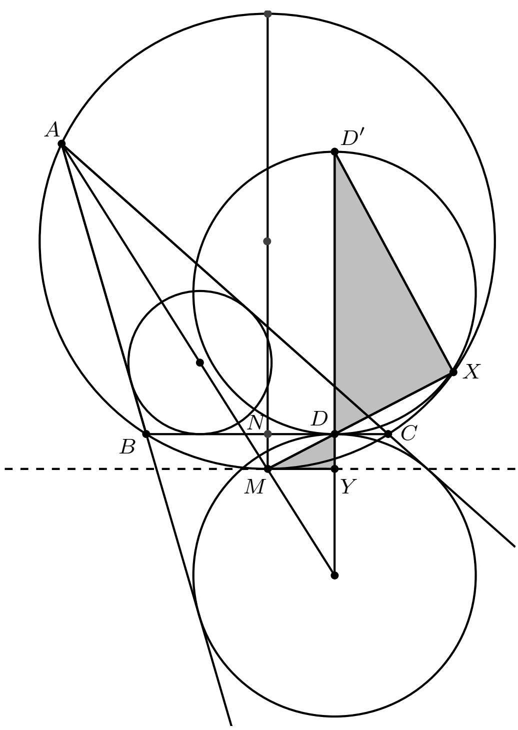
и от последните две равенства получаваме

$$DD'.DY = DB.DC = \iff 2r_a.DY = (p-b)(p-c).$$

Оттук, като използваме равенството $rr_a = (p-b)(p-c)$ (което лесно следва от $S = pr = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$) получаваме, че $DY = \dfrac{r}{2}$. Остава да забележим, че ако N е средата на BC, то $MN = DY$ и степента на точката N спрямо k е

$$NB.NC = \frac{r}{2} \cdot \left(2R - \frac{r}{2}\right) \iff \frac{a^2}{4} = 2(34-2),$$

откъдето $a = 16$.



Като заместим във формулите $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$, лесно получаваме, че $b + c = \dfrac{S}{2} - 16$ и $bc = \dfrac{17S}{4}$. Заместваме в Хероновата формула:

$$
\begin{aligned}
16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\
&= \frac{2S}{r}\left(-a+\frac{S}{2}-16\right)(a^2-(b+c)^2+4bc) = \\
&= \frac{S}{2}\left(\frac{S}{2}-32\right)(256-\left(\frac{S}{2}-16\right)^2+17S),
\end{aligned}
$$

откъдето $256=(S-64)(132-S)$. Корените на полученото квадратно уравнение са 68 и 128 и само при 128 се получават реални стойности за b и c. Следователно $S=128$.

Задачата е решена от **Борислав Кирилов** (9. клас, ПЧМГ).

Задача 3. Да се намери броят на пермутациите $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ на числата $1, 2, \ldots, 2018$, за всяка от които неравенството $a_k > k$ е изпълнено за точно една стойност на k.

Решение на Борислав Кирилов. Ще докажем следната лема.

Лема. Броят пермутации p на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$, за които $p(1)=n$ и $p(i) \leqq i$ за $i=2,3,\ldots,n$, е 2^{n-2}.

Доказателство. Има два избора за $p(2)$, после два избора за $p(3)$ и т.н.; накрая един избор за $p(n)$. Резултатът следва.

Нека $a_k = m > k$. Тогава, ако $m \neq 2018$, то $a_{2018} = 2018$. Сега, ако $m \neq 2017$, то $a_{2017} = 2017$ и т.н. Виждаме, че $a_i = i$ за всяко $m < i \leqq 2018$. По подобен начин виждаме, че $a_i = i$ за всяко $1 \leqq i < k$. От лемата следва, че има 2^{m-k-1} начина да подредим останалите числа (намаляваме всяко от числата с $k-1$, за да стигнем до лемата).

Така броят пермутации е

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{1\leqq k<m\leqq 2018} 2^{m-k} &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqq d\leqq 2017}(2018-d)2^d = \\
&= \frac{1}{2}\left((2^1)+(2^1+2^2)+\cdots+(2^1+\cdots+2^{2017})\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(2^2-2+2^3-2+\cdots+2^{2018}-2\right) = \\
&= 2^{2019}-4038.
\end{aligned}
$$

конкурсни задачи

Конкурсът за ученици от V до VII клас се провежда в два кръга. В първия (задочен) кръг класирането се извършва въз основа на изпратените **в срок** решения на конкурсните задачи, публикувани в бр. 5 и 6 от 2018 г. и бр. 1, 2 от 2019 г. Победителите от задочния кръг ще бъдат поканени да участват във втория (присъствен) кръг през юни 2018 г. Условията са следните:

1. Участието е индивидуално за ученици от V до VII клас.

2. Във всеки брой се предлагат три задачи – съответно за V, VI и VII клас. Седмокласниците се класират въз основа на трите задачи, шестокласниците – на първите две. Учениците от V и VI клас могат да изпращат решения и за по-горните класове. Като се отчитат всички изпратени решения, се извършва класиране отделно за всеки клас.

3. Във всяко писмо напишете четливо **трите си имена, класа, училището и точния си адрес**. Решенията изпращайте на e-mail: math_competition@abv.bg (във формат pdf) или на адрес:

Невена Събева (за конкурса на списание „Математика“)
ИМИ – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

* * *

Задача 1. Хари и Хърмаяни попаднали в капан. Те били заключени в стая, в която имало 6 бутилки, подредени в редица. Бутилките били номерирани отляво надясно с числата от 1 до 6. Хари намерил лист със следните упътвания:

† *В три от бутилките има отрова, две бутилки са с приспивателна отвара, а в шестата бутилка има отвара за бягство.*

† *Непосредствено вляво от приспивателната отвара има отрова.*

† *В най-малката бутилка има отрова.*

† *Втората бутилка отляво и втората отдясно са с едно и също съдържание.*

Хърмаяни разгледала редицата и казала, че разполага с достатъчно информация, за да открие бутилката с отвара за бягство. Кой номер е най-малката бутилка и бутилката с отвара за бягство?

Задача 2. Изпъкнал многостен има 26 върха, 60 ръба и 36 стени, от които 24 са триъгълници и 12 са четириъгълници. *Диагонал на многостена* е всяка отсечка, която свързва два върха и не лежи на стена на многостена. Да се намери броят на всички диагонали на многостена.

Задача 3. *Печелившa комбинация* наричаме всеки избор на четири числа в дадената таблица, при който две от избраните числа имат сбор 16 и две имат сбор 24.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Например, печеливши комбинации са $(3, 5, 13, 19)$ и $(6, 10, 20, 18)$.

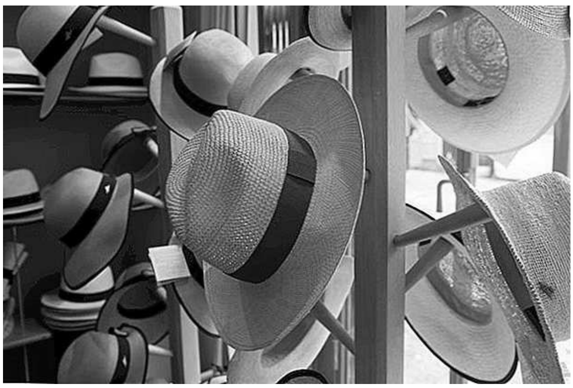
Да се намери броят на всички печеливши комбинации.

Срокът за представяне на решенията е 31.01.2019 г.

ЕДНА ЗАДАЧА НА ЛЕВ ТОЛСТОЙ

Тази интересна задача, измислена от руския писател Лев Толстой, била използвана при социологическо проучване. Оказало се, че верен отговор са посочили 30% от запитаните ученици, само 20% от студентите и едва 10% от банковите служители.

Задача. Търговец продавал една шапка за 10 рубли. Дошъл купувач, премерил шапката, харесал я и пожелал да я купи.



Купувачът дал банкнота от 25 рубли, а търговецът изпратил своя помощник при бакалина да я развали на дребно. Момчето се върнало и донесло три банкноти, 10+10+5 рубли. Търговецът дал на купувача шапката и 15 рубли.

След известно време пристигнал бакалинът и казал, че банкнотата е фалшива, като настоявал да си получи парите обратно. Какво да прави търговецът, върнал 25 рубли на бакалина.

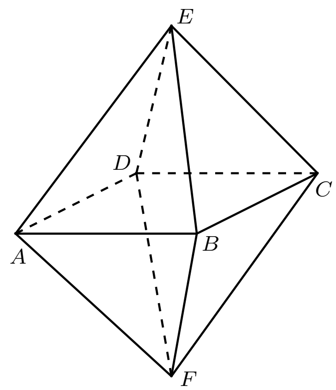
Колко е загубил търговецът?

ГЛАВОБЛЪСКАНИЦА С ОКТАЕДЪР

Кристина Стоянова (6. клас, ПЧМГ)

На Холандската младежка олимпиада по математика през 2017 г. е предложена следната задача.

Задача. *На стените на октаедър са записани естествените числа от 1 до 8. Във всеки връх на октаедъра е записан сборът от числата на четирите стени, на които той е връх. Оказало се, че в четири върха са записани равни числа, а в петия връх е записано числото 16. Кое число е записано в шестия връх на октаедъра?*



Решение. Сборът на всички числа по стените на октаедъра е

$$1 + 2 + \cdots + 7 + 8 = 36.$$

Забелязваме, че сборът от числото a във връх A и числото c във връх C е равен на сбора на числата на осемте стени на октаедъра, който е 36. По същия начин, сборът от числата b и d във върховете B и D е 36, както и сборът от числата e и f във върховете E и F е 36:

$$a + c = b + d = e + f = 36.$$

Така по естествен начин шестте числа a, b, c, d, e и f се разделят в три групи $\{a;\ c\}$, $\{b;\ d\}$ и $\{e;\ f\}$ със сбор 36 във всяка група.

По условие четири от числата в трите групи $\{a;\ c\}$, $\{b;\ d\}$ и $\{e;\ f\}$ са равни. От принципа на Дирихле следва, че поне две от тях попадат в една група. Това означава, че сборът на две равни числа е 36, т.е. тези числа са равни на 18.

Получихме, че в четири върха е записано числото 18. Тъй като петото число е 16, то шестото е $36 - 16 = 20$.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

Емил Карлов

ПЪРВИ МОДУЛ

1. Днес е 01.04.2018. Ако поставите между всеки две от цифрите знак $+$, ще получите:

А) 2.2.2.2 **Б)** 14218 **В)** 10 **Г)** 2018

2. Иван написал днешната дата: 01042018 последователно 40 пъти без знаци между цифрите. Колко пъти Иван е написал цифрата 0?

А) 40 **Б)** 80 **В)** 120 **Г)** 6

3. На блюдото A на везна сме поставили две железни кълба – едното с радиус 3 см, второто с радиус 5 см, а на блюдото B едно желязно кълбо с радиус 8 см. Кое от двете блюда е по-тежко?

А) A **Б)** B

В) равни са **Г)** не може да се определи.

4. Сред 20 финалисти преди отбора на „Левски“ са се класирали 5 отбора по-малко, отколкото след отбора на „Левски“. На кое място е класиран отборът на „Левски“?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 20

5. Автомобил се движи с 60 км в час. Лека кола изминава 500 метра повече в минута от автомобила. Колко километра в час е скоростта на леката кола?

А) 75 **Б)** 80 **В)** 90 **Г)** 100

6. Дадени са 2018 естествени числа със сума 2019. Намерете произведението им.

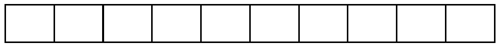
А) 1 **Б)** 2

В) 2018 **Г)** не може да се определи.

7. 2018 дървета са посадени край магистрала на равни разстояния едно от друго. Ако разстоянието от третото до 33-тото дърво е 300 метра, намерете колко метра е разстоянието от първото до последното от дърветата.

А) 20 000 **Б)** 20 180 **В)** 20 170 **Г)** 20 190

8. На една маса могат да седнат 4 джуджета (на всяка страна на масата по едно джудже) На сватбата на Снежанка са подредени 10 маси една до друга и около тях могат да седнат 22 джуджета. Колко маси трябва да добавим в редицата, за да могат да седнат 34 джуджета?



А) 7 **Б)** 8 **В)** 10 **Г)** 6

9. В кутия има *три* цвята моливи – сини, червени и зелени. Общо са *двадесет* молива. Сините моливи са *шест* пъти повече от червените моливи, а зелените моливи са по-малък брой от сините моливи. Колко на брой са червените моливи?

А) 1 **Б)** 2

В) 3 **Г)** не може да се определи

10. На окръжност са отбелязани 4 бели точки и една червена точка. Кои многоъгълници са повече – многоъгълниците с бели върхове или многоъгълниците с един червен връх?

А) с бели върхове **Б)** с един червен връх

В) равен брой са **Г)** не може да се определи

11. Ако Иван отиде на работа, за един работен ден получава 10 лв. Ако Иван отсъства от работа, глобяват го по 15 лв. за неприсъствен ден. В един период от 30 дни Иван получил нула лева. Колко дни от този период е бил на работа?

А) 10 **Б)** 15 **В)** 18 **Г)** 20

12. Квадрат със страна 5 см трябва да се нареже на възможно най-много различни правоъгълници, чиито страни са точен брой сантиметри. Колко на брой са правоъгълниците?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7

13. Храбрия шивач убива 7 мухи с един удар на дясната ръка, а с един удар на лявата ръка убива 5 мухи. С колко удара Храбрия шивач убива 51 мухи?

А) 10 **Б)** 12 **В)** 6 **Г)** 9

14. Мария е била на 16 години преди 19 месеца, а Иван ще стане на 19 години след 16 месеца. Кой от двамата е по-голям в момента?

А) Мария **Б)** Иван

В) на една възраст са **Г)** не може да се определи

15. Сборът на 8 нечетни числа е равен на 100. Намерете най-малката възможна разлика между най-малкото и най-голямото от тези числа.

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 6

16. Напишете в редица общо 9 двойки и единици така, че сумата на всеки четири последователни числа да е нечетно число, а сумата на всеки 7 последователни числа в тази редица да е четно число.

17. Едно число *е интересно*, ако сумата от цифрите му се дели на 7. Напишете две последователни интересни числа.

18. В 10 чинии са поставени ябълки така, че сумата на ябълките във всеки две чинии да е равна или на 5, или на 8, или на 11 (и трите случая се срещат). Общо колко са ябълките?

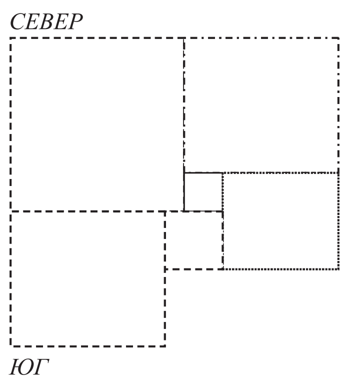
19. Вместо звездички поставете знака *плюс* или знака *минус*, за да се получи вярно равенство: $64 * 32 * 16 * 8 * 4 * 2 * 1 = 27$.

20. Хлебарката Валентин счита, че бяга 100 метра за *една* минута, но защото не е ходила на училище мисли, че *един* метър е равен на 60 см, и, че *една* минута е от 100 секунди. Намерете в действителност колко метра в минута пробягва хлебарката Валентин.

ВТОРИ МОДУЛ

1. а) Търговец оставил в наследство на синовете си *три еднакво* големи къщи, които купил през годините в различни градове на страната. Първите трима сина взели по *една* къща, а на четвъртия и на петия син всеки от първите трима изплатил по 6000 евро. Намерете цената на всяка от къщите в евро.

б) На чертежа виждате план на една от къщите на търговеца. Две големи стаи са със северно изложение и три стаи са с южно изложение. Всяка от *шестте* стаи е квадратна, като страната на най-малката стая (килера) е 1 метър. Намерете страната на най-голямата от южните стаи.



2. а) Иван живее в апартамент номер 83 на петия етаж, а Мария живее в апартамент номер 169 на третия етаж в същия блок. На всеки етаж има по 4 апартамента и всички входове имат равен брой етажи. Намерете броя на етажите на блока?

б) Иван тръгнал на гости у приятел, но забравил в кой апартамент и на кой етаж трябва да отиде. Знаел, че номерът на апартамента е двуцифрено число с две еднакви цифри. Тръгнал пеш по етажите, като на всеки етаж имало по 4 апартамента и звънял на всеки апартамент, чийто номер се изписва с две еднакви цифри (например 11, 22, 33, ...). Тъй като блокът бил много висок, Иван на всеки четири етажа почивал. На кой етаж Иван за първи път почивал и звънял едновременно?

ОТГОВОРИ. ПЪРВИ МОДУЛ

1. А; **2.** В; **3.** Б; **4.** В; **5.** В; **6.** Б; **7.** В;
8. Г; **9.** Б; **10.** Б; **11.** В; **12.** Г; **13.** Г; **14.** Б; **15.** А;
16. 2 2 1 2 2 2 1 2 2; **17.** 6 999, 7 000;
18. 40 ябълки са разпределени в 10 чинии така:

1, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4;

19. $64 - 32 - 16 + 8 + 4 - 2 + 1 = 27$; **20.** 36 м за минута.

ВТОРИ МОДУЛ

1. а) 15 000 евро. б) 4 метра.

2. а) Блокът е 8-етажен.

б) На 20-ти етаж Иван звъни на апартамент 77 и почива.

ЗАДАЧКА – ЗАКАЧКА

Едно парче ябълков пай било откраднато и по този повод разпитали пет деца. Всяко от тях знаело кой е крадецът, но някои излъгали. Когато едно дете излъжело, следващото се чувствало толкова виновно, че казвало истината.

Децата поред казали:

Асен: *И аз, и Васко не сме виновни.*

Боби: *Крадецът е Васко или Дидо.*

Васко: *И Ева, и аз не сме виновни.*

Дидо: *Крадецът е Асен.*

Ева: *Поне двама от Асен, Боби, Васко и Дидо излъгаха.*

Кой е откраднал ябълковия пай?

за по-малките задачи

4. клас

76. От два еднакви квадрата сглобих правоъгълник с обиколка 180 см. Да се намери обиколката на един от квадратите.

77. Да се намери неизвестното число x от равенството

$$x\,.\,9+87=654-3\,.\,21.$$

78. Колко са двуцифрените числа, в които цифрата на единиците е по-малка от цифрата на десетиците?

79. В един клас всяко момиче има 3 молива, 2 химикала и 1 гума, а всяко момче има 1 молив, 2 химикала и 3 гуми. Ако всички гуми в класа са 21 и всички химикали в класа са 18, колко са всички моливи в този клас?

5. клас

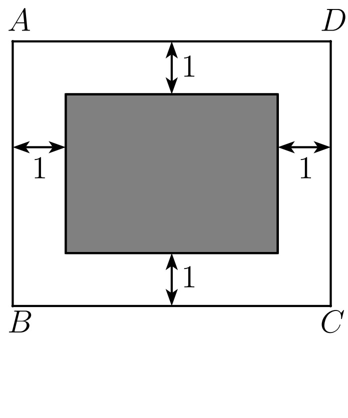
80. Баба Цоцолана събрала кошница с ябълки. Тя може да ги раздаде поравно на 10 деца, както и на 12 деца, а ако изяде 4 ябълки, може да раздаде останалите ябълки на 11 деца поравно. Най-малко колко ябълки има в кошницата?

81. Баба Цоцолана набрала 150 ябълки и 130 круши. Тя раздала плодовете поравно на децата в селото. Останали 6 ябълки и 10 круши. Най-много колко деца има в селото?

82. Подредете по големина дробите

$$\frac{2525}{2424},\quad \frac{3737}{3636},\quad \frac{25+37}{24+36},\quad \frac{25\,.\,37}{24\,.\,36}.$$

83. Правоъгълникът $ABCD$ на чертежа има страни 11 cm и 18 cm. Каква част от лицето на правоъгълника $ABCD$ е лицето на оцветения правоъгълник? (Запишете отговора като несъкратима дроб.)

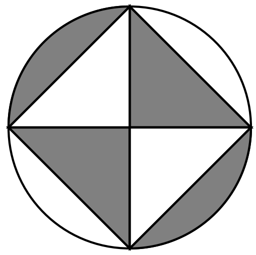


6. клас

84. В права n-ъгълна призма 75% от стените са околни. Колко ръба има тази призма?

85. Да се намери неизвестното число x от равенството

$$16^8 \,.\, 4^x = 8^{16}.$$



86. Колко процента от лицето на кръга е оцветено в сиво на чертежа?

87. Дадени са числата $A = 12^{18}$ и $B = 18^{12}$. Да се намери броят на делителите на A и броят на делителите на B. Колко са общите делители на A и B?

7. клас

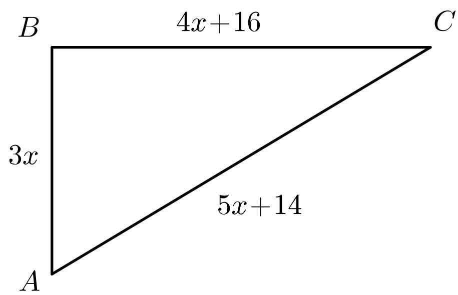
88. Да се намери стойността на произведението xy, ако

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0.$$

89. Височините в остроъгълния триъгълник ABC се пресичат в точка H. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако

$$\sphericalangle AHB : \sphericalangle BHC : \sphericalangle CHA = 4 : 5 : 6.$$

90. Даден е правоъгълен триъгълник ABC със страни $AB = 3x$, $BC = 4x + 16$ и $AC = 5x + 14$.



Да се намери обиколката на триъгълника.

за по-малките решения

на задачите от бр. 5/2018

61. Колко числа между 1 и 1000 не съдържат в записа си цифрата 1?

Решение. Цифрата 1 не участва в записа на 8 едноцифрени числа, $8.9 = 72$ двуцифрени числа, $8.9.9 = 648$ трицифрени числа. Общо получаваме $8 + 72 + 648 = 728$ числа.

62. Ани записала сто числа в редица. Първите две числа в редицата са 1 и 3, а всяко следващо е равно на сбора на предишните две. Началото на редицата е 1, 3, 4, 7, 11, … Коя е последната цифра на стотното число в редицата на Ани?

Решение. Последните цифри на първите 14 числа в редицата са

$$1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, \ldots$$

Забелязваме, че тринадесетата и четиринадесетата последни цифри са като първите две, т.е. последните цифри се повтарят през 12.

Тъй като $100 : 12 = 8$ (ост. 4), последната цифра на стотното число съвпада с последната цифра на четвъртото число и е 7.

63. Ина записала числото 1 веднъж, числото 2 два пъти, числото 3 три пъти и т.н. и получила дълга редица: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, … Стотното число в редицата Ина разделила на 5. Какъв остатък е получила?

Решение. Тъй като $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 + 13 = (13.14) : 2 = 91$, преди да запише стотното число, Ина е записала 13 пъти числото 13 и $100 - 91 = 9$ пъти числото 14. Стотното число е 14 и дава остатък 4 при деление на 5.

64. Бени и Рени имат по 64 бонбона. Всеки ден един от двамата дава половината от своите бонбони на другия. След шест дни Бени имал 61 бонбони, а Рени 67. През колко от шестте дни Рени е давала бонбони на Бени?

Решение. Решаваме задачата отзад напред, като на всяка стъпка удвояваме бонбоните на един от двамата (така, че да не стават повече от 128). Получаваме:

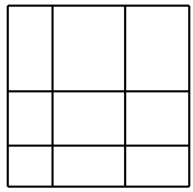
	Ден 6	Ден 5	Ден 4	Ден 3	Ден 2	Ден 1	Отначало
Рени	67	6	12	24	48	96	64
Бени	61	122	116	104	80	32	64

Рени е давала бонбони в 4 от шестте дни.

65. Входният билет в увеселителен парк струва обикновено 18 лв., но ако е дъждовен ден, се продава на половината от тази цена. Миналата седмица продадоха 800 билета за общо 8199 лв. Колко билети са продадени на половин цена?

Решение. Ако 800 билета се продадат на половин цена, ще се получат $800.9 = 7200$ лв. Останалите $8199 - 7200 = 999$ лв. са получени от това, че $999 : (18 - 9) = 111$ билета са продадени на цена 18 лв. На половин цена са продадени $800 - 111 = 689$ билета.

66. Квадрат със страна 2010 е разделен на девет правоъгълника, както е показано на чертежа. Обиколките на деветте правоъгълника са девет последователни естествени числа. Намерете най-голямата от тези обиколки.



Решение. Сборът на обиколките на деветте правоъгълника е равен на 3 пъти обиколката на квадрата, т.е. на $3.4.2010 = 24120$.

Тъй като тези обиколки са последователни естествени числа, да ги означим с $x - 4$, $x - 3$, $x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ и $x + 4$. Сборът им е

$$9x = 24120 \Longrightarrow x = 2680.$$

Най-голямата от деветте обиколки е $2680 + 4 = 2684$.

67. В голяма торба има повече от 100, но по-малко от 150 ябълки. Ако ябълките се разделят (честно) на 7 деца, остават две ябълки. Ако ябълките се разделят на 6 деца, остават три ябълки. Колко ябълки ще останат, ако разделим ябълките на 5 деца?

Решение. Числата между 100 и 150, които дават остатък 2 при деление на 7, са $107, 114, 121, 128, 135, 142, 149$. Сред тях само числото 135 дава остатък 3 при деление на 6. Следователно ябълките са 135 и ако ги разделим на 5 деца, няма да останат никакви ябълки.

68. Ако добавите 36 към 37, ще получите 73, което се записва със същите цифри като 37, но в обратен ред. Колко двуцифрени числа имат това свойство: сборът им с 36 е число, записано със същите цифри, но в обратен ред?

Решение. Търсим числа от вида $\overline{ab}$, за които

$$\overline{ab} + 36 = \overline{ba}.$$

Тъй като $b > a$, то $b > 4$. При $b = 5$ намираме $a = 1$ и получаваме числото 15; при $b = 6$ намираме $a = 2$ и получаваме числото 26; при

$b = 7$ намираме $a = 3$ и получаваме даденото число 37; при $b = 8$ намираме $a = 4$ и получаваме числото 48; при $b = 9$ намираме $a = 5$ и получаваме числото 59. Има 5 двуцифрени числа с даденото свойство.

69. 5% от кое число е с 6% повече от 7?

Решение. От равенството $5\%x = 106\%.7$ намираме $x = 148,4$.

70. Петър иска да запише седем числа в редица така, че сборът на всеки четири поредни числа да е 1. Най-много колко от седемте числа може да са по-големи от 13?

Решение. Щом сборът на всеки четири поредни числа е 1, поне едно от тях е по-малко от 13. Пример със само едно по-малко от 13 число (и шест числа, по-големи от 13), е:

$$14,\ 14,\ 14,\ -41,\ 14,\ 14,\ 14.$$

71. Сто ученици участвали в математическа олимпиада. Първа задача решили 90 участници, втора задача решили 80 участници и трета задача – 75 участници. Най-малко колко участници са решили и трите задачи?

Решение. Получени са $80 + 90 + 75 = 245$ верни решения и поне $245 - 2.100 = 45$ ученици са решили и трите задачи.

72. Фермер има сено за храна на крава, кон и коза. То е достатъчно за храна на кравата и коня за 12 месеца, или за кравата и козата за 15 месеца, или за коня и козата за 20 месеца. За колко месеца сеното ще стигне за храна и на трите животни?

Решение. Кравата и конят за един месец изяждат $\dfrac{1}{12}$ от сеното; кравата и козата за един месец изяждат $\dfrac{1}{15}$ от сеното; конят и козата за един месец изяждат $\dfrac{1}{20}$ от сеното. Трите животни за един месец изяждат

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right) : 2 = \frac{1}{10}$$

от сеното. Следователно то ще им стигне за 10 дни.

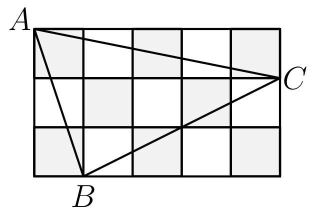
73. Таня изиграла десет баскетболни мача през този сезон и средно отбелязала по 18 точки на мач. В шестия, седмия, осмия и деветия мач тя отбелязала съответно 23, 14, 11 и 20 точки. Средният ѝ резултат след деветия мач бил с 4 точки по-висок от средния ѝ резултат след петия мач. Колко точки отбелязала Таня в десетия си мач?

Решение. Нека средният резултат на Таня след петия мач е x. За първите 5 мача тя е отбелязала $5x$ точки, а за първите 9 мача е отбелязала $5x+23+14+11+20=5x+68$ точки. Тъй като средният резултат след деветия мач е $x+4$, имаме

$$\frac{5x+68}{9}=x+4 \iff 5x+68=9x+36 \iff x=8.$$

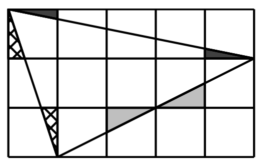
За първите 9 мача Таня е отбелязала $5.8+68=108$ точки, а в десетте мача е отбелязала $10.18=180$ точки, то в десетия мач тя е отбелязала $180-108=72$ точки.

74. На чертежа правоъгълникът 3×5 е шахматно оцветен. Намерете каква част от лицето на триъгълника ABC е оцветена в черно.



Решение. Имаме $S_{ABC}=3.5-\dfrac{1.3}{2}-\dfrac{1.5}{2}-\dfrac{2.4}{2}=7.$

Като използваме еднаквостта (по втори признак) на трите двойки еднакво оцветени триъгълници на чертежа, намираме, че лицето на оцветената в черно част от триъгълника ABC е равно на 3,5. Следователно половината от лицето на триъгълника ABC е оцветена в черно.



75. Всяка сутрин в 8:00 часа г-н Янев тръгва с колата си за работа. Ако той (постоянно) шофира с 40 км/ч, закъснява с 3 минути за работа. Ако той кара с 60 км/ч, стига с 3 минути по-рано на работното си място. С каква скорост трябва да кара той, за да пристигне точно навреме?

Решение. Нека времето, нужно на господин Янев, за да пристигне навреме, е x h. Той изминава пътя до работата си за $x+\dfrac{3}{60}$ часа със скорост 40 км/ч или за $x-\dfrac{3}{60}$ часа със скорост 60 км/ч. Следователно $40\left(x+\dfrac{3}{60}\right)=60\left(x-\dfrac{3}{60}\right)$. Оттук $x=\dfrac{1}{4}$. Пътят до работата е $40\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}\right)=12$ км и се изминава за $\dfrac{1}{4}$ часа със скорост $12:\dfrac{1}{4}=48$ км/ч.

ТЕМАТИЧНО СЪДЪРЖАНИЕ
НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“ — 2018 г.

НАУЧНОПОПУЛЯРНИ СТАТИИ

ИЗВЪНКЛАСНА РАБОТА И ИНФОРМАЦИЯ

УЧЕНИЧЕСКО ТВОРЧЕСТВО

КОНКУРСИ НА СПИСАНИЕ „МАТЕМАТИКА“

ЗА ПО-МАЛКИТЕ

ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА КОНКУРСНИ ИЗПИТИ

ЗА КАНДИДАТ-СТУДЕНТА

ЗА ЗРЕЛОСТНИЦИТЕ

И Н Ф О Р М А Т И К А В НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Бакалавърски програми

„Информатика“

Специализации: *Компютърно програмиране, Приложна информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; ползване на различни платформи и технологии за разработка на софтуер; съставяне на информационни модели, разработване и администриране на информационни системи; проектиране и разработване на приложения.

„Мрежови технологии (на английски език)“

Специализации: *Мрежово администриране, Мрежово програмиране*

Компетенции на завършилите: проектиране, изграждане на компютърни мрежи; управление, инсталиране, тестване и администриране на локални мрежи; бази от данни и информационни системи; проектиране и разработване на софтуерни приложения; програмиране на приложения в Интернет.

„Мултимедия и компютърна графика“

Специализации: *Компютърно художествено проектиране, Мултимедия, компютърна графика и анимация*

Компетенции на завършилите: алгоритми и програмиране, изграждане и използване на локални мрежи и Интернет; създаване на мултимедийни продукти в различни приложни области; проекти с компютърна графика, анимация и ефекти. Студентски проекти: www.nbu.bg/index.php?l=2507

„Информационни технологии“

Специализации: *Технологии за компютърни игри, Бизнес информатика*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; езици за програмиране; разработване на бизнес приложения, мултимедийни продукти и компютърни игри (уеб, десктоп, за мобилни устройства); работа в екип.

Магистърски програми

„Софтуерни технологии в Интернет“

Специализации: *Моделиране и анализ, Проектиране и разработване*

Компетенции на завършилите: теоретични основи на информатиката; Интернет базирани информационни системи; разпределени приложения; изкуствен интелект; администриране на мрежи; управление на софтуерни проекти.

„Мултимедия, компютърна графика и анимация“

Компетенции на завършилите: моделиране, визуализация и анимация на сложни обекти и интегриране на мултимедийни приложения; компютърна графика и анимация, мултимедия и графичен дизайн.

„Управление на проекти по ИТ“

Компетенции на завършилите: управление на софтуерни проекти, човешки ресурси, ефективен екип, маркетинг, финансови ресурси, риск, технологии за софтуерно производство; качество на софтуера; правна регулация; разработване на проекти; проектиране на ИС; data mining; data warehouse.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО
МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Факултетът по математика и информатика (ФМИ) е един от най-големите и с най-висок авторитет факултети в Софийския университет от неговото основаване и до сега. Тук се обучават повече от 2500 студенти и докторанти по 8 бакалавърски специалности и над 30 магистърски програми. Учебните планове на всички специалности са гъвкави – освен задължителните дисциплини, през целия период на обучението има голям брой избираеми дисциплини. Това дава възможност на студентите да допълват образованието си в широк спектър от области на математиката и информатиката. Образованието във ФМИ осигурява на дипломираните студенти не само отлични знания и умения, но и висока конкурентоспособност на пазара на труда и научната сфера, както в България, така и в чужбина.

През учебната 2018/2019 година за образователно-квалификационната степен БАКАЛАВЪР ще има прием по следните специалности: **Математика, Приложна математика, Статистика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки, Информационни системи, Софтуерно инженерство.**

Тук ви представяме две от тези специалности, а за останалите очаквайте информация в следващите броеве на списанието.

Бакалавърска програма „Математика“

Подготвя специалисти с фундаментални знания в класическите и съвременни математически направления. Завършилите успешно специалността могат да се реа-лизират като преподаватели и научни работници във висшите училища и научни институти. Същевременно тяхната солидна математическа подготовка им дава възможност за специализация в икономиката, банковото и застрахователно дело, физиката, биологията, философията и др.

Бакалавърска програма „Информатика“

Подготвя специалисти в областта на компютърните науки, информационните системи и софтуерното инженерство, които имат солидна математическа подготовка. Завършилите специалността могат да се реализират като аналитични и приложни специалисти по математическо осигуряване на компютърни системи в софтуерни, инженерни, телекомуникационни, финансови и застрахователни институти и ком-пании; преподаватели във висши училища; приложни специалисти в областта на точните науки; научни работници и др.

За повече информация за специалностите във ФМИ: `www.fmi.uni-sofia.bg`

ЮГОЗАПАДЕН УНИВЕРСИТЕТ „НЕОФИТ РИЛСКИ“

телефон: 073/588 531 email: pmf@swu.bg факс: 073/ 88 55 16

БАКАЛАВЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: теоретична подготовка в областта на информатиката и математиката и практико-приложни знания — няколко езика за програмиране, умения за работа с различни платформи и технологии, разработване и администриране на информационни системи; професионални качества, даващи възможност за адаптация към променящите се изисквания на информационното общество.

Специалност „Информационни системи и технологии“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите специалността получават: добра теоретична и практико-приложна подготовка в областта на информационните технологии и могат успешно да се реализират като: специалисти по информационни технологии, проектанти на бази от данни, графични дизайнери, специалисти по софтуерни технологии, разработчици на уеб съдържание и мултимедия и др.

Студентите могат да придобият допълнителна професионална квалификация *„Учител по информатика“* и *„Учител по информационни технологии 5–8 клас“* паралелно с обучението по основната специалност.

Специалност „Математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: знания за основните концепции, принципи, теории и резултати в отделните области на математиката и в „елементарната“ математика; знания за специфични програмни езици или софтуер, английски език и информационни технологии. Умения: да показват математическо разсъждаване и количествено мислене; да извличат качествена информацияот количествени данни; да анализират данни от експериментални изследвания; да проектират експериментални изследвания; да работят с математика в интердисциплинарен контекст.

Специалност „Математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават фундаментална подготовка по математика и информатика. Запознават се с най-новите технологии за мултимедийно обучение, с развитието на съвременните образователни технологии, тенденции и стратегии за обучение. Завършилият специалист получава умения: да прилага на практика получените знания в своята професия; да ползва и прилага компетентно най-новите мултимедийни технологии; да владее и прилага съвременните образователни технологии.

МАГИСТЪРСКИ ПРОГРАМИ

Специалност „Информатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на информатиката, отговарящи на европейските стандарти; умения да използват съвременни средства и методи за проектиране и изграждане на софтуерни приложения; умения да моделират реални процеси и създават компютърни автоматизирани системи, да използват математически модели и софтуерни пакети при решаване на реални стопански, инженерни и управленски проблеми в непрекъснати и дискретни макросистеми.

Специалност „Биоинформатика“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания и практически умения в областта на биоинформатиката; умения да развиват и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулация на биологични системи и процеси; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на биоинформатиката.

Специалност „Бизнесинформатика и иконометрия“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени познания за основните икономически модели и системи; възможност да внедряват информационни продукти и системи в различни области на бизнеса, да оценяват системи и да разработват модели за оценка на финансовия риск на финансовите пазари, застраховането, осигуряването и др.; интердисциплинарно обучение и възможност за изследвания в различни области на бизнесинформатиката и иконометрията.

Специалност „Информационни технологии в екологията“

Професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки

Завършилите степента получават: задълбочени знания в областта на прилагане на ИТ в екологията; компетентности да развивиат и прилагат теоретични методи, математическо моделиране и изчислителна техника за симулиране на системи и процеси в областта на екологията; интердисциплинарна подготовка и възможност за изследвания в областта на екологичното моделиране и прогнозирането на природните компоненти; умения за прилагане на ИТ в опазването, прогностиката и управлението на природните ресурси.

Специалност „Икономическа математика“

Професионално направление 4.5. Математика

Завършилите специалността получават: умения за абстракция, логическо развитие на формални математически теории и установяване на връзки между тях; способност за математическо моделиране на явления от реалния свят и описване чрез математически апарат на изследваните процеси и явления, възможност да се занимават с нови задачи от различни области на познанието; способност да формулират сложни задачи за оптимизация, да вземат решения и да интерпретират получените решения в термините на контекста на решавания проблем.

Специалност „Технологии на обучението по математика и информатика“

Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...

Завършилите специалността получават задълбочени знания и компетенции в областта насъвременните методи и технологии за педагогически изследвания, електронното обучение, използването на специализиран софтуер за обучение по математика и информатика; овладяват процеса на учене и преподаване на математиката в различните степени на обучение.

Природо-математическият факултет е създаден през 1989 г. Петте катедри във факултета обучават студенти по тринадесет акредитирани бакалавърски специалности, по седемнадесет акредитирани магистърски специалности и по дванадесет акредитирани докторски програми. Всяка от тях дава възможност за продължаване на образованието в по-високи степени в страната и чужбина.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

АДРЕС НА РЕДАКЦИЯТА:
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев“
бл. 8, ст. 230, тел. (02) 873-84-04
Ръкописи не се връщат.

Формат 70×100/16. Печатни коли 5.
Дадена за печат на 22.11.2018 г.
Печат „Фастумпринт“ ЕООД
Цена на отделен брой 5,00 лв.